

2022년 10월 29일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC 의 내접원이 점 D, E 에서 각각 변 AB, BC 에 접한다. 삼각형 ABC 의 내심을 I 라 하면, 직선 AI 와 DE 의 교점이 변 AC 를 지름으로 하는 원 위에 있음을 보여라.

2. 양의 정수 $n (\geq 3)$ 에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 정수의 순서쌍 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 의 개수를 구하여라.

- $1 \leq i \leq n$ 을 만족하는 양의 정수 i 에 대하여 $1 \leq a_i \leq i$ 이다.
- $1 \leq i < j < k \leq n$ 을 만족하는 양의 정수 i, j, k 에 대하여 $a_i = a_j$ 이면 $a_j \geq a_k$ 이다.

3. 홀수인 소수 p 가 주어져있다. 양의 정수 n 에 대하여 n 의 약수이면서 p 의 배수가 아닌 수 중 가장 큰 것을 p 로 나눈 나머지를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어, $p = 5$ 이면 $f(6) = 1, f(35) = 2, f(75) = 3$ 이다. 정수 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $a_1 = 1$
- 모든 양의 정수 n 에 대하여 $a_{n+1} = a_n + (-1)^{f(n)+1}$ 이다.

이때 $m = a_k$ 인 양의 정수 k 가 무한히 많은 정수 m 을 모두 구하여라.

4. 다음 조건을 만족하는 함수 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 을 모두 구하여라. (단, $\mathbb{N}$ 은 양의 정수 전체의 집합)

(조건) 각 양의 정수 x, y 에 대하여 $\frac{f(x+y) - f(x)}{f(y)}$ 는 2022^{2022} 이하의 양의 정수이다.

2022년 10월 29일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 실수 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $a_1 = 2, a_2 = 11$
- 모든 양의 정수 n 에 대하여 $2a_{n+2} = 3a_n + \sqrt{5(a_n^2 + a_{n+1}^2)}$ 이다.

모든 양의 정수 n 에 대하여 a_n 은 유리수임을 보여라.

6. 삼각형 ABC 에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이다. 점 $D (\neq A, C)$ 는 변 AC 위의 점이고 원 O 는 점 E 에서 직선 BD 에 접하고 점 C 에서 직선 AC 에 접한다. 직선 AE 와 원 O 는 점 $F (\neq E)$ 에서 만나고, 직선 AC 와 삼각형 ABF 의 외접원은 점 $G (\neq A)$ 에서 만날 때, 네 점 D, E, F, G 가 한 원 위에 있음을 보여라.

7. 카드 n 장에 1부터 n 까지의 정수가 하나씩 적혀 있으며 각 카드에 적힌 수는 모두 다르다. n 개의 상자에 이 카드가 한 장씩 들어있는 상태에서 시작하여, 다음 시행을 반복하여 n 장의 카드를 모두 한 상자에 넣으려고 한다. 이것이 가능한 양의 정수 n 을 모두 구하여라.

(시행) 상자에 들어있는 카드 중 원하는 정수 k 가 적혀있는 카드를 선택하여, 상자에 들어있는 카드에 적힌 수의 합이 k 의 배수가 되는 다른 상자로 옮긴다. (단, 빈 상자로는 옮기지 않는다.)

8. 다음 등식을 만족하는 유리수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 를 모두 구하여라.

$$xy^2 = x^2 + 2x - 3$$