제 39 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2025년 11월 8일 (오전), 제한시간 3시간, 문항당 7점

1. 예각삼각형 ABC가 $\angle BAC > \angle CBA$를 만족한다. 변 AB 위의 점 $P(\neq A, B)$와 변 AC 위의 점 $Q(\neq A, C)$가 $\angle APQ + \angle ACB = 180^\circ$ 를 만족하도록 주어져 있다. 직선 BQ가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 $D(\neq B)$라 하고, 직선 CD가 삼각형 AQD의 외접원과 만나는 점을 $E(\neq D)$라 하자. 이때 $\overline{PQ} = \overline{QE}$임을 보여라.

2. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n이 존재하지 않음을 보여라.

(조건) $n \cdot 4^n + 9$가 완전제곱수이다.

3. 양의 정수에 대하여 정의되고 실수를 함숫값으로 갖는 함수 f가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

- $f(1) = f(2) = 1$
- 모든 양의 정수 n에 대하여, $f(n+2) = 2\sqrt{f(n+1) + f(n)} + f(n) + 1$

이때 $f(2026) - f(2025)$의 값을 구하여라.

4. 짝수인 양의 정수 n에 대하여, $5n$장의 카드가 있다. 각각의 카드에는 1부터 $5n$까지의 정수들 중 하나가 적혀 있고, 각 카드에 적힌 숫자는 모두 다르다. 5개의 상자 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5에 이 $5n$장의 카드를 넣는데, 각 상자에는 정확히 n장의 카드가 들어가도록 한다. 각각의 정수 $k\,(1 \le k \le 5)$에 대하여 x_k, y_k를 다음과 같이 정의하자. (단, $B_6 = B_1$, $B_7 = B_2$ 이다.)

- x_k는 i가 적힌 카드가 B_k에 들어있고 j가 적힌 카드가 B_{k+1}에 들어있는 정수 $i, j\,(i < j)$의 순서쌍 (i, j)의 개수이다.
- y_k는 i가 적힌 카드가 B_k에 들어있고 j가 적힌 카드가 B_{k+2}에 들어있는 정수 $i, j\,(i < j)$의 순서쌍 (i, j)의 개수이다.

예를 들어, $n = 2$이고 B_1에는 $1, 3$, B_2에는 $2, 7$, B_3에는 $6, 10$, B_4에는 $5, 8$, B_5에는 $4, 9$가 적힌 카드들이 들어있으면 $x_1 = 3$, $x_3 = 1$, $y_1 = 4$, $y_5 = 1$ 이다. 조건 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$와 $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5$가 모두 성립하도록 카드를 넣었을 때, B_1에 들어있는 모든 카드에 적힌 숫자의 합으로 가능한 값을 모두 구하여라.

제 39 회 중등부 2차시험

한국수학올림피아드

KOREAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

중등부

2025년 11월 8일 (오후), 제한시간 3시간, 문항당 7점

5. 정수 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$은 100 이하의 서로 다른 양의 정수들이고, 정수 $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ 또한 100 이하의 서로 다른 양의 정수들이다. 이때 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\frac{1}{1+a_1+b_1}+\frac{1}{2+a_2+b_2}+\cdots+\frac{1}{100+a_{100}+b_{100}}>\frac{200}{303}$$

6. 집합 $\mathcal{P}$는 평면 상의 $n(\geq 3)$개의 점들로 구성되어 있고, 이 점들 중 어떤 세 점도 한 직선 위에 있지 않다. 집합 $\mathcal{P}$의 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 가지는 삼각형 중, 내부에 $\mathcal{P}$의 다른 점을 하나도 포함하지 않는 삼각형을 '외로운 삼각형'이라고 하자. 외로운 삼각형의 개수가 항상 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 이상임을 보여라.

7. 다음 조건을 만족하는 양의 정수 n이 가질 수 있는 가장 큰 값을 구하여라.

(조건) $\dfrac{11}{a}+\dfrac{13}{b}+\dfrac{17}{n}=1$을 만족하는 양의 정수 a, b가 존재한다.

8. 볼록사각형 $ABCD$가 $\angle ABC+\angle CDA>180°$를 만족한다. 삼각형 ABC의 외접원을 O_1, 삼각형 ADC의 외접원을 O_2라 하고, 점 B에서 원 O_1에 접하는 직선이 원 O_2와 만나는 두 점을 P, Q, 점 D에서 원 O_2에 접하는 직선이 원 O_1과 만나는 두 점을 R, S라 하자. (단, 직선 BD에 대하여 점 P, R은 점 A와 같은 쪽에 있고, 점 Q, S는 점 C와 같은 쪽에 있다.) 만약 직선 PR과 QS가 평행하면, 직선 AC가 선분 BD의 중점을 지남을 보여라.