제 38 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2024년 11월 9일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 다음 등식을 만족하는 서로 다른 양의 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)를 모두 구하여라.

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

2. 원 O 위에 서로 다른 99개의 점 $P_1, P_2, \ldots, P_{99}$ 가 있다. 각각의 점 P_i에 대하여 P_i에서 시작하여 원을 따라 시계 방향으로 돌 때 P_i의 대척점까지 이동하는 동안 만나는 점 $P_j(\neq P_i)$의 개수를 n_i라 하자. 다음 부등식을 증명하여라.

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{99} \leq \frac{99 \cdot 98}{2} + 49 = 4900$$

(단, 원 O에서 점 P_i의 대척점이란, P_i를 포함하는 지름의 다른 끝점을 의미하고, 이 점이 P_j일 경우 만나는 점에 포함된다.)

3. 예각삼각형 ABC에서 $\angle A > \angle C$이다. 삼각형 ABC의 내접원이 변 BC, CA, AB와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하고, 선분 AF 위의 점 $P(\neq F)$를 잡자. 각 ABC의 이등분선과 삼각형 PEF의 외접원 O가 만나는 두 점 중 B에서 가까운 점부터 L, R이라 하자. 원 O가 직선 DF, DR과 각각 점 $Q(\neq F, L)$, $S(\neq R)$에서 만나고, 직선 PS와 선분 BC가 점 T에서 만날 때, 세 점 T, Q, L이 한 직선 위에 있음을 보여라.

4. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n의 최댓값을 구하여라.

(조건) $\dfrac{a^n + b^n}{n!}$이 100 이하의 정수가 되는 양의 정수 a, b가 존재한다.

(단, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$)

중등부

제 38 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2024년 11월 9일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 삼각형 ABC는 각 C가 직각인 직각삼각형이다. 점 X는 $\overline{CA} = \overline{AX}$를 만족하는 삼각형 ABC 내부의 점이다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 D, 직선 DX와 삼각형 ABX의 외접원의 교점을 $Y(\neq X)$라 할 때, $\overline{AX} = \overline{AY}$임을 보여라.

6. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n과 소수 p의 순서쌍 (n, p)를 모두 구하여라.

(조건) $2n - 1$은 $p - 1$의 약수이고 p는 $4n^2 + 7$의 약수이다.

7. 양의 정수 $k(\leq 50)$에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 $2k$개의 서로 다른 양의 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_{2k})$의 개수를 A_k라 하자.

- $a_1, a_2, \ldots, a_{2k} \leq 2 \times 50$
- $2k - 1$ 이하인 양의 홀수 i에 대하여 $a_i > a_{i+1}$ 이다.
- $2k - 2$ 이하인 양의 짝수 i에 대하여 $a_i < a_{i+1}$ 이다.

이때 $A_1 \leq A_2 \leq \cdots \leq A_{49}$임을 보여라.

8. 양의 정수에 대하여 정의되고 정수를 함숫값으로 갖는 함수 f가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $f(1) = 1$, $f(2) = -1$
- 각 양의 정수 n에 대하여, $f(n) + f(n + 1) + f(n + 2) = f\left(\left[\frac{n+2}{3}\right]\right)$

이때 $f(3) + f(6) + f(9) + \cdots + f(3(k - 1)) + f(3k) = 5$를 만족하는 1000 이하의 양의 정수 k의 개수를 구하여라.(단, $[a]$는 a를 넘지 않는 최대정수)