제 38 회 최종시험 첫째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2025년 3월 29일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

1. 수열 $a_1, a_2, a_3, \ldots$이 다음 조건을 만족한다.

(조건) 모든 양의 정수 n에 대하여, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(1-(-1)^{\left[\frac{n}{k}\right]}\right) a_k = 1$이다.

양의 정수 $m = 1001 \cdot 2^{2025}$에 대하여, a_m의 값을 구하여라.

2. 실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$이라 하자. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라. (단, $f^{100}(x)$는 $f(x)$를 100번 합성한 함수, 즉 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{f\text{가 } 100\text{개}})(x)$이다.)

(조건) 모든 $x, y \in \mathbb{R}$에 대하여,

$$f(x + f^{100}(y)) = x + y \quad \text{또는} \quad f(f^{100}(x) + y) = x + y$$

3. 예각삼각형 ABC가 $\overline{BC} > \overline{CA} > \overline{AB}$ 를 만족한다. 삼각형 ABC의 내심을 I, 내접원을 ω라 하고, ω가 변 BC, CA, AB에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. 직선 AD와 BE는 점 P에서 만난다. 점 D에서 삼각형 DIP의 외접원에 접하는 직선을 ℓ_1, 점 E에서 삼각형 EIP의 외접원에 접하는 직선을 ℓ_2, 점 F에서 삼각형 FIP의 외접원에 접하는 직선을 ℓ_3라 할 때, 세 직선 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3가 한 점에서 만남을 보여라.