

2023년 11월 4일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 다음 등식을 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 를 모두 구하여라.

$$y^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

2. 원에 내접하는 사각형 $ABCD$ ($\overline{AD} < \overline{BC}$)의 변 AB 위에 점 $H (\neq A, B)$ 가 있다. 삼각형 BCH 의 외접원이 선분 BD 와 만나는 점을 $E (\neq B)$, 직선 HE 와 직선 AD 의 교점을 F 라 하자. 점 C 를 지나고 점 E 에서 직선 BD 에 접하는 원이 선분 EF 와 점 $G (\neq E, F)$ 에서 만날 때, $\angle DFG = \angle FCG$ 임을 보여라.

3. 양의 정수 $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ 은 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $a_1 = 5, a_2 = 25$
- 양의 정수 $n = 1, 2, \dots, 2021$ 에 대하여 $a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 6$ 이다.

이때 $a_{2023} = x^2 + y^2$ 을 만족하는 정수 x, y 가 존재함을 보여라.

4. 테니스 대회에 2023명의 선수가 참가했고, 대회에 참가한 임의의 두 선수는 정확히 한 번의 경기를 치렀다. 어떤 경기에서도 무승부는 발생하지 않았고, 다른 모든 선수를 이긴 선수는 나오지 않았다. 어떤 선수 A 가 다음 조건을 만족하면 A 를 “실력자”라고 하자.

(조건) A 를 이긴 각각의 선수 B 에 대하여, B 를 이기고 A 에게 진 선수 C 가 존재한다.

이 대회에서 실력자는 정확히 $N (\geq 0)$ 명 나왔다고 한다. 가능한 N 의 값 중 가장 작은 것을 구하여라.

2023년 11월 4일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 양의 정수 $n (\geq 5)$ 에 대하여 n 개의 흰 돌과 n 개의 검은 돌, 총 $2n$ 개의 돌이 일렬로 나열되어 있는데, 아래 그림과 같이 왼쪽에서 처음 n 개는 흰돌, 그 다음 n 개는 검은돌이다.



다음 시행을 반복하여 돌의 위치를 바꿀 수 있다.

(시행) 양의 정수 $k (\leq 2n - 5)$ 를 선택하여 왼쪽에서 k -번째 돌과 $(k + 5)$ -번째 돌을 서로 바꾼다.

유한번의 시행으로 왼쪽에서 처음 n 개는 검은 돌, 그 다음 n 개는 흰 돌이 놓여있게 하려고 한다. 가능한 양의 정수 n 을 모두 구하여라.

6. 다음 조건을 만족하는 가장 큰 실수 A 를 구하여라.

(조건) 모든 양의 정수 x, y 에 대하여, $3x^2 + y^2 + 1 \geq A(x^2 + xy + x)$ 이다.

7. 다음 세 조건을 모두 만족하는 서로 다른 집합 A, B 가 존재하지 않는 가장 작은 양의 정수 N 을 구하여라. (단, N 은 2의 거듭제곱꼴이 아니다. 즉, $N \neq 1, 2^1, 2^2, \dots$ 이다.)

- $A, B \subseteq \{1, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2023}\} \cup \{N\}$
- A 와 B 는 공집합이 아니며, A 와 B 의 원소의 개수는 같다.
- A 의 모든 원소의 합과 B 의 모든 원소의 합이 같다.

8. 한 변의 길이가 1인 빨간색 정삼각형 T 가 평면 위에 그려져 있다. 양의 실수 c 에 대하여, 한 변의 길이가 c 인 정삼각형 모양의 파란색 색종이 세 장을 평면 위에 올려놓아 T 를 완전히 덮으려고 한다. 가능한 c 의 값 중 가장 작은 것을 구하여라. (아래 그림과 같이 파란색 색종이들은 서로 겹치거나 T 를 빠져나와도 상관없다. 단, 색종이를 접거나 찢는 것은 허용하지 않는다.)

