제 39 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2025년 11월 8일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n을 모두 구하여라.

(조건) $x+y+z+w$가 n의 배수가 되는 n의 서로 다른 양의 약수 x, y, z, w가 존재한다.

2. 이등변삼각형이 아닌 예각삼각형 ABC의 외접원을 Γ라 하고, 점 A, B, C에서 대변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 점 B에서 원 Γ에 접하는 직선을 ℓ이라 하고, 선분 BD의 수직이등분선이 ℓ과 만나는 점을 P, 직선 AD와 원 Γ가 만나는 점을 $Q(\neq A)$라 한다. 직선 BE, PQ가 원 Γ와 만나는 점을 각각 $S(\neq B)$, $T(\neq Q)$라 하고, 직선 FE와 ST의 교점을 U라 하자. 삼각형 FUS의 외접원이 선분 BE의 중점을 지남을 보여라.

3. 양의 정수 n, k에 대하여, n개의 집합 $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 다음 세 조건을 모두 만족한다.

- 임의의 양의 정수 $i, j\,(1 \leq i < j \leq n)$에 대하여, $X_i \cap X_j$는 공집합이다.
- 임의의 양의 정수 $t\,(1 \leq t \leq n)$에 대하여, X_t의 원소의 개수는 k이다.
- $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n = \{1, 2, \ldots, nk\}$

양의 정수 $t\,(1 \leq t \leq n)$에 대하여, $i \in X_t$이고 $j \in X_{t+1}$인 $i, j\,(i < j)$의 순서쌍 (i, j)의 개수를 p_t라 하자. (단, $X_{n+1} = X_1$이다.) 만약 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$을 만족하면, $p_1 < \frac{3k^2}{4}$임을 보여라.

4. 음이 아닌 정수들의 집합을 $\mathbb{N}_0$이라 하자. 다음 조건을 만족하는 함수 $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$을 모두 구하여라. (단, $f^{(0)}(x) = x$로 정의하고, 양의 정수 k에 대하여 $f^{(k)}(x)$는 $f(x)$를 k번 합성한 함수, 즉 $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{f\text{가 } k\text{개}})(x)$이다.)

(조건) 모든 $a, b, c \in \mathbb{N}_0$에 대하여, $f^{(a)}(b) + f^{(b)}(c) + f^{(c)}(a) = f^{(a+b+c)}(a+b+c)$

제 39 회 고등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

고등부

2025년 11월 8일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 삼각형 ABC의 변 BC 위의 한 점 D에 대하여, $\overline{AD} = \overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{CD}$를 만족한다. 선분 AD 위의 한 점 $P(\neq A, D)$에 대하여, 선분 PD의 중점을 M, 삼각형 MDC의 내심을 J라 하자. 삼각형 MJC의 외접원과 삼각형 ABP의 외접원이 서로 다른 두 점 Q, R에서 만난다고 할 때, 세 점 D, Q, R이 일직선상에 있음을 보여라.

6. 조건 $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{99}$를 만족하는 임의의 실수 $x_1, x_2, \ldots, x_{99}$에 대하여 다음 부등식이 항상 성립하는 양의 실수 c의 최솟값을 구하여라.

$$3\sqrt{x_1} + 4\left(\sqrt{x_2 - x_1} + \sqrt{x_3 - x_2} + \cdots + \sqrt{x_{99} - x_{98}}\right) \leq c\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \cdots + \sqrt{x_{98}}\right) + 5\sqrt{x_{99}}$$

7. 양의 정수 $M(\geq 2), n$에 대하여, 어떤 학교에 학생은 M명, 동아리는 $6n$개가 있다. 각 학생은 이 $6n$개의 동아리 중에서 몇 개를 골라 가입하려고 한다. 부등식

$$M \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} {}_{6n}C_i\right) \leq 2^{6n}$$

이 성립할 때, 다음 조건을 만족하도록 각 학생이 가입할 동아리들을 선택하는 것이 가능함을 보여라.

> (조건) 임의의 서로 다른 두 학생에 대하여, 이 두 학생 중 정확히 한 명이 가입한 동아리가 n개 이상이다.

8. 양의 정수 $n(\geq 3)$에 대하여, $f(n)$을 $m(m-1)$이 $n(n-1)$의 배수가 되는 n보다 큰 최소의 양의 정수 m이라 정의하자. 다음 두 명제 (1), (2)가 서로 필요충분조건임을 보여라.

(1) $f(n) > \frac{n(n-1)}{2}$

(2) $n = 9$ 이거나, n이 소수이고 $n = 2^k + 1$ 인 양의 정수 k가 존재하거나, 또는 $n - 1$이 소수이고 $n = 2^k$ 인 양의 정수 k가 존재한다.