제38회 최종시험 둘째날

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2025년 3월 30일 ; 제한시간 4시간 30분 ; 문항당 7점

4. 삼각형 ABC가 $\overline{CA} > \overline{AB}$ 를 만족한다. 삼각형 ABC의 내접원 ω가 변 BC, CA, AB에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하고, 변 BC의 중점을 M이라 하자. 중심이 M이고 점 D를 지나는 원이 직선 DE, DF와 만나는 점을 각각 $P(\neq D), Q(\neq D)$라 하자. 직선 AP와 BC의 교점을 N, 직선 BP와 CA의 교점을 L이라 할 때, 세 직선 EQ, FP, NL이 한 점에서 만남을 보여라.

5. 집합 $S = \{1, 2, \ldots, 1000\}$의 부분집합 T에 대하여, $\widetilde{T} = \{1001 - t \mid t \in T\}$라 정의하자. 다음 세 조건을 모두 만족하는 집합 $\mathcal{P}$의 원소의 개수의 최댓값을 구하여라. (단, T가 공집합이면, $\widetilde{T}$는 공집합으로 정의한다.)

- $\mathcal{P}$의 모든 원소는 S의 부분집합이다.
- $\mathcal{P}$의 임의의 두 원소 A, B에 대하여, $A \cap B$는 공집합이 아니다.
- $\mathcal{P}$의 임의의 원소 A에 대하여, $\widetilde{A} \in \mathcal{P}$이다.

6. 양의 정수 a, b가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- 양의 정수 m에 대하여, $m^2 \mid ab$ 이면 $m = 1$이다.
- 식 $ax^2 + by^2 = z^2 + w^2$을 만족하며 $z^2 + w^2 > 0$인 정수 x, y, z, w가 존재한다.

임의의 정수 n에 대하여, 식 $ax^2 + by^2 + n = z^2 + w^2$을 만족하는 정수 x, y, z, w가 존재함을 보여라.