유형 가

제39회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

2025년 5월 17일 ; 제한시간 2시간 30분

A. 답안지에 **수험번호**와 **성명**, **문제유형**을 반드시 기입하십시오.

B. 이 시험은 총 20개의 **단답형** 문항으로 이루어져 있습니다.

C. 각 문항의 답은 **세 개의 자리수**를 모두 기입하여야 합니다.
예를 들면, 답이 "7"일 경우 "007"이라고 기입하여야 합니다.

D. 구한 답이 1000 이상일 경우 **1000으로 나눈 나머지**를 기입하여야 합니다.

E. 문제 1 ~ 4번은 각 4점, 문제 17 ~ 20번은 각 6점, 나머지는 각 5점입니다.

1. [정답. 34]

삼각형 ABC의 변 BC위에 점 D, 변 AC위에 점 F가 있다. 직선 AD와 BF가 점 E에서 만난다. $\overline{BD} = 2\overline{DC}$이고, $\overline{AE} = \overline{ED}$일 때, $6\left(\frac{BE}{EF} + \frac{AF}{FC}\right)$의 값을 구하여라.

2. [정답. 608]

다음 세 조건을 모두 만족하는 양의 정수들의 순서쌍 $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(i) 각 i $(1 \leqslant i \leqslant 7)$에 대하여, $a_i + a_{i+1}$은 짝수이다.

(ii) 각 i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$에 대하여, $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$는 3의 배수이다.

(iii) 각 i $(1 \leqslant i \leqslant 8)$에 대하여, $a_i \leqslant 12$이다.

3. [정답. 13]

$1! + 2! + \cdots + 99! + 100!$을 100으로 나눈 나머지를 구하여라.

4. [정답. 18]

다음 조건을 만족하는 절대값이 10 이하인 정수 n의 개수를 구하여라.

(**조건**) 부등식 $8nx + 16 \leqslant 16x^2 + n^2 \leqslant 2n^2$을 만족하는 실수 x가 존재한다.

5. [정답. 500]

원 ω의 외부에 있는 한 점 A에서 원 ω에 그은 두 접선이 원과 접하는 점을 각각 점 P, Q라 하자. P를 지나고 직선 AQ와 평행한 직선이 원 ω와 만나는 점을 $R(\neq P)$이라 하고, 직선 AR이 원 ω와 만나는 점을 $S(\neq R)$라 하자. $\overline{AP} : \overline{PR} = 2 : 3$이고, 삼각형 ASQ의 넓이가 50일 때, 사각형 $APRQ$의 넓이를 구하여라.

6. [정답. 688]

양의 정수 $N = {}_{250}C_1 \times {}_{250}C_2 \times \cdots \times {}_{250}C_{248} \times {}_{250}C_{249}$에 대하여, 5^m이 N을 나누는 가장 큰 정수 m을 구하여라. (단, $r < n$인 양의 정수 n, r에 대하여, ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$)

7. [정답. 907]

집합 $A = \{3, 4, \ldots, 24\}$와 $B = \{1, 2, 3\}$에 대하여, 다음 조건을 만족하는 함수 $f : A \to B$의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

(**조건**) $x^2 + xy \in A$, $y^2 + xy \in A$인 임의의 양의 정수 x, y에 대하여, $f(x^2 + xy) + f(y^2 + xy) = 4$이다.

8. [정답. 28]

집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여, 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하여라.

(i) 모든 $x \in X$에 대하여 $g(x) = 2f(x) - x$를 만족하는 함수 $g : X \to X$가 존재한다.

(ii) $f(-2) + f(0) + f(2) = 0$

9. [정답. 400]

직사각형 $ABCD$의 변 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 선분 AC위의 점 P가 $\overline{AP} : \overline{PC} = 1 : 2$를 만족한다. 직선 BC와 PM의 교점을 Q라 하자. 삼각형 AMP의 넓이가 100일 때, 삼각형 PQN의 넓이를 구하여라.

10. [정답. 540]

다음 조건을 만족하는 36 이하인 양의 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

(**조건**) $(a + b)^{36} - a^{36} - b^{36}$은 36의 배수이다.

(뒷면에 계속)

11. [정답. 27]

다음 두 조건을 모두 만족하는 0이 아닌 서로 다른 실수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)들에 대하여, $6(3x+2y+z)$가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 것을 구하여라.

(i) $2x + 2y + 2z = 3$

(ii) $\dfrac{1}{xz} + \dfrac{x-y}{y-z} = \dfrac{1}{yz} + \dfrac{y-z}{z-x} = \dfrac{1}{xy} + \dfrac{z-x}{x-y}$

12. [정답. 224]

다음 조건을 만족하는 함수 $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$의 개수를 구하여라. (단, 양의 정수 k에 대하여 $f^{(k)}(x)$는 $f(x)$를 k번 합성한 함수, 즉 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{f\text{가 } k\text{개}})(x))$

(**조건**) 모든 $x \in \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여, $f^{(2025)}(x) = f^{(25)}(x)$이다.

13. [정답. 12]

양의 정수 p, q에 대하여, 반지름이 각각 $\sqrt{p}, 1, \sqrt{q}$인 서로 만나지 않는 세 원 O_1, O_2, O_3가 있다. 세 원 O_1, O_2, O_3 의 중심을 각각 점 A, B, C라 하면, A, B, C는 일직선상에 순서대로 놓여 있고, $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 6$이다. 다음 두 조건을 모두 만족하는 점 S가 존재하는 양의 정수 p, q의 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하여라.

(i) 점 S는 세 원 O_1, O_2, O_3 모두의 바깥에 위치한다.

(ii) 점 S에서 세 원 O_1, O_2, O_3에 그은 접선의 길이가 모두 같다.

14. [정답. 13]

다음 조건을 만족하는 2 이상의 양의 정수 n의 개수를 구하여라.

(**조건**) $p_1, p_2, \ldots, p_k$가 n의 서로 다른 모든 소인수라 할 때, $(p_1 + 4)(p_2 + 4) \cdots (p_k + 4)$가 n의 배수이다.

15. [정답. 128]

수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족한다.

(**조건**) 모든 양의 정수 n에 대하여, $a_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(a_n^2 - 50\right)$

이때, $a_8 = a_1$을 만족하는 실수 a_1의 개수를 구하여라.

(뒷면에 계속)

kmo 한국수학올림피아드

제39회 고등부 1차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

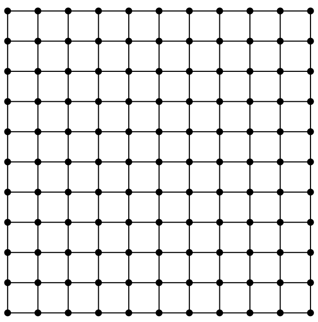
16. [정답. 776]

집합 $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$의 부분집합 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5의 순서쌍 $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ 중에서, 다음 조건을 만족하는 것의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. (단, $\varnothing$은 공집합)

(조건) 임의의 정수 i, j, k $(1 \leqslant i < j < k \leqslant 5)$에 대하여 $A_i \cap A_j \cap A_k = \varnothing$이다.

17. [정답. 608]

다음과 같이 1×1 정사각형 100개를 붙여서 만든 도형이 있다. 이 도형의 121개의 점 중 세 점을 꼭짓점으로 가지는 삼각형들 중에서, 넓이가 10인 직각삼각형의 개수를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.



18. [정답. 50]

다음 조건을 만족하는 양의 정수 k를 모두 더한 값을 구하여라.

(조건) $k^2 = a^{2b} + (2b)^4$을 만족하는 홀수인 양의 정수 a, b가 존재한다.

19. [정답. 228]

삼각형 ABC에서 $\angle A = 66^\circ$, $\angle B = \angle C = 57^\circ$이다. 변 AB의 점 B 쪽 연장선 위에 점 D가 있다. (즉, $\overline{AD} > \overline{AB}$이다.) 선분 CD의 중점을 M이라 하고, 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선이 직선 BM과 만나는 점을 P라 하며, 삼각형 ADC의 내심을 I라 하자. $\angle PDI = 90^\circ$일 때, $\angle BDC = x^\circ$이다. $6x$의 값을 구하여라.

20. [정답. 19]

실수 $x_1, x_2, \ldots, x_6$가 다음 두 식을 모두 만족한다.

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 4, \quad \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 11$$

$6x_1x_2x_3x_4x_5x_6 + \sum_{i=1}^{6} x_i^3 - \sum_{i=1}^{6} x_i^4$의 최댓값을 M이라 할 때, $[M]$의 값을 구하여라. (단, $[a]$는 a를 넘지 않는 가장 큰 정수)

(뒷면에 계속)