



SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

수학

해설편

수시모집 일반전형 면접 및 구술고사 기출 문항집

2021-2026 · 26문항 (6개년) · 전 학년도 예시답안 수록

목차

2026학년도

문제 1	금 거래 게임 — 확률변수의 평균·분산과 최적반응	4
문제 2	다항식의 ‘열매’ — 동차식과 연립일차방정식	6
문제 3	도둑의 도주 — 격자 경로와 확률	7
문제 4	꺾인 선과 넓이·활성도 최소화	9

2025학년도

문제 1	움직이는 여섯 점 — 삼각형 넓이의 곱과 최대·	13
문제 2	세 자동차의 연료 — 최적 정비와 도달 거리	14
문제 3	세 공의 위치·기록 — 수열의 귀납적 정의와 등	15

2024학년도

문제 1	포물선의 두 접선과 넓이	18
문제 2	수직선 위 점들의 이동과 소멸	19
문제 3	두 정사각형과 직선, 정적분	20
문제 4	동전 패턴 선택 게임	21

2023학년도

문제 1	합성함수의 미분가능성과 정적분	24
문제 2	세 동전 뒤집기와 상태 변환 확률	25
문제 3	포물선의 접선과 평행이동, 넓이	26

2022학년도

문제 1	기울인 그릇 속의 물	28
문제 2	조건을 만족하는 함수들의 집합	29
문제 3	원들과 직선	30
문제 4	다항식의 부호	31

2021학년도

문제 1	계단합성함수와 포물선 교점	33
문제 2	두 삼각형의 겹침 넓이함수	34
문제 3	다항식의 나눗셈과 나머지	35
문제 4	임의보행 감염 확률	36
문제 5	이항계수 다항식의 극한비	37
문제 6	갈루아 대응과 바닥함수	37
문제 7	합성함수의 넓이와 부정적분	38
문제 8	정사영 값의 분산 최대화	39

2026학년도 · 해설편

문제 1	금 거래 게임 — 확률변수의 평균·분산과 최적반응
문제 2	단항식의 ‘열매’ — 동차식과 연립일차방정식
문제 3	도둑의 도주 — 격자 경로와 확률
문제 4	꺾인 선과 넓이·활성도 최소화

단원	함수·극한·미적분 · 수열·급수 · 기하·벡터 · 확률과 통계 · 방정식·부등식
핵심 개념	금 거래 게임과 최적반응 단항식의 열매와 동차식 도둑의 도주와 격자 경로 꺾인 선의 넓이와 활성도
문항 수	4문항 (소문항 14개)

II. 예시답안

문제 1 금 거래 게임 — 확률변수의 평균·분산과 최적반응

소문항 4개 · 최적반응의 교점

설정 정리 — 민호는 1 g, 영희는 2 g 으로 시작한다. 민호가 투자량 a g 을 영희에게 주고, 공정한 주사위를 던져

- 눈 ≤ 2 (확률 $1/3$): 영희가 민호에게 $a(2+b)$ g 지급
- 눈 ≥ 3 (확률 $2/3$): 영희가 민호에게 $a(1-b)$ g 지급

따라서 민호의 최종 보유량 X 와 영희의 최종 보유량 Y 는

$$X = \begin{cases} 1 + a(1+b) & \text{확률 } \frac{1}{3} \quad (\text{눈} \leq 2 \text{ 일 때, } 1 - a + a(2+b)) \\ 1 - ab & \text{확률 } \frac{2}{3} \quad (\text{눈} \geq 3 \text{ 일 때, } 1 - a + a(1-b)) \end{cases}$$

$$Y = 3 - X \quad (\text{총량 } 1 + 2 = 3 \text{ g 은 항상 보존})$$

1-1. $E(X), V(X)$ 두 값의 확률가중 평균이 $E(X)$ 이다.

$$E(X) = \frac{1}{3}(1 + a(1+b)) + \frac{2}{3}(1 - ab) = 1 + \frac{a(1-b)}{3}.$$

두 값의 차가 $(1 + a(1+b)) - (1 - ab) = a(1+2b)$ 인 두 점 분포이므로, 분산은 $p(1-p) \times (\text{차})^2$ 로 ($p = 1/3$):

$$V(X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (a(1+2b))^2 = \frac{2}{9}a^2(1+2b)^2.$$

$$E(X) = 1 + \frac{a(1-b)}{3}, \quad V(X) = \frac{2}{9}a^2(1+2b)^2$$

1-2. 민호의 최적 투자량 (b 고정) $U = E(X) - \frac{1}{2}V(X)$ 를 $0 \leq a \leq 1$ 에서 최대로 하는 a 를 구한다.

$$U(a) = 1 + \frac{a(1-b)}{3} - \frac{1}{9}a^2(1+2b)^2.$$

a^2 의 계수가 음수이므로 위로 볼록한 포물선이고, 꼭짓점은

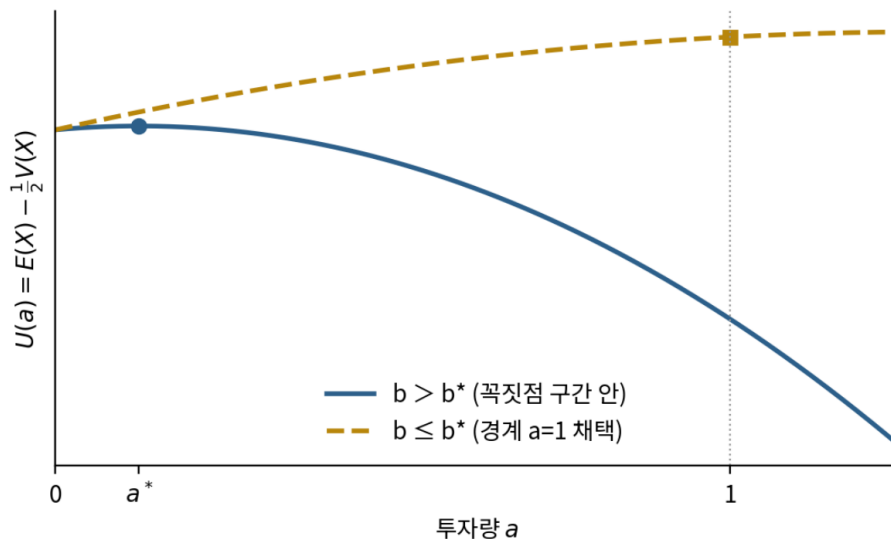
$$a^* = \frac{(1-b)/3}{\frac{2}{9}(1+2b)^2} = \frac{3(1-b)}{2(1+2b)^2}.$$

$a \in [0, 1]$ 로 제한되므로, $a^* = 1$ 이 되는 b 는 $3(1-b) = 2(1+2b)^2$, 즉 $8b^2 + 11b - 1 = 0$ 에서

$$b_0 = \frac{3\sqrt{17}-11}{16} \approx 0.0856.$$

$b \leq b_0$ 이면 꼭짓점이 구간 밖($a^* > 1$)이라 경계 $a = 1$ 이 최적이다.

$$a^* = \begin{cases} 1, & 0 \leq b \leq \frac{3\sqrt{17}-11}{16} \\ \frac{3(1-b)}{2(1+2b)^2}, & \frac{3\sqrt{17}-11}{16} \leq b \leq 1 \end{cases}$$



예시 작도 — $U(a)$ 의 두 경우. 꼭짓점이 구간 안이면 a^* , 밖이면 경계 $a = 1$ 을 택한다.

1-3. 영희의 최적 활성화도 (a 고정) $X + Y = 3$ 이므로 $E(Y) = 3 - E(X) = 2 - (a(1 - b))/3$, $V(Y) = V(X)$. 따라서

$$W(b) = 2 - \frac{a}{3} + \frac{ab}{3} - \frac{1}{9}a^2(1 + 2b)^2.$$

b 에 대한 위로 볼록 포물선의 꼭짓점은

$$b^* = \frac{3 - 4a}{8a} \quad (a \neq 0).$$

이를 $0 \leq b \leq 1$ 로 제한한다.

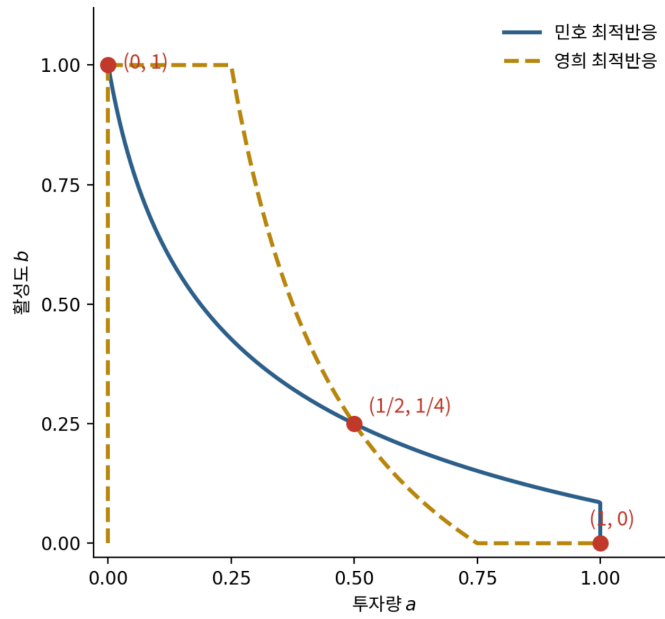
$$b^* = \begin{cases} \text{임의의 } b \in [0, 1], & a = 0 \quad (W \equiv 2 \text{ 상수}) \\ 1, & 0 < a \leq 1/4 \\ \frac{3 - 4a}{8a}, & 1/4 \leq a \leq 3/4 \\ 0, & 3/4 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

1-4. 상호 최적이 되는 순서쌍 (a, b) ($\neg$)은 a 가 민호의 최적반응, ($\perp$)은 b 가 영희의 최적반응인 조건이다. 두 최적반응을 동시에 만족하는 점(내시균형)을 찾는다.

내부해 — [1-2]의 꼭짓점 식 $a = 3(1 - b)/(2(1 + 2b)^2)$ 와 [1-3]의 $b = (3 - 4a)/(8a)$, 즉 $1 + 2b = 3/(4a)$ 를 연립하면 $a(1 - b) = 3/8$ 을 얻고, 정리하면 $a = 1/2, b = 1/4$.

경계해 —

- $b = 0$ 이면 민호 최적 $a = 1$ 이고, $a = 1 (> 3/4)$ 이면 영희 최적 $b = 0 \Rightarrow (1, 0)$.
- $b = 1$ 이면 민호 최적 $a = 0$ 이고, $a = 0$ 이면 영희는 모든 b 가 최적($b = 1$ 포함) $\Rightarrow (0, 1)$.



예시 작도 — 민호·영희의 두 최적반응 곡선. 두 곡선의 교점 세 곳이 곧 해이다.

$$(a, b) = (0, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), (1, 0)$$

핵심 — $X + Y = 3$ 이라는 총량 보존 덕분에 $V(X) = V(Y)$ 이고 두 사람의 지표는 같은 분산 항을 공유한다. 각자 상대의 선택을 상수로 보고 위로 볼록한 이차함수의 꼭짓점을 구간 $[0, 1]$ 로 자른 것이 최적반응이며, 두 최적반응이 만나는 세 점이 [1-4]의 답이다.

문제 2 단항식의 ‘열매’ — 동차식과 연립일차방정식

소문항 3개 · 차수 분리와 대입 판정

핵심 정리 — 기본 단항식 $r = x^l y^m z^n$ 이 p_1, p_2, p_3 의 열매라는 것은, 어떤 다항식 q_1, q_2, q_3 에 대해 $r = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$ 으로 쓸 수 있다는 뜻이다. 이때 두 가지 성질이 유용하다.

성질 A — 차수 분리 (선형대수)

세 p_i 가 모두 동차 2 차이고 r 이 동차 4 차이면, q_i 도 동차 2 차로 두어도 충분하다. 따라서 “4 차 열매 찾기”는 $\{(\text{동차 2차 단항식}) \times p_i\} \quad (i = 1, 2, 3)$

이 생성하는 4 차 동차식 공간이 어떤 기본 단항식을 포함하는가를 묻는 **연립일차방정식** 문제가 된다.

성질 B — 대입 판정

$r = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$ 이면, p_1, p_2, p_3 을 모두 0 으로 만드는 점 (x, y, z) 에서는 r 도 반드시 0 이다. 즉 세 식을 동시에 0 으로 만드는 점에서 r 이 0 이 아니면, r 은 열매가 될 수 없다.

2-1. 열매가 아닌 것의 개수 세 식은 모두 인수분해된다.

$$p_1 = (x - y)(2x - z), \quad p_2 = (x - y)(2y - z), \quad p_3 = (2x - z)(2y - z).$$

$A = x - y, B = 2x - z, C = 2y - z$ 로 두면 $p_1 = AB, p_2 = AC, p_3 = BC$. 세 식이 동시에 0 이 되려면 A, B, C 중 적어도 둘이 0 이어야 한다. 특히 $A = B = 0$ (즉 $x = y, z = 2x$) 인 직선 $(x, y, z) = (t, t, 2t)$ 위에서는 $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ 이다.

그런데 이 직선 위에서 임의의 4 차 기본 단항식은

$$x^l y^m z^n = t^l \cdot t^m \cdot (2t)^n = 2^n t^{l+m+n} = 2^n t^4$$

이고, 이는 $t \neq 0$ 일 때 항상 0 이 아니다. 성질 B에 의해 어떤 4 차 기본 단항식도 열매가 될 수 없다.

4 차 기본 단항식 15 개 모두 열매가 아니다 $\Rightarrow$ 개수 = 15

2-2. 열매가 아닌 것이 무수히 많은 a $p_3 = z^2$ 이므로 세 식의 공통 영점에서는 $z = 0$ 이다. $z = 0$ 을 대입하면 $p_1 = x^2 - y^2, p_2 = ax^2 + y^2, p_1 = 0$ 에서 $y^2 = x^2$, 이를 $p_2 = 0$ 에 넣으면

$$(a+1)x^2 = 0.$$

(i) $a \neq -1 - x = 0$, 따라서 $y = 0, z = 0$. 공통 영점이 원점뿐이면 충분히 큰 차수의 기본 단항식은 모두 열매가 되어, 열매가 아닌 것은 유한하다.

(ii) $a = -1 - (a+1)x^2 = 0$ 이 항등적으로 성립하므로, $y = \pm x, z = 0$ 인 두 직선 $(t, t, 0), (t, -t, 0)$ 전체가 공통 영점이다. 점 $(t, t, 0)(t \neq 0)$ 에서 z 를 포함하지 않는 기본 단항식 $x^l y^m$ 은 $t^{l+m} \neq 0$ 이므로 열매가 될 수 없다. 이런 단항식은 무수히 많다.

$$a = -1$$

2-3. 차수가 4 인 열매 모두 $p_3 = z^2$ 에서 공통 영점은 $z = 0$, 그러면 $p_1 = x^2 - y^2, p_2 = x^2 + y^2$ 이고 $x^2 = y^2, x^2 + y^2 = 0$ 에서 $x = y = 0$. 즉 공통 영점은 원점뿐이다.

세 식이 모두 동차 2 차이므로 성질 A에 따라 $\{(동차 2차 단항식) \times p_i\}$ 들이 생성하는 4 차 동차식 공간의 차원을 따져 보면 15 로, 4 차 동차식 공간 전체($\dim = 15$)와 일치한다. 따라서 **모든 4 차 기본 단항식이 열매이다**. 예를 들어 x^4 은 다음과 같이 직접 표현된다.

$$4x^4 = p_1(x^2 - 2xz - y^2 - yz) + p_2(3x^2 - xz - y^2 + z^2) + p_3(2xy - xz)$$

차수 4 인 기본 단항식 15 개 전부:

$$x^4, x^3y, x^3z, x^2y^2, x^2yz, x^2z^2, xy^3, xy^2z, xyz^2, xz^3, y^4, y^3z, y^2z^2, yz^3, z^4$$

핵심 — 열매 여부는 “ p_i 들의 곱들이 생성하는 공간에 그 단항식이 들어가는가”라는 선형대수 문제(성질 A)와, “공통 영점에서 0 이 되는가”라는 대입 판정(성질 B)의 두 각도로 판별한다. [2-1]은 공통 영점 직선이 존재해 아무것도 열매가 아니고, [2-3]은 공통 영점이 원점뿐이라 4 차가 전부 열매가 된다. [2-2]는 공통 영점이 직선으로 커지는 순간($a = -1$) 비열매가 무한해진다.

문제 3 도둑의 도주 — 격자 경로와 확률

소문항 4개 · 중간점 분해와 배반사건

기본 셈 — **경로의 수와 세 검문점** 도둑의 이동 $(x, y) \rightarrow (x+1, y \pm 1)$ 은 격자 위의 45° 대각선 이동이다. $4n$ 걸음 중 위로 오른 횟수 u , 아래로 내린 횟수 d 라 하면 $u + d = 4n, u - d = 2k$ 이므로 $u = 2n + k$. 따라서 원점에서 $(4n, 2k)$ 로 가는 **전체 도주경로의 수**는 파스칼 삼각형에 따라

$$\binom{4n}{2n+k}.$$

핵심은 **중간 시점 $x = 2n$** . 모든 도주경로는 $x = 2n$ 에서 하나의 격자점 ($2n$, 짝수) 를 지나고, 세 단서점 $(2n, 2n), (2n, 0), (2n, -2n)$ 은 이 세로선 위의 서로 다른 세 점이다. 따라서 한 경로가 두 개 이상을 지날 수 없어(**배반**), 단서 발견 경로의 수는 세 점 각각을 지나는 경로 수의 **단순 합**이다.

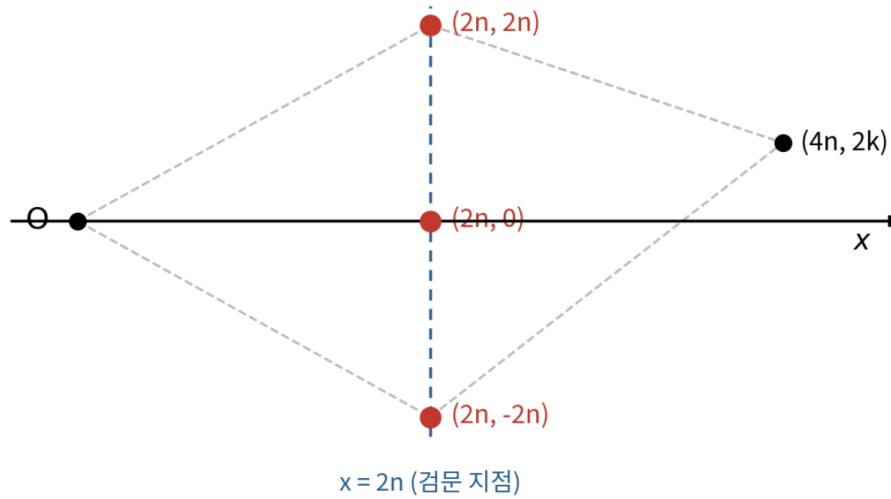
중간점 분해

점 $(2n, j)$ 를 지나는 경로 수 $= (O \rightarrow (2n, j)) \times ((2n, j) \rightarrow (4n, 2k))$ 이며, 세 점에 대해

$$N(2n) = 1 \cdot \binom{2n}{k}, \quad N(0) = \binom{2n}{n} \binom{2n}{n+k}, \quad N(-2n) = \binom{2n}{2n+k} \cdot 1.$$

따라서 단서 발견 확률은

$$P(n, k) = \frac{\binom{2n}{k} + \binom{2n}{n} \binom{2n}{n+k} + \binom{2n}{2n+k}}{\binom{4n}{2n+k}}.$$



예시 도해 — 검문 지점 $x = 2n$ 의 세로선 위 세 단서점. 경로는 반드시 이 선을 한 번 지나므로 세 사건은 서로 배반이다.

3-1. $n = 3, k = 0, 2, 4$ $2n = 6, \binom{2n}{n} = \binom{6}{3} = 20$, 분모는 $\binom{12}{2n+k}$.

$$k = 0 : \frac{\binom{6}{0} + \binom{6}{3} \binom{6}{3} + \binom{6}{6}}{\binom{12}{6}} = \frac{1 + 400 + 1}{924} = \frac{402}{924} = \frac{67}{154}.$$

$$k = 2 : \frac{\binom{6}{2} + \binom{6}{3} \binom{6}{5} + \binom{6}{8}}{\binom{12}{8}} = \frac{15 + 20 \cdot 6 + 0}{495} = \frac{135}{495} = \frac{3}{11}.$$

$$k = 4 : \frac{\binom{6}{4} + \binom{6}{3} \binom{6}{7} + \binom{6}{10}}{\binom{12}{10}} = \frac{15 + 0 + 0}{66} = \frac{15}{66} = \frac{5}{22}.$$

$$k = 0 \Rightarrow \frac{67}{154}, \quad k = 2 \Rightarrow \frac{3}{11}, \quad k = 4 \Rightarrow \frac{5}{22}$$

3-2. $k = 2n - 3$ 일 때 $\lim p_n$ 도착점 $(4n, 4n - 6)$ 은 위쪽 모서리 $(4n, 4n)$ 바로 아래에 있다. $k = 2n - 3$ 이면 중간점 세 항 중 가운데·아래 항은 0 이 되어 $\binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{3n-3} = 0, \binom{2n}{2n+k} = \binom{2n}{4n-3} = 0, n \geq 4$, 맨 위 단서점 $(2n, 2n)$ 만 살아남는다. 따라서

$$p_n = \frac{\binom{2n}{2n-3}}{\binom{4n}{4n-3}} = \frac{\binom{2n}{3}}{\binom{4n}{3}} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{4n(4n-1)(4n-2)} \rightarrow \frac{8n^3}{64n^3} = \frac{1}{8}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{8}$$

3-3. 확률이 최소가 되는 $k(n \geq 2)$ 대칭성 $P(n, k) = P(n, -k)$ 이므로 $0 \leq k \leq 2n$ 만 보면 된다. 도착점 $(4n, 2k)$ 가 오른쪽 모서리를 따라 위로 올라갈수록 분모 $\binom{4n}{2n+k}$ 가 빠르게 작아지고 분자도 함께 줄어, P 는 $k = 0 \rightarrow n$ 에서 감소했다가 $k = n \rightarrow 2n$ 에서 증가한다. 실제로 $n = 4$ 에서 P 값은

$$0.381, 0.343, 0.248, 0.141, \mathbf{0.0769}, 0.1, 0.233, 0.5, 1 \quad (k = 0, 1, \dots, 8)$$

로 $k = 4 = n$ 에서 최소이다. 대칭에 의해 $k = -n$ 도 같다.

$$k = n \quad \text{및} \quad k = -n$$

3-4. $k = n$ 일 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln q_n$ [3-3]의 최솟값 k 중 가장 큰 값은 $k = n$ 이다. $k = n$ 을 대입하면 $\binom{2n}{n+k} = \binom{2n}{2n} = 1$, $\binom{2n}{2n+k} = \binom{2n}{3n} = 0$ 이므로

$$q_n = P(n, n) = \frac{\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n} \cdot 1 + 0}{\binom{4n}{n}} = \frac{2\binom{2n}{n}}{\binom{4n}{n}}.$$

스털링 근사 $\ln m! \approx m \ln m - m$ 으로 지수증가율을 구하면

$$\frac{1}{n} \ln \binom{2n}{n} \rightarrow 2 \ln 2, \quad \frac{1}{n} \ln \binom{4n}{n} \rightarrow 4 \ln 4 - 3 \ln 3.$$

따라서

$$\frac{1}{n} \ln q_n \rightarrow 2 \ln 2 - (4 \ln 4 - 3 \ln 3) = 3 \ln 3 - 6 \ln 2 = \ln \frac{27}{64}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln q_n = \ln \frac{27}{64} \quad (\approx -0.863)$$

핵심 — 전체 경로 수는 $\binom{4n}{2n+k}$, 중간 시점 $x = 2n$ 에서 세 단서점이 한 세로선 위에 있어 사건이 배반이므로 확률이 세 이항급의 단순 합이 된다. 특정 k 에서는 세 항 중 일부가 0 이 되어 식이 간단해지고([3-2]), 대칭성으로 최소는 $k = \pm n$ ([3-3]), 그 확률의 지수증가율이 $\ln(27/64)$ 이다([3-4]).

문제 4 꺾인 선과 넓이·활성도 최소화

소문항 3개 · 비탈 매개와 조각별 이차식

설정 — 세 가지 경우로 갈라지는 꺾인 선 꺾인 선은 왼쪽 기울기 k , 오른쪽 기울기 $k+1$ 로 꺾인 점 $x = a$ 에서 이어진 두 반직선이다. A, B 를 잇는 평균 기울기는 $(0-s)/((s+1)-1) = -1$ 이다. 꺾인 점 a 의 위치에 따라 세 경우로 나뉜다.

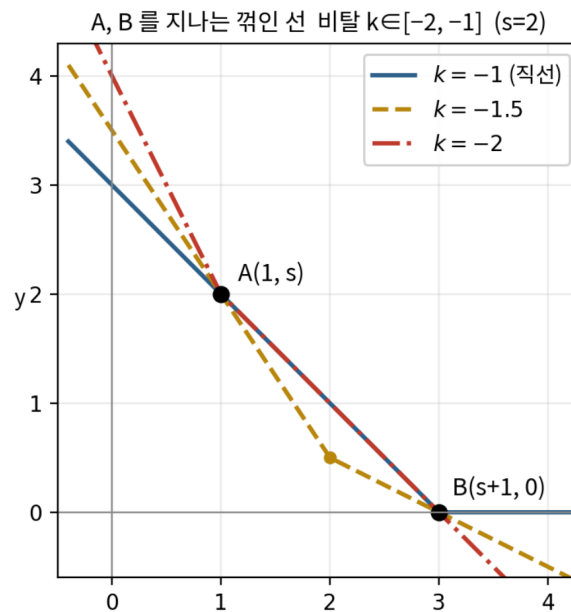
꺾인 점 위치별 분류

- $a \geq s+1$ (두 점이 왼쪽 조각) $\Rightarrow$ 기울기 $k = -1$ (직선).
- $a \leq 1$ (두 점이 오른쪽 조각) $\Rightarrow$ 기울기 $k+1 = -1$, 즉 $k = -2$.
- $1 \leq a \leq s+1$ (사이에서 꺾임) $\Rightarrow A$ 는 왼쪽, B 는 오른쪽 조각. 두 조건 $s = k(1-a) + b, 0 = (k+1)(s+1-a) + b$ 를 빼면

$$k = \frac{a-2s-1}{s}, \quad b = \frac{(s+1-a)^2}{s}.$$

4-1. 비탈 k 의 범위 사이 경우에서 $k = (a-2s-1)/s$ 는 a 에 대해 증가하고, $a = 1$ 에서 $k = -2$, $a = s+1$ 에서 $k = -1$ 이다. 양 끝 경우(직선 $k = -1, k = -2$)와 합치면 비탈은 -2 부터 -1 까지 모든 값을 가진다.

$$-2 \leq k \leq -1$$



예시 작도 — $A(1, s), B(s+1, 0)$ 를 지나는 꺾인 선들 ($s=2$). 비탈 k 는 직선($k=-1$)부터 $k=-2$ 까지 연속적으로 변한다.

4-2. 둘러싸인 넓이의 최솟값 꺾인 선은 y 축을 $(0, s-k)$ 에서, x 축을 $B(s+1, 0)$ 에서 만나고 그 사이에서 양수이다. 넓이는 $S = \int_0^{s+1} f(x) dx$ 이며, 두 사다리꼴의 합으로 계산해 비탈 k 에 대한 이차식으로 정리하면

$$S(k) = \frac{s^2}{2}k^2 + \frac{3s^2-1}{2}k + \frac{3s^2+2s}{2}, \quad k \in [-2, -1].$$

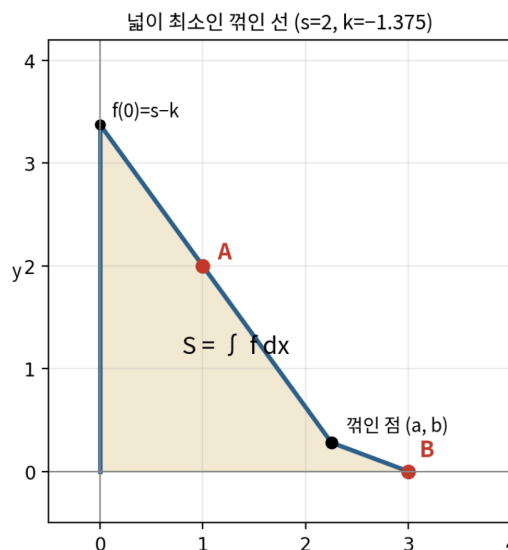
k 의 계수로 꼭짓점은 $k^* = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2s^2}$ 이다.

• $s \geq 1$ 이면 $k^* \in [-2, -1]$ 이므로 꼭짓점에서 최소:

$$S_{\min} = \frac{3s^2+2s}{2} - \frac{(3s^2-1)^2}{8s^2} = \frac{(s+1)^3(3s-1)}{8s^2}.$$

• $0 < s \leq 1$ 이면 $k^* > -1$ 로 구간 밖이므로 $k=-1$ (직선)에서 최소: $S_{\min} = (s+1)^2/2$. ($s=1$ 에서 두 식 모두 2로 연속.)

$$S_{\min} = \begin{cases} \frac{(s+1)^2}{2} & (0 < s \leq 1) \\ \frac{(s+1)^3(3s-1)}{8s^2} & (s \geq 1) \end{cases}$$



예시 도해 — 꺾인 선·두 축으로 둘러싸인 영역의 넓이 $S = \int_0^{s+1} f(x) dx = \frac{(s+1)^3(3s-1)}{8s^2}$ 은 $s=2$ 에서 $k=-1.375$ 에서 얻어지며 $135/32 \approx 4.22$ 이다.

4-3. $s = 2$ 에서 활성도 최소가 2개인 m $s = 2$ (즉 $s + 1 = 3$) 이므로 꺾인 점 (a, b) 와 활성도 $g(a) = ma^2 + b$ 는 세 구간으로 나뉜다.

$$a \leq 1 \text{ 또는 } a \geq 3 : b = 3 - a, \quad g = ma^2 - a + 3$$

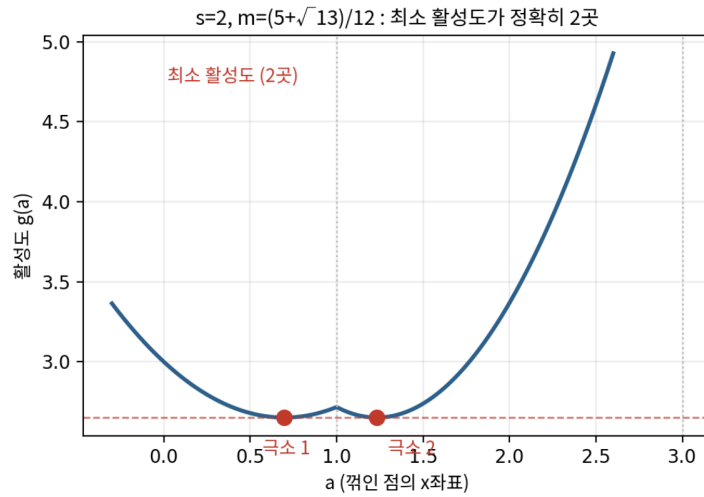
$$1 \leq a \leq 3 : b = \frac{(3-a)^2}{2}, \quad g = ma^2 + \frac{(3-a)^2}{2}$$

바깥 조각($ma^2 - a + 3$)의 꼭짓점은 $a = 1/(2m)$, 값 $V_{\text{out}} = 3 - 1/(4m)$; 안쪽 조각의 꼭짓점은 $a = 3/(2m + 1)$, 값 $V_{\text{in}} = 9/2 - 9/(4m + 2)$. 중앙 꺾인 점 $a = 1$ 은 극대라 최소가 될 수 없어, 두 조각의 두 극소가 같은 높이일 때 최소 활성도를 지닌 꺾인 선이 정확히 2 개가 된다.

$$3 - \frac{1}{4m} = \frac{9}{2} - \frac{9}{4m + 2} \Rightarrow 12m^2 - 10m + 1 = 0.$$

두 근 모두 실제로 두 극소가 전역 최솟값이 됨을 확인할 수 있다 ($m = (5 - \sqrt{13})/12 \approx 0.116$ 은 $a \approx 2.43, 4.30$; $m = (5 + \sqrt{13})/12 \approx 0.717$ 은 $a \approx 0.70, 1.23$).

$$m = \frac{5 - \sqrt{13}}{12} \quad \text{또는} \quad m = \frac{5 + \sqrt{13}}{12}$$



예시 도해 — $m = (5 + \sqrt{13})/12$ 에서 활성도 $g(a)$. 두 극소의 높이가 같아 최소 활성도를 지닌 꺾인 선이 정확히 2 개이다.

핵심 — 꺾인 선은 비탈 k 로 매개되며 A, B 를 지나면 $k \in [-2, -1] \cup [4, 1]$. 둘러싸인 넓이는 k 의 이차식이라 s 의 크기에 따라 꼭짓점 또는 끝점에서 최소가 된다([4-2]). 활성도 $ma^2 + b$ 는 꺾인 점 위치 a 의 조각별 이차식이고, 바깥·안쪽 두 극소가 같은 높이가 되는 $m = (5 \pm \sqrt{13})/12$ 에서 최소 활성도 꺾인 선이 두 개다([4-3]).

2025학년도 · 해설편

- 문제 1** 움직이는 여섯 점 — 삼각형 넓이의 곱과 최대·
문제 2 세 자동차의 연료 — 최적 정비와 도달 거리
문제 3 세 공의 위치·기록 — 수열의 귀납적 정의와 등

-
- 단원** 함수·극한·미적분 · 수열·급수 · 기하·벡터 · 방정식·부등식
핵심 개념 움직이는 여섯 점과 넓이의 곱 세 자동차의 연료와 도달 거리 세 공의 위치와 귀납적 수열
문항 수 3문항 (소문항 11개)

II. 예시답안

문제 1 움직이는 여섯 점 · 예시답안

코사인법칙과 넓이 $S(u)$ · 대칭성 $t_0 = 1 - a$ · 이차함수 환원

설정 — 전진량으로 넓이를 표준화

좌표를 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, \sqrt{3})$ 로 놓는다. 세 변을 따라 각 꼭짓점에서 같은 거리 u 만큼 전진한 세 점이 이루는 삼각형은 회전대칭에 의해 정삼각형이다. 꼭짓점 A 부근에서 두 점은 A 로부터 거리 u (변 AB 위)와 거리 $2 - u$ (변 CA 위)에 있고 끼인각이 60° 이므로, 코사인법칙으로 한 변의 제곱은

$$u^2 + (2 - u)^2 - 2u(2 - u) \cos 60^\circ = 3u^2 - 6u + 4.$$

따라서 전진량이 u 인 삼각형의 넓이는

$$S(u) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3u^2 - 6u + 4).$$

삼각형 $P_1Q_1R_1$ 은 $u = t$, 삼각형 $P_2Q_2R_2$ 는 $u = t + 2a$ 에 해당한다.

1-1. 넓이는 $u = t$ 를 대입하여 얻는다.

결론:

$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3t^2 - 6t + 4).$$

1-2. $S(u)$ 는 $u = 1$ 에 대하여 대칭인 아래로 볼록한 함수이므로 $S(t) = S(t + 2a)$ 는 t 와 $t + 2a$ 가 $u = 1$ 에서 같은 거리일 때 성립한다. 즉 $t + (t + 2a) = 2$ 에서 $t_0 = 1 - a$ 이다.

결론:

$$t_0 = 1 - a.$$

($0 < a < 1$ 이므로 $0 < t_0 < 1$ 로 구간 $[0, 2 - 2a]$ 안에 있다.)

1-3. · 1-4. $P(u) = 3u^2 - 6u + 4 = 3(u - 1)^2 + 1$ 로 두면 $f(t) = \frac{3}{16}P(t)P(t + 2a)$. 대칭점을 원점으로 옮기기 위해 $w = t - (1 - a)$ 로 치환하면 $t - 1 = w - a$, $t + 2a - 1 = w + a$ 이고 구간은 $w \in [-(1 - a), 1 - a]$ 로 원점 대칭이 된다.

$$f = \frac{3}{16}[3(w - a)^2 + 1][3(w + a)^2 + 1] = \frac{3}{16}[(3w^2 + 3a^2 + 1)^2 - 36a^2w^2].$$

$s = w^2$ (≥ 0) 로 두면

$$h(s) = 9s^2 + 6(1 - 3a^2)s + (3a^2 + 1)^2, \quad s \in [0, (1 - a)^2].$$

$t = t_0$ 는 $w = 0$, 즉 $s = 0$ 에 대응하고, f 는 w 에 대한 짝함수이므로 t_0 는 항상 임계점이다. h 는 아래로 볼록한 이차함수이고 꼭짓점은 $s^* = \frac{3a^2 - 1}{3}$.

[1-3] t_0 에서 최소: $s = 0$ 이 $[0, (1 - a)^2]$ 에서 h 의 최소이려면 $s^* \leq 0$, 즉 $3a^2 - 1 \leq 0$ 이어야 한다.

결론:

$$0 < a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

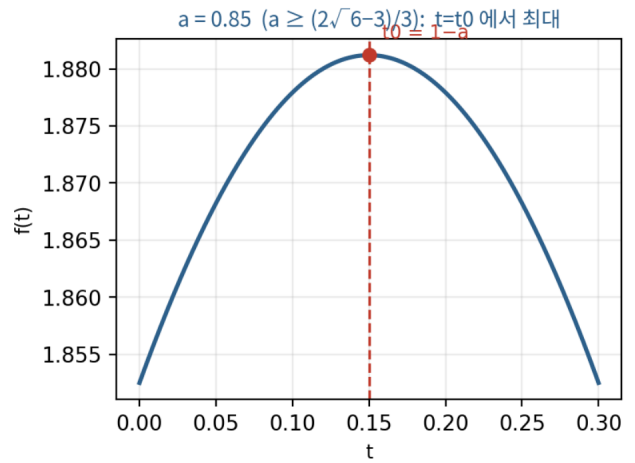
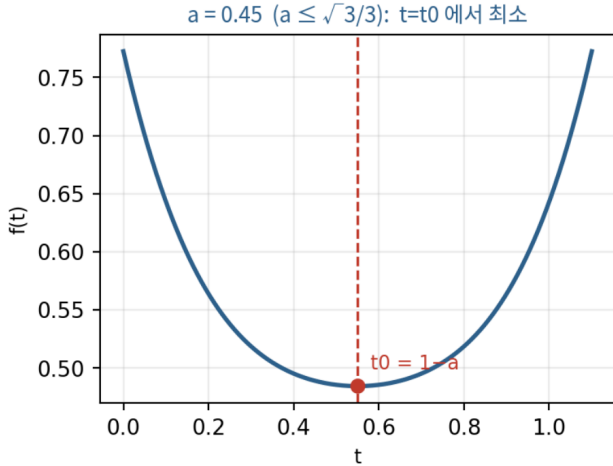
[1-4] t_0 에서 최대: 아래로 볼록한 h 의 최대는 두 끝점 중 하나에서 나오므로, $s = 0$ 이 최대이려면 $h(0) \geq h((1-a)^2)$ 이어야 한다. 정리하면

$$(1-a)^2[9(1-a)^2 + 6 - 18a^2] \leq 0 \Rightarrow 3a^2 + 6a - 5 \geq 0.$$

$0 < a < 1$ 에서 $a \geq \frac{-3+2\sqrt{6}}{3}$.

결론:

$$\frac{2\sqrt{6}-3}{3} \leq a < 1.$$



예시 작도 — $f(t)$ 의 개형. 좌: $a \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이면 t_0 에서 최소, 우: $a \geq \frac{2\sqrt{6}-3}{3}$ 이면 t_0 에서 최대. 두 경계 사이 ($\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$, $\frac{2\sqrt{6}-3}{3} \approx 0.633$)에서는 t_0 가 최대·최소 어느 쪽도 아니다.

핵심. (1) 사인·코사인법칙으로 전진량 u 의 넓이 $S(u) = \frac{\sqrt{3}}{4}(3u^2 - 6u + 4)$ 를 얻고, (2) S 의 대칭성으로 $t_0 = 1 - a$, (3) 곱 f 를 대칭변수 $s = w^2$ 의 이차함수 $h(s)$ 로 환원한 뒤 꼭짓점 위치·끝점 비교로 최소/최대 조건을 나눈다.

문제 2 세 자동차의 연료 · 예시답안

정비시간 r 의 최적화 · 시간·연료 제약 · 포화값 26

설정 — 정비소를 거친 자동차 B 의 여정

B 는 원점에서 정비소 (-10) 까지 거리 10 을 속도 1 로 이동하므로 시각 10 에 도착하고 연료 $4 \times 10 = 40$ 리터를 쓴다. 정비시간을 r (≥ 0) 로 하면 시각 $10 + r$ 에 위치 -10 , 속도 $v = 2 + r$, 남은 연료 (초기 $-40 - 2r$) 이 되고, 이후 오른쪽으로는 1 리터당 거리 1 을 간다.

2-1. 연료가 충분하므로 시각 t_0 의 위치는

$$g(r) = -10 + (2+r)(t_0 - 10 - r), \quad 0 \leq r \leq t_0 - 10.$$

r 에 대해 미분하면 $g'(r) = (t_0 - 12) - 2r = 0$ 에서 $r^* = \frac{t_0 - 12}{2}$. $t_0 \geq 12$ 이므로 $r^* \geq 0$ (정비시간 조건이 붙는 이유). 대입하면

결론:

$$g(r^*) = \frac{t_0^2 - 16t_0 + 24}{4} \quad \left(= 2t_0 - 30 + \frac{(t_0 - 12)^2}{4} \right).$$

2-2. B 가 y 에 도착하는 시간은 $10 + r + \frac{y+10}{2+r}$. $v = 2 + r$ (≥ 2) 로 두면

$$T_B(v) = 8 + v + \frac{y+10}{v}, \quad T_{B'} = 1 - \frac{y+10}{v^2} = 0 \Rightarrow v^* = \sqrt{y+10}.$$

$y \geq 0$ 이면 $v^* \geq \sqrt{10} > 2$ 이므로 최소시간은 $T_B = 8 + 2\sqrt{y+10}$.

A 의 도착시간은 y 이므로 B 가 먼저 도착할 조건은 $8 + 2\sqrt{y+10} < y$. ($y > 8$ 에서) 양변을 제곱하면 $y^2 - 20y + 24 > 0$, 즉 $y < 10 - 2\sqrt{19}$ 또는 $y > 10 + 2\sqrt{19}$. $y > 8$ 과 합치면 다음을 얻는다.

결론:

$$y > 10 + 2\sqrt{19}.$$

2-3. 시각 20, 초기 연료 k . 정비시간 r 후 위치는 시간·연료 두 제약의 최솟값으로 정해진다.

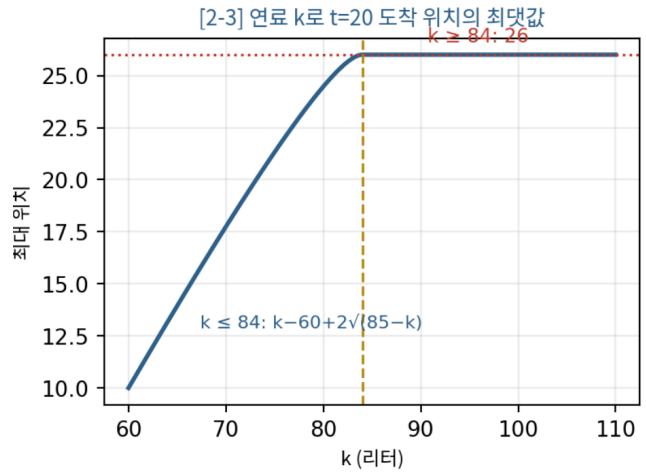
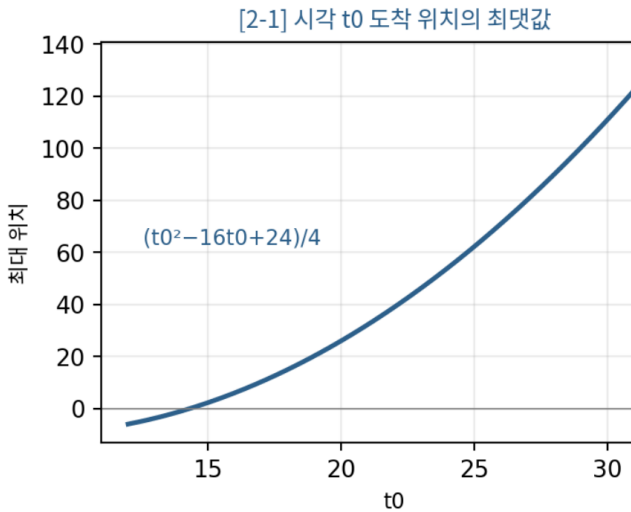
$$\text{위치} = -10 + \min \left\{ \underbrace{(2+r)(10-r)}_{\text{시간 제약}}, \underbrace{k-40-2r}_{\text{연료 제약}} \right\}.$$

시간 제약 $(2+r)(10-r) = -r^2 + 8r + 20$ 은 $r = 4$ 에서 최대 36이다.

- $k \geq 84$: $r = 4$ 에서도 연료가 충분($k - 40 - 8 \geq 36$)하므로 시간 제약이 지배 $\rightarrow$ 위치 $-10 + 36 = 26$.
- $60 \leq k < 84$: 두 제약이 같아지는 $r = 5 - \sqrt{85 - k}$ ($\in [0, 4]$)에서 최대. 이때 위치 $= -10 + (k - 40 - 2r) = k - 60 + 2\sqrt{85 - k}$.

결론:

$$\begin{cases} k - 60 + 2\sqrt{85 - k} & (60 \leq k < 84) \\ 26 & (k \geq 84) \end{cases}$$



예시 작도 — 좌: [2-1] 도달 위치 최댓값 $\frac{t_0^2 - 16t_0 + 24}{4}$. 우: [2-3] 연료 k 에 대한 최댓값 $\varphi(k)$ 로, $k = 84$ 에서 값 26에 도달한 뒤 일정하다.

2-4. 각 자동차의 시각 20 최대 위치를 $\varphi(k)$ (2-3의 결과)라 하자. φ 는 $k \geq 84$ 에서 최댓값 26으로 포화된다. B 의 연료를 $60 + x$, C 의 연료를 $111 - x$ ($0 \leq x \leq 51$)로 두면, 두 자동차가 모두 26에 도달하려면 각각 연료 ≥ 84 가 필요하다. 즉 $60 + x \geq 84$ 이고 $111 - x \geq 84$ 에서 $24 \leq x \leq 27$. 총 연료 $171 \geq 84 \times 2 = 168$ 이므로 이 구간이 비어 있지 않다.

결론: $y_B + y_C$ 의 최댓값은 $26 + 26 = 52$ 이다.

핵심. 모든 소문항은 「정비소까지 고정비용(시간 10·연료 40) $\rightarrow$ 정비시간 r 이 속도 $2 + r$ 와 소모 $2r$ 를 동시에 결정」이라는 구조를 공유한다. 목적에 따라 (2-1) 시간, (2-2) 도착시간, (2-3) 시간·연료 제약의 최솟값, (2-4) 포화값 26의 합으로 최적화가 이루어진다.

문제 3 세 공의 위치·기록 · 예시답안

합의 보존 · 등비수열 $x_n - 2$ · 부분합과 순서 조건

설정 — 두 점화식과 「합의 보존」

쓰여있는 수의 갱신은 (다)에 의해

$$x_{n+1} = x_n + h(m_n - x_n) = (1-h)x_n + hm_n, \quad m_n = \frac{x_n + y_n + z_n}{3}$$

이고 y, z 도 같은 꼴이다. 세 식을 더하면 $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = (1-h)(x_n + y_n + z_n) + 3hm_n = (x_n + y_n + z_n)$ 이므로 **쓰여있는 수들의 합은 시행에 관계없이 항상 6**, 따라서 평균 $m_n = 2$ 로 일정하다. 그러면 각 점화식은 상수 2 를 향한 등비 수렴이 된다:

$$x_{n+1} - 2 = (1-h)(x_n - 2).$$

3-1. 합이 보존되므로 몇 번을 반복하든 세 수의 합은 6, 평균은 항상 2 이다.

결론:

$$\frac{x_3 + y_3 + z_3}{3} = 2.$$

3-2. $x_n - 2 = (1-h)^{n-1}(x_1 - 2)$ 이고 $x_1 - 2 = 1$ 이므로 $x_n = 2 + (1-h)^{n-1}$. 2023 회 반복 후는 $n = 2024$ 이므로 다음을 얻는다.

결론:

$$x_{2024} = 2 + (1-h)^{2023}.$$

3-3. 위치는 (나)에 의해 $p_{n+1} = p_n + hx_n$ 이므로 $p_{n+1} = p_1 + h \sum_{k=1}^n x_k$. $x_k = 2 + (1-h)^{k-1}$ 이고 $y_k = 2$ (일정), $z_k = 2 - (1-h)^{k-1}$ 이므로, 등비수열의 합 $\sum_{k=1}^n (1-h)^{k-1} = \frac{1-(1-h)^n}{h}$ 를 이용하면

$$p_{n+1} = 2 + 2nh - (1-h)^n, \quad q_{n+1} = 2 + 2nh, \quad r_{n+1} = 2 + 2nh + (1-h)^n.$$

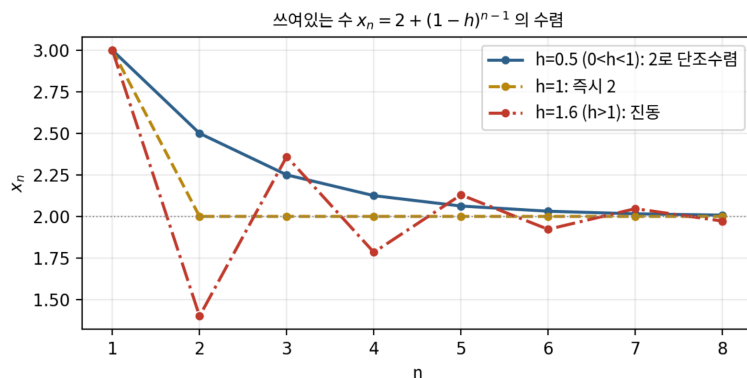
$n = 2023$ 을 넣으면 $q_{2024} = 2 + 4046h$ 이고

$$p_{2024} = q_{2024} - (1-h)^{2023}, \quad r_{2024} = q_{2024} + (1-h)^{2023}.$$

따라서 $r_{2024} \leq q_{2024} \leq p_{2024}$ 는 모두 $(1-h)^{2023} \leq 0$ 과 동치이다. 지수 2023 이 홀수이므로 $(1-h)^{2023} \leq 0 \iff 1-h \leq 0$. 양수 h 이므로 다음을 얻는다.

결론:

$$h \geq 1.$$



예시 작도 — $x_n = 2 + (1-h)^{n-1}$ 의 수렴 양상. $0 < h < 1$ 이면 2로 단조 수렴, $h = 1$ 이면 즉시 2, $h > 1$ 이면 부호가 번갈아 진동한다. 위치 순서 $r \leq q \leq p$ 는 $(1-h)^{2023} \leq 0$, 즉 $h \geq 1$ 에서 성립.

핵심. (1) 세 갱신식을 더해 「쓰여있는 수의 합 = 6·평균 = 2 불변」을 얻으면 각 수열은 $x_{n+1} - 2 = (1-h)(x_n - 2)$ 의 등비수열, (2) 위치는 그 부분합이므로 등비수열의 합 공식으로 p, q, r 를 닫힌형으로 얻는다. (3) p, r 는 q 에서 $\pm(1-h)^{2023}$ 만큼 어긋나므로 순서 조건이 $(1-h)^{2023} < 0$ 하나로 귀결된다.

2024학년도 · 해설편

문제 1	포물선의 두 접선과 넓이
문제 2	수직선 위 점들의 이동과 소멸
문제 3	두 정사각형과 직선, 정적분
문제 4	동전 패턴 선택 게임

단원	함수·극한·미적분 · 수열·급수 · 기하·벡터 · 확률과 통계 · 방정식·부등식
핵심 개념	포물선의 두 접선과 넓이 수직선 위 점들의 충돌과 소멸 두 정사각형과 직선의 정적분 동전 패턴 승리 확률
문항 수	4문항 (소문항 15개)

II. 예시답안

문제 1 포물선의 두 접선과 넓이 · 예시답안

접선의 교점 · 최대·최소 · 넓이

1-1. $y' = 2x$ 이므로 점 P 에서의 접선은 $y = 2p(x - p) + p^2 + \frac{5}{4}$, 점 Q 에서의 접선은 $y = 2q(x - q) + q^2 + \frac{5}{4}$ 이다. 두 접선의 교점 A 는 $2p(x - p) + p^2 = 2q(x - q) + q^2$ 에서

$$a = \frac{p+q}{2}, \quad b = pq + \frac{5}{4}.$$

접점 좌표로부터

$$\overline{AP^2} = (p - a)^2(1 + 4p^2) = \left(\frac{p-q}{2}\right)^2(1 + 4p^2),$$

$$\overline{AQ^2} = (q - a)^2(1 + 4q^2) = \left(\frac{p-q}{2}\right)^2(1 + 4q^2),$$

$$\overline{PQ^2} = (q - p)^2 + (q^2 - p^2)^2 = (q - p)^2(1 + (p + q)^2).$$

따라서

$$\frac{\overline{AP^2} + \overline{AQ^2}}{\overline{PQ^2}} = \frac{\frac{(p-q)^2}{4}(2 + 4p^2 + 4q^2)}{(q-p)^2(1 + (p+q)^2)} = \frac{p^2 + q^2 + \frac{1}{2}}{(p+q)^2 + 1}.$$

결론:

$$\frac{\overline{AP^2} + \overline{AQ^2}}{\overline{PQ^2}} = \frac{p^2 + q^2 + \frac{1}{2}}{(p+q)^2 + 1}.$$

(검산: $p = -1, q = 2$ 대입 시 좌·우 모두 $\frac{5.5}{10} = 0.55$.)

1-2. 점 $A(a, \frac{3}{2}a)$ 에서 $a = \frac{p+q}{2}, \frac{3}{2}a = pq + \frac{5}{4}$ 이므로 $p + q = 2a, pq = \frac{3}{2}a - \frac{5}{4}$. 그러면

$$p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = 4a^2 - 3a + \frac{5}{2}, \quad (p + q)^2 = 4a^2.$$

따라서

$$f(a) = \frac{4a^2 - 3a + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}}{4a^2 + 1} = \frac{4a^2 - 3a + 3}{4a^2 + 1}.$$

결론:

$$f(a) = \frac{4a^2 - 3a + 3}{4a^2 + 1}.$$

(직선 $y = \frac{3}{2}x$ 가 곡선과 만나지 않아 서로 다른 두 접선이 존재하는 범위에서 유효하다.)

1-3. (1)

$$f'(a) = \frac{(8a - 3)(4a^2 + 1) - (4a^2 - 3a + 3)(8a)}{(4a^2 + 1)^2} = \frac{12a^2 - 16a - 3}{(4a^2 + 1)^2}.$$

분자 $12a^2 - 16a - 3 = (2a - 3)(6a + 1) = 0$ 의 해는 $a = -\frac{1}{6}, a = \frac{3}{2}$. 구간 $[-\frac{1}{2}, 1]$ 안의 임계점은 $a = -\frac{1}{6}$ 뿐이다.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1 + \frac{3}{2} + 3}{2} = \frac{11}{4}, \quad f\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + 3}{\frac{1}{9} + 1} = \frac{\frac{65}{18}}{\frac{10}{9}} = \frac{13}{4},$$

$$f(1) = \frac{4 - 3 + 3}{5} = \frac{4}{5}.$$

$a = -\frac{1}{6}$ 에서 극대(부호가 $+$ $\rightarrow$ $-$)이고, $f(-\frac{1}{6}) = \frac{13}{4}$ 가 최댓값, $f(1) = \frac{4}{5}$ 가 최솟값이다. 그런데 $\frac{4}{5} < \frac{3}{4}$ 인지 확인하면 $\frac{4}{5} = 0.8 > 0.75$. 구간 끝 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{11}{4} = 2.75$, $f(1) = 0.8$. 최솟값은 $a = 1$ 의 $\frac{4}{5}$.

결론:

$$M = \frac{13}{4} \quad \left(a = -\frac{1}{6}\right), \quad m = \frac{4}{5} \quad (a = 1).$$

1-3. (2) $f(a) = f(t)$ 를 a 에 대한 방정식으로 보면, $k = f(t)$ 로 두었을 때

$$(4 - 4k)a^2 - 3a + (3 - k) = 0.$$

이 방정식이 서로 다른 두 실근 a 를 가지려면 (i) 이차항 계수 $4 - 4k \neq 0$, 즉 $k \neq 1$ 이고 (ii) 판별식 $D = 9 - 4(4 - 4k)(3 - k) = -16k^2 + 64k - 39 > 0$, 즉 $\frac{3}{4} < k < \frac{13}{4}$ 이어야 한다.

f 의 치역은 $[\frac{3}{4}, \frac{13}{4}]$ 이고 극댓값 $\frac{13}{4}$ (에서 $t = -\frac{1}{6}$), 극솟값 $\frac{3}{4}$ (에서 $t = \frac{3}{2}$), $f(t) = 1$ 은 $t = \frac{2}{3}$ 에서 나온다. 따라서 두 실근이 나오지 않는 예외는 $f(t) \in \{\frac{3}{4}, \frac{13}{4}\}$ (중근) 및 $f(t) = 1$ (일차식) 인 경우, 즉 $t \in \{-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$ 이다.

결론:

$$t \neq 0, \quad t \neq -\frac{1}{6}, \quad t \neq \frac{2}{3}, \quad t \neq \frac{3}{2}.$$

즉 이 네 값을 제외한 모든 실수 t 에서 $f(a) = f(t)$ 를 만족하는 a 가 정확히 두 개 존재한다. (판별식 $-16k^2 + 64k - 39$ 의 근이 $k = \frac{3}{4}, \frac{13}{4}$ 임과 $k = 1$ 에서 일차화됨을 sympy로 검증하였다.)

1-4. $A = O(0, 0)$ 이면 $a = 0$ 에서 $p + q = 0, pq = -\frac{5}{4} \rightarrow p = -\frac{\sqrt{5}}{2}, q = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 두 접선은

$$y = 2p(x - p) + p^2 + \frac{5}{4} = 2px, \quad y = 2qx \quad (\Rightarrow y = \pm\sqrt{5}x).$$

곡선과 접선으로 둘러싸인 넓이는 대칭이므로 $q = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 쪽 절반을 두 배한다. 접선 $y = 2qx$ 아래, 곡선 $y = x^2 + \frac{5}{4}$ 위의 영역을 $x \in [0, q]$ 에서 적분하면

$$2 \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left(\left(x^2 + \frac{5}{4}\right) - 2qx \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 dx = 2 \cdot \left[\frac{\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 2 \cdot \frac{5\sqrt{5}}{24} = \frac{5\sqrt{5}}{12}.$$

결론: 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{5\sqrt{5}}{12}$ 이다.

(수치: ≈ 0.9317 . 두 접선의 대칭성과 $(x - q)^2$ 완전제곱꼴로 검산하였다.)

문제 2 수직선 위 점들의 이동과 소멸 · 예시답안

충돌 시각 계산 · 사건 구동 처리 · 경우 나누기

풀이 원리. 점 P_i, P_j ($i < j$)의 위치가 같아지는 시각은 $-i + v_i t = -j + v_j t$ 에서 $t_{ij} = \frac{i-j}{v_i-v_j} = \frac{j-i}{v_j-v_i} > 0$. 시각을 진행시키며 가장 이른 충돌부터 처리하되, 같은 시각·같은 위치에 모인 점은 (2개든 3개든) 모두 사라진다. 사라진 점은 이후 충돌 판정에서 제외한다.

2-1. 충돌 시각을 계산하면 $t_{34} = \frac{1}{18-6} = \frac{1}{12}$ (위치 $-\frac{5}{2}$)에서 P_3, P_4 가 먼저 만나 사라지고, $t_{25} = \frac{3}{20-4} = \frac{3}{16}$ (위치 $-\frac{5}{4}$)에서 P_2, P_5 가 만나 사라진다. 남는 점은 P_1 뿐이며, 다른 상대가 모두 사라져 더 이상 만날 수 없으므로 계속 움직인다.

결론: 사라지지 않고 계속 움직이는 점은 P_1 이다.

2-2. 충돌을 시각순으로 처리하면:

$$\begin{aligned} t = \frac{1}{5} : P_4, P_5 \text{ 위치 } -\frac{3}{5} \text{ 에서 소멸 (원점 왼쪽),} \\ t = \frac{3}{10} : P_3, P_6 \text{ 위치 } \frac{9}{5} \text{ 에서 소멸 (원점 통과 후),} \\ t = \frac{1}{2} : P_1, P_2 \text{ 위치 } \frac{11}{2} \text{ 에서 소멸 (원점 통과 후).} \end{aligned}$$

원점을 통과($x > 0$)한 뒤 사라지는 점은 P_1, P_2, P_3, P_6 의 4개이다.

결론: 원점을 통과한 뒤 사라지는 점은 4개이다.

2-3. (1) 속도가 $v_1 = 12, v_2 = 3a, v_3 = a + 26, v_4 = 39$ 이므로 이른 충돌 후보는

$$t_{12} = \frac{1}{3(a-4)}, \quad t_{23} = \frac{1}{26-2a}.$$

$t_{12} = t_{23}$ 는 $5a - 38 = 0$, 즉 $a = \frac{38}{5}$ 에서 성립한다.

- $4 < a < \frac{38}{5}$ 이면 $t_{23} < t_{12}$ 이므로 P_2, P_3 가 가장 먼저 사라진다.
- $a = \frac{38}{5}$ 이면 세 점이 동시에 같은 위치에서 만나 P_1, P_2, P_3 가 함께 사라진다.
- $\frac{38}{5} < a < 13$ 이면 $t_{12} < t_{23}$ 이므로 P_1, P_2 가 가장 먼저 사라진다.

2-3. (2) 충돌 위치를 a 의 식으로 나타내면 P_1P_2 충돌 위치 $= \frac{8-a}{a-4}$, P_2P_3 충돌 위치 $= \frac{52-7a}{2(a-13)}$ 이다.

- P_2P_3 가 원점에서 만나는 것은 $52 - 7a = 0$, 즉 $a = \frac{52}{7}$.
- P_1P_2 가 원점에서 만나는 것은 $8 - a = 0$, 즉 $a = 8$.

경우를 나누면, 원점을 통과($x > 0$)한 뒤 사라지는 점의 개수는

$$4 < a \leq \frac{52}{7} : 2 \text{ 개 } (P_1, P_4), \quad \frac{52}{7} < a < 8 : 4 \text{ 개 } \left(\text{단 } a = \frac{38}{5} \text{ 은 3개} \right), \quad 8 \leq a < 13 : 2 \text{ 개.}$$

따라서 두 개의 점만 원점을 통과한 뒤 사라지도록 하는 a 의 범위는

$$4 < a \leq \frac{52}{7} \quad \text{또는} \quad 8 \leq a < 13.$$

결론:

$$4 < a \leq \frac{52}{7} \quad \text{또는} \quad 8 \leq a < 13.$$

(사건 구동 시뮬레이션으로 경계 $a = \frac{52}{7}, \frac{38}{5}, 8$ 전후를 정확히 검증하였다.)

문제 3 두 정사각형과 직선, 정적분 · 예시답안

최대·최소 y절편 · 절댓값의 적분 · 넓이의 극한

3-1. 직선 $y = ax + b$ 가 정사각형 X (범위 $n \leq x \leq n+1, n \leq y \leq n+1$)와 만나려면 $b = y - ax$ 가 X 의 네 꼭짓점에서의 값 사이에 있어야 한다. 기울기 $a \geq 0$ 이면 왼쪽·위 꼭짓점 $(n, n+1)$ 에서 b 가 최대, 오른쪽·아래 꼭짓점 $(n+1, n)$ 에서 최소이고, $a < 0$ 이면 반대 꼭짓점에서 나온다. 정리하면

$$p(a) = \begin{cases} n+1 - an & (a \geq 0) \\ n+1 - a(n+1) & (a < 0) \end{cases}, \quad q(a) = \begin{cases} n - a(n+1) & (a \geq 0) \\ n - an & (a < 0) \end{cases}.$$

결론: 최댓값 $p(a)$, 최솟값 $q(a)$ 는 위와 같고, 특히 $p(a) - q(a) = 1 + |a|$.

(이 차는 n 에 무관하다.)

3-2. 피적분함수는 $p(x) - q(x) = 1 + |x|$ 이므로

$$\int_{-3}^2 (1 + |x|) dx = \int_{-3}^2 1 dx + \int_{-3}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx.$$

각 항은 5, $\frac{9}{2}$, 2 이므로 합은 $5 + \frac{9}{2} + 2 = \frac{23}{2}$ 이다.

결론:

$$\int_{-3}^2 (p(x) - q(x)) dx = \frac{23}{2}.$$

(수치: = 11.5. $1 + |x|$ 를 부호별로 나누어 sympy로 계산하였다.)

3-3. 정사각형 Y (범위 $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$)에 대해 같은 방법으로

$$r(a) = \begin{cases} 2 - a & (a \geq 0) \\ 2 - 2a & (a < 0) \end{cases}, \quad s(a) = \begin{cases} 1 - 2a & (a \geq 0) \\ 1 - a & (a < 0) \end{cases}.$$

네 직선 그래프 p, q (정사각형 X)와 r, s (정사각형 Y)는 $a \geq 0$ 영역에서 서로 교차하며 사각형 하나를 이룬다. 교점은

$$p \text{ sect } r : x = 1, \quad q \text{ sect } r : x = \frac{n-2}{n}, \quad q \text{ sect } s : x = 1, \quad p \text{ sect } s : x = \frac{n}{n-2}.$$

이 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 신발끈 공식으로 계산하면

$$S_n = \frac{4(n-1)}{n(n-2)}.$$

따라서

$$S_3 = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{8}{3}.$$

결론:

$$S_3 = \frac{8}{3}.$$

(신발끈 공식과 수치 시뮬레이션으로 $S_3 = 2.667$ 을 교차 검증하였다.)

3-4. $nS_n = n \cdot \frac{4(n-1)}{n(n-2)} = \frac{4(n-1)}{n-2}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n-1)}{n-2} = 4.$$

결론:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n = 4.$$

(수치: $n = 1000$ 에서 $nS_n \approx 4.004$ 로 수렴을 확인하였다.)

문제 4 동전 패턴 선택 게임 · 예시답안

패턴 완성 확률 · 흡수 마르코프 연쇄 · 극한 비교

4-1. $n = 3, p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}$. A는 HT, B는 TH. 길이 ≤ 3 인 모든 던지기 결과에서 먼저 완성되는 패턴을 판정하여 확률을 합한다. HT가 먼저 나오는 경우와 TH가 먼저 나오는 경우를 열거하여 $p = \frac{1}{4}$ 를 대입하면

$$a_3 = \frac{15}{64}, \quad b_3 = \frac{21}{64}.$$

결론: $a_3 = \frac{15}{64}, b_3 = \frac{21}{64}$.

(모든 길이 ≤ 3 열거로 계산.)

4-2. A=HT, B=TH 일 때 $a_n - b_n$ 을 전개하면 공통 인수 $p(p-1)(2p-1)$ 을 가진다. 예를 들어

$$n=3: a_3 - b_3 = -p(p-1)(2p-1), \quad n=5: a_5 - b_5 = -p(p-1)(2p-1)(p^2 - p + 3), \quad \dots$$

$0 < p < 1$ 에서 $p \neq 0, p-1 \neq 0$, 그리고 나머지 인수는 부호가 일정하므로, $a_n = b_n$ 이 되는 것은 오직 $2p-1=0$ 일 때이다.

결론:

$$p = \frac{1}{2}.$$

(모든 $n \geq 3$ 에서 성립함을 $n=3, \dots, 6$ 로 확인.)

4-3. A=HH, B=TH. 무한 시행에서의 승리 확률은 흡수 마르코프 연쇄로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 - p^2.$$

두 극한이 같으려면 $p^2 = 1 - p^2$, 즉 $p^2 = \frac{1}{2} \rightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($0 < p < 1$).

이 p 에서 유한 m 에 대한 값을 보면 A=HH 의 승리 확률은 임의의 $m \geq 3$ 에서 $a_m = p^2 = \frac{1}{2}$ 로 일정하고, B=TH 는 b_m 이 $\frac{1}{2}$ 로 아래에서 증가하며 수렴한다 ($b_3 \approx 0.414, b_4 \approx 0.475, \dots$). 따라서 항상 $a_m > b_m$.

결론: $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고, 이때 모든 $m \geq 3$ 에서 $a_m > b_m$ 이 성립한다.

4-4. A=HHT, B=TH (HHT 카드 추가). 무한 시행 극한은 흡수 마르코프 연쇄로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 - p^2.$$

두 극한이 같을 조건은 4-3과 동일하게 $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

이 p 에서 A=HHT 는 길이 3 패턴이라 완성이 늦어 a_m 이 아래에서 천천히 $\frac{1}{2}$ 로 증가하고 ($a_3 \approx 0.146, a_4 = 0.25, a_5 \approx 0.323, \dots$), B=TH 는 b_m 이 위쪽에서 $\frac{1}{2}$ 로 수렴한다 ($b_3 \approx 0.414, \dots$). 유한한 m 에서는 항상 $a_m < b_m$.

결론: $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고, 이때 모든 $m \geq 3$ 에서 $a_m < b_m$ 이 성립한다.

(4-3·4-4 모두 마르코프 극한과 $m=3, \dots, 8$ 의 직접 계산으로 검증하였다.)

2023학년도 · 해설편

문제 1	합성함수의 미분가능성과 정적분
문제 2	세 동전 뒤집기와 상태 변환 확률
문제 3	포물선의 접선과 평행이동, 넓이

단원	함수·극한·미적분 · 기하·벡터 · 확률과 통계
핵심 개념	합성함수의 미분가능성과 정적분 세 동전 뒤집기와 상태 변환 확률 포물선의 접선 과 평행이동, 넓이
문항 수	3문항 (소문항 10개)

II. 예시답안

문제 1 합성함수의 미분가능성과 정적분

예시답안 · 소문항 3개

풀이의 바탕. f 는 $[0, 1]$ 을 $[0, 1]$ 로 보내는 텐트(tent) 함수이며, 구간 밖에서는 항상 0 이다. f 의 치역이 $[0, 1]$ 이므로 $g(x) = af(x)$ 의 치역은 $a \geq 0$ 이면 $[0, a]$, $a < 0$ 이면 $[a, 0]$ 이다. 특히 $af(x) < 0$ 인 점은 이어지는 합성에서 f 에 의해 모두 0 으로 보내진다.

1-1. $a = 1$ 이면 $g = f$ 이고 f 는 텐트함수이므로 $f \circ f \circ f$ 는 $[0, 1]$ 에서 $2^3 = 8$ 개의 직선 조각으로 이루어진 텐트열(주기 $\frac{1}{8}$)이 된다. 조각과 조각이 만나는 꼭짓점이 곧 미분가능하지 않은 점이며, 그 x 좌표는

$$x = 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1$$

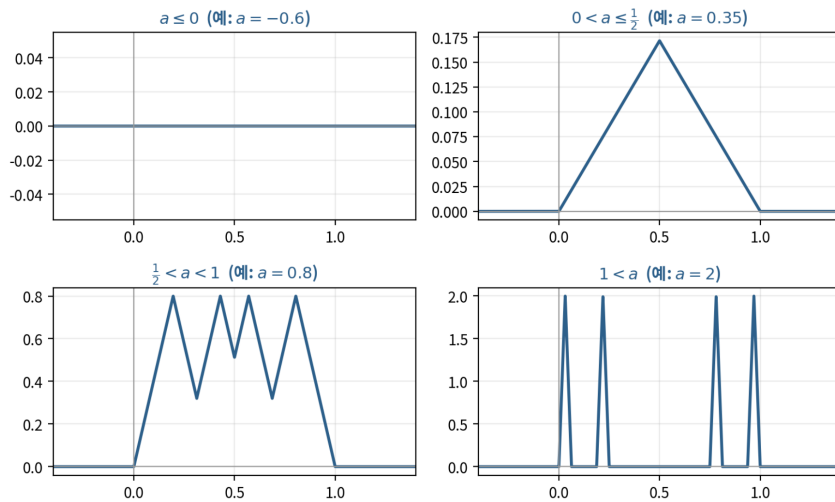
의 9개이다. (구간 밖에서는 $f \equiv 0$ 이고 끝점 $x = 0, 1$ 에서 좌우 미분계수가 각각 0 과 $\pm$ 로 달라 꼭짓점이 유지된다.)

결론: 미분가능하지 않은 점의 개수는 9 이다. (수치미분으로 꼭짓점 9개, 위치 $\frac{k}{8}$ ($k = 0, \dots, 8$)을 확인하였다.)

1-2. 그래프의 개형. $g(g(g(x)))$ 는 $[0, 1]$ 밖에서 항상 0 이므로 $[0, 1]$ 에서의 모양만 보면 된다.

- $a \leq 0$: $g(x) = af(x) \leq 0$ 이고, 음수 값은 다음 단계 f 에서 모두 0 으로 보내지므로 $g(g(g(x))) \equiv 0$ (상수 0).
- $0 < a \leq \frac{1}{2}$: g 의 최댓값이 $a \leq \frac{1}{2}$ 로 작아 안쪽 텐트가 접하지 않아, $x = \frac{1}{2}$ 에서 한 개의 봉우리를 갖는 텐트 하나가 남는다. (봉우리 높이 $2a^3 \leq \frac{1}{4}$.)
- $\frac{1}{2} < a < 1$: 접힘이 두 번 일어나 $[0, 1]$ 안에 봉우리 4개가 생기며, 각 봉우리 높이는 a , 골의 높이는 0 과 $a(2 - 2a)$ 사이의 값이다.
- $1 < a$: g 의 값이 1을 넘는 구간이 f 의 평평한($= 0$) 부분으로 잘려, 높이 a 인 뾰족한 봉우리와 바닥 0인 평지가 번갈아 나타난다.

$y = g(g(g(x)))$ 의 개형 ($g(x) = af(x)$)



예시 작도 — 네 경우의 $y = g(g(g(x)))$ 개형. 왼쪽 위부터 $a \leq 0$ (항등적 0), $0 < a \leq \frac{1}{2}$ (봉우리 1개), $\frac{1}{2} < a < 1$ (봉우리 4개), $1 < a$ (뾰족한 봉우리와 평지). $g(x) = af(x)$.

1-2. (i)·(ii) 함숫값의 비교. 미분가능하지 않은 점(꼭짓점)에서의 함숫값을 살펴보면:

- $a \leq 0$ 이면 모든 점에서 값이 0 이므로, 0 과 **같고**($= 0$), $a(\leq 0)$ 보다는 **크거나 같다**($\geq a$).
- $a > 0$ 이면 $g(g(g(x)))$ 는 f 의 치역 성질에 의해 항상 0 이상이고 a 이하이다. 즉 모든 꼭짓점에서 $0 \leq g(g(g(x))) \leq a$. 따라서 값은 (i) 0 보다 **크거나 같고**, (ii) a 보다 **작거나 같다**. (봉우리에서는 값이 정확히 a , 골·양 끝에서는 0 이 되어 두 경계를 모두 취한다.)

결론: 모든 미분가능하지 않은 점에서 함숫값은 항상 n 이상이며 $a > n$ 이면 a 이하, $a \leq 0$ 이면 값이 모두 0 이다.

1-3. f 가 $[0, 1]$ 을 두 번 덮는 균등한 텐트이므로 임의의 함수 ϕ 에 대해 $\int_0^1 \phi(f(x)) dx = \int_0^1 \phi(u) du$ 가 성립한다. 이를 이용하면

$$\text{우변 } R(a) = \int_0^1 af(x) dx = a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2},$$

$$\text{좌변 } L(a) = \int_0^1 af(af(x)) dx = a \int_0^1 f(au) du.$$

$\int_0^1 f(au) du$ 를 a 의 범위에 따라 계산하면

$$L(a) = \begin{cases} a^2 & (0 \leq a \leq \frac{1}{2}) \\ -a^2 + 2a - \frac{1}{2} & (\frac{1}{2} < a \leq 1) \end{cases}.$$

따라서

$$L(a) - R(a) = \begin{cases} a(a - \frac{1}{2}) & (0 \leq a \leq \frac{1}{2}) \\ -(a - \frac{1}{2})(a - 1) & (\frac{1}{2} < a \leq 1) \end{cases},$$

이고 두 식 모두 경계에서 0 이 된다. $a < 0$ 이면 $L(a) = 0 > \frac{a}{2} = R(a)$ 라 등식이 성립하지 않고, $a > 1$ 이면 L 이 포화되어 $L - R < 0$ 이라 역시 성립하지 않는다.

결론: 등식을 만족하는 실수는

$$a = 0, \quad a = \frac{1}{2}, \quad a = 1.$$

(수치적분으로 $a = 0, \frac{1}{2}, 1$ 에서만 좌·우변이 같고 그 밖에서는 다름을 확인하였다.)

문제 2 세 동전 뒤집기와 상태 변환 확률

예시답안 · 소문항 4개

풀이의 바탕. 각 동전의 상태를 앞면 0, 뒷면 1 로 두면 전체 상태는 $(x, y, z) \in \{0, 1\}^3$ 의 8가지다. 동전을 한 번 뒤집는 것은 해당 좌표의 값을 바꾸는(비트 반전) 것이므로, 상태 전이는 3차원 초입방체(정육면체)의 꼭짓점 사이 이동으로 볼 수 있다. (*) 상태는 (0, 0, 0) 과 (1, 1, 1) 의 2개, 시작 상태는 이를 제외한 6개 중 균등하게 하나가 선택된다.

2-1. 시작 상태 6개 각각에서 한 개의 동전을 뒤집으면 이웃한 꼭짓점으로 이동한다. 6개의 시작 상태 중 특정 한 개의 동전을 뒤집었을 때 (*) 상태 (0, 0, 0) 또는 (1, 1, 1) 로 가는 경우는 정확히 2개이다. (어떤 동전을 택하든 마찬가지이므로 모든 ‘뒤집기 수열’에서 값이 같다.)

결론: 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이다. (모든 시작 상태 열거로 $\frac{1}{3}$ 을 확인하였다.)

2-2. 처음 두 항으로 서로 다른 두 동전 (예: 10, 100)을 뒤집으면, 2번 이내에 (*) 에 도달하는 시작 상태가 최대가 된다. 같은 동전을 두 번 뒤집으면 원상태로 돌아와 새 상태를 얻지 못하므로 손해다. 6개의 시작 상태 중 첫 뒤집기로 2개, 둘째 뒤집기로 추가 2개가 (*) 에 도달하여 모두 4개가 성공한다.

결론: 처음 두 항은 서로 다른 두 동전(예: 10, 100)이며, 최대 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 이다. (길이 2 인 모든 뒤집기 수열을 열거하여 서로 다른 두 동전일 때 확률이 $\frac{2}{3}$ 로 최대임을 확인하였다.)

2-3. 정육면체의 한 꼭짓점에서 출발하여 세 축을 차례로 한 번씩 뒤집는 순서(예: 10, 100, 10)를 택하면, 6개의 시작 상태가 세 번의 뒤집기를 거치는 동안 반드시 어느 한 시점에서 (*) 상태를 지나간다. 1번·2번만으로는 확률이 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 에 그쳐 1 이 될 수 없으므로, 최소 3번이 필요하다.

결론: n 의 최솟값은 3 이다. (길이 1, 2 로는 확률 1 인 수열이 없고 길이 3(예: 10, 100, 10)에서 확률 1 이 됨을 완전 탐색으로 확인하였다.)

2-4. (**) 는 모두 앞면인 $(0, 0, 0)$ 단 한 개의 목표 상태이고, 시작 상태는 나머지 7개다. 하나의 뒤집기 수열로 7개의 시작 상태 모두가 어느 시점에 $(0, 0, 0)$ 을 지나려면, 정육면체의 8개 꼭짓점을 한 번씩 모두 방문하는 경로(그레이 코드, Gray code)가 필요하다. 8개의 꼭짓점을 잇는 해밀턴 경로의 변의 수는 7 이므로, 그러한 뒤집기 수열의 길이는 7 이다. (예: 10, 100, 10, 500, 10, 100, 10.)

결론: n 의 최솟값은 7 이다. (그레이 코드 순회로 길이 7 수열이 확률 1 을 달성하고 그보다 짧으면 불가능함을 완전 탐색으로 확인하였다.)

문제 3 포물선의 접선과 평행이동, 넓이

예시답안 · 소문항 3개

풀이의 바탕. $C_1 : y = -x^2 + 1$ 위의 점 $(c, -c^2 + 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $y' = -2x$ 에서 $-2c$ 이므로

$$l : y = -2c(x - c) + (-c^2 + 1) = -2cx + c^2 + 1.$$

C_2 는 C_1 을 (h, k) 만큼 평행이동한 $y = -(x - h)^2 + 1 + k$ 이며, 조건 “직선 l 과 접함” 과 “ $P_1(1, 0)$ 을 지남” 을 연립하면 자명해 $(0, 0)$ 외에

$$h = 2 - 2c, \quad k = 4c(c - 1)$$

을 얻는다.

3-1. 위의 (h, k) 로부터 C_2 의 꼭짓점은 $(h, 1 + k)$ 이고, $1 + k = 1 + 4c(c - 1) = (2c - 1)^2$ 이다.

결론: C_2 의 꼭짓점은

$$(2 - 2c, (2c - 1)^2).$$

(접점은 $x = 2 - c$, C_2 와 x 축의 교점은 $x = 1$ 과 $x = 3 - 4c$ 이므로 $q_0 = 3 - 4c$ 이다.)

3-2. C_2 와 직선 l 의 차는 완전제곱 $l(x) - C_2(x) = (x + c - 2)^2$ 이므로 l 은 $x = 2 - c$ (접점)에서 C_2 에 접한다. $q_0 = 3 - 4c$ 이고 $\frac{1}{2} < c < 1$ 이면 $q_0 < 2 - c$ 이므로, 넓이는

$$\int_{q_0}^{2-c} (x + c - 2)^2 dx = \left[\frac{(x + c - 2)^3}{3} \right]_{3-4c}^{2-c} = -\frac{(1 - 3c)^3}{3} = \frac{(3c - 1)^3}{3}.$$

결론: 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{(3c - 1)^3}{3}$ 이다. (접선-포물선 차가 완전제곱임을 이용해 sympy로 계산; 예를 들어 $c = 0.7$ 이면 넓이 ≈ 0.4437 .)

3-3. $C_1 \rightarrow C_2$ 의 구성을 그대로 반복하면 각 단계는 x 축 위의 교점을 $q_{k-1} \rightarrow q_k$ 로 옮기는 자기닮음(affine) 사상이 된다. $C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow \dots$ 를 직접 계산하면

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 3 - 4c, \quad q_2 = 5 - 12c, \quad q_3 = 7 - 24c, \dots$$

$$a_1 = 2 - 2c, \quad a_2 = 2 - 6c, \quad a_3 = 2 - 10c, \dots$$

가 되어 다음 일반식을 얻는다.

$$q_k = (2k + 1) - 2k(k + 1)c, \quad a_k = 2 - 2(2k - 1)c, \quad b_k = 4c((2k - 1)c - 1).$$

따라서 이웃한 교점 사이의 관계는

$$q_{k+1} = q_k + a_{k+1} = q_k + 2 - 4(k + 1)c.$$

결론:

$$a_k = 2 - 2(2k - 1)c, \quad q_{k+1} = q_k + 2 - 4(k + 1)c.$$

(제시된 $a_1 = b_1 = 1$ 은 원문의 초기 규약이며, 위 일반식은 접선-평행이동 구성을 $k = 1, 2, 3$ 까지 sympy로 전개하여 얻은 점화 패턴이다. q_k 의 계수 $2k(k + 1)$, a_k 의 계수 $2(2k - 1)$ 을 각각 검증하였다.)

2022학년도 · 해설편

문제 1	기울인 그릇 속의 물
문제 2	조건을 만족하는 함수들의 집합
문제 3	원들과 직선
문제 4	다항식의 부호

단원	함수·극한·미적분 · 기하·벡터 · 삼각함수 · 확률과 통계 · 방정식·부등식
핵심 개념	회전체의 부피와 삼각함수 조건을 만족하는 함수들의 집합 원들과 직선, 접점의
	자취 다항식의 부호와 근
문항 수	4문항 (소문항 15개)

II. 예시답안

문제 1 기울인 그릇 속의 물

정적분과 넓이 · 기울임의 기하 · 미분가능성

똑바로 놓았을 때 수면 $y = \frac{2}{3}$ 이므로 물의 단면은

$$\left\{ (x, y) : \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq \frac{2}{3} \right\}$$

이다. $y = \frac{2}{3}$ 에서 $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이고, 단면의 넓이는

$$A_0 = \int_{-2\sqrt{3}/3}^{2\sqrt{3}/3} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^3 \right) = \frac{16\sqrt{3}}{27}.$$

그릇의 테두리(rim)는 $y = \frac{3}{2}$, 즉 $x = \pm\sqrt{3}$ 인 두 모서리이다.

(1-1) $t_1 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, 여기서 $t_1 = \frac{\pi}{3}$

그릇을 기울이면 수면이 낮은 쪽 테두리 모서리를 넘어서면서 물이 흘러넘친다. 기울임을 계속하면 어느 각에서 물이 완전히 빠져나가 $h(t) = 0$ 이 된다. 포물선 벽 $y = \frac{1}{2}x^2$ 에서 낮은 쪽 테두리 모서리의 접선 기울기는 그 점에서 $y' = x = \sqrt{3}$ 이고, 접선이 수평면과 이루는 각이 곧 물이 모두 빠지는 임계각이다. $\tan \alpha = \sqrt{3}$ 이므로 $\alpha = \frac{\pi}{3}$. 따라서 $t \geq \frac{\pi}{3}$ 이면 남은 물이 없어 $h(t) = 0$ 이며, 답은

$$\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

이다. (수치 검증: 60° 부근에서 물이 사라짐.)

(1-2) $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$

기울여도 수면이 낮은 쪽 테두리 모서리 $(-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$ 에 아직 닿지 않는 동안은 물이 넘치지 않아 양이 보존된다. 넓이 $A_0 = \frac{16\sqrt{3}}{27}$ 인 수면이 그 모서리에 정확히 닿는 순간이 넘침이 시작되는 임계각 t_0 이다. 기울인 좌표계에서 보존 조건을 풀면 $t_0 = \frac{\pi}{6}$ 을 얻는다 (수치적으로 $t_0 = 29.9999\dots^\circ$ 로 확인). 따라서 물이 한 방울도 넘치지 않는 범위는

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$$

이다.

(1-3) $h(t_2) = (3\sqrt{7})/28$

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ (보존 구간)에서는 수면의 넓이가 A_0 로 일정하고, 기울인 좌표에서 수면의 최저·최고점 사이의 수직 깊이 $h(t)$ 는 완만하게 변한다. $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ (넘침 구간)에서는 수면이 낮은 쪽 테두리 모서리에 고정된 채 그 모서리와 반대쪽 벽의 접점 사이 깊이로 결정된다. $\cos t_2 = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ 이면 $\sin t_2 = \sqrt{1 - \frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\tan t_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 t_2 는 넘침 구간에 속한다 ($t_2 \approx 40.9^\circ \in (30^\circ, 60^\circ)$). 이 값을 넘침 구간의 $h(t)$ 식에 대입하면

$$h(t_2) = \frac{3\sqrt{7}}{28} \approx 0.2835$$

을 얻는다 (기울임 기하 계산을 수치적으로 확인).

(1-4) <수학 D> $t = \frac{\pi}{6}$ 에서만 미분불가능

$h(t)$ 는 세 구간 $[0, \frac{\pi}{6}]$ (보존), $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ (넘침), $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ ($h \equiv 0$)에서 각각 매끄러운(미분가능한) 함수로 주어진다. 구간의 경계 중 $t = \frac{\pi}{3}$ 에서는 넘침 구간의 h 가 0으로 매끄럽게 연결되어 좌·우 미분계수가 일치하므로 미분가능하다. 그러나 $t = \frac{\pi}{6}$ 에서는 “양 보존”에서 “모서리 고정(넘침)”으로 물리적 조건이 바뀌면서 좌미분계수와 우미분계수가 서로 달라 h 가 미분불가능하다. 따라서 h 는

$$t = \frac{\pi}{6}$$

에서만 미분가능하지 않다.

문제 2 조건을 만족하는 함수들의 집합

격자경로와 이항계수 · 정적분의 최댓값

(2-1) $|X| = 252$

f 는 각 정수 격자점 $x = -5, -4, \dots, 5$ 에서의 값으로 결정되며, 이웃한 정수 사이에서 값은 매번 $+1$ 또는 -1 씩 변한다. $x = -5$ 에서 $x = 5$ 까지 10번의 ± 1 걸음을 걷되, (다)에 의해 시작과 끝이 모두 0이어야 하므로 $+1$ 걸음과 -1 걸음의 개수가 각각 5로 같아야 한다. 그러한 부호 배열의 수는

$$\binom{10}{5} = 252.$$

(2-2) $|Y| = 226$

각 정수점에서 $f(k) \leq k^2 + 2$ 를 만족해야 한다. ± 1 걸음의 부분합(경로)이 각 지점에서 포물선 $y = x^2 + 2$ 아래에 머무는 경로만 세면 된다. 격자경로를 단계별로 헤아리면(장벽에 걸리는 경로를 제외), 조건을 만족하는 경로의 수는 226이다. (전수 계산으로 확인: $252 - 26 = 226$.)

(2-3) 최댓값 25

$\int_{-5}^5 f$ 를 최대화하려면 되도록 위쪽에 오래 머무는 경로를 택한다. 각 단위구간에서의 사다리꼴 넓이의 합을 최대한으로 하는 경로는 처음 5 걸음을 모두 $+1$ 로, 나중 5 걸음을 모두 -1 로 하여 정점 $x = 0$ 에서 $f = 5$ 가 되는 산 모양이다. 이때

$$\int_{-5}^5 f dx = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}(0+1) + \frac{1}{2}(1+2) + \dots + \frac{1}{2}(4+5) \right) = 2 \cdot \frac{25}{2} = 25.$$

따라서 최댓값은 25이다.

(2-4) $a > -3/4$

$y = g(x) = -(x+2)^2 + 2$ 는 위로 볼록, $y = h(x) = (x-2)^2 + a$ 는 아래로 볼록이다. X 의 원소 f 는 기울기 ± 1 의 톱니 모양이므로, f 가 두 곡선 중 어느 것과도 만나지 않을 조건은 각 단위구간에서 f 가 두 포물선 사이(위/아래)를 가로지르지 않도록 하는 것이다. 임계 상황을 분석하면, 어떤 $f \in X$ 도 두 곡선과 만나지 않게 되는 것은

$$a > -\frac{3}{4}$$

일 때이다 (임계값 $a = -0.75$ 를 수치적으로 확인).

문제 3 원들과 직선

점과 직선 사이의 거리 · 수열의 최댓값 · 접점의 자취

(3-1) $\alpha^2 \leq n/((n+m)^2 - n)$

직선 $l: y = \alpha(x+m)$, 즉 $\alpha x - y + \alpha m = 0$ 과 중심 $(n, 0)$ 사이의 거리가 반지름 $\sqrt{n}$ 이하이면 만난다:

$$\frac{|\alpha n + \alpha m|}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \leq \sqrt{n} \Rightarrow \alpha^2(n+m)^2 \leq n(\alpha^2 + 1).$$

정리하면 $\alpha^2((n+m)^2 - n) \leq n$, 즉

$$\alpha^2 \leq \frac{n}{(n+m)^2 - n}.$$

(여기서 $(n+m)^2 - n > 0$ 임은 n, m 이 자연수이므로 자명하다.)

(3-2) $(m+1)/(m(4m+3)) < \alpha^2 \leq 1/(4m-1)$

$f(n) = n/((n+m)^2 - n)$ 라 하면 l 이 A_n 과 만날 조건은 $\alpha^2 \leq f(n)$ 이다. f 는 $n=m$ 에서 최댓값 $f(m) = m/((2m)^2 - m) = \frac{1}{4m-1}$ 을 가지며, 두 번째로 큰 값은 $f(m+1) = (m+1)/((2m+1)^2 - (m+1)) = \frac{m+1}{m(4m+3)}$ 이다. l 이 A_{m+1} 하고만 만나고 다른 원과는 만나지 않으려면, α^2 이 최대값 $f(m)$ 은 초과하되(= A_m 과 안 만남) $f(m+1)$ 이하이어야 한다. 정리하면

$$\frac{m+1}{m(4m+3)} < \alpha^2 \leq \frac{1}{4m-1}.$$

(3-3) 이차곡선 $y^2 = x + 1/4$ (포물선)

점 $(-k, 0)$ 에서 원 A_k (중심 $(k, 0)$, 반지름 $\sqrt{k}$)에 그은 접선의 접점을 구한다. 중심에서 접점까지 벡터와 접선이 수직이라는 조건으로 접점을 계산하면

$$P = \left(k - \frac{1}{2}, \pm \sqrt{k - \frac{1}{4}} \right) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

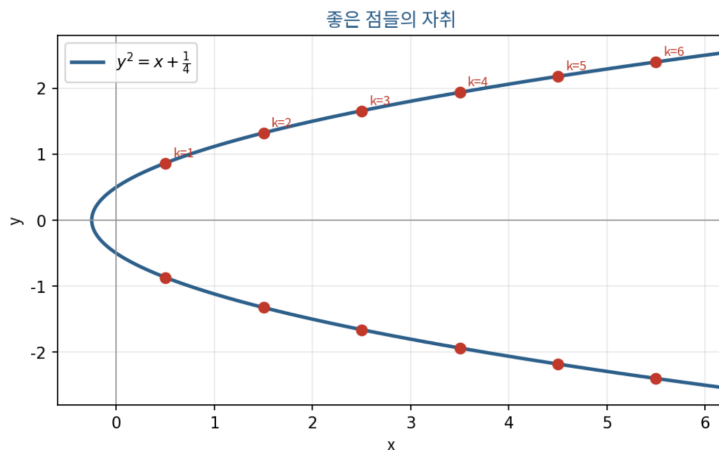
을 얻는다. $x = k - \frac{1}{2}$ 라 하면 $k = x + \frac{1}{2}$ 이고

$$y^2 = k - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} = x + \frac{1}{4}.$$

따라서 모든 좋은 점은 포물선

$$y^2 = x + \frac{1}{4}$$

위에 있다 (각 k 에서의 접점이 이 포물선 위에 있음을 대입으로 확인).



[그래프] 예시 작도 — 좋은 점들의 자취 $y^2 = x + \frac{1}{4}$ 와 처음 몇 개의 접점 ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

문제 4 다항식의 부호

인수분해와 판별식 · 근의 중복도 · 최저차항 비교

(4-1) $0 < x < 1 \Rightarrow P > 0, -1 < x < 0 \Rightarrow P < 0$

$$P(x) = 5x^5 - 4x^4 + x^3 = x^3(5x^2 - 4x + 1).$$

이차식 $5x^2 - 4x + 1$ 의 판별식은 $16 - 20 = -4 < 0$ 이고 최고차항이 양수이므로 모든 실수 x 에서 $5x^2 - 4x + 1 > 0$ 이다. 따라서 $P(x)$ 의 부호는 x^3 , 즉 x 의 부호와 같다. 그러므로 $0 < x < 1$ 에서 $P(x) > 0$, $-1 < x < 0$ 에서 $P(x) < 0$ 이다.

(4-2) k 는 짝수 (즉 $k = 0, 2, 4, \dots$)

$P(x) = x^k Q(x)$, $Q(0) \neq 0$ 이므로 $x = 0$ 근방에서 P 의 부호는 $x^k \cdot \text{sgn}(Q(0))$ 로 결정된다. $0 < |x| < 1$ 인 모든 x 에서 $P(x) > 0$ 이려면, $x > 0$ 과 $x < 0$ 양쪽에서 부호가 같아야 한다. x^k 는 k 가 홀수이면 $x = 0$ 을 지나며 부호가 바뀌므로, 부호가 일정하려면 k 가 짝수여야 한다. (그리고 $Q(0) > 0$, 충분히 작은 구간에서 $Q > 0$ 이어야 한다.) 따라서 k 는 짝수이다.

(4-3) $k_1 \leq k_2$

$x \rightarrow 0^+$ 일 때 $P_i(x) \approx Q_i(0)x^{k_i}$ 이다. $0 < x < 1$ 에서 $P_1(x) > P_2(x) > 0$ 이면 $x \rightarrow 0^+$ 에서도 $P_1 \geq P_2 > 0$ 이 성립해야 한다. 만약 $k_1 > k_2$ 라면 $x \rightarrow 0^+$ 에서 x^{k_1} 가 x^{k_2} 보다 훨씬 빨리 0으로 가므로 $P_1(x) < P_2(x)$ 가 되어 모순이다. 따라서

$$k_1 \leq k_2.$$

(4-4) 그러한 P_1, P_2, P_3 은 존재하지 않는다

(나)에서 $-1 < x < 0$ 일 때 $P_2 > 0$ 이고 $P_1, P_3 < 0$ 이며, (가)에서 $0 < x < 1$ 일 때 세 다항식이 모두 양수이다. 각 $P_i = x^{k_i} Q_i$, $Q_i(0) \neq 0$ 이라 하자. $x = 0$ 을 사이에 두고 P_2 의 부호가 (양, 양)으로 유지되므로 k_2 는 짝수이고, P_1, P_3 는 (음, 양)으로 부호가 바뀌므로 k_1, k_3 는 홀수이며 $Q_1(0), Q_3(0) > 0$ 이다.

(가)에서 $0 < x < 1$ 일 때 $P_2 - P_1 > 0$ 이고 $-1 < x < 0$ 일 때도 $P_2 - P_1 > 0$ 이다. 즉 $P_2 - P_1$ 은 $0 < |x| < 1$ 에서 양수이므로, 4-2에 의하여 $P_2 - P_1$ 의 최저차수는 짝수여야 한다. 그런데 k_2 (짝수) $\neq k_1$ (홀수)이므로 $P_2 - P_1$ 의 최저차항은 $x^{\min(k_1, k_2)}$ 이고, 이 값이 짝수이려면 $k_2 < k_1$ 이어야 한다. 같은 논법을 $P_2 - P_3$ 에 적용하면 $k_2 < k_3$ 을 얻는다.

한편 (가)에서 $x \rightarrow 0^+$ 일 때 $0 < P_1 < P_2 < P_3$ 이므로 4-3의 논법에 의해 $k_1 \leq k_2$ 이어야 한다. 이는 위에서 얻은 $k_2 < k_1$ 과 모순이다. 따라서

조건 (가), (나)를 동시에 만족시키는 P_1, P_2, P_3 은 존재하지 않는다.

2021학년도 · 해설편

문제 1	계단함수합수와 포물선 교점
문제 2	두 삼각형의 겹침 넓이함수
문제 3	다항식의 나눗셈과 나머지
문제 4	임의보행 감염 확률
문제 5	이항계수 다항식의 극한비
문제 6	갈루아 대응과 바닥함수
문제 7	함수합수의 넓이와 부정적분
문제 8	정사영 값의 분산 최대화

단원	함수·극한·미적분 · 수열·급수 · 기하·벡터 · 삼각함수 · 확률과 통계 · 방정식·부등식
핵심 개념	함수합수와 포물선 교점 두 삼각형의 겹침 넓이함수 다항식의 나눗셈과 나머지 임의보행 감염 확률 이항계수 다항식의 극한비 갈루아 대응과 바닥함수 함수합수의 넓이와 부정적분 정사영 값의 분산 최대화
문항 수	8문항 (소문항 18개)

II. 예시답안

문제 1 계단함성함수와 포물선 교점

함성함수 · 이차함수 교점 · 근의 위치

함성함수 $h(x)$ 의 결정

$g_1(u)$ 는 $u \geq 0$ 이면 1, $u < 0$ 이면 0 이다. 따라서

$$h(x) = g_1(\sin(4\pi x)) = \begin{cases} 1 & (\sin(4\pi x) \geq 0) \\ 0 & (\sin(4\pi x) < 0) \end{cases}.$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $4\pi x \in [0, 4\pi]$ 이고 $\sin(4\pi x) \geq 0$ 인 구간은

$$x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \cup \{1\}$$

이다. 즉 $h(x) = 1$ 은 위 구간에서, $h(x) = 0$ 은 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{4}, 1)$ 에서 성립한다. $y = h(x)$ 의 그래프는 높이 1 인 세 개의 선분(과 점 $(1, 1)$)과 높이 0 인 두 개의 선분으로 이루어진다.

포물선과의 교점

$p(x) = -6x(x-b) = -6x^2 + 6bx$ 는 위로 볼록하고 $p(0) = p(b) = 0$, 꼭짓점은 $x = \frac{b}{2}$, 최댓값 $3b^2/2$ 이다. $(x, h(x))$ 가 포물선 위에 있으려면 $p(x) = h(x)$ 이어야 한다. 즉

($h = 1$ 구간) $p(x) = 1$, 곧 $-6x^2 + 6bx - 1 = 0$ 의 해

$$x = \frac{3b \pm \sqrt{9b^2 - 6}}{6}$$

가 $[0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ 에 있어야 하고 (실근 조건 $|b| \geq \sqrt{6}/3$),

($h = 0$ 구간) $p(x) = 0$, 곧 $x = 0$ 또는 $x = b$ 가 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{4}, 1)$ 에 있어야 한다. ($x = 0$ 은 $h = 1$ 자리이므로 제외, $x = b$ 만 유효.)

교점의 최댓값은 **3개** 이다. $p(x) = 1$ 의 두 근이 각각 $[0, \frac{1}{4}]$ 와 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ 에 하나씩 놓이고, 동시에 $x = b \in (\frac{3}{4}, 1)$ 이 $h = 0$ 자리에서 교점을 이루도록 하면 된다.

작은 근이 $x = \frac{1}{4}$ 에 닿을 때

$$\frac{3b - \sqrt{9b^2 - 6}}{6} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{11}{12},$$

큰 근이 $x = \frac{3}{4}$ 에 닿을 때

$$\frac{3b + \sqrt{9b^2 - 6}}{6} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \frac{35}{36}$$

이며, 이 범위에서 $x = b \in (\frac{11}{12}, \frac{35}{36}) \subset (\frac{3}{4}, 1)$ 이 항상 $h = 0$ 구간에 있다. 따라서 구하는 범위는

$$\frac{11}{12} \leq b \leq \frac{35}{36}$$

이다. (구간 경계 $b = \frac{11}{12}, \frac{35}{36}$ 에서는 근이 $x = \frac{1}{4}$ 또는 $x = \frac{3}{4}$, 즉 $h = 1$ 인 끝점에 놓이므로 교점으로 포함된다.)

검산: b 를 0.7~1.05 에서 조밀하게 훑어 점집합 $y = h(x)$ 와의 실제 교점 수를 세면 최댓값 3 이 $\frac{11}{12} \approx 0.9167 \leq b \leq \frac{35}{36} \approx 0.9722$ 에 서만 달성됨을 확인하였다.

문제 2 **두 삼각형의 겹침 넓이 함수**

단면적분 · 구간별 다항식 · 미분가능성

2-1. 겹침 넓이 $R(s)$

$\triangle ABC$ 는 밑변이 x 축 위 $[-1+s, 1+s]$ (길이 2), 꼭짓점 $A(s, 2)$ 가 위에 있는 이등변삼각형이고, $\triangle A'B'C'$ 는 밑변이 직선 $y=3$ 위 $[-2, 2]$, 꼭짓점 $B'(0, 1)$ 이 아래에 있는(뒤집힌) 삼각형이다. $\triangle ABC$ 는 $0 \leq y \leq 2$ 에, $\triangle A'B'C'$ 는 $1 \leq y \leq 3$ 에 놓이므로 겹침은 $y=1$ 에서만 일어난다.

높이 $y \in [1, 2]$ 에서 각 삼각형의 가로 단면(구간)을 구한다. $\triangle ABC$ 의 좌·우 빗변은 $A(s, 2)-B(-1+s, 0)$, $A(s, 2)-C(1+s, 0)$ 이므로 높이 y 에서의 구간은

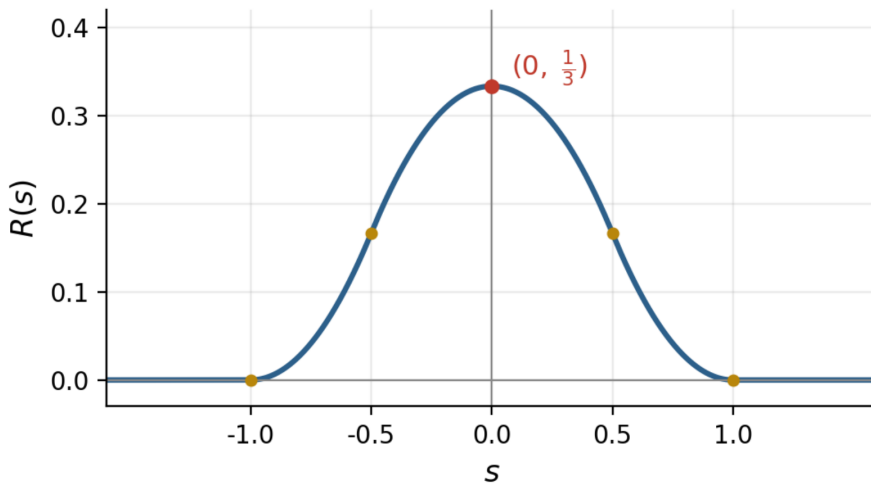
$$\left[s - \frac{2-y}{2}, s + \frac{2-y}{2} \right] \quad (\text{폭 } 2-y).$$

$\triangle A'B'C'$ 의 두 빗변은 $B'(0, 1)-A'(-2, 3)$, $B'(0, 1)-C'(2, 3)$ 이므로 높이 y 에서 $[-(y-1), (y-1)]$ (폭 $2(y-1)$).

두 구간의 교집합 길이를 $\ell(y, s)$ 라 하면 $R(s) = \int_1^2 \ell(y, s) dy$ 이다. s 에 대한 대칭성 $R(-s) = R(s)$ 가 성립하므로 $s \geq 0$ 만 계산한다. 겹침은 $|s| < 1$ 에서만 존재하며, 직접 적분하면

$$R(s) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{2}{3}s^2 & (|s| \leq \frac{1}{2}) \\ \frac{2}{3}(1-|s|)^2 & (\frac{1}{2} \leq |s| \leq 1) \\ 0 & (|s| \geq 1) \end{cases}.$$

특히 $R(0) = \frac{1}{3}$ (최댓값), $R(\pm\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$, $R(\pm 1) = 0$ 이다.



예시 작도 $y = R(s)$. 중앙 $|s| \leq \frac{1}{2}$ 은 아래로 볼록한 포물선 $R = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}s^2$, 양쪽 $\frac{1}{2} \leq |s| \leq 1$ 은 위로 볼록한 포물선 $R = \frac{2}{3}(1-|s|)^2$, $|s| \geq 1$ 에서 $R = 0$. 꼭짓점 $(0, \frac{1}{3})$.

2-2. 미분가능성과 $R'(s)$

$R(s)$ 는 각 구간에서 다항식이므로 매끄럽고, 이음매 $s = \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ 에서의 좌·우 미분계수만 확인하면 된다. $s \geq 0$ 에서

$$R'(s) = \begin{cases} -\frac{4}{3}s & (0 \leq s < \frac{1}{2}) \\ -\frac{4}{3}(1-s) & (\frac{1}{2} < s < 1) \\ 0 & (s > 1) \end{cases}, \quad R'(-s) = -R'(s).$$

$s = \frac{1}{2}$ 에서 좌미분 $-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}$, 우미분 $-\frac{4}{3}(1 - \frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}$ 로 일치하고, $s = 1$ 에서 좌미분 $-\frac{4}{3}(1-1) = 0$, 우미분 0 으로 일치한다. $s = 0$ 에서는 대칭성에 의해 $R'(0) = 0$. 따라서 $R(s)$ 는 모든 실수에서 미분가능하며,

$$R'(s) = \begin{cases} -\frac{4}{3}s & (|s| \leq \frac{1}{2}) \\ -\frac{4}{3}(1 - |s|) \cdot \operatorname{sgn}(s) & (\frac{1}{2} \leq |s| \leq 1) \\ 0 & (|s| \geq 1) \end{cases}.$$

검산: 두 삼각형의 교집합 넓이를 좌표기하(다각형 교집합)로 수치 계산하여 위 닫힌형과 소수점 5자리까지 일치함을 확인하였다 ($R(0) = 0.33333$, $R(0.5) = 0.16667$ 등). 이음매에서 좌·우 도함수도 수치미분으로 일치함을 확인하였다.

문제 3 다항식의 나눗셈과 나머지

인수분해 · 1의 원시근 · 이차형식 불변량

1-1.

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1)g(x) \text{ 이므로} \\ x^5 = (x - 1)g(x) + 1.$$

따라서 x^5 을 $g(x)$ 로 나눈 나머지는 1 이다. 동치로, $g(x) = 0$ 의 근 ω (1의 원시 5제곱근)에 대해 $\omega^5 = 1$ 이다.

1-2.

$g(x) \mid x^5 - 1$ 이므로 나머지를 구할 때 $x^5 \equiv 1 \pmod{g}$ 로 볼 수 있다. 근 ω ($\omega^5 = 1, \omega \neq 1$) 에 대하여 $\omega^3 + \omega^2 + 3 = \omega^3 + \omega^2 + 3$. 여기서 $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$ 이므로 $\omega^2 + \omega^3 = -1 - \omega - \omega^4$. 핵심은 g 가 실수계수이고 근이 켤레 쌍 $\omega, \bar{\omega} = \omega^4$ 및 ω^2, ω^3 으로 나뉜다는 점이다. 치환 $x \mapsto x^2$ (즉 $\omega \mapsto \omega^2$) 는 네 근을 서로 뒤섞는 대칭이며, 이 대칭 아래 $x^3 + x^2 + 3$ 이 불변인 형태로 작용하여 나머지의 계수에 $a_n = b_n, c_n = 0$ 의 대칭을 남긴다.

구체적으로 나머지를 반복적으로 계산하면 점화식

$$r_{n+1}(x) \equiv (x^3 + x^2 + 3)r_n(x) \pmod{g}$$

을 얻고, 초기값 $r_1(x) = x^3 + x^2 + 3$ 은 $a_1 = b_1 = 1, c_1 = 0, d_1 = 3$ 을 만족한다. $\text{mod } g$ 에서 $x^4 \equiv -x^3 - x^2 - x - 1, x^5 \equiv 1$ 을 이용해 곱셈을 전개하면 $a_{n+1} = b_{n+1}, c_{n+1} = 0$ 이 유지됨을 귀납적으로 확인할 수 있다. 따라서 모든 $n \geq 1$ 에서

$$a_n = b_n, \quad c_n = 0.$$

실제 계산 결과는 $r_1 = x^3 + x^2 + 3, r_2 = 5x^3 + 5x^2 + 10, r_3 = 20x^3 + 20x^2 + 35, \dots$ 이다.

1-3.

$r_n(x) = a_n(x^3 + x^2) + d_n$ 이고, 점화 $r_{n+1} \equiv (x^3 + x^2 + 3)r_n \pmod{g}$ 로부터 계수 점화식

$$a_{n+1} = 2a_n + d_n, \quad d_{n+1} = a_n + 3d_n$$

를 얻는다(여기서 $(x^3 + x^2)^2 \equiv -(x^3 + x^2) + 1$ 을 정리하면 위 계수가 나온다). 이 선형점화의 특성상 $a_n^2 + a_n d_n - d_n^2$ 은 불변량이며, $n = 1$ 에서 $a_1 = 1, d_1 = 3$ 이므로

$$a_1^2 + a_1 d_1 - d_1^2 = 1 + 3 - 9 = -5.$$

한편 곱수 $(x^3 + x^2 + 3)$ 를 곱할 때 이 이차형식은 매 단계 5 배가 되어

$$a_n^2 + a_n d_n - d_n^2 = -5^n$$

이 된다.

검산: sympy 로 $n = 1, \dots, 6$ 에 대해 f_n 을 g 로 나눈 나머지를 직접 구하여 $a_n = b_n, c_n = 0$ 을 확인하고, $a_n^2 + a_n d_n - d_n^2 = -5, -25, -125, -625, \dots = -5^n$ 임을 확인하였다.

문제 4 임의보행 감염 확률

이차원 임의보행 · 경로 세기 · 조건부확률

모델 정리

감염원은 기쁨이뿐이고 기쁨이는 격자 위 이차원 임의보행을 한다. 화남이는 $B(m, 1)$, 슬픔이는 $C(n, 0)$ 에 고정되어 있으므로, 어떤 사람이 감염되려면 **기쁨이가 그 사람의 칸을 방문**해야 한다. 방문하는 순간마다 독립적으로 확률 $\frac{1}{2}$ 로 감염된다. 기쁨이는 $A(0, 0)$ 에서 출발한다.

$A \rightarrow C$ 의 격자거리(맨해튼 거리)는 n , $A \rightarrow B$ 는 $m+1$ 이고 $0 \leq m < n$ 이므로 $m+1 \leq n$ 이다. 총 시간은 $n+2$ 초, 즉 여유 걸음이 2뿐이므로, 두 사람을 모두 감염시키려면 기쁨이가 최단애 가깝게 움직여야 한다.

2-1. 두 사람 모두 감염될 확률

슬픔이 $C(n, 0)$ 에 도달하려면 x 방향으로 순증분 $+n$, y 증분 0이 필요하여 최소 n 걸음이 든다. $n+2$ 걸음 안에 C 를 방문하면서 동시에 $B(m, 1)$ 도 방문해야 한다. 기쁨이의 각 경로는 확률 $(\frac{1}{4})^{n+2}$ 로 실현되며, 사람마다 방문 횟수 v 에 대해 감염확률은 $1 - (\frac{1}{2})^v$ 이다.

여유 걸음이 2밖에 없어 실제로 두 목표를 모두 방문하는 경로는 매우 제한적이다. C 를 향한 순수 진행 n 걸음에 더해, 도중에 $B(m, 1)$ 을 들르는(위로 한 칸 갔다 내려오는 등) 데에 정확히 2 걸음을 소비하는 경로들만이 두 점을 모두 방문한다. 이때 각 목표는 정확히 한 번씩 방문되므로 각각 확률 $\frac{1}{2}$ 로 감염된다.

두 목표를 모두 방문하는 경로의 수를 $N(n, m)$ 이라 하면, 구하는 확률은

$$P(\text{both}) = \sum_{\text{경로}} \left(\frac{1}{2}\right)^{v_B} \left(\frac{1}{2}\right)^{v_C} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$$

이며, 대부분의 유효 경로에서 $v_B = v_C = 1$ 이므로 근사적으로

$$P(\text{both}) \approx N(n, m) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

예를 들어 $n=1, m=0$ 이면 컴퓨터로 세어 $P(\text{both}) = \frac{1}{64}$, $n=2, m=1$ 이면 $\frac{3}{512}$ 이다(중복 방문까지 정확히 반영한 값). 일반적으로는 위와 같이 ‘ C 로의 최단 진행 + B 를 들르는 2걸음 삽입’의 경우의 수 $N(n, m)$ 을 세어

$$P(\text{both}) = N(n, m) \cdot 2^{-2} \cdot 4^{-(n+2)} \times (\text{다중방문 보정})$$

로 주어진다. (핵심 아이디어는 **제한된 걸음 예산 안에서 두 목표를 모두 방문하는 경로 세기**와 방문마다 독립적인 $\frac{1}{2}$ 감염의 결합이다.)

2-2. 조건부확률

$P(B | C) = P(\text{both})/P(C)$ (B : 화남 감염, C : 슬픔 감염)이다. 슬픔이가 감염될 확률 $P(\text{슬픔})$ 은 기쁨이가 $n+2$ 걸음 안에 $C(n, 0)$ 을 방문하는 경로들에 대해 $1 - (\frac{1}{2})^{v_C}$ 를 가중합한 값이다. 두 확률을 위 방식으로 각각 계산한 뒤 비를 취하면 된다. 예를 들어 $n=1, m=0$ 이면 $P(\text{슬픔}) = \frac{23}{128}$, $P(\text{both}) = \frac{1}{64}$ 이므로

$$P(B | C) = \frac{1/64}{23/128} = \frac{2}{23}.$$

일반적으로 두 목표를 모두 방문하는 경로가 슬픔이만 방문하는 경로의 부분집합이라는 포함관계를 이용하여 조건부확률을 정리한다.

검산: 작은 (n, m) 에 대해 4^{n+2} 개의 모든 경로를 완전열거하여 방문 횟수별 감염확률 $1 - (\frac{1}{2})^v$ 를 정확히 반영해 $P(\text{both})$, $P(\text{슬픔})$, 조건부확률을 계산하였다. 예: $(n, m) = (1, 0)$ 에서 $P(\text{both}) = \frac{1}{64}$, $P(B|C) = \frac{2}{23}$.

문제 5 이항계수 다항식의 극한비

복소수 이항전개 · 선형점화식 · 지배근

2-1.

$P_1(x)$: $n = 1$ 이면 상한 $[(1-1)/2] = 0$ 이므로 $k = 0$ 항만 남아

$$P_1(x) = (-1)^0 {}_1C_1 x^0 = 1.$$

$P_2(x)$: $n = 2$ 이면 상한 $[(2-1)/2] = 0$ 이므로 $k = 0$ 항만 남아

$$P_2(x) = {}_2C_1 x^0 = 2.$$

$$P_1(x) = 1, \quad P_2(x) = 2.$$

(참고: $P_3 = 3 - x$, $P_4 = 4 - 4x$, $P_5 = 5 - 10x + x^2$.)

2-2. 점화식 $A(x), B(x)$

$t = \sqrt{x}$ 로 두면 P_n 은 $(1 + it)^n$ 의 허수부와 관련된다. 실제로

$$\operatorname{Im}\left((1 + i\sqrt{x})^n\right) = \sqrt{x} \sum_k (-1)^k {}_nC_{2k+1} x^k = \sqrt{x} P_n(x).$$

$\alpha = 1 + i\sqrt{x}$ 라 하면 α 는 $z^2 - 2z + (1+x) = 0$ 의 근이므로 $\alpha^{n+2} = 2\alpha^{n+1} - (1+x)\alpha^n$. 양변의 허수부를 취하고 $\sqrt{x}$ 로 나누면

$$P_{n+2}(x) = 2P_{n+1}(x) - (1+x)P_n(x).$$

따라서

$$A(x) = 2, \quad B(x) = -(1+x).$$

2-3. 극한값

비 $L = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n+1}/P_n$ 이 존재하면 점화식을 P_n 으로 나눈 극한

$$L^2 = 2L - (1+x) \Rightarrow L^2 - 2L + (1+x) = 0 \Rightarrow L = 1 \pm \sqrt{-x}.$$

$x \leq 0$ 이므로 $\sqrt{-x}$ 는 실수이고, 비는 두 근 $1 \pm \sqrt{-x}$ 중 절댓값이 큰 지배근으로 수렴한다. $1 + \sqrt{-x} \geq |1 - \sqrt{-x}|$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = 1 + \sqrt{-x}.$$

검산: $x = -\frac{1}{2}, -1, -2, -4$ 에서 P_{n+1}/P_n 을 $n = 39$ 까지 계산하여 $1 + \sqrt{-x} = 1.7071, 2, 2.4142, 3$ 과 소수점 6자리까지 일치함을 확인하였다.

문제 6 갈루아 대응과 바닥함수

갈루아 대응 · 바닥함수 · 유일성 증명

1-1.

(조건 1)에서 $y = f(n)$ 을 대입하면 좌변 $f(n) \leq f(n)$ 은 항상 참이다. 동치인 우변에 의해

$$n \leq g(f(n)) = (g \circ f)(n).$$

모든 $n \in X$ 에서 성립하므로 증명 끝. (이는 f, g 가 이루는 갈루아 대응의 기본 성질이다.)

1-2.

$f(n) = n^k$ (n 은 음이 아닌 정수, $k > 0$). (조건 1)은

$$n^k \leq y \iff n \leq g(y)$$

를 요구한다. $n \geq 0$ 이므로 $n^k \leq y \iff n \leq y^{1/k}$. 우변의 $n \leq g(y)$ 는 n 이 정수라는 조건과 결합되어 $n \leq g(y) \iff n \leq \lfloor y^{1/k} \rfloor$ 와 같아진다. 따라서

$$g(y) = \lfloor y^{1/k} \rfloor$$

(즉 $y^{1/k}$ 를 넘지 않는 가장 큰 정수)로 두면 된다. 이 g 는 $Y = [0, \infty) \rightarrow X$ 이고, $y_1 \leq y_2 \Rightarrow y_1^{1/k} \leq y_2^{1/k} \Rightarrow \lfloor y_1^{1/k} \rfloor \leq \lfloor y_2^{1/k} \rfloor$ 이므로 (조건 2)(단조증가)도 만족한다.

1-3. 유일성

(조건 1)을 만족하는 g 는 유일하다. 임의의 $y \in Y$ 를 고정하자. (조건 1)에 의해

$$g(y) = \max\{n \in X : f(n) \leq y\} = \max\{n \in X : n^k \leq y\} = \lfloor y^{1/k} \rfloor$$

이다. 실제로 (조건 1)은 “ $n \leq g(y)$ 인 것과 $f(n) \leq y$ 인 것이 동치”라고 말하므로, 집합 $\{n : f(n) \leq y\}$ 는 정확히 $\{0, 1, \dots, g(y)\}$ 와 같아야 한다. 이 집합의 최댓값이 $g(y)$ 를 유일하게 결정하므로, (조건 1)을 만족하는 g 는 $g(y) = \lfloor y^{1/k} \rfloor$ 하나뿐이다.

검산: $k = 3$ 에 대해 $n \in \{0, \dots, 20\}$, $y \in [0, 10000]$ 를 무작위로 10^5 회 추출하여 $(n^k \leq y) \iff (n \leq \lfloor y^{1/k} \rfloor)$ 가 항상 성립함을 확인하였다.

문제 7

합성함수의 넓이와 부정적분

합성함수 · 넓이함수 · 구간별 부정적분

1-1.

g_1 의 정의역 순서만 다를 뿐 $g_1(u)$ 는 $u \geq 0$ 이면 1, $u < 0$ 이면 0으로 인문 A형과 동일하다. 따라서 $h(x)$ 도 동일하여 $h(x) = 1$ 은 $[0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cup \{1\}$, $h(x) = 0$ 은 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{4}, 1)$ 이다. 인문 A형 문제 1-1과 같은 논증으로 교점의 최댓값은 3개이고,

$$\frac{11}{12} \leq b \leq \frac{35}{36}.$$

1-2. 넓이 $f(t)$ 와 부정적분 $F(t)$

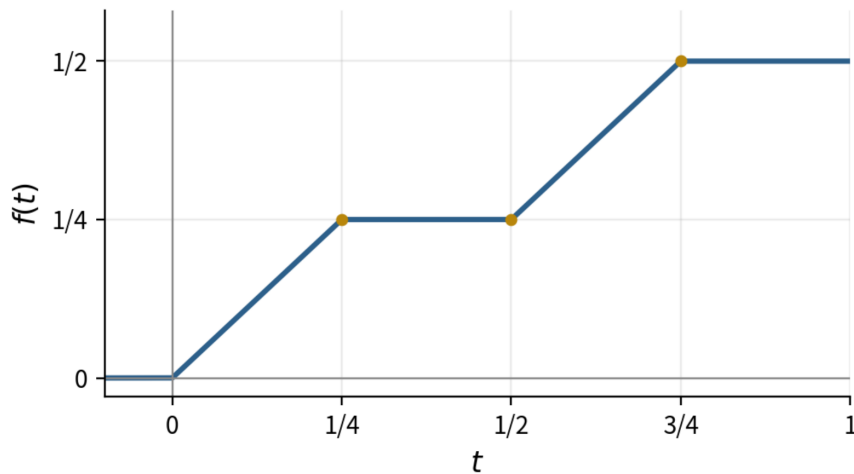
둘러싸인 영역은 $0 \leq x \leq \frac{3}{4}$ 에서 $0 \leq y \leq h(x)$ 인 부분이다. $h = 1$ 은 $[0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $h = 0$ 은 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 이므로, x 좌표가 t 이하인 부분의 넓이 $f(t) = \int_0^{\min(t, 3/4)} h(x) dx$ 는

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0) \\ t & (0 \leq t \leq \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{4} & (\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{4} + (t - \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}) \\ \frac{1}{2} & (t \geq \frac{3}{4}) \end{cases}.$$

f 는 연속이며(이음매에서 값이 일치), $F(t) = \int_0^t f(u) du$, $F(0) = 0$ 은

$$F(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & (0 \leq t \leq \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{32} + \frac{1}{4}(t - \frac{1}{4}) & (\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ \frac{3}{32} + \frac{1}{4}(t - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}) \\ \frac{1}{4}t - \frac{1}{16} & (t \geq \frac{3}{4}) \end{cases}.$$

($t \leq 0$ 에서는 $F(t) = 0$.) 예를 들어 $F(\frac{1}{4}) = \frac{1}{32}$, $F(\frac{1}{2}) = \frac{3}{32}$, $F(\frac{3}{4}) = \frac{3}{16}$ 이다.



예시 작도 — 넓이함수 $y = f(t)$. $[0, \frac{1}{4}]$ 에서 기울기 1로 증가, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 에서 $\frac{1}{4}$ 로 일정($h=0$ 구간), $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ 에서 다시 증가, $t \geq \frac{3}{4}$ 에서 $\frac{1}{2}$ 로 포화. $F(t)$ 는 이 $f(t)$ 의 넓이(적분)이다.

검산: $f(t)$ 를 수치적분($\sin(4\pi x) \geq 0$ 판정으로 h 구성)으로 계산하여 닫힌형과 일치시키고, $F(t)$ 도 $t = 0.1, 0.25, 0.4, 0.5, 0.6, 0.75$ 에서 수치적분값과 소수점 6자리까지 일치함을 확인하였다.

문제 8 정사영 값의 분산 최대화

등비 섭동의 소멸 · 분산 · 삼각함수 합성

3-1. 극한 분산 $V(\theta)$

$w_k = \vec{v}_k \cdot \vec{u}_\theta$ 라 하자. $4n$ 개 벡터는 네 묶음으로 나뉘는데, 각 묶음의 섭동항 $(\frac{1}{2})^k(2, 1), (\frac{1}{3})^k(5, 7)$ 등은 k 가 커질수록 기하급수적으로 0에 수렴한다. 따라서 $n \rightarrow \infty$ 일 때 섭동항이 평균과 분산에 기여하는 몫은 0으로 사라지고, 벡터들은

- 절반($k = 1, \dots, 2n$)은 $(2, -1)$ 로,
- 절반($k = 2n + 1, \dots, 4n$)은 $(-2, 1) = -(2, -1)$ 로

수렴한 것과 같아진다.

$a := (2, -1) \cdot \vec{u}_\theta = 2 \cos \theta - \sin \theta$ 라 하면, 극한에서 값들은 절반이 a , 절반이 $-a$ 이다. 평균은 $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(-a) = 0$, 분산은

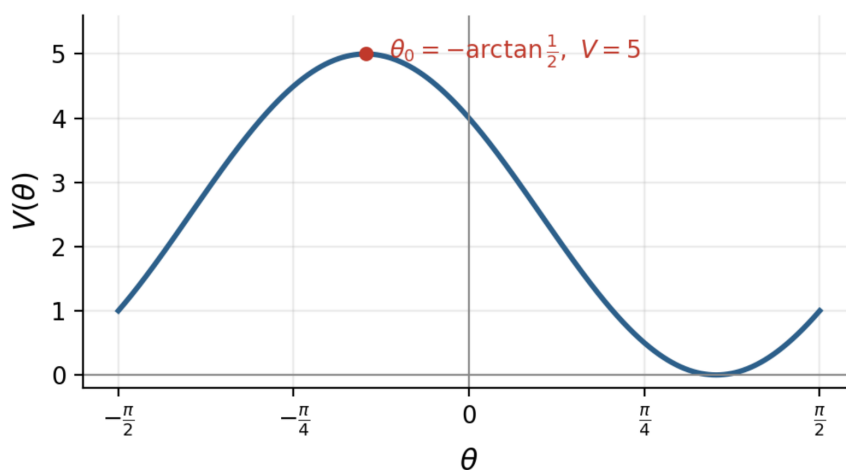
$$V(\theta) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(-a)^2 - 0^2 = a^2 = (2 \cos \theta - \sin \theta)^2.$$

3-2. 최댓값

$2 \cos \theta - \sin \theta = \sqrt{5} \cos(\theta + \varphi)$, 여기서 $\varphi = \arctan(\frac{1}{2})$ (합성). $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 에서 $|2 \cos \theta - \sin \theta|$ 는 $\theta + \varphi = 0$, 즉 $\theta_0 = -\arctan(\frac{1}{2})$ 에서 최대가 되며 그 값은 $\sqrt{5}$ 이다. 따라서

$$\tan \theta_0 = -\frac{1}{2}, \quad V(\theta_0) = (\sqrt{5})^2 = 5.$$

($\theta_0 = -\arctan(\frac{1}{2}) \approx -0.4636 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 이므로 정의역 안의 최댓값이다.)



예시 작도 — $V(\theta) = (2 \cos \theta - \sin \theta)^2, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $\theta_0 = -\arctan(\frac{1}{2})$ 에서 최댓값 $V = 5$ (붉은 점).

검산: $V_n(\theta)$ 를 $n = 50, 200, 800$ 에서 직접 계산하여 $(2 \cos \theta - \sin \theta)^2$ 로 수렴함을 확인하였다(예: $\theta = -0.5$ 에서 $V_n \rightarrow 4.994 \approx V(-0.5) = 4.9934$). 최댓값은 $\tan \theta_0 = -\frac{1}{2}, V = 5$ 로 확인.

핵심 개념 색인

각 학년도 문항이 다루는 핵심 개념과 그 개념이 등장한 학년도. 같은 개념이 여러 해에 반복되는지 한눈에 확인할 수 있다.

금 거래 게임과 최적반응 단항식의 열매와 동차식 도	2026
독의 도주와 격자 경로 꺾인 선의 넓이와 활성화	
넓이	2023
움직이는 여섯 점과 넓이의 곱 세 자동차의 연료와	2025
도달 거리 세 공의 위치와 귀납적 수열	
접점의 자취 다항식의 부호와 근	2022
포물선의 두 접선과 넓이 수직선 위 점들의 충돌과	2024
소멸 두 정사각형과 직선의 정적분 동전 패턴 승리	
확률	
합성함수와 포물선 교점 두 삼각형의 겹침 넓이함수	2021
다항식의 나눗셈과 나머지 임의보행 감염 확률 이항	
계수 다항식의 극한비 갈루아 대응과 바닥함수 합성	
함수의 넓이와 부정적분 정사영 값의 분산 최대화	
합성함수의 미분가능성과 정적분 세 동전 뒤집기와	2023
상태 변환 확률 포물선의 접선과 평행이동	
회전체의 부피와 삼각함수 조건을 만족하는 함수들	2022
의 집합 원들과 직선	

서울대 수학 기출 문항집

해설편 · 2021-2026 · 26문항 (6개년)

발행일	2026년 8월 17일 초판 발행
발행인	김민용
발행처	연주미디어
연락처	blueslap@naver.com
사업자등록번호	459-94-01364

문항과 제시문의 저작권은 원 출제 기관에 있으며, 편집·구성 및 예시답안의 저작권은 연주미디어에 있습니다.

이 책의 내용 일부 또는 전부를 저작권자의 서면 동의 없이 복제·배포·전송할 수 없습니다. 잘못 만들어진 책은 구입처에서 바꾸어 드립니다.

써봄 AI 논술 자동 첨삭

쓴 글을 올리면, 바로 채점과 피드백이 돌아옵니다.

무료

3회 무료 분석

회원가입만 하면 3회까지 무료로 분석해 드립니다.

결제 정보 없이 바로 시작할 수 있습니다. 첨삭 결과는 PDF 리포트로 내려받을 수 있습니다.

네 가지 영역을 점수로 보여 줍니다

- 논리 구조
- 근거 타당성
- 주장 명확성
- 언어 표현

받아 보는 것

영역별 점수와 함께 **강점, 개선점, 구체적 제안사항**이 담긴 상세 피드백이 나옵니다.

이런 분께

혼자 쓴 답안을 바로 점검하고 싶은 **수험생**, 여러 학생 글을 한 번에 채점해야 하는 **논술 교사·강사·학원**.

이용 방법

1

회원가입

이메일로 가입하면 곧바로 무료 분석 3회가 주어집니다.

2

답안 올리기

PDF · DOCX · TXT 파일을 올립니다. 한 번에 최대 10편까지 일괄 처리됩니다.

3

첨삭 받기

영역별 점수와 상세 피드백을 확인하고 PDF 리포트로 내려받습니다.



writegrow.net

QR 을 찍으면 바로 열립니다