



모의 면접 · 구술고사

자연계열 · 의학

I. 문제

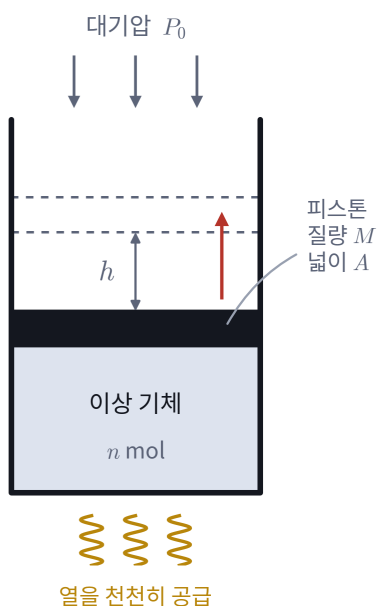
제 1 회 · 역학과 열 — 힘의 평형 · 일 · 열역학 제1법칙

문제 1 피스톤이 달린 실린더

물리학 I · II · 12분 · 소문항 3개

그림 1과 같이 연직으로 세운 실린더 안에 단원자 이상 기체 n mol이 들어 있고, 그 위를 질량 M , 단면의 넓이 A 인 피스톤이 막고 있다. 피스톤은 실린더 벽을 따라 마찰 없이 미끄러지며, 바깥은 대기압 P_0 인 공기로 채워져 있다. 실린더 아래에서 열을 아주 천천히 공급하여 피스톤이 높이 h 만큼 위로 올라갔다.

이상 기체 상태 방정식은 $PV = nRT$ 이고, 단원자 이상 기체의 내부 에너지는 $U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}PV$ 이다. 열역학 제 1법칙은 $Q = \Delta U + W$ 이다. 여기서 W 는 기체가 바깥에 한 일이다. 중력 가속도의 크기는 g 이며, 실린더와 피스톤을 통한 열의 출입, 기체의 무게, 피스톤의 운동 에너지는 모두 무시한다.



[그림 1] 피스톤이 달린 실린더

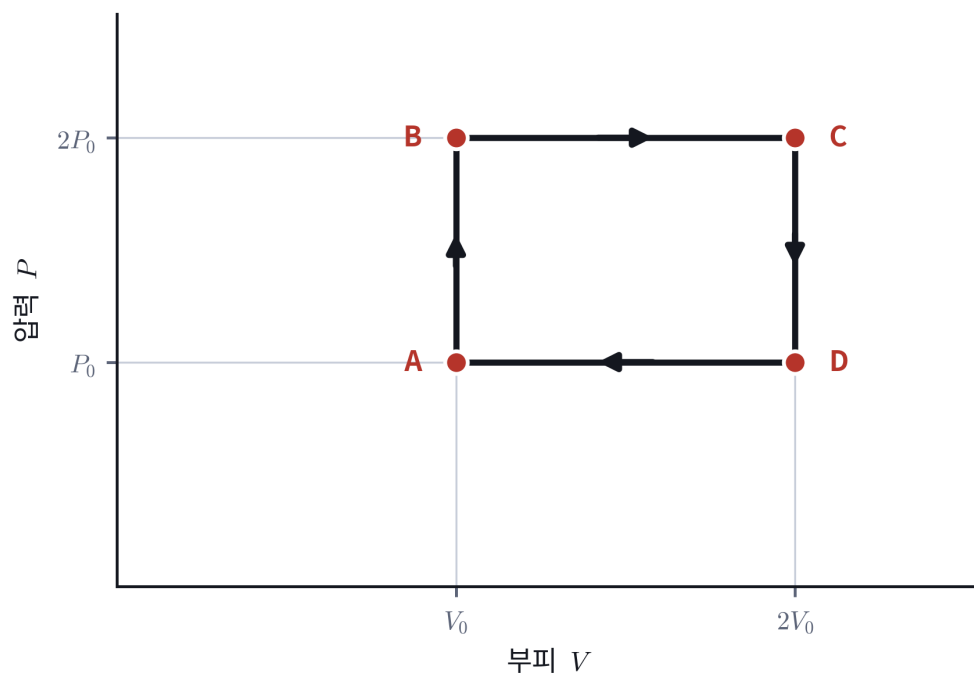
- (1) 피스톤이 평형을 이룰 때 기체의 압력 P 를 P_0 , M , g , A 로 나타내시오. 또, 열을 공급하여 피스톤이 올라가는 동안 기체의 압력이 일정하게 유지되는 까닭을 설명하시오. [1점]
- (2) 피스톤이 h 만큼 올라갔을 때 기체가 한 일 W , 내부 에너지의 변화량 ΔU , 공급한 열량 Q 를 각각 P , A , h 로 나타내시오. 또, 공급한 열 가운데 일로 바뀐 비율을 구하시오. [2점]
- (3) $P_0 = 1.0 \times 10^5$ Pa, $A = 2.0 \times 10^{-2}$ m², $M = 20$ kg, $h = 0.10$ m, $g = 10$ m/s²일 때 W 와 Q 를 각각 구하시오. 또, 이번에는 피스톤을 고정해 두고 같은 열량 Q 를 공급했다면 기체의 온도 변화는 앞의 경우의 몇 배가 되는지 구하고, 그렇게 되는 까닭을 설명하시오. [2점]

문제 2 열기관의 순환 과정과 효율

물리학 I · II · 12분 · 소문항 3개

그림 2와 같이 단원자 이상 기체 1 mol이 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ 의 순환 과정을 되풀이한다. A의 상태는 (V_0, P_0) , B는 $(V_0, 2P_0)$, C는 $(2V_0, 2P_0)$, D는 $(2V_0, P_0)$ 이다. A $\rightarrow$ B와 C $\rightarrow$ D는 부피가 일정한 과정, B $\rightarrow$ C와 D $\rightarrow$ A는 압력이 일정한 과정이다.

이상 기체 상태 방정식은 $PV = nRT$ 이고, 단원자 이상 기체의 내부 에너지는 $U = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}PV$ 이다. 열효율은 한 순환에서 기체가 한 알짜 일을 그 순환에서 흡수한 열의 총합으로 나눈 값으로 정의한다. 온도가 T_H 인 고열원과 T_L 인 저열원 사이에서 작동하는 열기관이 가질 수 있는 최대 효율은 $1 - T_L/T_H$ 이다.



[그림 2] 기체가 되풀이하는 순환 과정

- (1) 네 상태 A, B, C, D에서의 온도를 각각 P_0, V_0, R 로 나타내시오. 또, 한 순환에서 기체가 한 알짜 일이 그림 2에서 순환이 둘러싸는 넓이와 같음을 설명하시오. [1점]
- (2) 네 과정 각각에 대하여 기체가 한 일 W , 내부 에너지 변화 ΔU , 출입한 열 Q 를 $P_0 V_0$ 단위로 구하시오. 또, 이 순환의 열효율을 구하시오. [2점]
- (3) 이 순환에서 기체가 도달하는 최고 온도와 최저 온도 사이에서 작동하는 열기관이 가질 수 있는 최대 효율을 구하고, (2)에서 구한 값과 비교하시오. 또, 이 순환의 효율이 그 최댓값에 크게 못 미치는 까닭을 설명하시오. [2점]

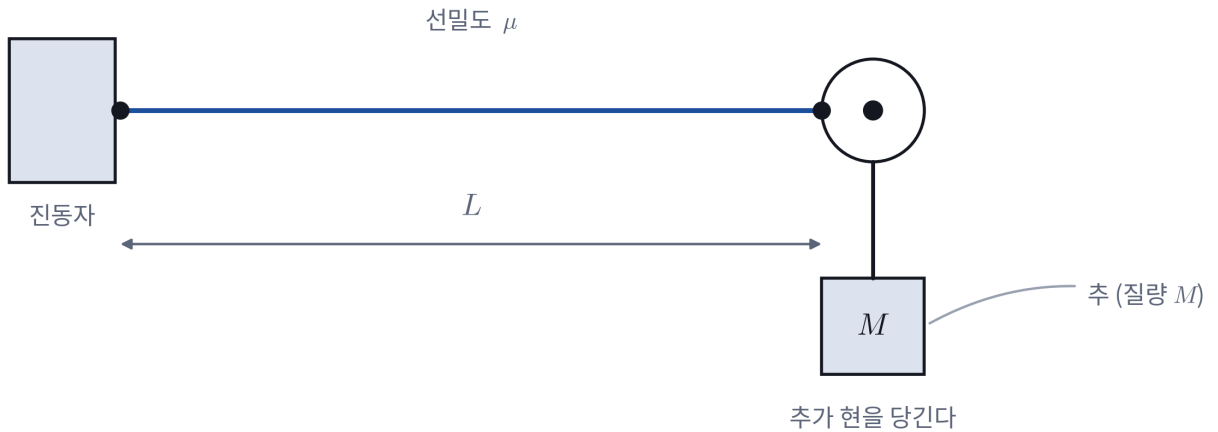
제 2 회 · 역학과 파동 — 힘의 평형 · 정상파 · 도플러 효과

문제 1 현의 정상파와 장력

물리학 I · II · 12분 · 소문항 3개

그림 3과 같이 선밀도가 μ 인 가늘고 균일한 줄의 한쪽 끝을 진동자에 매고, 다른 쪽 끝을 도르래에 걸어 질량 M 인 추를 매달았다. 진동자와 도르래 사이의 거리는 L 이며, 이 두 지점은 언제나 마디가 된다.

장력이 T 인 줄을 따라 진행하는 파동의 속력은 $v = \sqrt{T/\mu}$ 이다. 진동자의 진동수를 서서히 올리면 특정한 진동수에서만 정상파가 뚜렷하게 나타난다. 도르래의 마찰과 줄의 무게는 무시하며, 중력 가속도의 크기는 $g = 10 \text{ m/s}^2$ 이다.



[그림 3] 정상파를 만드는 장치

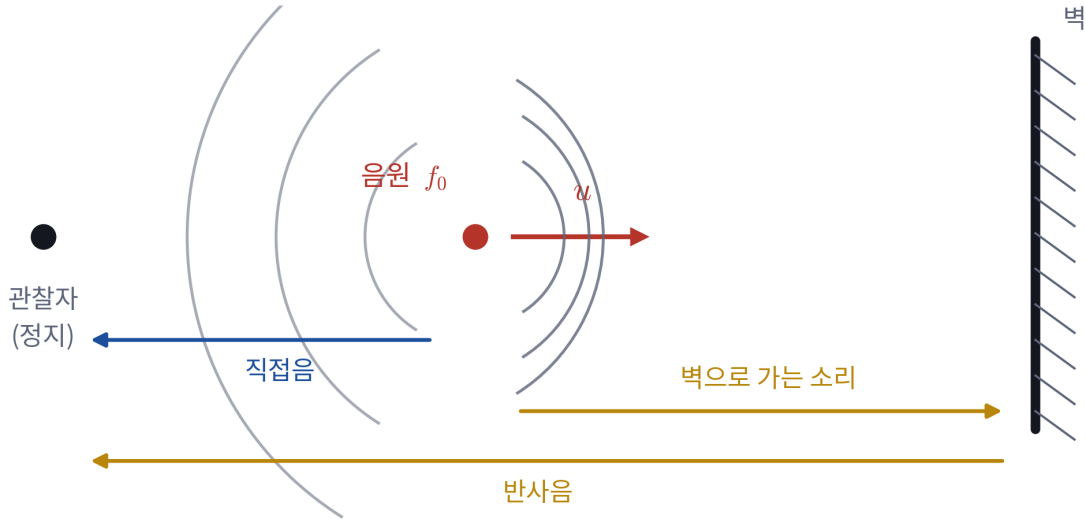
- (1) $L = 1.0 \text{ m}$, $\mu = 4.0 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$, $M = 1.6 \text{ kg}$ 일 때 줄의 장력 T 과 파동의 속력 v 를 구하고, 정상파가 생기는 가장 낮은 진동수를 구하시오. [1점]
- (2) 진동자의 진동수를 0에서부터 서서히 올릴 때 정상파가 나타나는 진동수를 낮은 쪽부터 차례로 네 개 쓰시오. 또, 400 Hz의 정상파가 만들어졌을 때 줄 위에 생기는 마디의 개수를 구하시오. [2점]
- (3) 추를 질량 14.4 kg인 것으로 바꾸면 가장 낮은 진동수는 몇 배가 되는지 구하시오. 또, 처음 상태($M = 1.6 \text{ kg}$, $L = 1.0 \text{ m}$)로 되돌린 다음 줄의 길이만 $2L$ 로 늘리고도 가장 낮은 진동수를 처음과 같게 유지하려면 추의 질량을 얼마로 해야 하는지 구하시오. 또, 처음 상태에서 정상파가 만들어져 있을 때 줄의 한가운데를 손가락으로 살짝 누르면 어떤 진동수의 정상파가 사라지는지 근거와 함께 설명하시오. [2점]

문제 2 벽을 향해 달리는 음원과 맥놀이

물리학 I · II · 12분 · 소문항 3개

그림 4와 같이 진동수가 f_0 인 소리를 내는 음원이 벽을 향해 일정한 속력 u 로 달린다. 음원의 뒤쪽에 정지해 있는 관찰자는 음원에서 곧바로 오는 소리(직접음)와 벽에서 되돌아온 소리(반사음)를 함께 듣는다. 벽은 자신이 받은 소리를 그대로 되돌려 보낸다.

음속을 V 라 할 때, 정지한 관찰자가 듣는 소리의 진동수는 음원이 다가오면 $f_0 V / (V - u)$, 멀어지면 $f_0 V / (V + u)$ 이다. 진동수가 조금 다른 두 소리가 겹치면 세기가 주기적으로 커졌다 작아지는 맥놀이(beat)가 들리며, 그 진동수는 두 진동수의 차와 같다. 공기의 흐름과 소리의 감쇠, 소리가 전파되는 데 걸리는 시간은 무시하며, 음원의 속력은 언제나 음속보다 훨씬 작다고 본다.



[그림 4] 벽을 향해 달리는 음원과 정지한 관찰자

- (1) 벽이 받는 소리의 진동수와, 관찰자가 직접음으로 듣는 소리의 진동수를 각각 f_0 , V , u 로 나타내시오. 또, 벽에서 되돌아온 소리가 관찰자에게 도달할 때 진동수가 한 번 더 바뀌는지를 근거와 함께 밝히시오. [1점]
- (2) 관찰자가 듣는 맥놀이의 진동수를 f_0 , V , u 로 나타내시오. 또, $u \ll V$ 일 때 이 값이 $2uf_0/V$ 로 근사됨을 보이고, $V = 340 \text{ m/s}$, $u = 3.4 \text{ m/s}$, $f_0 = 500 \text{ Hz}$ 일 때의 값을 구하시오. [2점]
- (3) 음원이 정지 상태에서 출발하여 벽을 향해 가속도의 크기가 3.4 m/s^2 인 등가속도 운동을 한다면, 맥놀이 진동수가 시간에 따라 어떻게 변하는지 근거와 함께 설명하고 1초마다 몇 Hz씩 달라지는지 구하시오. 또, 음원이 벽에서 멀어지는 방향으로 같은 속력으로 달리면 맥놀이 진동수가 어떻게 되는지 설명하시오. [2점]

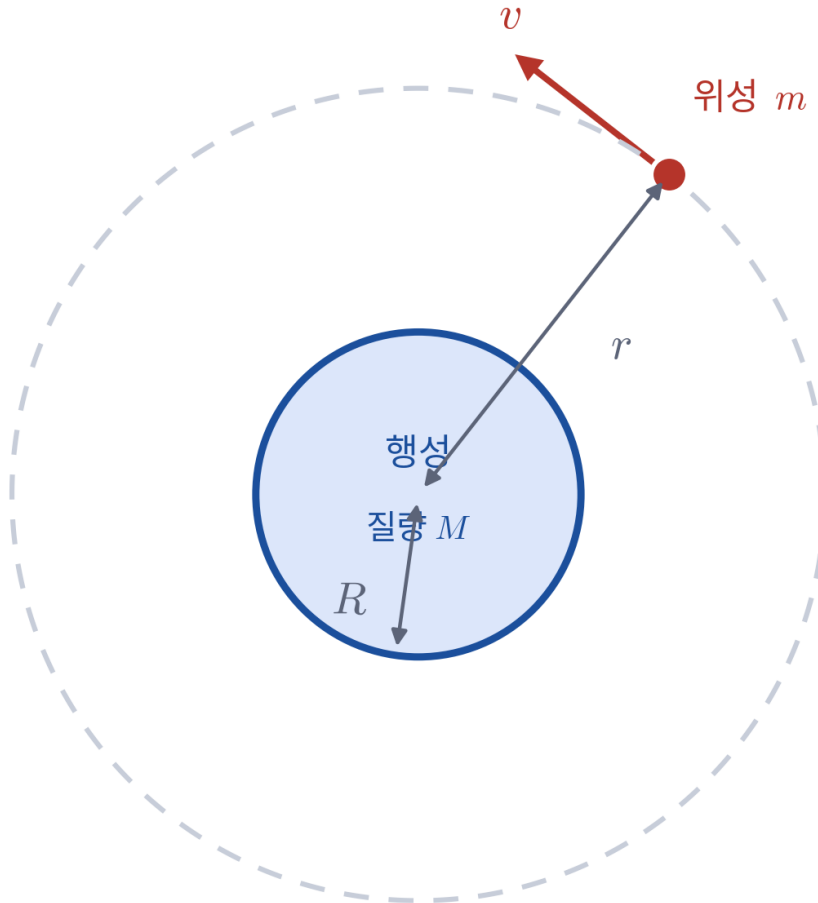
제 3 회 · 역학 종합 — 만유인력 · 원운동 · 돌림힘

문제 1 인공위성의 궤도와 에너지

물리학 I · II · 12분 · 소문항 3개

그림 5와 같이 질량 M , 반지름 R 인 행성 둘레를 질량 m 인 인공위성이 반지름 r 인 원궤도를 따라 돈다. 두 물체 사이에는 만유인력 $F = GMm/r^2$ 이 작용하고, 무한히 먼 곳을 기준으로 한 만유인력 퍼텐셜 에너지는 $U = -GMm/r$ 이다.

행성 표면에서의 중력 가속도는 $g = GM/R^2$ 이고, 행성의 자전 주기는 24시간이다. 대기의 영향, 위성의 크기, 자전이 위성의 운동에 미치는 영향은 모두 무시한다.



[그림 5] 행성 둘레를 도는 인공위성

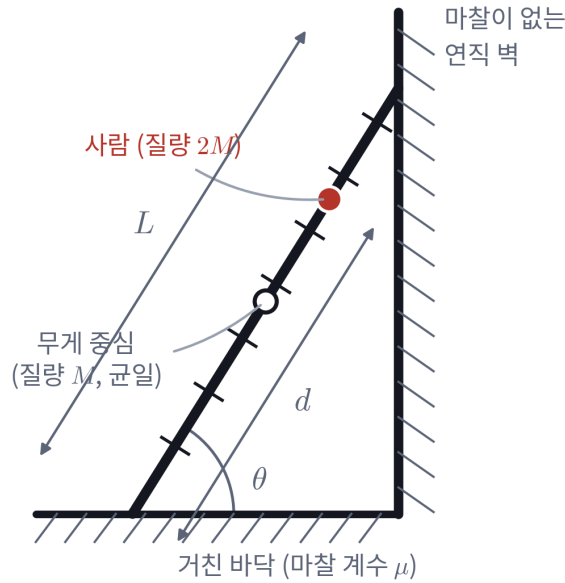
- (1) 원궤도를 도는 위성의 속력 v 와 공전 주기 T 를 각각 G, M, r 로 나타내고, 이로부터 T^2 이 r^3 에 비례함(케플러 제3 법칙)을 보이시오. [1점]
- (2) 위성의 운동 에너지 K 와 역학적 에너지 $E = K + U$ 를 각각 G, M, m, r 로 나타내고, $|U| = 2K$ 이며 $E = -K$ 임을 보이시오. 또, 이 위성을 행성의 인력을 완전히 벗어나게 하려면 최소한 얼마의 에너지를 더 주어야 하는지 구하시오. [2점]
- (3) 지구를 $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ 인 행성으로 보자. 지표에 아주 가까운 원궤도를 도는 위성의 속력과 주기를 구하고, 지표에서의 탈출 속력을 구하시오. 또, 자전 주기와 같은 24시간을 주기로 도는 정지 궤도의 반지름이 지구 반지름의 몇 배인지 구하시오. [2점]

문제 2 벽에 기대어 사다리의 평형

물리학 I · II · 12분 · 소문항 3개

그림 6과 같이 길이 L , 질량 M 인 균일한 사다리가 마찰이 없는 연직 벽에 기대어 거친 바닥 위에 놓여 있다. 사다리가 바닥과 이루는 각은 θ 이고, 바닥과 사다리 사이의 정지 마찰 계수는 μ 이다.

강체가 정지해 있으려면 (가) 작용하는 모든 힘의 합이 0이고, (나) 임의의 한 점에 대한 돌림힘의 합이 0이어야 한다. 어떤 점에서 작용선까지의 수직 거리를 l 이라 할 때 크기가 F 인 힘의 돌림힘의 크기는 $F l$ 이다. 사다리의 두께와 벽·바닥의 변형은 무시하며, 중력 가속도의 크기는 g 이다.



[그림 6] 마찰이 없는 벽에 기대어 사다리

- (1) 사다리에 작용하는 힘을 모두 쓰고, 각각이 어느 방향인지 밝히시오. 또, 수평 방향과 연직 방향의 힘의 평형식을 각각 세우시오. [1점]
- (2) 사다리와 바닥이 닿는 점을 기준으로 돌림힘의 평형식을 세워, 벽이 사다리를 미는 힘의 크기를 M, g, θ 로 구하시오. 또, 사다리가 미끄러지지 않을 조건이 $\tan \theta \geq 1/(2\mu)$ 임을 보이시오. [2점]
- (3) $\mu = 0.50$ 일 때 사다리가 미끄러지지 않을 최소 각을 구하시오. 또, 질량이 $2M$ 인 사람이 사다리의 아래 끝에서 사다리를 따라 거리 d 인 곳까지 올라갔을 때 미끄러지지 않을 조건을 구하고, $\theta = 45^\circ, \mu = 0.50$ 에서 사람이 올라갈 수 있는 최대 거리를 L 로 나타내시오. [2점]

II. 예시답안

제 1 회 · 역학과 열

문제 1 피스톤이 달린 실린더

힘의 평형 · 일 · 열역학 제1법칙

(1) 정답: $P = P_0 + Mg/A$

피스톤에 작용하는 힘은 아래에서 기체가 미치는 힘 PA (위쪽), 위에서 대기가 미치는 힘 P_0A (아래쪽), 그리고 무게 Mg (아래쪽)이다. 피스톤이 평형이므로

$$PA = P_0A + Mg$$

$$P = P_0 + \frac{Mg}{A}$$

여기서 P_0, M, g, A 가 모두 변하지 않는 값이므로 P 도 변할 수 없다. 열을 공급하면 기체는 팽창하지만, 피스톤이 아주 천천히 움직이는 한 언제나 이 평형식을 만족해야 하므로 압력은 처음 값 그대로 유지된다. **압력을 정하는 것은 기체가 아니라 피스톤에 걸린 하중**이라는 점이 이 문제의 핵심이며, 이것이 등압 과정이 되는 이유이다.

(2) 정답: $W = PAh$, $\Delta U = \frac{3}{2}PAh$, $Q = \frac{5}{2}PAh$, **일로 바뀐 비율** $= 2/5 = 40\%$

부피 변화는 $\Delta V = Ah$ 이고 압력이 일정하므로

$$W = P\Delta V = PAh$$

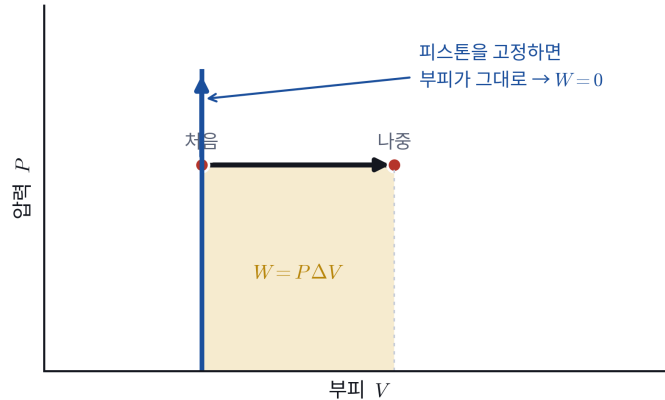
한편 $PV = nRT$ 에서 압력이 일정하므로 $P\Delta V = nR\Delta T$ 이고, 따라서

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}P\Delta V = \frac{3}{2}PAh$$

$$Q = \Delta U + W = \frac{3}{2}PAh + PAh = \frac{5}{2}PAh$$

$$\frac{W}{Q} = \frac{PAh}{\frac{5}{2}PAh} = \frac{2}{5} = 40\%$$

즉 등압 과정에서 단위자 이상 기체에 넣어 준 열의 40%만 일로 바뀌고 나머지 60%는 기체 자신의 내부 에너지를 올리는 데 쓰인다. 이 비율은 P, A, h 의 값과 무관하게 언제나 같다.



[해설 그림 1] 등압 과정에서 기체가 한 일은 P - V 그래프의 넓이

(3) 정답: $W = 220 \text{ J}$, $Q = 550 \text{ J}$, **온도 변화는 5/3 배**

$$P = 1.0 \times 10^5 + \frac{20 \times 10}{2.0 \times 10^{-2}} = 1.0 \times 10^5 + 1.0 \times 10^4 = 1.1 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$W = PAh = (1.1 \times 10^5)(2.0 \times 10^{-2})(0.10) = 220 \text{ J}$$

$$W = 220 \text{ J}, \Delta U = 330 \text{ J}, Q = 550 \text{ J}$$

피스톤을 고정하면 부피가 변하지 않으므로 $W = 0$ 이고, 공급한 열이 모두 내부 에너지로 간다.

$$\Delta U' = Q = 550 \text{ J} \quad (\text{앞의 경우}) \quad \Delta U = 330 \text{ J}$$

내부 에너지는 온도에 비례하므로

$$\frac{\Delta T'}{\Delta T} = \frac{\Delta U'}{\Delta U} = \frac{550}{330} = \frac{5}{3}$$

같은 열을 넣어도 부피를 고정하면 온도가 더 많이 오른다. 팽창을 허용하면 넣어 준 열의 일부가 **바깥에 일을 하는 데** 빠져나가기 때문이다. 정적 몰비열이 정압 몰비열보다 작은 것이 바로 이 차이이며, 그 비는 여기서 얻은 $\frac{5}{2}/\frac{3}{2} = 5/3$ 과 정확히 같다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	피스톤의 힘의 평형에서 $P = P_0 + Mg/A$ 를 구하고, 그 값이 변하지 않으므로 등압 과정임을 설명한 경우	1
(2)	$W, \Delta U, Q$ 를 모두 옳게 구하고 일로 바뀐 비율이 $2/5$ 로 일정함을 밝힌 경우	2
(3)	수치를 정확히 계산하고, 부피를 고정하면 일이 0이 되어 온도 변화가 $5/3$ 배가 됨을 근거와 함께 설명한 경우	2

문제 2 열기관의 순환 과정과 효율

상태 방정식 · 순환 과정 · 열효율

(1) 정답: $T_A = P_0 V_0 / R$, $T_B = T_D = 2P_0 V_0 / R$, $T_C = 4P_0 V_0 / R$

$n = 1$ 이므로 $T = PV/R$ 이다. 각 상태의 PV 를 계산하면

상태	A	B	C	D
PV	$P_0 V_0$	$2P_0 V_0$	$4P_0 V_0$	$2P_0 V_0$
온도	$P_0 V_0 / R$	$2P_0 V_0 / R$	$4P_0 V_0 / R$	$2P_0 V_0 / R$

부피가 일정한 과정에서는 $W = 0$ 이고, 압력이 일정한 과정에서는 $W = P\Delta V$ 로 P - V 그래프 아래의 직사각형 넓이와 같다. 한 순환을 돌면 $B \rightarrow C$ 에서 기체가 한 일에서 $D \rightarrow A$ 에서 기체가 받은 일을 뺀 값이 남는데, 이는 두 직사각형의 넓이 차이, 즉

$$\text{알짜 일} = \text{순환이 둘러싸는 넓이} = (2P_0 - P_0)(2V_0 - V_0) = P_0 V_0$$

순환이 시계 방향이므로 알짜 일은 양수이고, 이 장치는 열을 받아 일을 하는 열기관으로 작동한다.

(2) 정답: 열효율 $= 2/13 \approx 15.4\%$

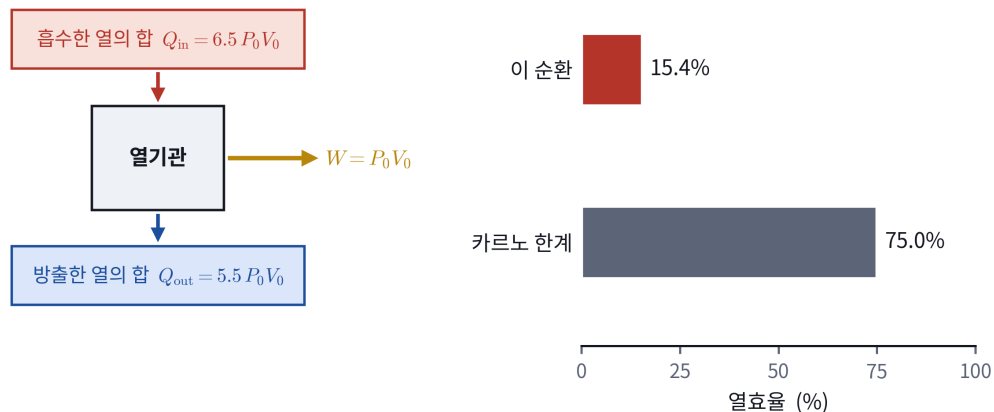
$\Delta U = \frac{3}{2}\Delta(PV)$ 를 이용해 네 과정을 정리한다. (단위는 모두 $P_0 V_0$)

과정	W	ΔU	$Q = \Delta U + W$	열의 출입
$A \rightarrow B$ (등적)	0	+1.5	+1.5	흡수
$B \rightarrow C$ (등압)	+2	+3	+5	흡수
$C \rightarrow D$ (등적)	0	-3	-3	방출
$D \rightarrow A$ (등압)	-1	-1.5	-2.5	방출

한 순환을 돌면 ΔU 의 합이 0이 되어 상태가 처음으로 돌아온다는 점을 검산으로 확인할 수 있다. 알짜 일은 $2 - 1 = 1$ 이고 흡수한 열은 $1.5 + 5 = 6.5$ 이므로

$$e = \frac{P_0 V_0}{6.5 P_0 V_0} = \frac{2}{13} \approx 15.4\%$$

여기서 방출한 열의 합이 $3 + 2.5 = 5.5$ 이고 $6.5 - 5.5 = 1$ 로 알짜 일과 같다는 점도 확인된다. 즉 에너지 보존이 정확히 성립한다.



[해설 그림 2] 한 순환에서의 열의 출입과 효율 비교

(3) 정답: 최대 효율 75%. 이 순환의 15.4%는 그보다 훨씬 낮다.

최고 온도는 C에서 $T_C = 4P_0 V_0 / R$, 최저 온도는 A에서 $T_A = P_0 V_0 / R$ 이므로

$$e_{\max} = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 1 - \frac{1}{4} = 75\%$$

15.4%는 이 값의 약 1/5에 지나지 않는다. 그 까닭은 두 가지로 나누어 말할 수 있다.

- **열을 최고 온도에서만 받지 않는다.** 카르노 기관은 열을 오직 T_H 에서만 흡수하고 오직 T_L 에서만 방출한다. 그런데 이 순환은 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 를 지나는 내내 열을 흡수하는데, 그동안 기체의 온도는 T_A 에서 T_C 까지 계속 변한다. 최고 온도보다 낮은 온도에서 받은 열은 그만큼 일로 바꾸기 불리하다. 방출할 때도 마찬가지다.
- **유한한 온도 차로 열을 주고받는다.** 등적·등압 과정에서 기체와 열원 사이에는 언제나 유한한 온도 차가 있고, 이런 열의 이동은 되돌릴 수 없다. 카르노 순환이 등온 과정과 단열 과정만으로 이루어지는 것은 이 손실을 없애기 위해서다.

실제 기관의 효율이 카르노 한계에 크게 못 미치는 것도 같은 이유이며, 한계 자체를 올리려면 T_H 를 높이거나 T_L 을 낮추는 수밖에 없다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	상태 방정식으로 네 온도를 옳게 구하고, 알짜 일이 순환이 둘러싸는 넓이임을 두 등압 과정의 일의 차로 설명한 경우	1
(2)	네 과정의 $W, \Delta U, Q$ 를 모두 옳게 구하고 흡수한 열만으로 효율 2/13을 계산한 경우	2
(3)	카르노 효율 75%를 구하고, 열의 흡수·방출이 한 온도에서 일어나지 않는다는 점과 유한한 온도 차의 비가역성을 근거로 제시한 경우	2

제 2 회 · 역학과 파동

문제 1 현의 정상파와 장력

힘의 평형 · 정상파 조건 · 파동의 속력

(1) 정답: $T = 16 \text{ N}$, $v = 200 \text{ m/s}$, $f_1 = 100 \text{ Hz}$

추가 평형을 이루므로 줄의 장력은 추의 무게와 같다.

$$T = Mg = 1.6 \times 10 = 16 \text{ N}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{16}{4.0 \times 10^{-4}}} = \sqrt{4.0 \times 10^4} = 200 \text{ m/s}$$

양 끝이 마디인 정상파의 가장 낮은 진동(기본 진동)에서는 줄의 길이가 반파장 하나와 같으므로 $\lambda_1 = 2L = 2.0 \text{ m}$ 이고

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{200}{2.0} = 100 \text{ Hz}$$

(2) 정답: 100, 200, 300, 400 Hz. 400 Hz에서 마디는 5개

양 끝이 마디인 조건은 $L = n\lambda_n/2$, 즉 $\lambda_n = 2L/n$ 이므로

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} = nf_1 = 100n \text{ (Hz)}$$

$$100, 200, 300, 400 \text{ Hz}$$

400 Hz는 $n = 4$ 인 진동이다. 이때 줄에는 배가 4개, 마디가 그 사이사이와 양 끝에 놓이므로

$$\text{마디의 개수} = n + 1 = 5\text{개}$$

정상파의 진동수가 기본 진동수의 정수배로만 나타나는 것은 양 끝이 반드시 마디여야 한다는 경계 조건 때문이다. 그 조건을 만족하지 않는 진동수에서는 여러 번 반사되며 되돌아온 파동들의 위상이 어긋나 서로 보강되지 못하므로, 큰 진폭이 쌓이지 못하고 눈에 띄는 정상파가 만들어지지 않는다.

(3) 정답: 3배. 추의 질량은 6.4 kg. 홀수 배진동(100, 300 Hz ...)이 사라진다.

$$T = Mg \text{이고 } v = \sqrt{T/\mu} \propto \sqrt{M}, f_1 = v/(2L) \propto \sqrt{M} \text{이므로}$$

$$\frac{f'_1}{f_1} = \sqrt{\frac{14.4}{1.6}} = \sqrt{9} = 3$$

가장 낮은 진동수는 3배인 300 Hz가 된다.

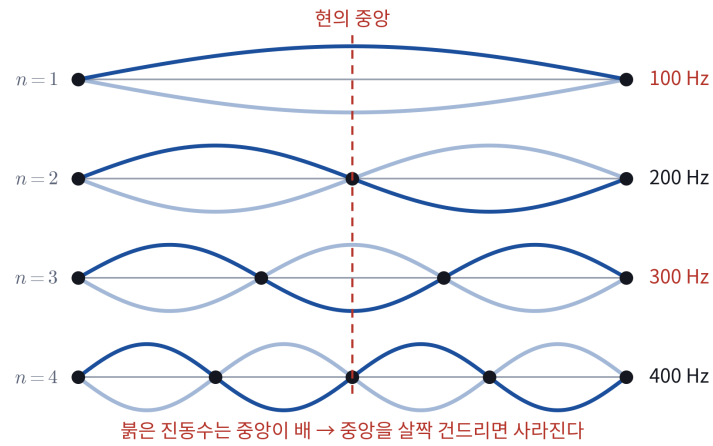
줄의 길이를 $2L$ 로 늘리고도 $f_1 = v/(2L)$ 을 그대로 두려면 v 가 2배가 되어야 하고, $v \propto \sqrt{T}$ 이므로 T 는 4배, 즉 추의 질량도 4배여야 한다.

$$M' = 4 \times 1.6 = 6.4 \text{ kg}$$

한가운데를 누르면 그 지점이 강제로 마디가 된다. 따라서 중앙이 배인 진동은 더 이상 존재할 수 없고, 중앙이 마디인 진동만 살아남는다. n 번째 진동에서 중앙이 마디가 되려면 n 이 짝수여야 하므로

n 이 홀수인 진동(100, 300, 500 Hz ...)이 사라지고 짝수인 진동(200, 400 Hz ...)만 남는다.

기타에서 줄의 정확히 한가운데를 살짝 짚어 하모닉스를 내면 원래 음보다 한 옥타브 높은 소리가 나는 것이 바로 이 현상이다.



[해설 그림 3] 정상파의 여러 모드와 중앙에서의 마디·배

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$T = Mg$ 로 장력을 구하고 $v = \sqrt{T/\mu}$ 와 $\lambda_1 = 2L$ 로 기본 진동수를 옳게 구한 경우	1
(2)	경계 조건에서 $f_n = nf_1$ 을 유도하여 네 진동수를 쓰고 마디의 개수를 $n + 1$ 로 구한 경우	2
(3)	$f_1 \propto \sqrt{M}$ 로 3배를 구하고 길이가 2배일 때의 질량을 구하였으며, 중앙이 마디가 되어 홀수 배진동이 사라짐을 설명한 경우	2

문제 2 벽을 향해 달리는 음원과 맥놀이

도플러 효과 · 맥놀이 · 등가속도 운동

(1) 정답: 벽이 받는 진동수 $f_w = f_0 V / (V - u)$, 직접음 $f_d = f_0 V / (V + u)$

벽은 음원이 다가오는 쪽에 있으므로 도플러 효과로 더 높은 진동수를 받는다.

$$f_w = \frac{f_0 V}{V - u}$$

관찰자는 음원의 뒤쪽에 있으므로 음원이 자신에게서 멀어지는 셈이고, 따라서 더 낮은 진동수를 듣는다.

$$f_d = \frac{f_0 V}{V + u}$$

반사음의 진동수는 여기서 다시 바뀌지 않는다. 벽은 자신이 받은 진동수 f_w 로 소리를 되돌려 보내는 정지한 음원 노릇을 하고 관찰자도 정지해 있으므로, 음원과 관찰자 사이에 상대 운동이 없어 도플러 효과가 일어날 까닭이 없기 때문이다. 도플러 효과를 두 번 적용해 $f_0 V^2 / (V - u)^2$ 꼴로 답하는 것이 가장 흔한 실수이다. 움직이는 것은 오직 음원 하나뿐이며, 소리가 벽에 닿는 순간 진동수는 이미 정해져 버린다.

(2) 정답: $f_{\text{맥}} = (2uVf_0)/(V^2 - u^2) \approx 2uf_0/V$, 약 10 Hz

관찰자가 듣는 두 진동수의 차가 곧 맥놀이 진동수이다.

$$f_{\text{맥}} = f_w - f_d = f_0 V \left(\frac{1}{V - u} - \frac{1}{V + u} \right) = f_0 V \cdot \frac{2u}{V^2 - u^2}$$

$$f_{\text{맥}} = \frac{2uVf_0}{V^2 - u^2}$$

$u \ll V$ 이면 분모에서 u^2 을 무시할 수 있으므로

$$f_{\text{맥}} \approx \frac{2uVf_0}{V^2} = \frac{2uf_0}{V}$$

수치를 넣으면

$$f_{\text{맥}} \approx \frac{2 \times 3.4 \times 500}{340} = 10 \text{ Hz}$$

정확한 식으로 계산해도 10.0 Hz로, $u/V = 0.01$ 이므로 근사의 오차는 0.01% 수준이다. 1초에 열 번 소리가 커졌다 작아지는 것은 귀로 충분히 셀 수 있는 빠르기이므로, 이 방법으로 음원의 속력을 꽤 정확하게 잴 수 있다.

(3) 정답: 맥놀이 진동수가 시간에 비례해 커지며 1초마다 10 Hz씩 늘어난다. 멀어질 때에도 맥놀이의 크기는 같다.

등가속도 운동이므로 t 초 뒤의 속력은 $u = at$ 이고, 맥놀이 진동수는 u 에 비례하므로

$$f_{\text{맥}(t)} \approx \frac{2f_0}{V} \cdot at$$

맥놀이 진동수는 시간에 비례해 일정한 비율로 커진다.

1초마다 늘어나는 양은

$$\frac{\Delta f_{\text{맥}}}{\Delta t} = \frac{2f_0 a}{V} = \frac{2 \times 500 \times 3.4}{340} = 10 \text{ Hz/s}$$

소리가 전파되는 데 걸리는 시간을 무시하면 출발 1초 뒤 약 10 Hz, 2초 뒤 약 20 Hz ...로 점점 빨라지는 맥놀이가 들린다. 엄밀하게는 관찰자가 어느 순간에 듣는 직접음과 반사음이 서로 다른 시각에 방출된 소리이므로 절댓값에는 약간의 보정이 필요하지만, 1초마다 늘어나는 양은 그 보정과 무관하게 $2f_0 a/V$ 로 그대로이다.

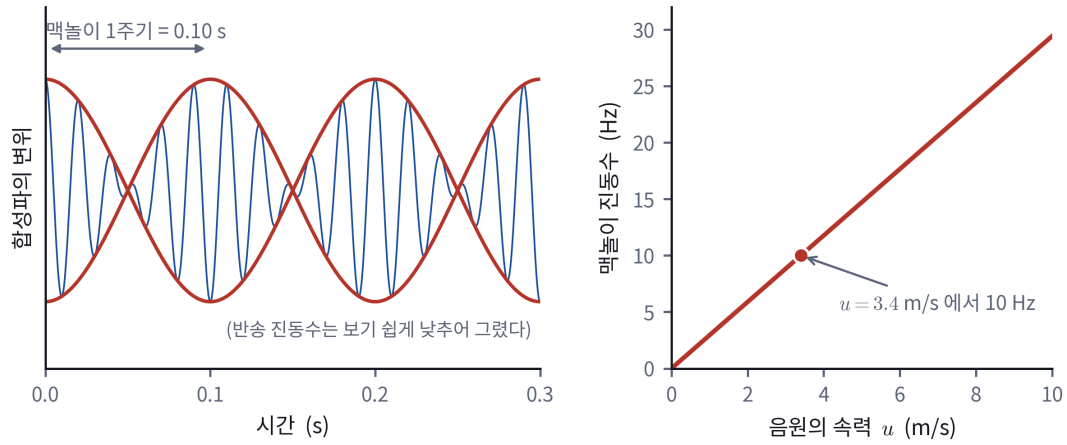
음원이 벽에서 멀어지는 방향으로 달리는 경우는 위 식에서 $u \rightarrow -u$ 로 바꾼 것과 같다. 이때 벽이 받는 진동수는 $f_0 V / (V + u)$ 로 낮아지고 직접음은 $f_0 V / (V - u)$ 로 높아져 두 진동수의 역활이 서로 바뀐다. 그러나 차의 크기는

$$|f_{\text{맥}}| = \frac{2uVf_0}{V^2 - u^2}$$

로 그대로이다.

맥놀이 진동수의 크기는 달리는 방향과 무관하며, 오직 속력의 크기로만 정해진다.

다만 어느 쪽 소리가 높은지는 반대가 되므로, 맥놀이만 듣고는 다가오는지 멀어지는지 알 수 없다. 그것까지 알아내려면 두 소리의 높낮이를 따로 구별해야 한다.



[해설 그림 4] 맥놀이 파형과 음원의 속력에 따른 맥놀이 진동수

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	벽과 관찰자가 각각 다가오는·멀어지는 경우임을 구분하여 두 진동수를 옳게 쓰고, 벽과 관찰자가 모두 정지해 있으므로 반사에서 진동수가 다시 바뀌지 않음을 근거와 함께 밝힌 경우	1
(2)	두 진동수의 차로 맥놀이 진동수를 유도하고 근사식과 수치를 옳게 구한 경우	2
(3)	맥놀이 진동수가 u 에 비례함을 근거로 시간에 비례해 커짐을 설명하고 10 Hz/s를 구하였으며, 방향을 바꾸어도 크기가 같음을 밝힌 경우	2

제 3 회 · 역학 종합

문제 1 인공위성의 궤도와 에너지

만유인력 · 등속 원운동 · 역학적 에너지

(1) 정답: $v = \sqrt{GM/r}$, $T = 2\pi\sqrt{r^3/(GM)}$

만유인력이 구심력 노릇을 하므로

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

주기는 $T = 2\pi r/v$ 이므로

$$T = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

양변을 제곱하면

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

이고, 비례 상수 $4\pi^2/(GM)$ 은 중심 천체의 질량만으로 정해질 뿐 위성의 질량과는 무관하다. 이것이 케플러 제3법칙이며, 같은 행성을 도는 모든 위성이 하나의 T^2-r^3 직선 위에 놓이는 이유이다.

(2) 정답: $K = GMm/(2r)$, $E = -GMm/(2r)$, 필요한 에너지 $= GMm/(2r)$

(1)의 결과를 쓰면

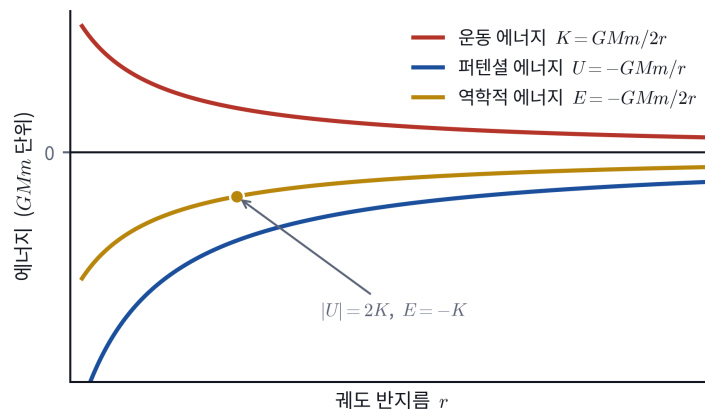
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}, \quad U = -\frac{GMm}{r}$$

$$|U| = 2K, \quad E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r} = -K$$

역학적 에너지가 음수 라는 것은 위성이 행성에 묶여 있다는 뜻이다. 인력을 완전히 벗어난다는 것은 무한히 먼 곳에 속력 0으로 도달하는 것, 즉 $E = 0$ 이 되는 것이므로 더해 주어야 할 최소 에너지는

$$\Delta E = 0 - \left(-\frac{GMm}{2r}\right) = \frac{GMm}{2r}$$

흥미로운 점은 이 값이 위성이 지금 가지고 있는 운동 에너지와 정확히 같다는 것이다. 즉 원궤도의 속력을 $\sqrt{2}$ 배로 올려 주면 탈출한다.



[해설 그림 5] 궤도 반지름에 따른 위성의 에너지

(3) 정답: $v \approx 8.0 \text{ km/s}$, $T \approx 84 \text{ 분}$, 탈출 속력 $\approx 11.3 \text{ km/s}$, 정지 궤도는 약 $6.7R$

$g = GM/R^2$ 이므로 $GM = gR^2$ 이다. 지표에 가까운 궤도는 $r \approx R$ 이므로

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR} = \sqrt{10 \times 6.4 \times 10^6} = 8.0 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$T_0 = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \times 6.4 \times 10^6}{8.0 \times 10^3} \approx 5.0 \times 10^3 \text{ s} \approx 84 \text{ 분}$$

탈출 속력은 (2)에서 본 대로 원궤도 속력의 $\sqrt{2}$ 배이다.

$$v_{\text{탈출}} = \sqrt{2} \times 8.0 \approx 11.3 \text{ km/s}$$

정지 궤도는 주기가 $T_1 = 24\text{시간} = 8.64 \times 10^4 \text{ s}$ 이므로 케플러 제3법칙에서

$$\left(\frac{r}{R}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{8.64 \times 10^4}{5.0 \times 10^3}\right)^2 \approx 17.2^2 \approx 296$$

$$\frac{r}{R} = \sqrt[3]{296} \approx 6.7$$

즉 정지 궤도는 지구 반지름의 약 6.7배(더 정확히는 6.66배)이고, 지표에서의 높이는 $(6.66 - 1) \times 6.4 \times 10^3 \text{ km}$, 즉 약 $3.6 \times 10^4 \text{ km}$ 이다. 실제 정지 위성의 궤도 반지름이 약 $4.2 \times 10^4 \text{ km}$ 인 것과 잘 맞는다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	만유인력을 구심력으로 놓아 v 와 T 를 구하고 $T^2 \propto r^3$ 을 보인 경우	1
(2)	K, E 를 구하여 $ U = 2K, E = -K$ 를 보이고 탈출에 필요한 에너지를 옳게 구한 경우	2
(3)	$GM = gR^2$ 을 이용해 지표 근접 궤도의 속력과 주기를 옳게 구한 경우 1점, 탈출 속력과 정지 궤도의 반지름 비를 옳게 구한 경우 1점 (반지름 비는 6.6~6.7 모두 인정)	2

문제 2 벽에 기대 사다리의 평형

강체의 평형 · 돌림힘 · 마찰력

(1) 정답: 무게 Mg (아래), 바닥의 수직 항력 N (위), 바닥의 마찰력 f (벽 쪽 수평), 벽의 수직 항력 N_w (벽에서 멀어지는 수평)

벽에 마찰이 없으므로 벽이 사다리에 주는 힘은 벽면에 수직인 힘, 즉 수평 방향의 N_w 뿐이다. 바닥은 거칠므로 수직 항력 N 과 수평 방향의 마찰력 f 를 함께 준다. 사다리가 미끄러진다면 아래 끝이 벽에서 멀어지는 쪽으로 밀려나므로, 마찰력은 그 반대인 벽 쪽을 향한다.

- 수평: $f = N_w$
- 연직: $N = Mg$

(2) 정답: $N_w = Mg/(2 \tan \theta)$

바닥과 닿는 점을 기준으로 삼으면 그 점에 작용하는 N 과 f 의 돌림힘이 0이 되어 계산이 간단해진다. 무게는 사다리의 한가운데, 즉 아래 끝에서 $L/2$ 인 곳에 작용하고 그 작용선까지의 수직 거리는 $(L/2) \cos \theta$ 이다. 벽이 주는 힘 N_w 는 수평 방향이고 작용점은 높이 $L \sin \theta$ 이므로 수직 거리는 $L \sin \theta$ 이다.

$$Mg \cdot \frac{L}{2} \cos \theta = N_w \cdot L \sin \theta$$

$$N_w = \frac{Mg \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{Mg}{2 \tan \theta}$$

미끄러지지 않으려면 필요한 마찰력이 최대 정지 마찰력을 넘지 않아야 한다. $f = N_w$ 이고 $N = Mg$ 이므로

$$\frac{Mg}{2 \tan \theta} \leq \mu Mg$$

$$\tan \theta \geq \frac{1}{2\mu}$$

이 조건에 사다리의 질량 M 과 길이 L 이 모두 사라진다는 점이 흥미롭다. 무거운 사다리는 필요한 마찰력도 크지만 최대 마찰력도 그만큼 커지기 때문이다. **미끄러짐을 정하는 것은 무게가 아니라 기하와 마찰 계수뿐**이다.

(3) 정답: $\theta \geq 45^\circ$. 사람이 있을 때 $\tan \theta \geq (L + 4d)/(6\mu L)$. 최대 거리 $d = L/2$

$\mu = 0.50$ 이면 $\tan \theta \geq 1/(2 \times 0.50) = 1$ 이므로

$$\theta \geq 45^\circ$$

질량 $2M$ 인 사람이 아래 끝에서 거리 d 인 곳에 있으면 연직 방향은 $N = Mg + 2Mg = 3Mg$ 가 되고, 돌림힘 평형식에는 사람의 무게에 의한 항이 더해진다.

$$Mg \cdot \frac{L}{2} \cos \theta + 2Mg \cdot d \cos \theta = N_w \cdot L \sin \theta$$

$$N_w = \frac{Mg(L/2 + 2d)}{L \tan \theta}$$

미끄러지지 않을 조건 $N_w \leq \mu N = 3\mu Mg$ 에 넣으면

$$\frac{L/2 + 2d}{L \tan \theta} \leq 3\mu \Leftrightarrow \tan \theta \geq \frac{L + 4d}{6\mu L}$$

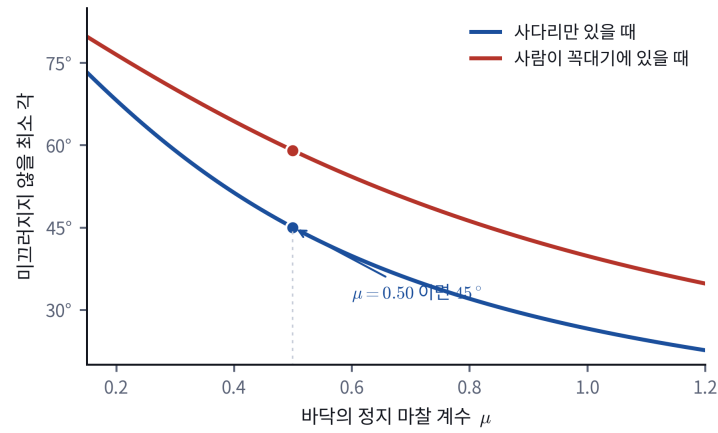
$\theta = 45^\circ, \mu = 0.50$ 이면 $\tan \theta = 1, 6\mu = 3$ 이므로

$$\frac{L + 4d}{3L} \leq 1 \Rightarrow 4d \leq 2L \Rightarrow d \leq \frac{L}{2}$$

사람은 사다리의 한가운데까지만 올라갈 수 있다.

45° 는 사다리만 있을 때의 아슬아슬한 최소 각이었는데, 사람이 올라가면 그 각으로는 절반까지밖에 갈 수 없다. 사람이 위로 갈수록 무게의 작용선이 벽 쪽으로 가까워져 사다리를 넘어뜨리려는 돌림힘이 커지고, 그것을 버티기 위해 벽이 미

는 힘 N_w 가 커지므로 필요한 마찰력도 함께 커지기 때문이다. 사다리를 쓸 때 될 수 있으면 세워서 걸치라는 안전 수칙이 여기에서 나온다.



[해설 그림 6] 마찰 계수에 따라 미끄러지지 않을 최소 각

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	네 힘을 빠짐없이 쓰고 벽에 마찰이 없어 수평 힘만 작용함을 밝혔으며 두 평형식을 옳게 세운 경우	1
(2)	바닥 접촉점을 기준으로 돌림힘 평형식을 세워 N_w 를 구하고 $\tan \theta \geq 1/(2\mu)$ 를 유도한 경우	2
(3)	45° 를 구하고, 사람의 무게에 의한 돌림힘을 반영한 조건을 유도하여 $d \leq L/2$ 를 얻은 경우	2