



모의 면접 · 구술고사

자연계열 · 현대물리

I. 문제

제 1 회 · 물질의 이중성과 원자 모형 — 물질파 · 간섭 · 에너지 준위

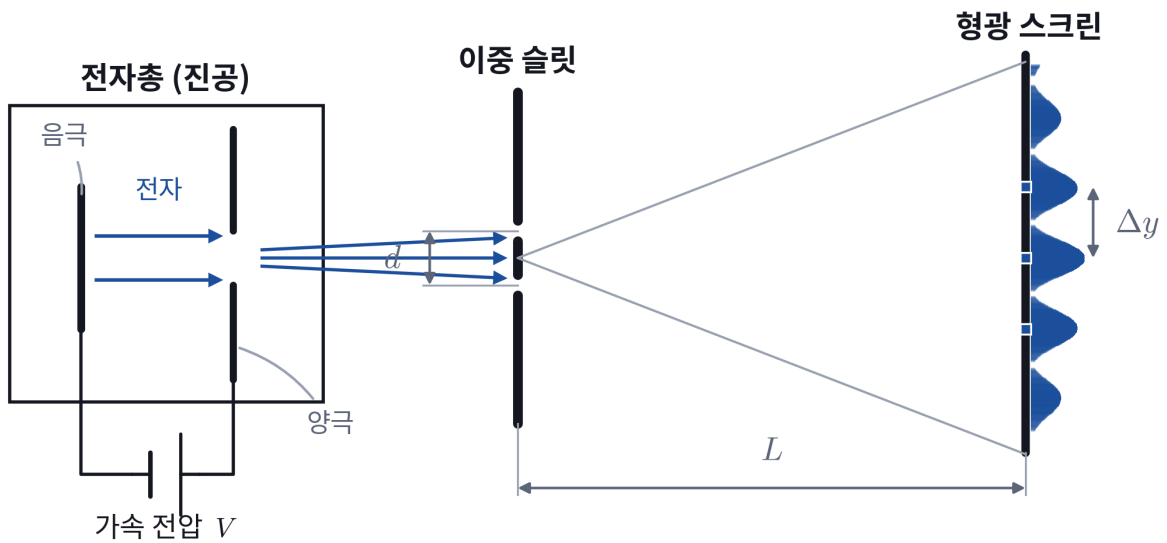
문제 1 전자의 이중 슬릿 간섭

물리학 I · II · 12분 · 소문항 3개

그림 1과 같이 진공인 전자총에서 정지해 있던 전자를 전압 V 로 가속시켜, 간격이 d 인 두 개의 좁은 슬릿에 찍고 슬릿에서 L 만큼 떨어진 형광 스크린에 도달하게 한다. 스크린에는 전자가 도달한 자리가 밝은 점으로 남으며, 오랜 시간이 지나면 일정한 간격으로 밝고 어두운 띠가 번갈아 나타난다.

드브로이에 따르면 운동량의 크기가 p 인 입자는 파장이 $\lambda = h/p$ 인 물질파로 행동한다. 파장이 λ 인 파동이 간격 d 인 두 슬릿을 지날 때, $d \ll L$ 이고 무늬가 중심 가까이에 있으면 이웃한 밝은 무늬 사이의 간격은 $\Delta y = \lambda L/d$ 이다.

전자의 질량은 $m = 9.0 \times 10^{-31}$ kg, 전하량의 크기는 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, 플랑크 상수는 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J·s이다. 전자의 속력은 빛의 속력에 비해 충분히 작아 상대론적 효과는 무시한다.



[그림 1] 전자의 이중 슬릿 간섭 실험 장치

- (1) 전압 V 로 가속된 전자의 물질파 파장 λ 를 h, m, e, V 로 나타내시오. 또, 같은 전압으로 가속했을 때 질량이 전자의 4배인 입자(전하량은 전자와 같은 크기)의 물질파 파장은 전자의 몇 배인지 구하시오. [1점]
- (2) $V = 150$ V, $d = 1.0 \times 10^{-7}$ m, $L = 1.0$ m일 때 물질파의 파장 λ 와 무늬 간격 Δy 를 각각 구하시오. 또, 이 실험을 같은 장치에서 빛으로 하려면 어느 정도 파장의 빛을 써야 하는지 답하고, 그것이 실제로 어려운 까닭을 설명하시오. [2점]
- (3) 전자를 한 개씩, 앞의 전자가 스크린에 도달한 뒤에야 다음 전자를 보내는 방식으로 아주 오랫동안 실험해도 결국 같은 간섭무늬가 나타난다. 이 결과가 뜻하는 바를 설명하시오. 또, 두 슬릿 중 어느 쪽을 지났는지 알아내는 장치를 설치하면 간섭무늬가 사라지는데 그 까닭을 설명하시오. 또, 가속 전압만 4배로 높이면 무늬 간격은 몇 배가 되는지 구하시오. [2점]

문제 2 보어 모형과 수소의 선 스펙트럼

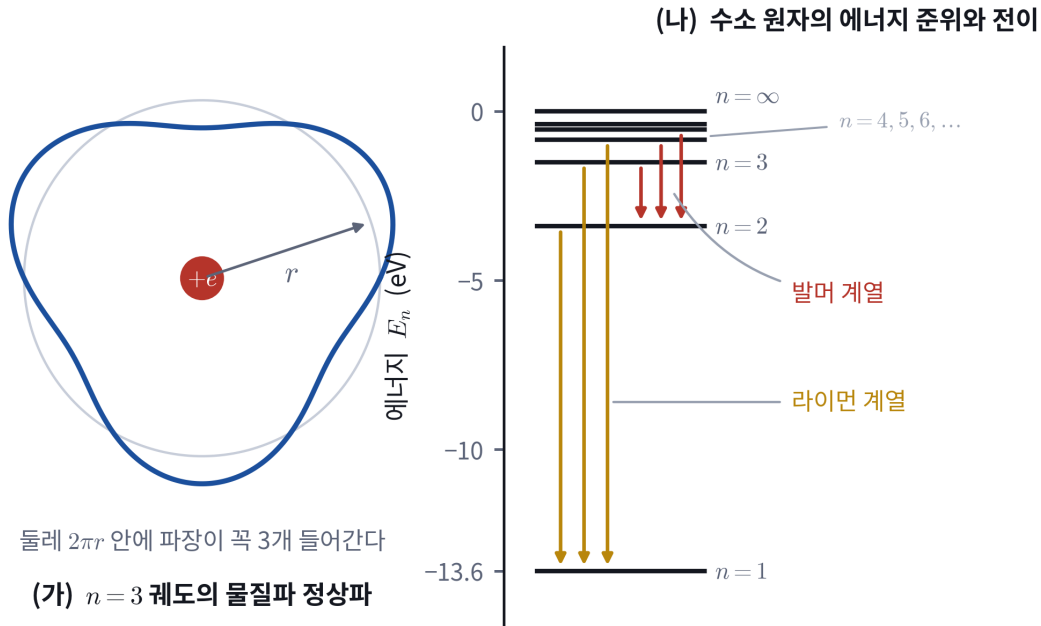
물리학 I · II · 12분 · 소문항 3개

보어는 수소 원자에서 전자가 특정한 궤도에만 존재할 수 있다고 보았다. 드브로이의 물질파로 보면 이 조건은 그림 2의 (가)와 같이 **궤도의 둘레가 물질파 파장의 정수배**가 되어 정상파를 이루는 것과 같다. 이 조건으로부터 계산하면 n 번째 궤도의 반지름은 $r_n = n^2 r_1$ 이고 에너지 준위는

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

이 된다. 전자가 높은 준위에서 낮은 준위로 옮겨 갈 때 두 준위의 에너지 차만큼의 에너지를 가진 광자 1개가 방출된다. 그림 2의 (나)는 이 준위와 전이를 나타낸 것이다.

수치 계산에는 $hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ 를 쓰고, 가시광선의 파장 범위는 약 380 nm에서 780 nm로 본다.



[그림 2] (가) 물질파 정상파 조건 (나) 수소 원자의 에너지 준위

- (1) 궤도의 둘레가 물질파 파장의 정수배라는 조건 $2\pi r = n\lambda$ 와 드브로이 관계 $\lambda = h/(mv)$ 로부터 $mvr = nh/(2\pi)$ 가 나옴을 보이시오. 또, $n = 2$ 에서 $n = 1$ 로 전이할 때 방출되는 광자의 에너지와 파장을 구하시오. **[1점]**
- (2) $n \geq 3$ 에서 $n = 2$ 로 전이할 때 나오는 빛의 무리를 발머 계열이라 한다. 이 계열에서 가장 긴 파장과 가장 짧은 파장을 각각 구하고, 이 계열이 가시광선 영역에서 관측되는 까닭을 설명하시오. **[2점]**
- (3) 바닥 상태의 수소 원자를 이온화시키는 데 필요한 최소 에너지와, 바닥 상태에 대한 $n = 3$ 궤도의 반지름 비를 각각 구하시오. 또, 전자가 1개만 남은 헬륨 이온 He^+ 의 에너지 준위는 $E_n = -54.4/n^2 \text{ eV}$ 로 수소의 4배이다. 그 까닭을 보어 모형에 근거하여 설명하시오. **[2점]**

제 2 회 · 특수 상대성 이론 — 시간 지연 · 길이 수축 · 질량과 에너지

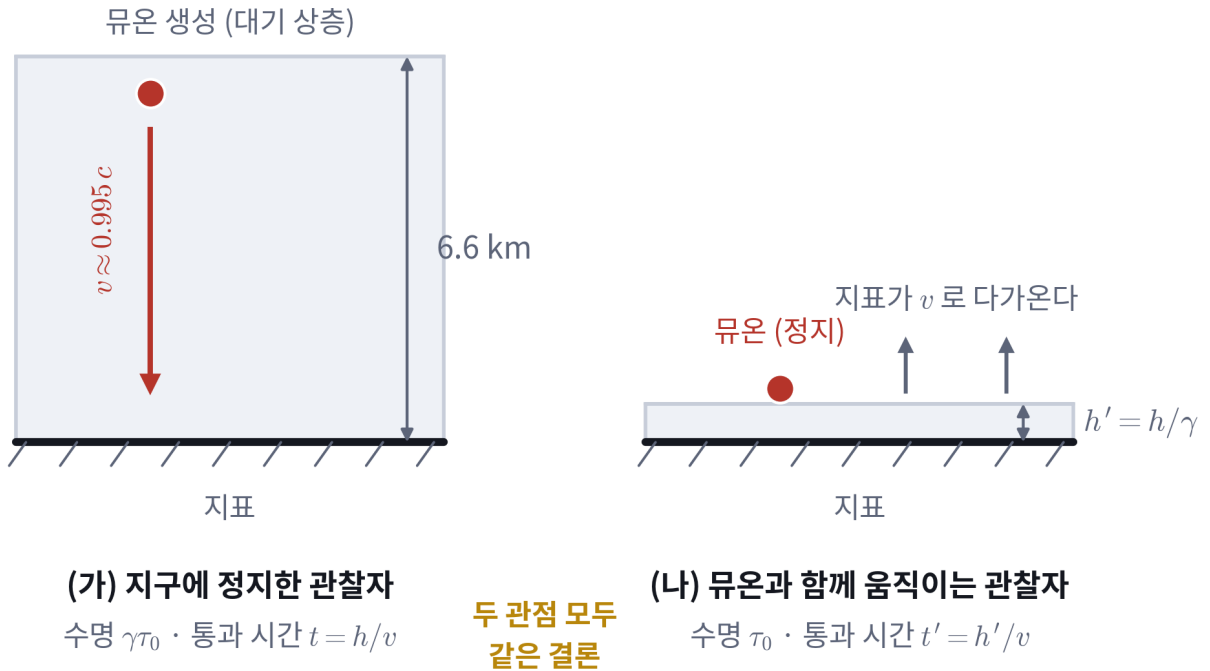
문제 1 뮤온은 어떻게 지표에 도달하는가

물리학 I · II · 12분 · 소문항 3개

우주에서 날아온 입자가 대기 상층의 원자핵과 충돌하면 뮤온이라는 입자가 만들어진다. 뮤온은 스스로 붕괴하는 불안정한 입자로, 정지해 있을 때 측정한 평균 수명은 $\tau_0 = 2.2 \mu\text{s}$ 이다. 처음 개수가 N_0 인 뮤온이 자신의 시계로 시간 t' 가 지난 뒤 남는 개수는

$$N = N_0 e^{-t'/\tau_0}$$

이다. 그림 3과 같이 지표로부터 높이 6.6 km인 곳에서 만들어진 뮤온이 $v \approx 0.995c$ 의 속력으로 곧장 지표를 향해 내려온다. 이 속력에서 $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2} = 10$ 이며, 거리와 시간 계산에서는 $v \approx c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ 로 근사한다. 계산에는 $e^{-1} \approx 0.37$, $e^{-10} \approx 5 \times 10^{-5}$ 를 쓴다.



[그림 3] 같은 현상을 보는 두 관찰자

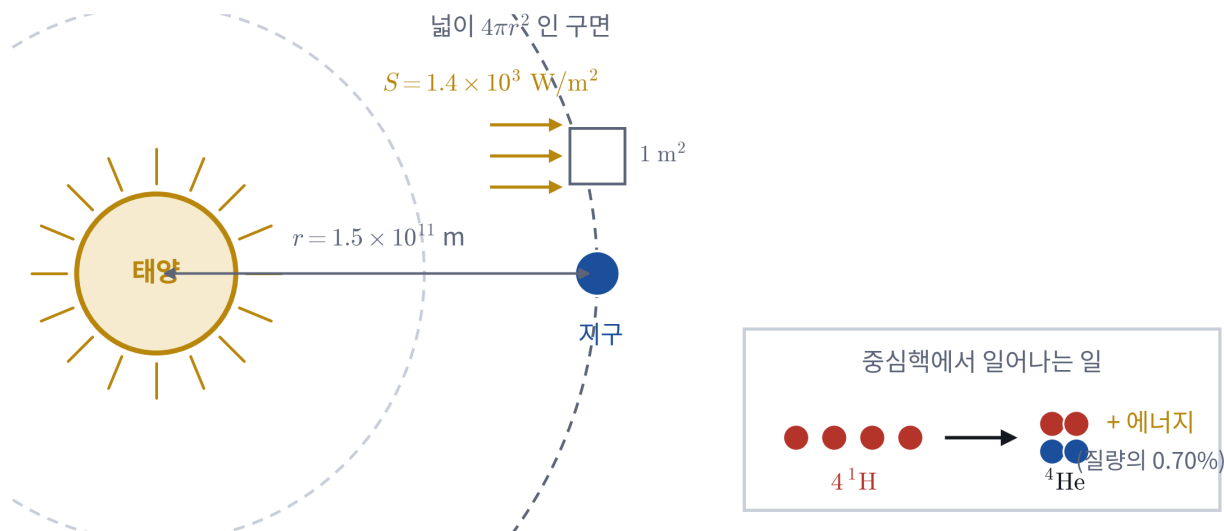
- (1) 시간 지연을 전혀 고려하지 않는다면, 뮤온이 붕괴하기 전까지 평균적으로 이동할 수 있는 거리는 얼마인지 구하시오. 또, 그 값이 6.6 km와 어긋나는 것이 왜 문제가 되는지 설명하시오. [1점]
- (2) 지구에 정지한 관찰자의 관점에서 뮤온의 평균 수명과 6.6 km를 지나는 데 걸리는 시간을 각각 구하시오. 또, 뮤온과 함께 움직이는 관찰자의 관점에서 대기층의 두께와 그것이 지나가는 데 걸리는 시간을 각각 구하고, 두 관점이 똑같은 결론에 이를 것을 보이시오. [2점]
- (3) 지표에 도달하는 뮤온의 비율을 구하시오. 또, 시간 지연은 적용하면서 길이 수축은 적용하지 않으면 어떤 모순이 생기는지 설명하고, 두 효과가 서로 다른 두 현상이 아니라 하나의 사실을 서로 다른 좌표계에서 기술한 것임을 설명하시오. [2점]

문제 2 태양은 1초에 얼마나 가벼워지는가

물리학 I · II · 12분 · 소문항 3개

태양의 중심핵에서는 수소 원자핵 4개가 헬륨 원자핵 1개로 융합하면서 에너지를 낸다. 이 과정에서 관여한 질량의 약 0.70%가 에너지로 바뀐다. 태양이 모든 방향으로 고르게 빛을 낸다고 보면, 태양에서 거리 r 만큼 떨어진 곳에서 빛의 세기(단위 넓이당 일률)는 태양의 광도 P 를 넓이 $4\pi r^2$ 인 구면에 고르게 나눈 값이다.

지구 궤도의 반지름은 $r = 1.5 \times 10^{11}$ m이고, 이 위치에서 태양 빛에 수직인 면이 받는 세기는 $S = 1.4 \times 10^3$ W/m²이다. 태양의 질량은 $M = 2.0 \times 10^{30}$ kg이고, 진공에서 빛의 속력은 $c = 3.0 \times 10^8$ m/s이다. 1년은 3.15×10^7 s로 계산하며, 대기에 의한 흡수와 태양풍에 의한 질량 손실은 무시한다.



[그림 4] 태양의 복사와 중심핵의 수소 융합 (양전자·중성미자 방출은 생략)

- (1) 태양의 광도 P (단위 시간당 방출하는 에너지)를 구하시오. [1점]
- (2) 태양이 빛을 내보내면서 1초 동안 잃는 질량을 구하시오. 또, 태양이 지금까지 46억 년 동안 이 비율로 질량을 잃었다면 그 총량이 태양 전체 질량의 몇 %인지 구하시오. [2점]
- (3) 수소 1 kg이 이 방식으로 모두 헬륨이 될 때 방출되는 에너지를 구하시오. 또, 태양 질량의 10%에 해당하는 수소가 모두 소모될 때까지 걸리는 시간을 구하고, 그 값이 무엇을 뜻하는지 설명하시오. [2점]

제 3 회 · 원자핵과 방사선 — 붕괴 법칙 · 핵반응 · 충돌

문제 1 반감기와 연대 측정

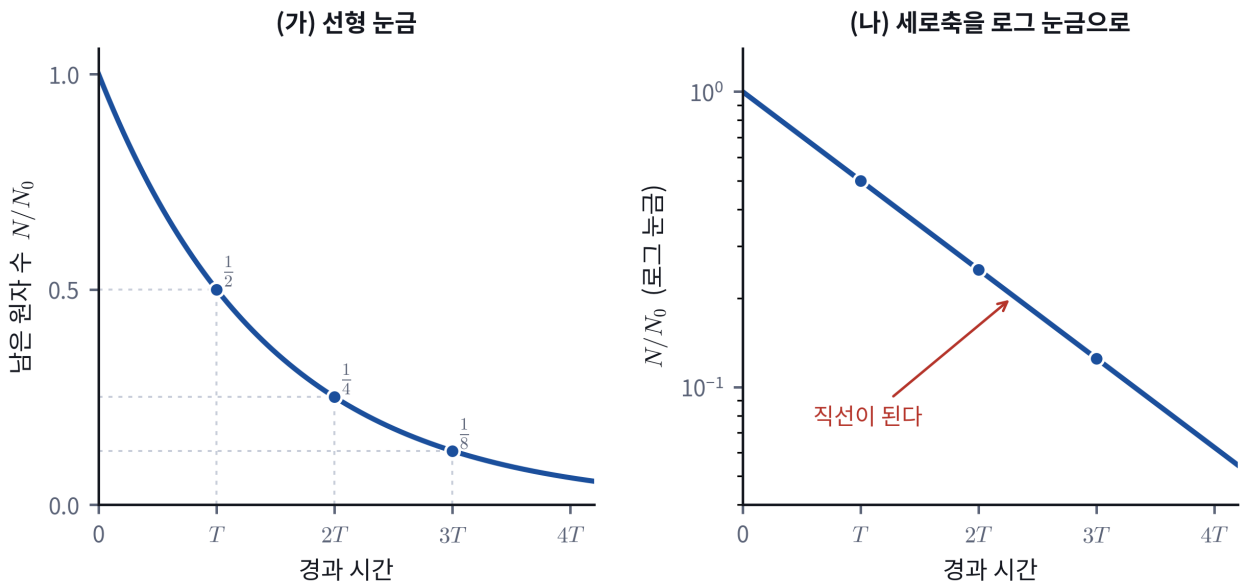
물리학 I · II · 12분 · 소문항 3개

방사성 원자핵은 저마다 일정한 확률로 붕괴하며, 처음 개수가 N_0 일 때 시간 t 가 지난 뒤 남는 개수는

$$N = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/T} = N_0 e^{-\lambda t}, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

이다. 여기서 T 는 반감기, λ 는 붕괴 상수이며, 단위 시간당 붕괴 수(방사능) A 는 $A = \lambda N$ 이다.

대기 중의 이산화 탄소에는 방사성 동위원소 ^{14}C 가 일정한 비율로 섞여 있다. 살아 있는 생물은 호흡과 광합성으로 이 비율을 그대로 유지하지만, 죽고 나면 새로운 ^{14}C 가 공급되지 않아 붕괴만 일어난다. ^{14}C 의 반감기는 $T = 5730$ 년이다. 계산에는 $\ln 2 = 0.693$, $\log 2 = 0.301$ 을 쓴다.



[그림 5] 방사성 붕괴 곡선 — 같은 자료를 두 가지 눈금으로

- (1) 어떤 시료에 남아 있는 ^{14}C 의 개수가 처음의 $1/8$ 이 되는 데 걸리는 시간을 구하시오. 또, 반감기가 시료의 양이나 온도, 화학적 결합 상태에 관계없이 일정한 까닭을 설명하시오. [1점]
- (2) 어떤 목재 유물에서 켜 ^{14}C 의 방사능이 같은 질량의 살아 있는 나무에서 켜 값의 25%였다. 이 유물의 나이를 구하시오. 또, ^{14}C 연대 측정으로 켜 수 있는 나이의 상한이 대략 5만 년인 까닭을 설명하시오. [2점]
- (3) 그림 5의 (나)와 같이 세로축을 로그 눈금으로 바꾸어 그리면 직선이 된다. 이 직선의 기울기가 무엇을 뜻하는지 설명하시오. 또, 반감기가 각각 $T_A = 1$ 년, $T_B = 10$ 년인 두 시료 A, B의 처음 원자 수가 같을 때 처음 방사능의 비 $A_A : A_B$ 를 구하고, 그 결과를 물리적으로 해석하시오. [2점]

문제 2 핵분열과 중성자의 감속

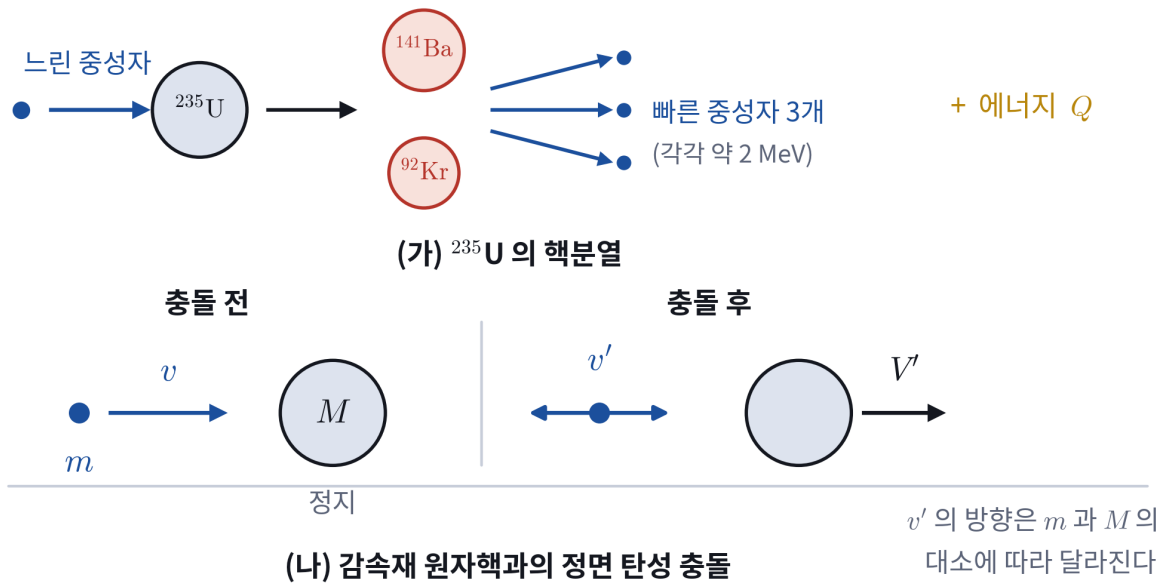
물리학 I · II · 12분 · 소문항 3개

그림 6의 (가)와 같이 ^{235}U 원자핵이 느린 중성자를 흡수하면 두 개의 원자핵과 여러 개의 중성자로 쪼개진다.



여기서 나오는 중성자는 운동 에너지가 약 2 MeV인 빠른 중성자인데, ^{235}U 를 잘 분열시키는 것은 운동 에너지가 약 0.025 eV인 느린 중성자(열중성자)이다. 그래서 원자로에서는 감속재를 두어 중성자의 속력을 늦춘다. 그림 6의 (나)와 같이 질량이 m 인 중성자가 속력 v 로 정지해 있는 질량 M 인 원자핵과 정면으로 탄성 충돌하는 경우만 생각한다.

질량은 ^{235}U 가 235.0439 u, ^{141}Ba 가 140.9144 u, ^{92}Kr 가 91.9262 u, 중성자가 1.0087 u이고, 1 u = 931.5 MeV/ c^2 이다. 계산에는 $\log 2 = 0.301$, $\log 11 = 1.041$, $\log 13 = 1.114$ 를 쓴다.



[그림 6] (가) ^{235}U 의 핵분열 (나) 감속재와의 정면 탄성 충돌

- (1) 위 핵반응의 질량 결손을 u 단위로, 방출 에너지 Q 를 MeV 단위로 각각 구하시오. [1점]
- (2) 운동량 보존과 운동 에너지 보존을 함께 써서, 충돌 후 중성자의 속도를 m, M, v 로 나타내시오. 또, 한 번의 정면 충돌에서 중성자가 잃는 운동 에너지의 비율이 최대가 되는 M 의 값을 구하고, 그 물리적 의미를 설명하시오. [2점]
- (3) 감속재로 흑연(^{12}C , $M = 12m$)을 쓸 때 정면 충돌 한 번마다 중성자의 운동 에너지가 몇 배가 되는지 구하시오. 또, 2 MeV인 중성자를 0.025 eV까지 늦추려면 정면 충돌이 최소 몇 번 필요한지 구하시오. [2점]

II. 예시답안

제 1 회 · 물질의 이중성과 원자 모형

문제 1 전자의 이중 슬릿 간섭

물질파 · 일과 에너지 · 파동의 간섭

(1) 정답: $\lambda = h/\sqrt{2meV}$, 질량이 4배인 입자의 파장은 $1/2$ 배

전기력이 한 일이 모두 운동 에너지가 되므로 $eV = \frac{1}{2}mv^2$ 이고, 운동량은

$$p = mv = \sqrt{2meV}$$

이다. 드브로이 관계에 넣으면

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

이 식에서 $\lambda \propto 1/\sqrt{m}$ 이므로, 같은 전압으로 가속했을 때 질량이 4배인 입자의 파장은 $1/\sqrt{4} = 1/2$ 배가 된다. 무거운 입자일수록 물질파의 파장이 짧아 파동성을 드러내기 어렵다는 뜻이며, 이것이 일상적인 물체에서 간섭을 볼 수 없는 이유이기도 하다.

(2) 정답: $\lambda \approx 1.0 \times 10^{-10}$ m, $\Delta y = 1.0$ mm

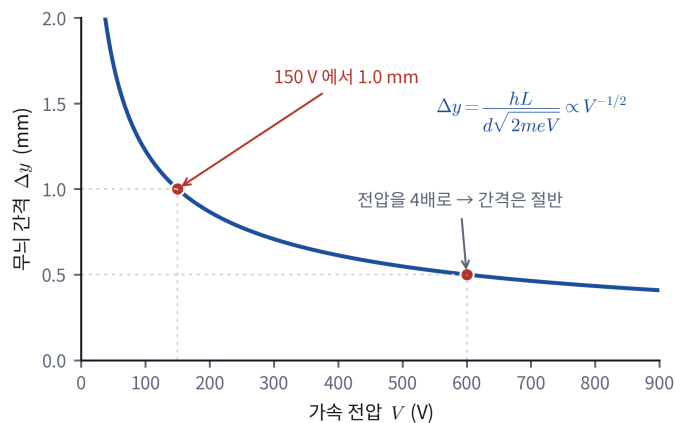
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{\sqrt{2(9.0 \times 10^{-31})(1.6 \times 10^{-19})(150)}}$$

분모 안의 값은 $2 \times 9.0 \times 1.6 \times 150 \times 10^{-50} = 4.32 \times 10^{-47}$ 이고 그 제곱근은 6.6×10^{-24} 이므로

$$\lambda = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{6.6 \times 10^{-24}} = 1.0 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.10 \text{ nm}$$

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d} = \frac{(1.0 \times 10^{-10})(1.0)}{1.0 \times 10^{-7}} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.0 \text{ mm}$$

같은 장치에서 빛으로 같은 무늬를 얻으려면 파장이 0.10 nm인 빛, 즉 X선을 써야 한다. 그런데 이 정도로 촘촘한 슬릿을 가공하기도 어렵고, 충분히 밝으면서 결이 맞은 X선을 얻으려면 싱크로트론 같은 대형 장치가 필요하며, 굴절률이 1에 아주 가까워 렌즈로 모으거나 휘게 할 수도 없다. 같은 파장을 훨씬 다루기 쉬운 전압 몇백 볼트로 얻을 수 있다는 점이 전자를 쓰는 이유이며, 전자 현미경이 광학 현미경보다 훨씬 작은 것을 볼 수 있는 것도 같은 까닭이다.



[해설 그림 1] 가속 전압에 따른 무늬 간격

(3) 정답: 간섭은 전자 하나가 스스로와 일으키는 현상이다. 무늬 간격은 $1/2$ 배가 된다.

전자를 한 개씩 보내는데도 무늬가 쌓인다는 것은, 간섭이 여러 전자가 서로 만나서 생기는 현상이 아님을 뜻한다. 전자 하나하나가 어느 쪽을 지났다고 말할 수 없는 상태로 두 슬릿에 걸쳐 퍼져 스스로와 간섭하고, 스크린에 닿는 순간에만 한 점에 알갱이로 나타난다. 개별 전자가 어디에 닿을지는 알 수 없고 오직 닿을 확률만 정해지는데, 그 확률 분포가 바로 간섭무늬의 세기 분포이다. 물질의 이중성이 확률로 이어진다는 것을 가장 직접적으로 보여 주는 실험이다.

어느 슬릿을 지났는지 알아내려면 반드시 전자와 무언가를 상호작용시켜야 하고, 그 순간 두 경로 사이의 위상 관계가 흐트러진다. 경로가 하나로 확정되면 더 이상 두 경로가 겹치지 않으므로 간섭항이 사라지고, 스크린에는 두 개의 단일 슬릿 무늬가 단순히 더해진 분포만 남는다. 더 근본적으로는, 어느 슬릿을 지났는지에 대한 정보가 — 사람이 읽어 보든 아니든 — 원리적으로 존재하게 되는 순간 간섭항이 사라진다. 실제로 그 정보를 도로 지우면 간섭이 되살아나는데(양자 지우개 실험), 이는 간섭을 없애는 것이 되받음의 세기가 아니라 **경로 정보의 존재 자체** 임을 보여 준다. 결국 **경로를 아는 것과 간섭을 보는 것은 동시에 성립할 수 없다.**

한편 $\lambda \propto V^{-1/2}$ 이고 $\Delta y \propto \lambda$ 이므로

$$\frac{\Delta y'}{\Delta y} = \sqrt{\frac{V}{4V}} = \frac{1}{2}$$

가속 전압을 높일수록 무늬가 촘촘해져 결국 구별할 수 없게 된다. 파동성이 드러나려면 파장이 슬릿 간격 d 에 견줄 만해야 한다는 일반 원리의 한 예이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$eV = \frac{1}{2}mv^2$ 에서 운동량을 구해 $\lambda = h/\sqrt{2meV}$ 를 유도하고, $\lambda \propto 1/\sqrt{m}$ 으로부터 1/2배를 구한 경우	1
(2)	λ 와 Δy 를 자릿수까지 정확히 계산하고, 같은 파장의 빛이 X선임을 밝혀 실험적 어려움을 설명한 경우	2
(3)	단일 전자의 자기 간섭과 확률 해석을 설명하고, 경로 측정이 간섭을 없애는 까닭을 경로 정보의 존재(또는 상호작용에 의한 결맞음 파괴)에 근거해 서술하였으며 1/2배를 구한 경우	2

문제 2 보어 모형과 수소의 선 스펙트럼

정상파 조건 · 광양자설 · 쿨롱 힘

(1) 정답: $E = 10.2 \text{ eV}$, $\lambda \approx 122 \text{ nm}$

궤도의 둘레가 물질파 파장의 정수배라는 조건에 드브로이 관계를 넣으면

$$2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{mv} \Rightarrow mvr = \frac{nh}{2\pi}$$

가 되어, 보어가 가정으로 놓았던 각운동량 양자화 조건이 **물질파의 정상파 조건**에서 저절로 따라 나온다. 임의로 도입된 규칙처럼 보이던 것이 파동으로 보면 자연스러운 결과가 된다는 점이 이 논증의 핵심이다.

$n = 2 \rightarrow n = 1$ 전이에서

$$E = E_2 - E_1 = (-3.40) - (-13.60) = 10.2 \text{ eV}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{10.2 \text{ eV}} \approx 122 \text{ nm}$$

자외선 영역이며, 라이먼 계열의 첫 번째 선이다.

(2) 정답: 가장 긴 파장 약 656 nm, 가장 짧은 파장 약 365 nm

발머 계열은 $n = 2$ 로 떨어지는 전이이다. 파장이 가장 긴 것은 에너지 차가 가장 작은 $n = 3 \rightarrow 2$ 이고, 가장 짧은 것은 에너지 차가 가장 큰 $n = \infty \rightarrow 2$ (계열 끝)이다.

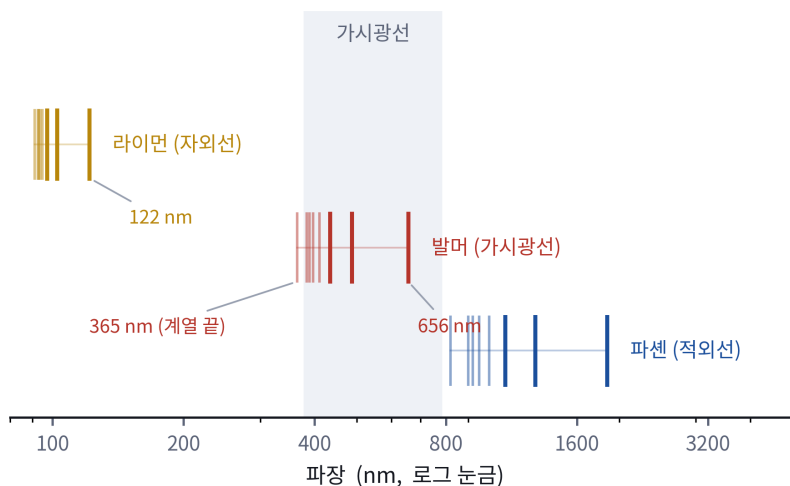
$$\Delta E_{3 \rightarrow 2} = (-1.51) - (-3.40) = 1.89 \text{ eV} \Rightarrow \lambda = \frac{1240}{1.89} \approx 656 \text{ nm}$$

$$\Delta E_{\infty \rightarrow 2} = 0 - (-3.40) = 3.40 \text{ eV} \Rightarrow \lambda = \frac{1240}{3.40} \approx 365 \text{ nm}$$

$$365 \text{ nm} < \lambda \leq 656 \text{ nm}$$

(365 nm는 계열 끝에 해당하는 극한값으로, 실제로 도달하지는 않는다)

발머 계열은 365 nm에 수렴하는 무한히 많은 선으로 이루어지므로 계열 전체가 가시광선인 것은 아니다. 380~780 nm 안에 드는 것은 $n = 3$ 부터 $n = 9$ 까지의 선이고(656, 486, 434, 410, 397, 389, 384 nm), $n = 10$ 이상은 380 nm 아래로 몰려 자외선이 된다. 실제로 눈에 뚜렷이 보이는 것은 세기가 세고 서로 떨어져 있는 앞의 네 선이다. 그 까닭은 $n = 2$ 준위가 놓인 위치 때문이다. 바닥 상태로 떨어지는 라이먼 계열은 에너지 차가 10.2 eV 이상이라 모두 자외선이 되고, $n = 3$ 이상으로 떨어지는 계열은 에너지 차가 1.5 eV 이하라 적외선이 된다. **가시광선 광자의 에너지 범위인 1.6~3.3 eV와 겹치는 것이 오직 발머 계열뿐**이다. 수소 기체 방전관이 붉게 보이는 것은 세기가 가장 센 656 nm 선 때문이다.



[해설 그림 2] 수소 원자의 세 계열과 가시광선 영역

(3) 정답: 이온화 에너지 13.6 eV, $r_3 : r_1 = 9 : 1$

이온화란 전자를 $n = \infty$ 까지 끌어올려 원자에서 떼어내는 것이므로, 바닥 상태에서 필요한 최소 에너지는

$$E_{\infty} - E_1 = 0 - (-13.6) = 13.6 \text{ eV}$$

이다. 또 $r_n = n^2 r_1$ 이므로 $r_3 = 9r_1$ 이다.

$$E_{\text{이온화}} = 13.6 \text{ eV}, \quad r_3 : r_1 = 9 : 1$$

He^+ 의 준위가 수소의 4배가 되는 까닭은 핵의 전하가 $+e$ 에서 $+2e$ 로 커졌기 때문이다. 핵전하가 Ze 이면 쿨롱 힘이 Z 배로 세지므로, 구심력 조건

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

와 양자 조건 $mvr = nh/(2\pi)$ 를 함께 풀면

$$r_n \propto \frac{n^2}{Z}, \quad E_n \propto -\frac{Z^2}{n^2}$$

를 얻는다. 즉 궤도는 $1/Z$ 배로 줄어들고, 전자가 핵에 그만큼 가까이 끌려 들어가므로 결합이 Z^2 배로 세진다. $Z = 2$ 이면 $2^2 = 4$ 배이고, 실제로 $13.6 \times 4 = 54.4 \text{ eV}$ 이다. 핵전하가 커질수록 안쪽 껍질 전자가 훨씬 세게 묶인다는 이 성질은 특성 X선의 파장이 원자 번호에 따라 짧아지는 현상과도 같은 뿌리를 갖는다.

다만 이 논증은 전자가 **하나뿐인** 계($\text{H}, \text{He}^+, \text{Li}^{2+} \dots$)에만 통한다. 전자가 둘 이상이면 전자 사이의 반발을 다룰 수 없어 보어 모형은 중성 헬륨의 준위조차 맞이지 못하고, 바닥 상태의 각운동량을 $\hbar/(2\pi)$ 로 예측하는 것도 실제 값(0)과 다르다. 정확한 기술에는 슈뢰딩거 방정식이 필요하다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	정상파 조건과 드브로이 관계로부터 각운동량 양자화를 유도하고, 라이먼 첫 선의 에너지와 파장을 옳게 구한 경우	1
(2)	계열의 양 끝을 $n = 3$ 과 $n = \infty$ 로 옳게 잡아 두 파장을 구하고, $n = 2$ 준위의 위치 때문에 가시광선이 됨을 다른 계열과 비교하여 설명한 경우	2
(3)	이온화 에너지와 반지름 비를 구하고, 쿨롱 힘과 양자 조건에서 $E_n \propto Z^2$ 을 이끌어 4배를 설명한 경우	2

제 2 회 · 특수 상대성 이론

문제 1 뮤온은 어떻게 지표에 도달하는가

시간 지연 · 길이 수축 · 지수 감소

(1) 정답: 약 660 m

$$d_0 = v\tau_0 \approx (3.0 \times 10^8)(2.2 \times 10^{-6}) = 6.6 \times 10^2 \text{ m}$$

$$d_0 \approx 0.66 \text{ km}$$

6.6 km의 1/10밖에 되지 않는다. 평균 수명의 10배에 해당하는 거리를 가야 하므로 살아남는 비율은 $e^{-10} \approx 5 \times 10^{-5}$, 즉 10만 개 중 5개 수준이어야 한다. 그런데 실제 관측에서는 훨씬 많은 뮤온이 지표에서 검출된다. **고전적인 계산이 관측과 네 자릿수 가까이 어긋난다**는 점이 문제이며, 이 어긋남이 특수 상대성 이론을 확인하는 대표적인 실험 근거가 된다.

(2) 정답: 지구계 — 수명 $22 \mu\text{s}$, 통과 시간 $22 \mu\text{s}$. 뮤온계 — 두께 0.66 km, 통과 시간 $2.2 \mu\text{s}$

지구에 정지한 관찰자 뮤온의 시계가 느리게 가므로 수명이 늘어난 것으로 관측된다.

$$\tau = \gamma\tau_0 = 10 \times 2.2 = 22 \mu\text{s}$$

대기층의 두께는 그대로 6.6 km이므로 통과 시간은

$$t = \frac{h}{v} = \frac{6.6 \times 10^3}{3.0 \times 10^8} = 22 \mu\text{s}$$

즉 통과 시간이 늘어난 수명과 정확히 같다.

뮤온과 함께 움직이는 관찰자 뮤온 자신의 시계는 정상이므로 수명은 여전히 $\tau_0 = 2.2 \mu\text{s}$ 이다. 대신 지나가야 할 대기층이 진행 방향으로 수축한 것으로 관측된다.

$$h' = \frac{h}{\gamma} = \frac{6.6 \text{ km}}{10} = 0.66 \text{ km}$$

통과 시간은

$$t' = \frac{h'}{v} = \frac{6.6 \times 10^2}{3.0 \times 10^8} = 2.2 \mu\text{s}$$

즉 통과 시간이 수명과 정확히 같다.

두 관점 모두

$$\frac{\text{통과 시간}}{\text{수명}} = 1$$

이므로 같은 생존 비율을 준다.

한 관점에서는 **시간이 늘어나서**, 다른 관점에서는 **거리가 줄어들어서** 뮤온이 도달한다. 서로 다른 설명처럼 보이지만 물리적으로 검증 가능한 양, 즉 지표에 도달하는 뮤온의 개수는 정확히 같다.

(3) 정답: 약 37%

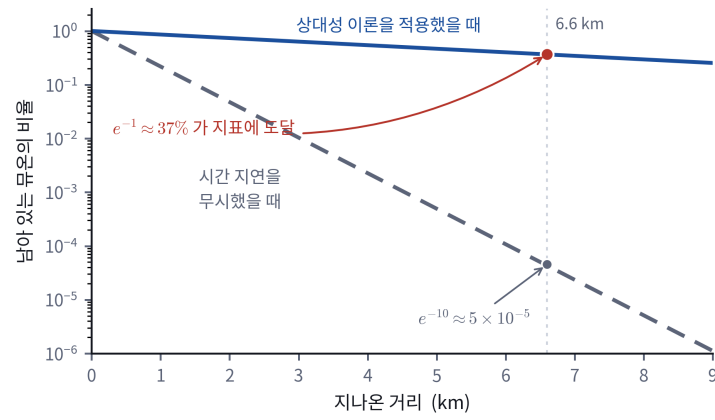
$$\frac{N}{N_0} = e^{-t'/\tau_0} = e^{-2.2/2.2} = e^{-1} \approx 0.37$$

약 37%의 뮤온이 지표에 도달한다.

지구계에서 계산해도 $e^{-t/\tau} = e^{-22/22} = e^{-1}$ 로 같다. 고전적 예측 5×10^{-5} 와 견주면 7000배 이상 차이가 나므로, 실험으로 두 예측을 가리는 것은 어렵지 않다.

시간 지연만 적용하고 길이 수축을 빠뜨리면 곧바로 모순이 생긴다. 뮤온의 관점에서는 자신의 수명이 여전히 $2.2 \mu\text{s}$ 인데 대기층의 두께가 6.6 km 그대로라면 통과 시간이 $22 \mu\text{s}$ 가 되어 e^{-10} 만 살아남는다는 결론이 나온다. 같은 사건(지표에 도달한 뮤온의 개수)을 두고 두 관찰자가 다른 답을 내놓는 셈이니, 물리 법칙이 좌표계에 따라 달라진다는 뜻이 되어 상대성 원리 자체가 무너진다.

시간 지연과 길이 수축은 별개의 두 현상이 아니라, 하나의 시공간 구조를 서로 다른 좌표계에서 잘라 본 결과이다. 한 관찰자가 시간으로 설명하는 것을 다른 관찰자는 거리로 설명하며, 두 설명은 반드시 같은 관측값을 준다.



[해설 그림 3] 깊이에 따라 남아 있는 뮤온의 비율

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$d_0 = v\tau_0 \approx 0.66 \text{ km}$ 를 구하고, 고전적 예측이 관측과 크게 어긋남을 지적한 경우	1
(2)	두 좌표계에서 수명·거리·시간을 각각 옳게 구하고, 통과 시간과 수명의 비가 같음을 보여 두 관점이 일치함을 논증한 경우	2
(3)	생존 비율 e^{-1} 을 구하고, 한쪽 효과만 적용할 때 두 관찰자의 결론이 어긋나 상대성 원리가 깨짐을 설명한 경우	2

문제 2 태양은 1초에 얼마나 가벼워지는가

역제곱 법칙 · 질량-에너지 등가

(1) 정답: $P \approx 4.0 \times 10^{26} \text{ W}$

태양에서 나온 에너지는 넓이가 $4\pi r^2$ 인 구면에 고르게 퍼지므로

$$\begin{aligned} P &= 4\pi r^2 S = 4\pi (1.5 \times 10^{11})^2 (1.4 \times 10^3) \\ &= 4\pi (2.25 \times 10^{22}) (1.4 \times 10^3) \approx 4.0 \times 10^{26} \text{ W} \end{aligned}$$

$$P \approx 4.0 \times 10^{26} \text{ W}$$

1 m²짜리 작은 판이 받는 1.4 kW를 재는 것만으로 태양 전체의 출력을 알 수 있다는 점이 이 계산의 묘미이다. 거리 r 를 알고 있고 빛이 모든 방향으로 고르게 퍼진다는 가정만 있으면 된다.

(2) 정답: 1초에 약 $4.4 \times 10^9 \text{ kg}$, 46억 년 동안 약 0.032%

$E = mc^2$ 에서 단위 시간당 잃는 질량은

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{P}{c^2} = \frac{4.0 \times 10^{26}}{9.0 \times 10^{16}} \approx 4.4 \times 10^9 \text{ kg/s}$$

초당 약 $4.4 \times 10^9 \text{ kg}$, 즉 440만 톤이 사라진다.

46억 년은 $4.6 \times 10^9 \times 3.15 \times 10^7 \approx 1.45 \times 10^{17} \text{ s}$ 이므로 총 손실 질량은

$$\Delta M \approx (4.4 \times 10^9)(1.45 \times 10^{17}) \approx 6.4 \times 10^{26} \text{ kg}$$

$$\frac{\Delta M}{M} \approx \frac{6.4 \times 10^{26}}{2.0 \times 10^{30}} \approx 3.2 \times 10^{-4}$$

태양 전체 질량의 약 0.032%에 지나지 않는다.

초당 440만 톤이라는 숫자는 엄청나 보이지만, 태양의 질량이 워낙 커서 46억 년을 모아도 만분의 삼 남짓이다. 태양의 밝기가 그동안 거의 변하지 않은 것도 이 때문이다.

(3) 정답: 수소 1 kg당 약 $6.3 \times 10^{14} \text{ J}$, 약 100억 년

수소 1 kg 가운데 0.70%인 $7.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 이 에너지로 바뀌므로

$$E_1 = (7.0 \times 10^{-3})(9.0 \times 10^{16}) \approx 6.3 \times 10^{14} \text{ J}$$

$$E_1 \approx 6.3 \times 10^{14} \text{ J/kg}$$

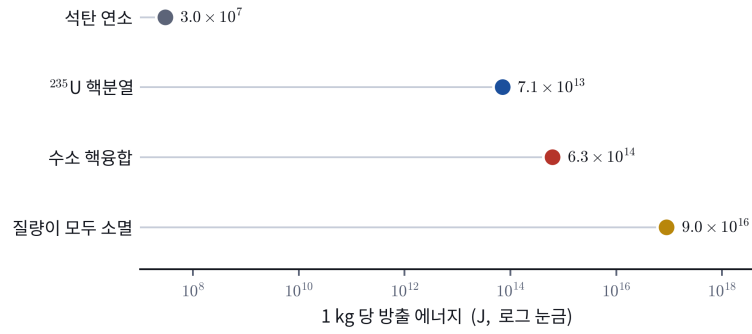
태양 질량의 10%는 $2.0 \times 10^{29} \text{ kg}$ 이므로 여기서 나오는 총 에너지는

$$E = (2.0 \times 10^{29})(6.3 \times 10^{14}) \approx 1.26 \times 10^{44} \text{ J}$$

$$t = \frac{E}{P} \approx \frac{1.26 \times 10^{44}}{4.0 \times 10^{26}} \approx 3.2 \times 10^{17} \text{ s} \approx 1.0 \times 10^{10} \text{ 년}$$

$$t \approx 100 \text{ 억 년}$$

이 값은 태양이 주계열성으로 빛날 수 있는 전체 수명 의 크기를 가리킨다. 중심핵의 온도와 압력이 충분히 높은 영역이 태양 질량의 10% 정도이므로, 그 안의 수소가 다 타면 태양은 지금과 같은 방식으로 빛날 수 없다. 이미 46억 년이 지났으니 태양은 대략 수명의 절반쯤을 지낸 셈이다. 화학 반응(석탄 연소는 1 kg당 $3.0 \times 10^7 \text{ J}$ 남짓)으로는 이만한 에너지를 도저히 낼 수 없어 태양이 수천 년밖에 빛나지 못한다는 결론이 나오는데, 질량-에너지 등가가 이 오래된 난제를 풀었다.



[해설 그림 4] 1 kg에서 꺼낼 수 있는 에너지의 비교

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$P = 4\pi r^2 S$ 를 세워 $4.0 \times 10^{26} \text{ W}$ 를 구한 경우	1
(2)	$\Delta m / \Delta t = P / c^2$ 로 초당 질량 손실을 구하고, 46억 년 누적량을 전체 질량과 비교하여 백분율로 나타낸 경우	2
(3)	0.70%를 써서 1 kg당 에너지를 구하고, 태양 질량의 10%로부터 약 100억 년을 얻어 그것이 태양의 수명임을 해석한 경우	2

제 3 회 · 원자핵과 방사선

문제 1 반감기와 연대 측정

붕괴 법칙 · 로그 그래프 · 방사능

(1) 정답: $3T = 17190$ 년

$1/8 = (1/2)^3$ 이므로 반감기 3번이 지나야 한다.

$$t = 3T = 3 \times 5730 \approx 1.7 \times 10^4 \text{ 년}$$

반감기가 외부 조건에 영향을 받지 않는 까닭은, 붕괴가 **원자핵 안에서 일어나는 사건** 이기 때문이다. 온도나 압력, 화학 결합은 모두 원자핵 바깥의 전자 상태를 바꾸는 것인데, 그때 관여하는 에너지는 eV 수준인 반면 핵을 묶는 에너지는 MeV 수준으로 백만 배가량 크다. 또 각 원자핵은 단위 시간당 붕괴할 확률이 일정하며 그 확률은 이웃한 핵의 존재나 지금까지 얼마나 오래 있었는지와 무관하다. 그래서 시료의 양이 아무리 달라져도 **비율** 은 언제나 같은 규칙을 따른다. 이 성질 덕분에 방사성 붕괴를 믿을 수 있는 시계로 쓸 수 있다. (전자 포획으로 붕괴하는 소수의 핵종만은 핵 위치의 전자 밀도가 관여해 1%에 못 미치는 아주 작은 화학적 의존성이 실측된다.)

(2) 정답: $2T = 11460$ 년

방사능은 $A = \lambda N$ 이고 λ 는 상수이므로, 방사능의 비는 곧 남아 있는 원자 수의 비와 같다. $25\% = 1/4 = (1/2)^2$ 이므로

$$t = 2T = 2 \times 5730 = 11460 \text{ 년}$$

측정 상한이 생기는 까닭은 남아 있는 ^{14}C 가 지수적으로 줄기 때문이다. 5만 년은 약 $50000/5730 \approx 8.7$ 반감기에 해당하므로 남은 비율은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{8.7} \approx 2.4 \times 10^{-3}$$

즉 처음의 0.24%뿐이다. 이쯤 되면 시료 자체의 방사능이 우주선이나 주변 물질에서 오는 배경 방사선에 묻혀 버려 신뢰할 만한 계수를 얻을 수 없다. 게다가 오염이 조금만 섞여도 오차가 급격히 커진다. 더 오래된 시료를 재려면 반감기가 훨씬 긴 다른 방법(예: ^{40}K - ^{40}Ar)을 써야 한다.

(3) 정답: 기울기는 $-\lambda/\ln 10$, $A_A : A_B = 10 : 1$

$N = N_0 e^{-\lambda t}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log N = \log N_0 - \left(\frac{\lambda}{\ln 10}\right)t$$

이므로 $\log N-t$ 그래프는 기울기가 $-\lambda/\ln 10$ 인 직선이다.

기울기의 크기는 붕괴 상수 $\lambda = \ln 2/T$ 에 비례하므로, 기울기를 재면 곧바로 반감기를 얻는다.

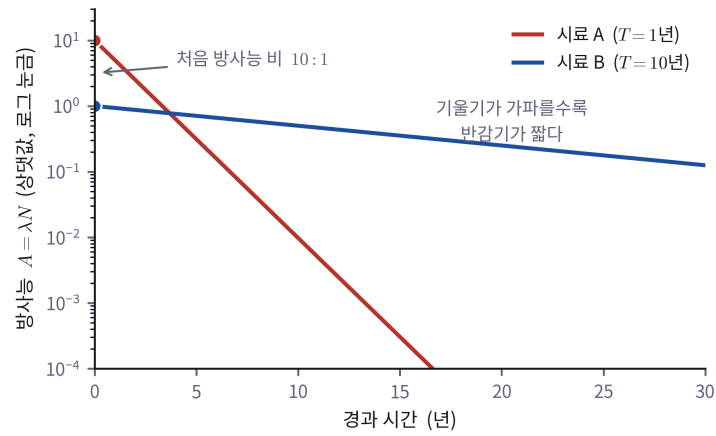
로그 눈금으로 그리는 실익이 여기에 있다. 선형 눈금에서는 곡선의 휘어진 정도를 눈으로 견주기 어렵지만, 로그 눈금에서는 **직선인지 아닌지**로 지수 감소를 검증할 수 있고 기울기 하나로 반감기를 읽어 낼 수 있다. 여러 자릿수에 걸친 감소를 한 그림에 담을 수 있다는 장점도 있다.

처음 원자 수가 N_0 로 같을 때 방사능은

$$A = \lambda N_0 = \frac{\ln 2}{T} N_0 \Rightarrow A \propto \frac{1}{T}$$

$$A_A : A_B = \frac{1}{T_A} : \frac{1}{T_B} = \frac{1}{1} : \frac{1}{10} = 10 : 1$$

반감기가 짧을수록 처음 방사능은 세다. 짧은 시간에 다 붕괴해 버리는 만큼 단위 시간당 붕괴 수가 많다는 뜻이며, 반대로 반감기가 긴 핵은 방사능이 약한 대신 오래간다. 의료용 추적자로 반감기가 몇 시간인 핵종을 쓰는 것은 짧은 시간에 충분한 신호를 얻으면서 몸에 오래 남지 않게 하기 위해서다.



[해설 그림 5] 반감기가 다른 두 시료의 방사능

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$1/8 = (1/2)^3$ 에서 $3T$ 를 구하고, 핵 내부 사건이라는 점과 에너지 규모의 차이로 외부 조건과 무관함을 설명한 경우	1
(2)	$A \propto N$ 을 이용해 $2T$ 를 구하고, 남은 비율이 배경 방사선에 묻히는 것을 상한의 근거로 제시한 경우	2
(3)	로그를 취해 직선의 기울기가 $-\lambda/\ln 10$ 임을 보이고, $A \propto 1/T$ 에서 10 : 1을 구해 물리적으로 해석한 경우	2

문제 2 핵분열과 중성자의 감속

질량 결손 · 탄성 충돌 · 지수와 로그

(1) 정답: $\Delta m = 0.1859 \text{ u}$, $Q \approx 173 \text{ MeV}$

반응 전후의 질량을 각각 더한다.

$$\text{반응 전} = 235.0439 + 1.0087 = 236.0526 \text{ u}$$

$$\text{반응 후} = 140.9144 + 91.9262 + 3 \times 1.0087 = 235.8667 \text{ u}$$

$$\Delta m = 0.1859 \text{ u}, \quad Q = 0.1859 \times 931.5 \approx 173 \text{ MeV}$$

핵자 1개당으로 따지면 약 0.74 MeV로, 화학 반응 1회에서 나오는 에너지(수 eV)의 백만 배에 가깝다. 우라늄 1 kg에서 석탄 수천 톤에 맞먹는 에너지가 나오는 근거이다.

(2) 정답: $v' = ((m - M)/(m + M))v$, $M = m$ 일 때 손실 비율이 최대(모두 잃는다)

정면 탄성 충돌에서 운동량 보존과 운동 에너지 보존은

$$mv = mv' + MV', \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$$

이다. 두 번째 식을 $m(v^2 - v'^2) = MV'^2$, 첫 번째 식을 $m(v - v') = MV'$ 로 정리한 뒤 나누면 $v + v' = V'$ 를 얻는다. 이것을 다시 첫 식에 넣어 정리하면

$$v' = \frac{m - M}{m + M}v, \quad V' = \frac{2m}{m + M}v$$

한 번의 충돌에서 잃는 운동 에너지의 비율은

$$f = 1 - \left(\frac{v'}{v}\right)^2 = 1 - \left(\frac{m - M}{m + M}\right)^2$$

이고, $(m - M)^2 \geq 0$ 이므로 f 는 $m = M$ 일 때 최대이며 그 값은 $f = 1$ 이다.

$$M = m$$

일 때 중성자는 운동 에너지를 한 번에 모두 넘겨주고 정지한다.

당구공을 같은 공에 정면으로 맞히면 친 공이 그 자리에 서는 것과 같은 상황이다. 감속재로는 중성자와 질량이 가장 비슷한 원자핵, 즉 수소가 원리적으로 가장 효율이 좋다는 뜻이며, 실제로 보통 물이 널리 쓰이는 이유이다. 다만 수소는 중성자를 흡수해 버리는 확률도 함께 커서, 천연 우라늄을 쓰려면 중수(^2H)나 흑연처럼 흡수가 적은 감속재를 택하게 된다.

(3) 정답: 한 번에 $(11/13)^2 \approx 0.72$ 배, 최소 55번

$M = 12m$ 이므로

$$\frac{v'}{v} = \frac{m - 12m}{m + 12m} = -\frac{11}{13} \Rightarrow \frac{K'}{K} = \left(\frac{11}{13}\right)^2 = \frac{121}{169} \approx 0.716$$

정면 충돌 한 번마다 운동 에너지가 약 0.72배로 줄어든다.

n 번 충돌한 뒤의 에너지가 0.025 eV 이하가 되어야 하므로

$$2 \times 10^6 \times \left(\frac{121}{169}\right)^n \leq 0.025 \Rightarrow \left(\frac{121}{169}\right)^n \leq 1.25 \times 10^{-8}$$

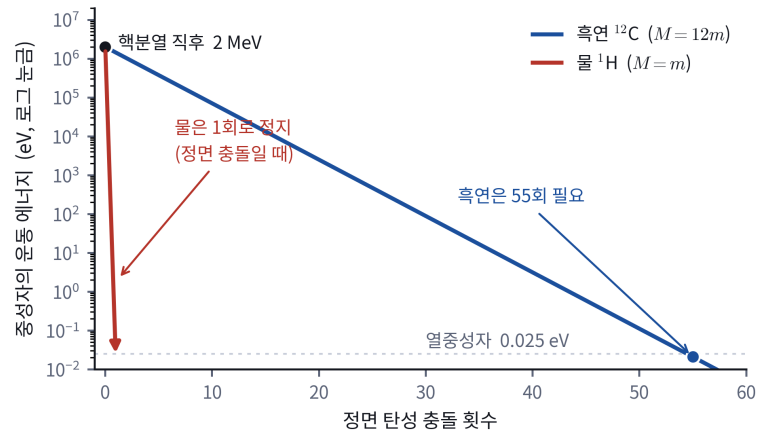
양변에 상용로그를 취한다. $\log(121/169) = 2(\log 11 - \log 13) = 2(1.041 - 1.114) = -0.146$ 이고, $\log(1.25 \times 10^{-8}) = (1 - 3\log 2) - 8 = 0.097 - 8 = -7.903$ 이므로

$$-0.146n \leq -7.903 \Rightarrow n \geq 54.1$$

$$n = 55 \text{ 번}$$

물이라면 원리적으로 한 번이면 되는 일에 흑연은 55번이 필요하다. 질량 차가 클수록 한 번에 넘겨줄 수 있는 에너지의 비율이 작아지기 때문이다. 다만 실제 원자로에서는 충돌이 늘 정면으로 일어나지 않고 임의의 각도로 일어나므로, 평균적으로는 흑연에서 100번을 훌쩍 넘는 충돌이 필요하다. 그만큼 감속재를 두껍게 써야 하고, 이것이 흑연 감속로의 노심이 큰 이유이다.

또 하나 짚을 것이 있다. 0.025 eV는 상온에 있는 감속재 원자핵의 열운동 에너지와 같은 크기이므로, 그 근처에서는 **표적이 정지해 있다**는 가정이 더 이상 성립하지 않는다. 중성자는 0까지 내려가는 것이 아니라 감속재와 열평형에 이르러 평균 0.025 eV 부근에 머무르며, ‘열중성자’라는 이름도 여기에서 나왔다.



[해설 그림 6] 감속재에 따른 중성자 에너지의 감소

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	반응 전후 질량의 합을 정확히 계산해 질량 결손과 $Q \approx 173 \text{ MeV}$ 를 구한 경우	1
(2)	두 보존 법칙에서 v' 를 옳게 유도하고, 손실 비율이 $M = m$ 에서 최대임을 보여 그 의미를 설명한 경우	2
(3)	$(11/13)^2$ 을 구하고 로그를 이용해 $n \geq 54.1$ 에서 55번을 얻은 경우 (실제로는 비정면 충돌 때문에 더 필요함을 지적하면 가점)	2