제 37 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

Korean Mathematical Olympiad

고등부

2023년 11월 4일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 양의 실수의 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의된다.

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 3, \qquad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n} \quad (n \geq 0)$$

모든 음이 아닌 정수 n에 대하여 a_n은 양의 정수임을 보여라.

2. 집합 $A_0, A_1, \ldots, A_{2023}$이 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $A_0 = \{3\}$
- $n = 1, 2, \ldots, 2023$에 대하여 $A_n = \{x+2 \,|\, x \in A_{n-1}\} \cup \left\{ \frac{x(x+1)}{2} \,\middle|\, x \in A_{n-1} \right\}$이다.

집합 A_{2023}의 원소의 개수를 구하여라.

3. 주어진 양의 정수 $n\,(\geq 2)$에 대하여, 다음 두 조건을 모두 만족하는 n차 정수계수 다항식 $P(x)$가 존재하는 가장 큰 양의 정수 A를 구하여라.

- $P(1), P(2), \ldots, P(A)$가 모두 A의 배수이다.
- $P(0) = 0$이고 $P(x)$의 1차 항의 계수가 1이다. 즉, $P(x)$는 다음과 같은 꼴이다.

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + x \quad (c_n \neq 0)$$

4. 오각형 $ABCDE$가 원 Ω에 내접한다. 점 F는 두 선분 AD와 CE의 교점이고, 점 $P\,(\neq E, F)$는 선분 EF 위의 점이다. 삼각형 AFP의 외접원이 원 Ω, 선분 AC와 각각 점 $Q\,(\neq A)$, $R\,(\neq A)$에서 만난다. 두 선분 AD와 BQ가 점 S에서 만나고, 삼각형 DES의 외접원이 직선 BQ, BD와 각각 점 $T\,(\neq S)$, $U\,(\neq D)$에서 만난다. 네 점 F, P, T, S가 한 원 위에 있으면 네 점 P, T, R, U도 한 원 위에 있음을 보여라.

제 37 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2023년 11월 4일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 양의 정수 n에 대하여 $f(n)$을 n 이하의 양의 정수 중 n과 서로소인 것의 개수, $g(n)$을 n의 양의 약수들의 합이라 하자. 예를 들어, $n = 10$이면 n과 서로소인 10 이하의 양의 정수는 $1, 3, 7, 9$이므로 $f(10) = 4$이고 10의 양의 약수는 $1, 2, 5, 10$이므로 $g(n) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$이다. 다음 등식을 만족하는 양의 정수 n을 모두 구하여라.

$$f(n) + g(n) - 2n = 8$$

6. 예각삼각형 ABC $(\overline{AB} < \overline{AC})$의 외접원을 Ω, 외심을 O라 하자. 직선 AO가 변 BC와 만나는 점을 D, 원 Ω와 다시 만나는 점을 $E\,(\neq A)$라 하자. 점 D를 지나고 AB에 수직인 직선이 직선 AC와 만나는 점을 P, 점 D를 지나고 AC에 수직인 직선이 직선 AB와 만나는 점을 Q라 하자. 점 A와 E에서 원 Ω의 접선이 직선 BC와 만나는 점을 각각 X, Y라 하자. 네 점 X, Y, P, Q가 한 원 위에 있음을 보여라.

7. 양의 실수의 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 모든 양의 정수 n에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족한다.

- $a_{n+1}b_{n+1} = a_n^2 + b_n^2$
- $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n b_n$
- $a_n \geq b_n$

부등식 $\dfrac{a_n}{b_n} > 2023^{2023}$ 을 만족하는 양의 정수 n이 존재함을 보여라.

8. 양의 정수 n에 대하여, n이 서로 다른 두 소수의 곱이고 n을 3으로 나눈 나머지가 2이면, n을 "특별한 수"라고 하자. 예를 들어, 50 이하의 양의 정수 중에 특별한 수는 14, 26, 35, 38뿐이다. 특별한 수로 구성된 임의의 유한집합 S에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 서로소인 두 집합 A, B가 존재함을 보여라.

- $A \cup B = S$
- $|n(A) - n(B)| \leq 1$
- 임의의 소수 p에 대하여, A의 원소 중 p의 배수의 개수와 B의 원소 중 p의 배수의 개수의 차이는 1 이하이다.