



KAIST

수학

해설편

수시 입학전형 면접 및 구술고사 기출 문항집

2019~2026 · 19문항 (8개년) · 전 학년도 예시답안·채점 기준 수록

목차

2026학년도

문제 1	쌍곡선과 점근선, 그리고 단위벡터의 내적	4
문제 2	정육각형 격자 위를 무작위로 걷는 로봇	7

2025학년도

문제 1	귀납적으로 정의된 수열의 증가·감소와 상수수열	14
문제 2	I -접선과 I -할선이 덮는 영역	16

2024학년도

문제 1	원 위를 도는 세 점의 공선 조건과 삼각형 넓이의 최댓값	21
------	---------------------------------	----

2023학년도

문제 1	공간의 원·정다각형이 xy 평면에 만드는 자취	27
문제 2	일렬 타일 위를 걷는 개미와 조건부확률	30
문제 3	순서쌍의 친화도	31
문제 4	벽을 미끄러지는 직각삼각형의 그림자	33

2022학년도

문제 1	두 동심원과 세 현의 길이의 제곱합	38
문제 2	원과 다각형에 줄을 감을 때 끝점의 궤적	41

2021학년도

문제 1	평행광선이 만드는 눈사람의 그림자	46
문제 2	원점을 지나는 직선까지의 거리 제곱합의 최소	48
문제 3	단위원의 접선·할선이 만드는 두 삼각형과 극한	50
문제 4	주사위 두 개의 최댓값·최솟값과 기댓값	51

2020학년도

문제 1	삼각함수 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이와 극한	55
문제 2	구에 접하는 평면의 존재와 접점 벡터의 내적	56

2019학년도

문제 1	트랙 위를 구르는 원 위 한 점의 궤적	63
문제 2	이차함수의 판별식과 조건부확률	65

2026학년도 · 해설편

- 문제 1** 쌍곡선과 점근선, 그리고 단위벡터의 내적
문제 2 정육각형 격자 위를 무작위로 걷는 로봇

-
- 단원** 기하·벡터 · 확률과 통계
핵심 개념 원의 방정식, 쌍곡선과 점근선, 평면벡터의 내적, 코사인법칙, 정육각형 격자 위의 확률, 확률의 덧셈정리·곱셈정리
문항 수 2문항 (소문항 5개) · 10점

II. 예시답안

문제 1 쌍곡선과 점근선, 그리고 단위벡터의 내적

거리의 차의 자취 · 점근선 · 내적의 최솟값

(1) $|\overline{AC} - \overline{BC}|$ 값의 범위는 닫힌구간 $[0, 4]$ (a) 거리의 차가 일정한 점의 자취를 먼저 파악한다. $k \geq 0$ 인 상수에 대해 $|\overline{AC'} - \overline{BC'}| = k$ 를 만족하는 점 C' 의 자취를 생각하자. 삼각부등식에서 $|\overline{AC'} - \overline{BC'}| \leq \overline{AB} = 6$ 이므로 $k > 6$ 인 자취는 없다.• $k = 0$: $\overline{AC'} = \overline{BC'}$ 이므로 선분 AB 의 수직이등분선, 곧 y 축.• $0 < k < 6$: 두 초점 $A(-3, 0), B(3, 0)$ 까지의 거리의 차가 일정하므로 쌍곡선이며, 그 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0, k = 2a), \quad a^2 + b^2 = 3^2 = 9$$

이다 (주축의 길이가 $k = 2a$, 초점거리가 $c = 3$). 점근선은 $y = \pm(b/a)x$ 이다.• $k = 6$: x 축 위의 점들 가운데 선분 AB 바깥의 점들(두 반직선).(b) 주어진 원과 만나지 못하는 k 가 언제부터인지 본다. 주어진 원은 $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ 이고 원판 D 는 $x^2 + (y - 3)^2 \leq 8$ 이다. 원판의 가장 낮은 점은 $(0, 3 - 2\sqrt{2})$ 이고 $3 - 2\sqrt{2} \approx 0.17 > 0$ 이므로 D 는 x 축과 만나지 않는다. 따라서 $k = 6$ 은 일어날 수 없다. 한편 중심 $(0, 3) \in D$ 는 y 축 위의 점이므로 $k = 0$ 은 실제로 얻어진다.(c) a 가 커질수록 쌍곡선은 y 축에서 멀어진다. 점 (x, y) ($x \neq 0$)를 고정하고

$$G(a) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9 - a^2} \quad (0 < a < 3)$$

로 두면, a 가 커질 때 x^2/a^2 은 줄고 $y^2/(9 - a^2)$ 은 커지므로 G 는 순감소한다. 또 $a \rightarrow 0^+$ 에서 $G \rightarrow +\infty$, $a \rightarrow 3^-$ 에서 $G \rightarrow -\infty$ 이므로 $G(a_0) = 1$ 인 a_0 가 유일하게 존재하고, 그 점이 바로 이 점을 지나는 자취의 a 값이다. 순감소성에서

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9 - a^2} \leq 1 \Leftrightarrow a \geq a_0 \Leftrightarrow 2a \geq k = |\overline{AC} - \overline{BC}|$$

를 얻는다. 즉 $|\overline{AC} - \overline{BC}| \leq 2a$ 인 영역은 정확히 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9 - a^2} \leq 1$ 인 영역(두 가지 사이의 영역)이다.(d) 원과 접하는 쌍곡선을 찾는다. 쌍곡선의 방정식을 x^2 에 대하여 풀면

$$x^2 = a^2 \left(1 + \frac{y^2}{b^2} \right) = a^2 + \left(\frac{a^2}{b^2} \right) y^2$$

이고, 이를 원의 방정식 $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ 에 대입하면

$$a^2 + \left(\frac{a^2}{b^2} \right) y^2 + (y - 3)^2 = 8 \Rightarrow \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) y^2 - 6y + (a^2 + 1) = 0.$$

그런데 $1 + a^2/b^2 = (a^2 + b^2)/b^2 = 9/b^2$ 이므로

$$\frac{9}{b^2} y^2 - 6y + (a^2 + 1) = 0$$

이다. 이는 쌍곡선과 원의 교점의 y 좌표가 만족하는 이차방정식이다. 쌍곡선과 원은 모두 y 축에 대칭이므로 두 도형이 접할 때 두 접점의 y 좌표는 서로 같고, 따라서 이 이차방정식은 중근을 가져야 한다. 판별식을 0으로 두면

$$36 - 4 \times \frac{9}{b^2} \times (a^2 + 1) = 0 \Rightarrow b^2 = a^2 + 1$$

이고, 이를 $a^2 + b^2 = 9$ 와 연립하면 $a^2 = 4, b^2 = 5$ 이다. 즉 원에 접하는 쌍곡선은

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1, \quad k = 2a = 4$$

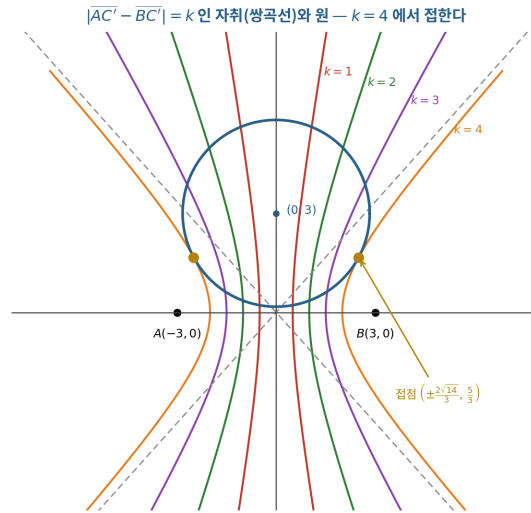
이고, 접점의 y 좌표는 $y = 6/(2 \cdot 9/5) = 5/3, x^2 = 4(1 + (25/9)/5) = 56/9$ 이므로 접점은 $\left(\pm \frac{2\sqrt{14}}{3}, \frac{5}{3} \right)$ 이다.(e) 최댓값이 정말 4임을 확인한다. (c)에 의해 $|\overline{AC} - \overline{BC}| \leq 4$ 는 $x^2/4 - y^2/5 \leq 1$ 과 같은 말이다. 원판 위의 점은 $x^2 \leq 8 - (y - 3)^2$ 을 만족하므로

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} - 1 \leq \frac{8 - (y-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} - 1 = -\frac{9}{20}y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{5}{4} = -\frac{9}{20}\left(y - \frac{5}{3}\right)^2 \leq 0$$

이다. 마지막 등식은 완전제곱으로 정리한 것이다. 따라서 원판의 모든 점에서 $|\overline{AC} - \overline{BC}| \leq 4$ 이고, 등호는 $y = 5/3$ 이면서 $x^2 = 8 - (y-3)^2 = 56/9$ 일 때, 곧 (d)에서 구한 두 점에서만 성립한다.

- (f) 범위가 구간 전체임을 확인한다. $|\overline{AC} - \overline{BC}|$ 는 점 C 에 대한 연속함수이고 원판 D 는 유계인 닫힌집합이며 D 는 연결된 집합이므로, 값의 집합은 최솟값 0과 최댓값 4를 잇는 구간 전체이다 (사잇값 정리).

$$0 \leq |\overline{AC} - \overline{BC}| \leq 4, \quad \text{즉 값의 범위는 } [0, 4].$$



[답안 그림 1] $|\overline{AC'} - \overline{BC'}| = k$ 인 점의 자취. k 가 커질수록 자취는 y 축에서 멀어지고, $k = 4$ 일 때 원에 접한다.

(2) 최솟값 $= \frac{1}{9}$

- (a) ‘좋은 점’의 조건을 도형의 언어로 바꾼다. (1)의 결론과 (c)에 의해

$$|\overline{AP} - \overline{BP}| \in [0, 4] \Leftrightarrow P \in R := \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} \leq 1 \right\}$$

이다. R 은 쌍곡선 $x^2/4 - y^2/5 = 1$ 이 좌표평면을 나누는 세 영역 가운데 원점을 포함하는 영역(경계 포함)이다.

한편 k 가 모든 실수를 지날 때 $\overrightarrow{OE_k} = k \cdot \overrightarrow{OD}$ 인 점 E_k 전체는 직선 OD 전체이다 ($k = 0$ 이면 $E_k = O$, $k > 0$ 이면 반직선 OD , $k < 0$ 이면 그 반대쪽 반직선). 따라서

D 가 좋은 점 $\Leftrightarrow$ 직선 OD 위의 모든 점이 R 에 속한다.

- (b) R 안에 통째로 들어가는 직선을 모두 찾는다. 원점을 지나는 직선은 $y = mx$ 또는 $x = 0$ 이다.

• $y = mx$: R 의 조건에 대입하면 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{x^2}{4} - \frac{m^2 x^2}{5} = x^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{m^2}{5} \right) \leq 1$$

이어야 한다. x^2 은 얼마든지 커질 수 있으므로 이것이 성립할 필요충분조건은 괄호 안이 0 이하인 것, 즉

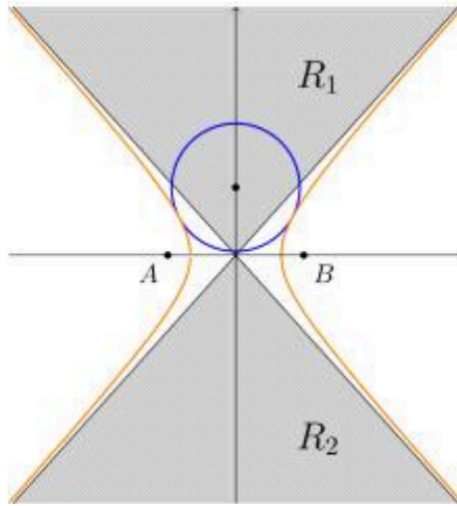
$$\frac{1}{4} - \frac{m^2}{5} \leq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq \frac{5}{4} \Leftrightarrow |m| \geq \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

• $x = 0$ (y 축): $-y^2/5 \leq 1$ 이 항상 성립하므로 언제나 R 안에 있다.

여기서 $\sqrt{5}/2 = b/a$ 는 정확히 쌍곡선의 점근선의 기울기이다. 따라서 좋은 점 전체의 집합은 두 점근선 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ 사이의 두 영역

$$R_1 = \left\{ (x, y) : y \geq \frac{\sqrt{5}}{2} |x| \right\}, \quad R_2 = \left\{ (x, y) : y \leq -\frac{\sqrt{5}}{2} |x| \right\}$$

의 합집합이다 (경계선 포함).



[답안 그림 2] 영역 R (쌍곡선 사이)과 그 안에 통째로 들어가는 직선들이 쓸고 지나가는 영역 $R_1 \cup R_2$ (회색).

- (c) 내적을 각으로 바꾼다. D_1, D_2 가 원점이 아닌 좋은 점일 때 $\vec{u}_i = \overrightarrow{OD_i} / |\overrightarrow{OD_i}|$ 는 단위벡터이므로

$$\left| \frac{\overrightarrow{OD_1}}{|\overrightarrow{OD_1}|} \cdot \frac{\overrightarrow{OD_2}}{|\overrightarrow{OD_2}|} \right| = |\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2| = |\cos \theta| \quad (\theta = \vec{u}_1 \text{ 과 } \vec{u}_2 \text{ 가 이루는 각})$$

이다. R_2 는 R_1 의 원점대칭이므로, $D_2 \in R_2$ 이면 $-D_2 \in R_1$ 이고 $\vec{u}_2$ 가 $-\vec{u}_2$ 로 바뀌어도 $|\cos \theta|$ 는 변하지 않는다. 따라서 두 점 모두 R_1 에 있다고 가정해도 값의 범위는 같다.

- (d) R_1 이 허용하는 방향의 폭을 잰다. R_1 의 두 경계 반직선의 방향은 점근선 방향

$$\frac{2, \sqrt{5}}{3} \quad \text{와} \quad \frac{-2, \sqrt{5}}{3}$$

이다 ($2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9$ 이므로 두 벡터 모두 크기가 1인 단위벡터이다). 각각이 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 α , $\pi - \alpha$ 라 하면 $\tan \alpha = \sqrt{5}/2$ 이고, R_1 안의 점이 정하는 방향의 편각은 정확히 구간 $[\alpha, \pi - \alpha]$ 를 채운다. 그 폭은

$$(\pi - \alpha) - \alpha = \pi - 2\alpha$$

이다. 점근선의 기울기의 절댓값 $\sqrt{5}/2 \approx 1.118$ 이 1보다 크므로 $\alpha > \pi/4$ 이고, 따라서

$$\theta \leq \pi - 2\alpha < \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

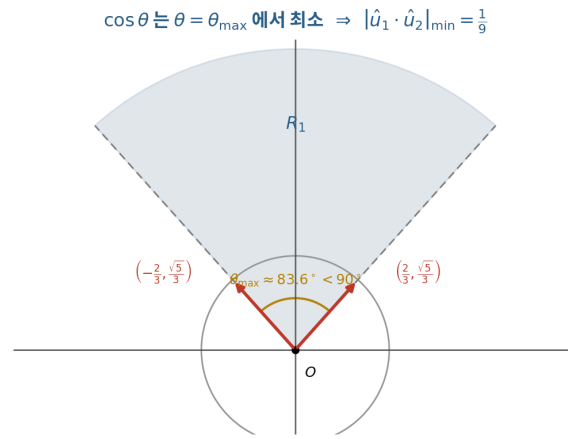
즉 두 벡터가 이루는 각은 항상 예각(또는 0)이다.

- (e) 따라서 최솟값은 각이 가장 벌어질 때 나온다. $0 \leq \theta < \pi/2$ 에서 $\cos \theta > 0$ 이므로 $|\cos \theta| = \cos \theta$ 이고, $\cos$ 는 이 구간에서 감소함수이므로 θ 가 최대일 때 최소가 된다. θ 의 최댓값은 $\pi - 2\alpha$ 이며, 이는 D_1 과 D_2 가 각각 다른 점근선 위에 있을 때 실제로 얻어진다. 그때

$$\left| \frac{\overrightarrow{OD_1}}{|\overrightarrow{OD_1}|} \cdot \frac{\overrightarrow{OD_2}}{|\overrightarrow{OD_2}|} \right| = \left(\frac{2, \sqrt{5}}{3} \right) \cdot \left(\frac{-2, \sqrt{5}}{3} \right) = \frac{-4 + 5}{9} = \frac{1}{9}.$$

(점근선 위의 점은 (b)에서 $|m| = \sqrt{5}/2$ 인 경계의 경우로 실제로 좋은 점이므로, 이 값은 실현 가능하다.)

$$\min \left| \frac{\overrightarrow{OD_1}}{|\overrightarrow{OD_1}|} \cdot \frac{\overrightarrow{OD_2}}{|\overrightarrow{OD_2}|} \right| = \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \right) \cdot \left(\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \right) = \frac{1}{9}$$



[답안 그림 3] R_1 안의 방향은 편각 $[\alpha, \pi - \alpha]$ 를 채우고 그 폭은 $\pi - 2\alpha \approx 83.6^\circ < 90^\circ$ 이다. 두 점근선 방향에서 각이 최대가 되어 내적이 최소 $1/9$ 가 된다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 이 원과 접하고 초점이 $(\pm 3, 0)$ 인 쌍곡선의 방정식임을 알고, $ \overline{AC} - \overline{BC} $ 값의 범위를 $[0, 4]$ 로 구함.	2점
(2)	좋은 점이 있을 수 있는 영역이 그림과 같이 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 점근선 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$ 사이의 회색 영역임을 알고, D_1 과 D_2 가 두 점근선에서 하나씩 택했을 때 $\left \frac{\overline{OD_1}}{ \overline{OD_1} } \cdot \frac{\overline{OD_2}}{ \overline{OD_2} } \right $ 의 값이 최소임을 알며, 그 값이 $\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \cdot \left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right) = \frac{1}{9}$ 임을 안다.	3점

문제 2 정육각형 격자 위를 무작위로 걷는 로봇

격자의 이분성 · 벡터의 합 · 확률의 덧셈정리

[준비] 이동을 벡터로 정리한다

정육각형 격자의 꼭짓점은 이웃한 세 변이 뻗어 나가는 방향에 따라 두 종류로 나뉜다. 원점 O 와 같은 종류를 **A형**, 점 $(-1, 0)$ 과 같은 종류를 **B형**이라 하자. 한 변은 항상 A형과 B형을 잇는다. 그림에서 A형 꼭짓점에서 뻗는 세 방향은 서로 120° 씩 벌어진 단위벡터

$$\vec{e}_1 = (-1, 0), \quad \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \vec{e}_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

이고, B형 꼭짓점에서 뻗는 세 방향은 그 반대인 $-\vec{e}_1, -\vec{e}_2, -\vec{e}_3$ 이다. ($\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0}$ 이고 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = -1/2$ ($i \neq j$)이다.)

따라서 **홀수 번째 걸음은 $+\vec{e}$, 짝수 번째 걸음은 $-\vec{e}$** 꼴이며, 세 방향의 선택은 매 걸음 서로 독립이다. i 번째 걸음에서 고른 방향을 $\vec{v}_i \in \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ 이라 하면

$$\overrightarrow{OD_n} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 - \cdots + (-1)^{n-1} \vec{v}_n.$$

특히 D_n 은 n 이 홀수이면 B형, 짝수이면 A형 꼭짓점이다. **원점은 A형이므로 홀수 초에는 결코 원점에 있을 수 없다.**

(1) n 이 짝수이면 $\frac{n}{2}\sqrt{3}$, n 이 홀수이면 $\sqrt{\frac{3n^2+1}{4}}$ (즉 $n = 2k+1$ 이면 $\sqrt{3k^2+3k+1}$)

(a) 거리를 한 방향으로의 사영으로 바꾼다. 임의의 단위벡터 $\vec{u}$ 에 대하여 $\overrightarrow{OD_n} \geq \overrightarrow{OD_n} \cdot \vec{u}$ 이고, $\vec{u}$ 를 $\overrightarrow{OD_n}$ 과 같은 방향으로 잡으면 등호가 성립한다. 그러므로

$$\max_{\text{경로}} \overrightarrow{OD_n} = \max_{\text{경로}} \max_{\vec{u}} (\overrightarrow{OD_n} \cdot \vec{u}) = \max_{\vec{u}} \left[\max_{\text{경로}} (\overrightarrow{OD_n} \cdot \vec{u}) \right].$$

각 걸음의 선택이 독립이므로 안쪽의 최대값은 걸음마다 따로 최대를 잡으면 된다. $M(\vec{u}) = \max_j (\vec{e}_j \cdot \vec{u})$ 라 하면

$$\max_{\text{경로}} (\overrightarrow{OD_n} \cdot \vec{u}) = \lceil n/2 \rceil \cdot M(\vec{u}) + \lfloor n/2 \rfloor \cdot M(-\vec{u})$$

이다 (홀수 번째 걸음이 $\lceil n/2 \rceil$ 개, 짝수 번째 걸음이 $\lfloor n/2 \rfloor$ 개).

- (b) $M(\vec{u})$ 를 각으로 나타낸다. 세 벡터 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 은 120° 씩 벌어진 단위벡터이므로, $\vec{u}$ 에서 가장 가까운 $\vec{e}_j$ 까지의 각을 δ 라 하면 $0 \leq \delta \leq 60^\circ$ 이고 $M(\vec{u}) = \cos \delta$ 이다. 또 $-\vec{e}_1, -\vec{e}_2, -\vec{e}_3$ 역시 120° 씩 벌어져 있고 $\vec{e}_j$ 들과는 정확히 60° 어긋나 있으므로, $\vec{u}$ 에서 가장 가까운 $-\vec{e}_j$ 까지의 각은 $60^\circ - \delta$ 이고

$$M(-\vec{u}) = \cos(60^\circ - \delta).$$

- (c) n 이 짝수인 경우 ($n = 2k$). 홀수·짝수 번째 걸음이 각각 k 개이므로

$$f(\delta) = k[\cos \delta + \cos(60^\circ - \delta)] = 2k \cos 30^\circ \cos(\delta - 30^\circ) = \sqrt{3}k \cos(\delta - 30^\circ)$$

이고 (합을 곱으로 고치는 공식), $0 \leq \delta \leq 60^\circ$ 에서 $\delta = 30^\circ$ 일 때 최대가 되어

$$d(n) = \sqrt{3}k = \frac{n}{2}\sqrt{3}.$$

- (d) n 이 홀수인 경우 ($n = 2k + 1$). 홀수 번째 걸음이 $k + 1$ 개, 짝수 번째 걸음이 k 개이므로

$$f(\delta) = (k + 1) \cos \delta + k \cos(60^\circ - \delta) = \frac{3k + 2}{2} \cos \delta + \frac{\sqrt{3}k}{2} \sin \delta$$

이고, 삼각함수의 합성에 의해 $f(\delta) = R \cos(\delta - \psi)$, 여기서

$$R = \sqrt{\left(\frac{3k + 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}k}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{12k^2 + 12k + 4} = \sqrt{3k^2 + 3k + 1},$$

$$\tan \psi = \frac{\sqrt{3}k/2}{(3k + 2)/2} = \frac{\sqrt{3}k}{3k + 2} < \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

이다. 즉 $0 \leq \psi < 60^\circ$ 이므로 $\delta = \psi$ 가 실제로 허용 범위 안에 있고, 그때 최댓값 R 을 얻는다. $n = 2k + 1$ 을 대입하면

$$3k^2 + 3k + 1 = \frac{12k^2 + 12k + 4}{4} = \frac{3(2k + 1)^2 + 1}{4} = \frac{3n^2 + 1}{4}.$$

- (e) 최댓값을 실제로 주는 경로. 위의 계산에서 최적의 $\vec{u}$ 에 대해 홀수 번째 걸음은 모두 같은 $\vec{e}_i$, 짝수 번째 걸음은 모두 같은 $\vec{e}_j$ ($i \neq j$)를 골라야 한다. 예를 들어 $\vec{e}_2$ 와 $\vec{e}_3$ 을 번갈아 고르면

$$\overrightarrow{OD_{2k}} = k(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = k(0, \sqrt{3}) \rightarrow \overline{OD_{2k}} = \sqrt{3}k,$$

$$\overrightarrow{OD_{2k+1}} = k(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) + \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}k + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

이고 $\overline{OD_{2k+1}}^2 = 1/4 + 3k^2 + 3k + 3/4 = 3k^2 + 3k + 1$ 로 (d)와 일치한다. 이것이 아래 그림의 지그재그 경로 $O \rightarrow A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots$ 이다.

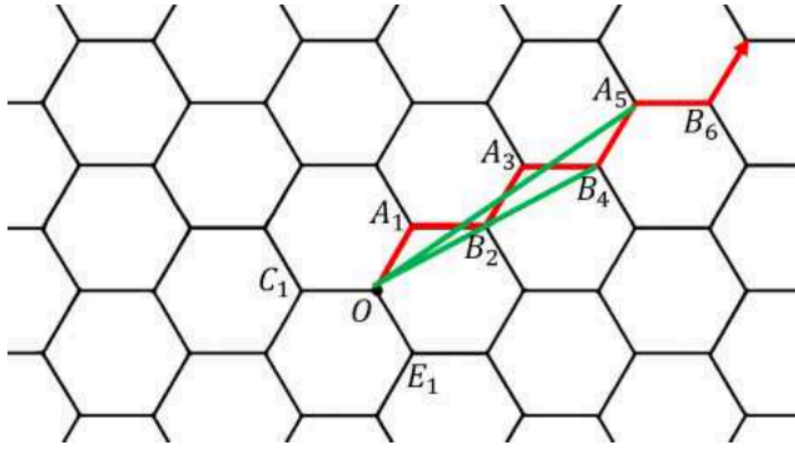
- (f) 코사인법칙으로 확인 — 격자만 보고도 같은 값을 얻는다. 이등변삼각형 OA_1B_2 에서 $\overline{OA_1} = \overline{A_1B_2} = 1$ 이고 $\angle OA_1B_2 = 120^\circ$ 이므로

$$\overline{OB_2}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 2 + 1 = 3, \quad \overline{OB_2} = \sqrt{3}$$

이고, 두 걸음마다 같은 벡터가 더해지므로 $\overline{OB_{2k}} = k\sqrt{3}$ 이다. 이어서 삼각형 $OB_{2k}A_{2k+1}$ 에서 $\overline{OB_{2k}} = k\sqrt{3}$, $\overline{B_{2k}A_{2k+1}} = 1$, $\angle OB_{2k}A_{2k+1} = 150^\circ$ 이므로

$$\overline{OA_{2k+1}}^2 = 3k^2 + 1 - 2 \cdot k\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3k^2 + 3k + 1.$$

$$d(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}\sqrt{3} & (n \text{ 이 짝수, } n = 2k \text{ 이면 } k\sqrt{3}) \\ \sqrt{\frac{3n^2 + 1}{4}} & (n \text{ 이 홀수, } n = 2k + 1 \text{ 이면 } \sqrt{3k^2 + 3k + 1}) \end{cases}$$



[답안 그림 4] 가장 멀리 가는 지그재그 경로 $O \rightarrow A_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow B_4 \rightarrow A_5 \rightarrow B_6 \rightarrow \dots$. 두 걸음마다 길이 $\sqrt{3}$ 의 같은 벡터가 더해진다.

(2) $n = 1$ 일 때 확률은 1, $n \geq 2$ 일 때 확률은 $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{2}{3^{n-1}}$

(a) $n = 1$ 인 경우. 원점에서 갈 수 있는 세 점은 모두 원점에서 거리가 1이고 $d(1) = 1$ 이므로, 어느 것을 골라도 최댓값이다. 따라서 $q(1) = 1$.

(b) $n \geq 2$ 인 경우 — 최댓값을 주는 경로는 정확히 6개이다. (1)의 (e)에서 본 대로 최댓값을 주려면 홀수 번째 걸음을 모두 같은 $\vec{e}_i$ 로, 짝수 번째 걸음을 모두 같은 $\vec{e}_j$ ($i \neq j$)로 골라야 한다. 짝수 $n = 2k$ 인 경우에는 삼각부등식으로 바로 보인다.

$$\overrightarrow{OD_{2k}} = \sum_{m=1}^k (\vec{v}_{2m-1} - \vec{v}_{2m}), \quad \overrightarrow{OD_{2k}} \leq \sum_{m=1}^k |\vec{v}_{2m-1} - \vec{v}_{2m}| \leq k\sqrt{3}$$

에서, $|\vec{v} - \vec{w}|$ 는 $\vec{v} = \vec{w}$ 이면 0이고 $\vec{v} \neq \vec{w}$ 이면 $\sqrt{1+1-2(-1/2)} = \sqrt{3}$ 이므로, 첫 번째 부등식의 등호(모든 항이 같은 방향)와 두 번째 부등식의 등호(모든 항이 $\sqrt{3}$)가 동시에 성립하려면 k 개의 차 벡터가 모두 같은 하나의 벡터 $\vec{e}_i - \vec{e}_j$ ($i \neq j$)여야 한다.

순서쌍 (i, j) 의 개수는 $3 \times 2 = 6$ 이고 각각이 경로 하나를 정하므로, 최댓값을 주는 경로는 6개이다.

(c) 확률 계산. 전체 경로의 수는 3^n 이므로

$$q(n) = \frac{6}{3^n} = \frac{2}{3^{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

같은 값을 순차적으로도 셀 수 있다. 첫 걸음은 무엇이든 좋고(확률 1), 두 번째 걸음은 원점으로 되돌아오지만 않으면 되므로 확률 $2/3$, 그 뒤로는 처음 두 걸음이 정한 방향을 그대로 되풀이해야 하므로 매 초 확률 $1/3$ 이 곱해진다.

$$q(n) = 1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{2}{3^{n-1}}.$$

$$q(1) = 1, \quad q(n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{2}{3^{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

(3) $p(4) = \frac{5}{27}$, $p(5) = 0$, $p(6) = \frac{31}{243}$

(a) $p(5) = 0$. [준비]에서 본 대로 홀수 초 후 로봇은 B형 꼭짓점에 있는데 원점은 A형이다. 따라서 홀수 초에는 원점에 있을 수 없어 $p(5) = 0$ 이다. (같은 이유로 모든 홀수 n 에 대해 $p(n) = 0$ 이다.)

(b) 격자의 가장 짧은 닫힌 길은 정육각형이다. 정육각형 격자에서 서로 다른 두 꼭짓점을 잇는 길이 4 이하의 순환은 없다 — 가장 짧은 순환이 정육각형(길이 6)이기 때문이다. 이로부터 다음 사실이 나온다.

(*) 서로 다른 두 A형 꼭짓점이 이웃을 공유하면 그 공통 이웃은 단 하나이다.

(공통 이웃이 둘이면 길이 4인 순환이 생기기 때문이다.) 아래의 세기는 모두 이 사실을 쓴다.

(c) $p(4)$ 세기. 4초 동안의 경로는 모두 $3^4 = 81$ 가지이며 각각 같은 확률이다. 4초에 원점인 경로를 2초에 원점인지로 나눈다.

원점에 있는 시각	설명	경우의 수
2초, 4초	2초마다 원점으로 돌아온다. 2초 만에 원점으로 돌아오는 방법은 “한 걸음 나갔다가 그대로 되돌아오기”뿐이므로 3가지이고, 3-4초에도 마찬가지로 3가지이다.	$3^2 = 9$
4초에만	1초에 3가지, 2초에 원점으로 돌아오지 않도록 2가지를 고르면 2초 후 위치 $X \neq O$ 가 정해진다. X 와 O 는 서로 다른 A형 꼭짓점이고 2초 만에 이어지므로 (*)에 의해 $X \rightarrow O$ 인 두 걸음 경로는 단 하나뿐이다.	$3 \times 2 = 6$

$$p(4) = \frac{9+6}{3^4} = \frac{15}{81} = \frac{5}{27}.$$

- (d) $p(6)$ 세기. 전체 경로는 $3^6 = 729$ 가지이다. 6초에 원점인 경로를 2초·4초에 원점이었는지로 네 가지로 나누면 서로 겹치지 않고 빠짐없이 분류된다.

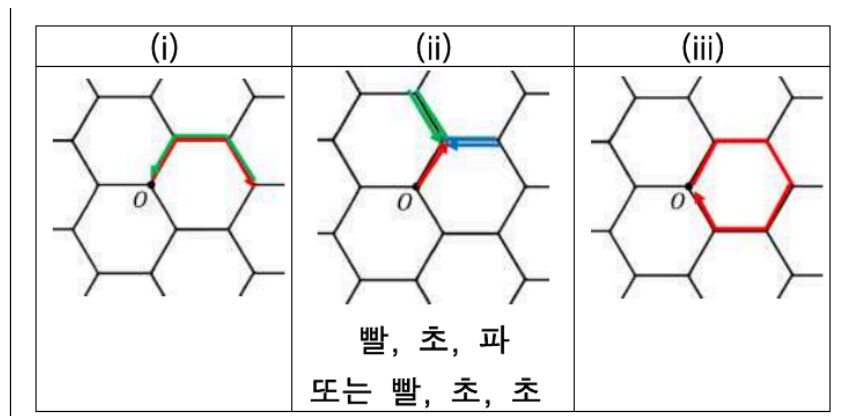
원점에 있는 시각	설명	경우의 수
2, 4, 6초	2초마다 나갔다가 되돌아오면 되므로 각 구간에 3가지씩.	$3^3 = 27$
2, 6초	처음 2초는 3가지. 이후 4초에는 원점에 오지 않고 6초에 오는 경우는 (c)의 둘째 줄과 같은 이유로 $3 \times 2 = 6$ 가지.	$3 \times 6 = 18$
4, 6초	2초에 원점에 오지 않고 4초에 오는 경우가 6가지, 그 뒤 2초 만에 다시 돌아오는 경우가 3가지.	$6 \times 3 = 18$
6초에만	(d-1)에서 따로 센다.	30

$$p(6) = \frac{27 + 18 + 18 + 30}{3^6} = \frac{93}{729} = \frac{31}{243}.$$

- (d-1) “6초에만 원점”인 경로가 30가지인 이유. 경로를 $O = P_0, P_1, \dots, P_6 = O$ 라 하고 $P_2 \neq O, P_4 \neq O$ 라 하자. P_1, P_3, P_5 는 B형, P_2, P_4 는 A형이다. P_3 과 P_1 이 같은지로 나눈다.

- (ii) $P_3 = P_1$ 인 경우 — P_2 는 P_1 의 이웃 중 O 가 아닌 것이므로 2가지, P_4 도 P_1 의 이웃 중 O 가 아닌 것이므로 2가지이다. 그리고 P_4 와 O 는 서로 다른 A형 꼭짓점이면서 P_5 를 공통 이웃으로 가지므로 (*)에 의해 $P_5 = P_1$ 로 정해진다. 따라서 P_1 의 3가지를 곱해 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 가지.
- (i) $P_3 \neq P_1$ 이고 $P_4 = P_2$ 인 경우 — P_1, P_2, P_3 이 모두 다른 세 점이 되고, 그 뒤에는 왔던 길을 그대로 되짚는다 ($P_4 = P_2$ 이면 (*)에 의해 $P_5 = P_1$). 개수는 P_1 이 3가지, P_2 가 2가지(O 제외), P_3 가 2가지(P_1 제외)이므로 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 가지.
- (iii) $P_3 \neq P_1$ 이고 $P_4 \neq P_2$ 인 경우 — 이때 $P_0, \dots, P_5$ 가 모두 서로 다르므로 경로는 길이 6인 순환, 곧 정육각형 한 바퀴이다. 원점을 꼭짓점으로 갖는 정육각형은 3개이고 각각 시계·반시계 두 방향으로 돌 수 있으므로 $3 \times 2 = 6$ 가지.

세 경우는 서로 배타적이고 이 밖의 경우는 없으므로 $12 + 12 + 6 = 30$ 가지이다.



[답안 그림 5] “6초에만 원점”인 세 유형. (i) 세 걸음 나갔다가 되짚기, (ii) 한 점 P_1 을 축으로 두 번 왕복, (iii) 정육각형 한 바퀴.

$$p(4) = \frac{15}{81} = \frac{5}{27}, \quad p(5) = 0, \quad p(6) = \frac{93}{729} = \frac{31}{243}$$

의미 해석 — $p(2) = 1/3$, $p(4) = 5/27 \approx 0.185$, $p(6) = 31/243 \approx 0.128$ 로 짝수 초의 복귀 확률은 계속 줄어든다. 정육각형 격자에서는 매 걸음 세 방향 가운데 하나만이 “왔던 길”이므로 되돌아올 확률이 $1/3$ 씩만 쌓이는 데다, 길이 4 이하의 순환이 없어 새로운 복귀 경로가 6초가 되어야 (정육각형 한 바퀴로) 처음 생긴다. 실제로 $p(6)$ 의 93가지 가운데 정육각형을 도는 것은 6가지뿐이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	n 이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 구분하여 코사인법칙과 기하적 성질을 적용해 n 이 짝수인 경우 $\overline{OD_n}$ 의 최댓값이 $\frac{n}{2}\sqrt{3}$, n 이 홀수인 경우 $\overline{OD_n}$ 의 최댓값이 $\sqrt{\frac{3n^2+1}{4}}$ 임을 구함.	2점
(2)	경우의 수를 바탕으로 $\overline{OD_n}$ 이 최댓값을 가질 확률을 $n=1$ 일 때 확률은 1이고 $n \geq 2$ 일 때 확률은 $\frac{2}{3^{n-1}}$ 로 올바르게 구함.	1점
(3)	홀수, 짝수 시간에 따른 이동 특성을 구분하여 원점으로 복귀 가능한 경우를 분류하고 각 경우의 수를 체계적으로 나누어 확률의 덧셈정리를 이용해 $p(4) = \frac{5}{27}$, $p(5) = 0$, $p(6) = \frac{31}{243}$ 을 정확하게 구한 경우	2점

2025학년도 · 해설편

문제 1 귀납적으로 정의된 수열의 증가·감소와 상수수열
문제 2 l -접선과 l -할선이 덮는 영역

단원 함수·극한·미적분 · 수열·급수 · 기하·벡터
핵심 개념 귀납적으로 정의된 수열, 수학적 귀납법, 함수의 증가와 감소, 삼차방정식의 실근의 개수, 집합, 원의 접선과 할선, 피타고라스 정리
문항 수 2문항 (소문항 5개) · 10점

II. 예시답안

문제 1 귀납적으로 정의된 수열의 증가·감소와 상수수열

단조성 · 수학적 귀납법 · 삼차방정식의 실근

(1) 참

(a) 보조정리 — $p(x) = x^3 + \beta$ 는 실수 전체에서 순증가함수이다. $u < v$ 인 임의의 두 실수에 대하여

$$p(v) - p(u) = v^3 - u^3 = (v - u)(v^2 + uv + u^2) = (v - u) \left[\left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 \right]$$

이다. 대괄호 안은 두 제곱의 합이므로 항상 0 이상이고, 0이 되려면 $v = 0$ 이면서 $u + v/2 = 0$, 즉 $u = v = 0$ 이어야 하는데 이는 $u < v$ 에 어긋난다. 따라서 대괄호 안은 양수이고 $v - u > 0$ 이므로

$$u < v \Rightarrow p(u) < p(v)$$

가 성립한다. (미분을 쓰면 $p'(x) = 3x^2 \geq 0$ 이고 $p'(x) = 0$ 인 점이 $x = 0$ 하나뿐이므로 p 는 순증가함수라고 말해도 된다.) 여기서 β 는 아무 역할도 하지 않는다는 점에 주목하자 — 명제가 “주어진 실수 β ”에 대해 성립하는 까닭이 이것이다.

(b) 경우 1 — $a_1 \leq a_2$ 인 경우, $\{a_n\}$ 은 증가수열이다.수학적 귀납법으로 “모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq a_{n+1}$ ”을 보인다.• 기저 단계 ($n = 1$): 가정에 의해 $a_1 \leq a_2$.

• 귀납 단계: 어떤 자연수 k 에 대해 $a_k \leq a_{k+1}$ 이라 하자. (a)에서 p 가 증가함수이므로 $p(a_k) \leq p(a_{k+1})$ 이고, 수열의 정의에 의해 이는 곧 $a_{k+1} \leq a_{k+2}$ 이다.

따라서 모든 자연수 n 에서 $a_n \leq a_{n+1}$ 이 성립하고, 정의에 의해 $\{a_n\}$ 은 증가수열이다.(c) 경우 2 — $a_1 \geq a_2$ 인 경우, $\{a_n\}$ 은 감소수열이다.

같은 방식이다. 기저 단계는 가정 $a_1 \geq a_2$ 이고, 귀납 단계에서 $a_k \geq a_{k+1}$ 이면 p 가 증가함수이므로 $a_{k+1} = p(a_k) \geq p(a_{k+1}) = a_{k+2}$ 이다. 따라서 모든 n 에서 $a_n \geq a_{n+1}$, 즉 감소수열이다.

(d) 두 경우가 모든 상황을 덮는다. a_1 과 $a_2 = p(a_1)$ 는 실수이므로 실수의 대소 비교에 의해 $a_1 \leq a_2$ 또는 $a_1 \geq a_2$ 가운데 적어도 하나는 반드시 참이다. 즉 어떤 실수 c 에서 출발하더라도 (b) 또는 (c)에 반드시 해당한다. ($a_1 = a_2$ 이면 두 경우에 모두 해당하며, 이때 $\{a_n\}$ 은 상수수열이고 주어진 정의에서 상수수열은 증가수열이자 감소수열이다.)

첫 두 항의 대소 c 와 $p(c)$ 가 이후 모든 항의 대소를 그대로 물려주므로, 명제는 참이다.

(2) $c \leq -1$ 또는 $0 \leq c \leq 1$ 이면 감소수열, $-1 \leq c \leq 0$ 또는 $c \geq 1$ 이면 증가수열(a) 이웃한 두 항의 차를 인수분해한다. $p(x) = x^3$ 이므로

$$a_{n+1} - a_n = p(a_n) - a_n = a_n^3 - a_n = a_n(a_n - 1)(a_n + 1)$$

이다. 세 인수의 부호는 a_n 이 -1 , 0 , 1 가운데 어디에 놓이는지로 결정된다.

• $a_n \leq -1$: 세 인수가 각각 $\leq 0, < 0, \leq 0 \rightarrow$ 곱은 ≤ 0 , 즉 $a_{n+1} \leq a_n$ • $-1 \leq a_n \leq 0$: $\leq 0, < 0, \geq 0 \rightarrow$ 곱은 ≥ 0 , 즉 $a_{n+1} \geq a_n$ • $0 \leq a_n \leq 1$: $\geq 0, \leq 0, > 0 \rightarrow$ 곱은 ≤ 0 , 즉 $a_{n+1} \leq a_n$ • $a_n \geq 1$: $> 0, \geq 0, > 0 \rightarrow$ 곱은 ≥ 0 , 즉 $a_{n+1} \geq a_n$

(b) 네 구간은 각각 $x \rightarrow x^3$ 에 대해 불변이다. 이것이 귀납의 열쇠이다. $x \rightarrow x^3$ 은 (1)의 보조정리에서 순증가함수이므로, 부등식에 그대로 세제곱을 취할 수 있다.

$$x \leq -1 \Rightarrow x^3 \leq -1, \quad -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x^3 \leq 0,$$

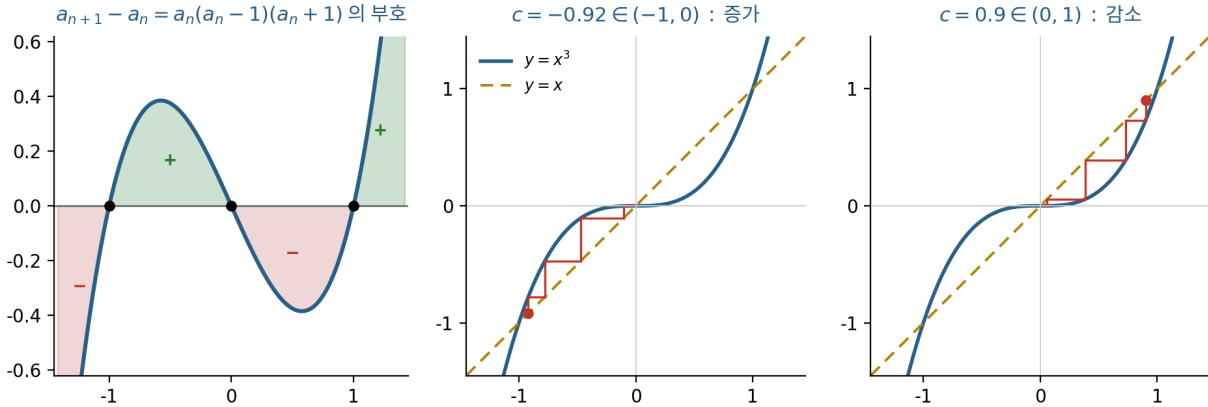
$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^3 \leq 1, \quad x \geq 1 \Rightarrow x^3 \geq 1.$$

따라서 $a_1 = c$ 가 네 구간 가운데 하나에 들어 있으면, 귀납법에 의해 모든 a_n 이 같은 구간에 머문다. 실제로 a_k 가 그 구간에 있다고 가정하면 위 함의에 의해 $a_{k+1} = a_k^3$ 도 같은 구간에 있다.

(c) 따라서 (a)의 부호 판정을 모든 n 에 한꺼번에 적용할 수 있다.• $c \leq -1$: 모든 n 에서 $a_n \leq -1$ 이므로 모든 n 에서 $a_{n+1} \leq a_n \rightarrow$ 감소수열• $-1 \leq c \leq 0$: 모든 n 에서 $-1 \leq a_n \leq 0$ 이므로 모든 n 에서 $a_{n+1} \geq a_n \rightarrow$ 증가수열• $0 \leq c \leq 1$: 모든 n 에서 $0 \leq a_n \leq 1$ 이므로 모든 n 에서 $a_{n+1} \leq a_n \rightarrow$ 감소수열• $c \geq 1$: 모든 n 에서 $a_n \geq 1$ 이므로 모든 n 에서 $a_{n+1} \geq a_n \rightarrow$ 증가수열

네 구간의 합집합은 실수 전체이므로 빠진 c 는 없다. 경계값 $c = -1, 0, 1$ 은 이웃한 두 구간에 동시에 속하는데, 이때는 $p(c) = c^3 = c$ 이므로 모든 n 에서 $a_n = c$ 인 상수수열이고, 상수수열은 증가수열이자 감소수열이므로 두 답이 모순되지 않는다.

$$\begin{cases} c \leq -1 \text{ 또는 } 0 \leq c \leq 1 & \Rightarrow \{a_n\} \text{ 은 감소수열} \\ -1 \leq c \leq 0 \text{ 또는 } c \geq 1 & \Rightarrow \{a_n\} \text{ 은 증가수열} \end{cases}$$



[답안 그림 1] (왼쪽) $a_{n+1} - a_n = a_n(a_n - 1)(a_n + 1)$ 의 부호. (가운데·오른쪽) 그래프 $y = x^3$ 과 $y = x$ 사이의 계단 그림 — 출발점 c 가 놓인 구간이 증가·감소를 결정하고, 수열은 그 구간을 벗어나지 않는다.

의미 해석 — $|c| < 1$ 이면 $|a_{n+1}| = |a_n|^3 < |a_n|$ 이므로 $a_n \rightarrow 0$ 으로 수렴하고, $|c| > 1$ 이면 $|a_n|$ 이 $|c|^{3^{n-1}}$ 로 매우 빠르게 커져 발산한다. 즉 $x = \pm 1, 0$ 은 $y = x^3$ 과 $y = x$ 의 교점이자 증가·감소가 뒤바뀌는 분기점이다.

(3) $0 < \beta < \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 이면 3개, $\beta = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 이면 2개, $\beta > \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 이면 1개

(a) 상수수열이 될 필요충분조건은 $p(c) = c$ 이다.

- ($\Rightarrow$) $\{a_n\}$ 이 상수수열이면 특히 $a_2 = a_1$, 즉 $p(c) = c$ 이다.
- ($\Leftarrow$) $p(c) = c$ 이면 $a_1 = c$ 이고, $a_k = c$ 라 가정할 때 $a_{k+1} = p(a_k) = p(c) = c$ 이므로 귀납법에 의해 모든 n 에서 $a_n = c$ 이다.

따라서 구하는 것은 방정식 $c^3 + \beta = c$, 즉 삼차방정식

$$g(x) := x^3 - x + \beta = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수이다. (c 의 개수를 세는 것이지 근의 중복도를 세는 것이 아니므로 서로 다른 실근의 개수를 센다.)

(b) g 의 증가·감소를 조사한다. $g'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ 에서 $x = \pm 1/\sqrt{3}$ 이고

$$g'(x) > 0 \quad \left(x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ 또는 } x > \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad g'(x) < 0 \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

이므로 g 는 $(-\infty, -1/\sqrt{3}]$ 에서 순증가, $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ 에서 순감소, $[1/\sqrt{3}, \infty)$ 에서 순증가한다. 극값은

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \beta = \beta + \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (\text{극댓값}),$$

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \beta = \beta - \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (\text{극솟값})$$

이다. 여기서 $\frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.385$ 이다. 가정 $\beta > 0$ 에 의해 극댓값은 언제나 양수이므로, 실근의 개수는 오직 극솟값의 부호로 결정된다.

(c) 세 구간에서 각각 근을 센다. g 가 각 구간에서 순증가 또는 순감소이므로, 사잇값 정리와 단조성에 의해 근은 각 구간에서 많아야 하나이며 양 끝값의 부호가 다르다면 정확히 하나이다.

- $(-\infty, -1/\sqrt{3}]$: $g(x) \rightarrow -\infty$ (as $x \rightarrow -\infty$)에서 $g(-1/\sqrt{3}) = \beta + 2\sqrt{3}/9 > 0$ 까지 순증가 $\rightarrow$ 언제나 근이 정확히 하나 (그리고 그 근은 $-1/\sqrt{3}$ 보다 작다).
- $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$: 양수 $\beta + 2\sqrt{3}/9$ 에서 $\beta - 2\sqrt{3}/9$ 까지 순감소 $\rightarrow$ 근이 있을 조건은 $\beta - 2\sqrt{3}/9 \leq 0$.
- $[1/\sqrt{3}, \infty)$: $\beta - 2\sqrt{3}/9$ 에서 $+\infty$ 까지 순증가 $\rightarrow$ 근이 있을 조건은 $\beta - 2\sqrt{3}/9 \leq 0$.

$\beta = 2\sqrt{3}/9$ 일 때는 뒤의 두 구간이 공유하는 끝점 $x = 1/\sqrt{3}$ 이 근이므로 같은 근을 두 번 세지 않도록 주의해야 한다. 정리하면

(d) 세 경우로 나눈 결론

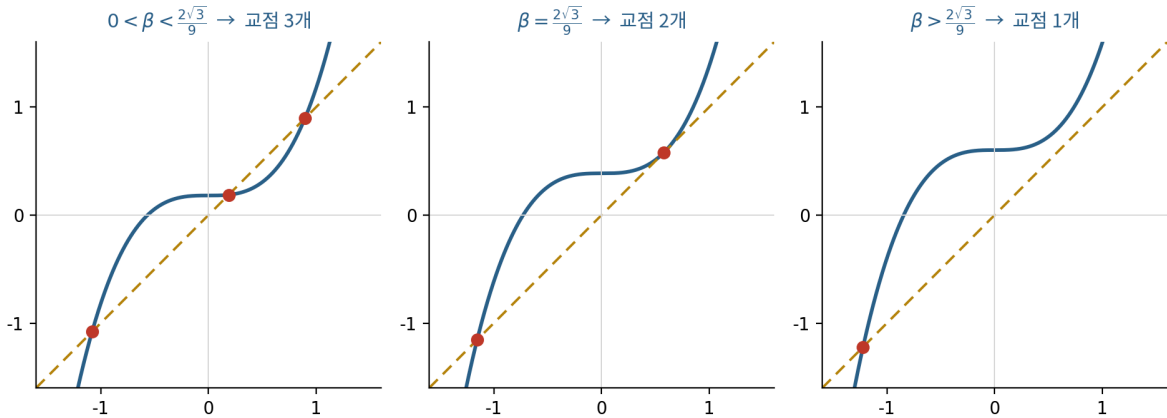
- $0 < \beta < 2\sqrt{3}/9$ (극솟값 < 0): 세 구간에서 각각 하나씩, 서로 다른 실근 **3개**
- $\beta = 2\sqrt{3}/9$ (극솟값 $= 0$): 첫 구간의 근 하나와 $x = 1/\sqrt{3}$ (중근), 서로 다른 실근 **2개**
- $\beta > 2\sqrt{3}/9$ (극솟값 > 0): 첫 구간의 근 하나뿐, 서로 다른 실근 **1개**

경계값의 기하적 의미도 분명하다. $\beta = 2\sqrt{3}/9$ 는 곡선 $y = x^3 + \beta$ 와 직선 $y = x$ 가 접하는 값이다. 접점 x_0 에서는 접선의 기울기가 1이어야 하므로 $p'(x_0) = 3x_0^2 = 1$ 에서 $x_0 = 1/\sqrt{3}$ (양수 쪽)이고, 접점에서 $p(x_0) = x_0$ 이어야 하므로

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

로 같은 값을 얻는다.

- (i) $0 < \beta < \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 일 때 상수수열이 되는 c 는 **3개**
 (ii) $\beta = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 일 때 **2개**
 (iii) $\beta > \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 일 때 **1개**



[답안 그림 2] $y = x^3 + \beta$ 와 $y = x$ 의 교점. 극솟값 $\beta - 2\sqrt{3}/9$ 의 부호가 음수·0·양수로 바뀌면서 교점이 3개 $\rightarrow$ 2개 $\rightarrow$ 1개로 줄어든다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 수학적 귀납법과 문제의 지문에서 제시한 증가수열 및 감소수열의 정의를 정확히 이해하고, $p(c)$ 와 c 의 대소관계에 따라 증가수열 또는 감소수열이 됨을 논리적인 방법으로 보인 경우	1점
(2)	- 증가수열이 되는 c 의 범위와 감소수열이 되는 c 의 범위를 올바르게 구하고, 정답을 구하는 과정을 논리적으로 설명한 경우	2점
(3)	- 수열 $\{a_n\}$ 이 상수수열이 되는 c 의 개수를 올바르게 구하고, 그 이유를 논리적으로 설명한 경우	2점

문제 2 l -접선과 l -할선이 덮는 영역

원의 접선·할선 · 피타고라스 정리 · 무한성 판정

(1) $a(p)$ 가 정의되는 점은 중심 O , 반지름 $\sqrt{1+l^2}$ 인 원 C_l 위의 점뿐이고, 그때 $a(p) = 2$ 이다

(a) l -접선의 구조를 먼저 확정한다. 선분 s 가 l -접선이라는 것은 s 의 길이가 l 이고 s 가 원 C 에 접한다는 뜻이다. 접점을 Q 라 하면 $Q \in s$ 이고, s 를 품는 직선 L 은 C 의 접선이므로

$$\overline{OQ} = 1, \quad OQ \perp L$$

이다. 역으로 C 의 접선 L 위에 접점 Q 를 포함하는 길이 l 의 선분을 잡으면 그것은 l -접선이다. 즉

l -접선 = (접선 L 하나) + (L 위에서 접점 Q 를 품는 길이 l 의 창(窓))

(b) T 를 결정한다 - $T = \{p : 1 \leq Op \leq \sqrt{1+l^2}\}$.

- (⊆) p 가 어떤 l -접선 s 위의 점이라 하자. L 이 C 의 접선이므로 O 에서 L 까지의 거리가 1이고, L 위의 모든 점은 O 에서 1 이상 떨어져 있다. 따라서 $\overline{Op} \geq 1$. 또 p 와 접점 Q 가 모두 길이 l 인 선분 s 위에 있으므로 $\overline{pQ} \leq l$ 이고, $OQ \perp L$ 이므로 피타고라스 정리에서

$$\overline{Op}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{Qp}^2 = 1 + \overline{Qp}^2 \leq 1 + l^2.$$

- (⊇) 거꾸로 $1 \leq r \leq \sqrt{1+l^2}$ 이고 $\overline{Op} = r$ 인 점 p 를 잡자. $r \geq 1$ 이므로 p 에서 C 에 접선을 그을 수 있고, 그 접점을 Q 라 하면 피타고라스 정리에서 $\overline{pQ} = \sqrt{r^2 - 1} \leq l$ 이다. 따라서 그 접선 위에서 p 와 Q 를 함께 품는 길이 l 의 선분을 잡을 수 있고, 이것이 p 를 지나는 l -접선이다.

즉 T 는 원 C 와 원 C_l (중심 O , 반지름 $\sqrt{1+l^2}$) 사이의 **닫힌 고리 모양 영역**이다 (두 경계원 모두 포함).

(c) p 를 지나는 l -접선의 개수를 센다. $r = \overline{Op}$ 라 하고 p 에서의 접선 길이를 $d = \sqrt{r^2 - 1}$ 이라 하자.

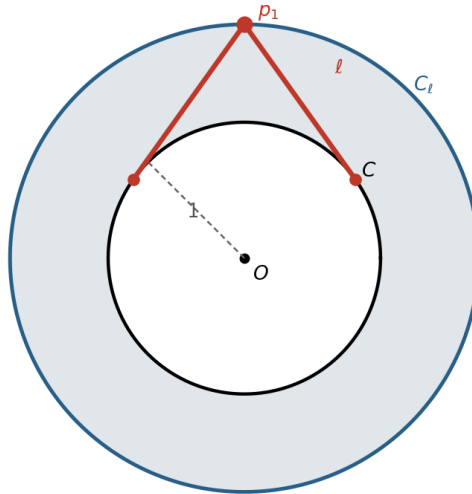
- $r = \sqrt{1+l^2}$ 인 경우 — $d = l$ 이다. p 를 지나는 l -접선은 접점 Q 를 반드시 품어야 하는데 $\overline{pQ} = l$ 이고 선분의 길이도 l 이므로, 그 선분은 p 와 Q 를 양 끝점으로 하는 선분 $\overline{pQ}$ 하나로 **꼭짜없이 정해진다**. 한편 $r > 1$ 이므로 p 에서 C 에 그을 수 있는 접선은 정확히 2개이다. 따라서 l -접선은 정확히 2개이고 $a(p) = 2$.

- $1 \leq r < \sqrt{1+l^2}$ 인 경우 — $d = \sqrt{r^2 - 1} < l$ 이다. 접선 L 을 하나 고정하고 L 위에 Q 를 원점으로 하는 좌표를 주면 p 는 좌표 $\pm d$ 의 점이고, 길이 l 의 창 $[t_0, t_0 + l]$ 이 Q (좌표 0)와 p 를 모두 품을 조건은 t_0 가 길이 $l - d > 0$ 인 구간을 움직이는 것이다. 즉 t_0 의 선택지가 **무한히** 많고, 서로 다른 t_0 는 서로 다른 l -접선을 준다. 따라서 p 를 지나는 l -접선은 무한히 많아 $a(p)$ 가 정의되지 않는다. ($r = 1$, 곧 p 가 원 C 위의 점일 때도 $d = 0 < l$ 이므로 마찬가지로이다.)

T 는 두 원 C 와 C_l 사이의 영역이고,

$$a(p) \text{가 정의되는 점의 집합} = C_l = \{p : \overline{Op} = \sqrt{1+l^2}\}, \quad a(p) = 2.$$

$a(p)$ 가 정의되는 점 : 바깥 경계원 C_l 뿐, $a(p) = 2$



$$T = \{p : 1 \leq |Op| \leq \sqrt{1+l^2}\}$$

[답안 그림 3] T 는 반지름 1과 $\sqrt{1+l^2}$ 사이의 닫힌 고리. 바깥 경계 C_l 위의 점에서는 접선 길이가 정확히 l 이 되어 선분이 하나로 정해지고, 접선이 2개이므로 $a(p) = 2$ 이다.

(2) $l < 2$ 이면 $b(p)$ 가 정의되는 점은 중심 O , 반지름 $\sqrt{1-l^2/4}$ 인 원 C'_l 위의 점뿐이고 $b(p) = 1$, $l \geq 2$ 이면 그런 점은 하나도 없다

(a) l -할선의 구조를 확정한다. 선분 s 가 l -할선이면 s 는 C 와 서로 다른 두 점에서 만나므로, s 를 품는 직선 L 은 C 와 두 점에서 만나고 그 두 교점이 모두 s 위에 있다. 즉 s 는 **현을 통째로 품는다**. O 에서 L 까지의 거리를 d ($0 \leq d < 1$)라 하면 현의 절반 길이는 피타고라스 정리에서 $u = \sqrt{1-d^2} \in (0, 1]$ 이고, 현의 길이가 $2u$ 이므로

$$2u \leq l, \quad \text{즉} \quad u \leq \frac{l}{2}$$

가 필요충분조건이다. 따라서 $l < 2$ 이면 $u \in (0, l/2]$, $l \geq 2$ 이면 $u \in (0, 1]$ 이다.

(b) 한 직선 위에서 l -할선이 덮는 거리의 범위. 위와 같이 L 을 고정하고, O 에서 내린 수선의 발 F 를 원점으로 하는 좌표 t 를 L 위에 주자. 현은 $[-u, u]$ 이고, 길이 l 의 선분은 $[t_0, t_0 + l]$ 꼴로 $t_0 \leq -u, t_0 + l \geq u$, 즉 $t_0 \in [u-l, -u]$ 이다 (이 구간은 $2u \leq l$ 덕분에 비어 있지 않다). L 위의 좌표 t 인 점과 O 의 거리는 $\sqrt{d^2 + t^2}$ 이므로, 하나의 l -할선이 덮는 거리들은 $0 \in [t_0, t_0 + l]$ 임을 이용하면

$$\left[d, \sqrt{d^2 + m^2} \right], \quad m = \max(|t_0|, |t_0 + l|)$$

이다. t_0 가 $[u-l, -u]$ 를 움직이면 m 은 $l/2$ (대칭으로 놓을 때)부터 $l-u$ (끝까지 밀 때)까지 움직인다. 따라서 반지름 u 가 정해졌을 때 덮이는 거리 전체는 (직선의 회전까지 고려하면)

$$\left[\sqrt{1-u^2}, \sqrt{d^2 + (l-u)^2} \right] = \left[\sqrt{1-u^2}, \sqrt{1+l^2-2lu} \right]$$

이다. 마지막 등호는 $d^2 = 1-u^2$ 을 대입해 $1-u^2+l^2-2lu+u^2 = 1+l^2-2lu$ 로 정리한 것이다.

(c) S 를 결정한다. 위 구간을 허용되는 모든 u 에 대해 합치면 된다. 두 끝값은 모두 u 에 대해 연속적이고 감소한다.

• $l < 2$: $u \in (0, l/2]$. $u = l/2$ 에서 아래 끝은 최소인 $\sqrt{1-l^2/4}$ 이고 (이때 위 끝은 $\sqrt{1+l^2-l^2} = 1$), $u \rightarrow 0^+$ 에서 위 끝은 $\sqrt{1+l^2}$ 에 한없이 가까워지지만 $u > 0$ 이어야 하므로 그 값에 도달하지는 못한다. 실제로 $\sqrt{1-l^2/4} \leq r < \sqrt{1+l^2}$ 인 임의의 r 에 대하여, $r \leq 1$ 이면 $u = \sqrt{1-r^2} \in (0, l/2]$ 로 잡아 아래 끝이 정확히 r 이 되게 할 수 있고, $r > 1$ 이면 $u = \min(l/2, (1+l^2-r^2)/(2l)) > 0$ 로 잡아 위 끝이 r 이상이 되게 할 수 있다. 따라서

$$S = \left\{ p : \sqrt{1-\frac{l^2}{4}} \leq \overline{Op} < \sqrt{1+l^2} \right\}.$$

즉 S 는 원 C'_l (포함)과 원 C_l (불포함) 사이의 영역이다.

• $l \geq 2$: u 가 1까지 갈 수 있고, $u = 1$ 이면 $d = 0$ 이므로 지름을 품는 선분이 가능하다. 이때 아래 끝이 0이 되므로 원 C 의 내부가 통째로 S 에 들어간다. 같은 방식으로

$$S = \left\{ p : \overline{Op} < \sqrt{1+l^2} \right\} \quad (\text{경계 } C_l \text{ 은 제외}).$$

(d) $b(p)$ 를 센다 — 무한히 많은 경우를 먼저 걸러낸다. 핵심은 (b)에서 본 “창을 미끄러뜨리기”이다. 어떤 l -할선의 직선에서 $2u < l$ (강한 부등호)이면 t_0 가 움직일 여지 $l-2u > 0$ 가 남아 있으므로 그 직선 위에만도 l -할선이 무한히 많다. 그러므로 $2u < l$ 인 직선을 하나라도 잡을 수 있으면 $b(p)$ 는 정의되지 않는다. $\rho = \sqrt{1-l^2/4}$ 라 두자 ($l \geq 2$ 인 경우에는 $\rho = 0$ 으로 둔다). 또 $r = \overline{Op}$ 라 하자.

• $\rho < r \leq 1$ 인 경우 — p 를 지나는 직선을 회전시키면 O 까지의 거리 d 는 0부터 r 까지 연속적으로 변한다. $\rho < d < r$ 인 d 를 잡으면 $u = \sqrt{1-d^2} < \sqrt{1-\rho^2} = l/2$ 이므로 $2u < l$ 이다. 또 이때 p 의 좌표 t_p 는 $t_p^2 = r^2 - d^2 \leq 1 - d^2 = u^2$ 이어서 p 는 현 위에 있으므로, 현을 품는 창은 자동으로 p 도 품는다. 따라서 l -할선이 무한히 많다.

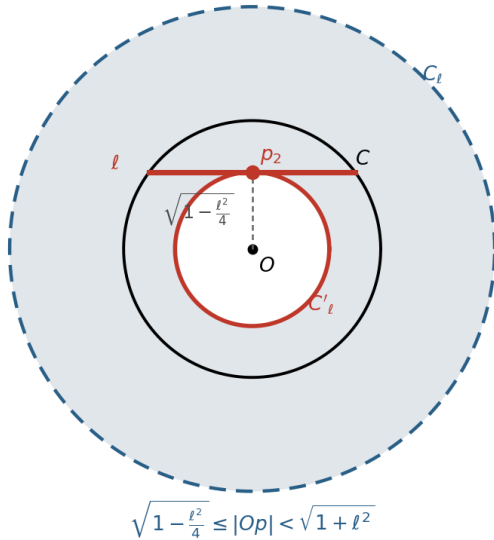
• $1 < r < \sqrt{1+l^2}$ 인 경우 — 이번에는 d 를 1에 가깝게 잡는다. p 가 현 바깥에 있을 수 있으므로 창이 덮어야 할 길이는 $|t_p| + u = \sqrt{r^2 - d^2} + \sqrt{1-d^2}$ 이고, $d \rightarrow 1^-$ 에서 이 값은 $\sqrt{r^2 - 1} < l$ 로 수렴한다. 연속성에 의해 $\sqrt{r^2 - d^2} + \sqrt{1-d^2} < l$ 이 되는 $d < 1$ 이 존재하고, 그런 직선 위에서는 창을 미끄러뜨릴 여지가 남으므로 l -할선이 무한히 많다.

• $r = \rho$ 이고 $l < 2$ 인 경우 — p 를 지나는 직선 L 에 대해 $d \leq \overline{Op} = \rho$ 이다. 한편 l -할선이 되려면 $u = \sqrt{1-d^2} \leq l/2$, 즉 $d \geq \rho$ 여야 한다. 두 부등식에서 $d = \rho$ 이고, 이는 O 에서 L 에 내린 수선의 발이 바로 p 라는 뜻이므로 L 은 $\overline{Op}$ 에 수직인 직선 하나로 정해진다. 그 위에서 현의 길이는 $2\sqrt{1-\rho^2} = l$ 로 선분의 길이와 같으므로 선분은 현 그 자체 하나뿐이다. 따라서 $b(p) = 1$.

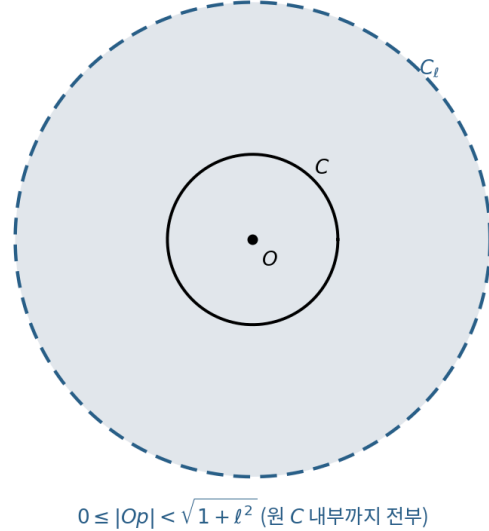
• $l \geq 2$ 이고 $r = 0$ 인 경우 ($p = O$) — $l > 2$ 이면 아무 지름이나 품는 창에 $l-2 > 0$ 의 여유가 있어 무한히 많다. $l = 2$ 이면 선분은 지름 그 자체여야 하는데, 지름은 방향마다 하나씩 있으므로 역시 무한히 많다. 어느 쪽이든 $b(O)$ 는 정의되지 않는다.

- $l < 2$: S 는 C'_l (반지름 $\sqrt{1-l^2/4}$, 포함)과 C_l (반지름 $\sqrt{1+l^2}$, 불포함) 사이의 영역이고, $b(p)$ 가 정의되는 점의 집합은 C'_l , 그 값은 $b(p) = 1$.
- $l \geq 2$: S 는 C_l 의 내부(경계 제외) 전체이고, $b(p)$ 가 정의되는 점은 없다.

$l < 2$: $b(p)$ 는 안쪽 경계원 C'_l 에서만 정의, $b(p) = 1$



$l \geq 2$: $b(p)$ 가 정의되는 점이 없다



[답안 그림 4] l -할선이 덮는 영역 S . $l < 2$ 이면 안쪽에 반지름 $\sqrt{1-l^2/4}$ 의 구멍이 남고 그 경계 위에서만 l -할선이 하나로 정해진다. $l \geq 2$ 이면 지름도 l -할선이 되어 구멍이 사라진다.

두 소문항의 대비 — l -접선에서는 접점이 원 위에 **한 점**으로 고정되어 있어 가장 멀리 갈 수 있는 점($\overline{Op} = \sqrt{1+l^2}$)에서 선분이 하나로 정해졌고, 그런 p 가 바깥 경계원을 이룬다. 반대로 l -할선에서는 품어야 할 현이 **길이를 가진 선분**이어서 “현이 가장 길어지는” 쪽, 곧 O 에 가장 가까운 안쪽 경계에서 선분이 하나로 정해진다. 두 경우 모두 “선분이 하나로 정해지는 곳 = 여유 길이가 0이 되는 곳”이라는 같은 원리이며, $l \geq 2$ 에서는 현의 길이가 l 을 넘을 수 없어 그 여유가 사라지는 지점 자체가 존재하지 않는다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- $a(p)$ 가 정의되는 점 p 와 $a(p)$ 의 값을 모두 올바르게 찾고, 그 과정이 논리적인 경우	2점
(2)	- $b(p)$ 가 정의되는 점 p 와 $b(p)$ 의 값을 모두 올바르게 찾고, 그 과정이 논리적인 경우	3점

2024학년도 · 해설편

문제 1 원 위를 도는 세 점의 공선 조건과 삼각형 넓이의 최댓값

단원 함수·극한·미적분 · 삼각함수
핵심 개념 원 위를 움직이는 점의 매개변수 표시, 세 점이 한 직선 위에 있을 조건, 삼각함수의 합성과 미분, 극댓값·최댓값
문항 수 1문항 (소문항 2개) · 5점

II. 예시답안

문제 1 원 위를 도는 세 점의 공선 조건과 삼각형 넓이의 최댓값 매개변수 표시 · 공선 조건 · 삼각함수의 최댓값

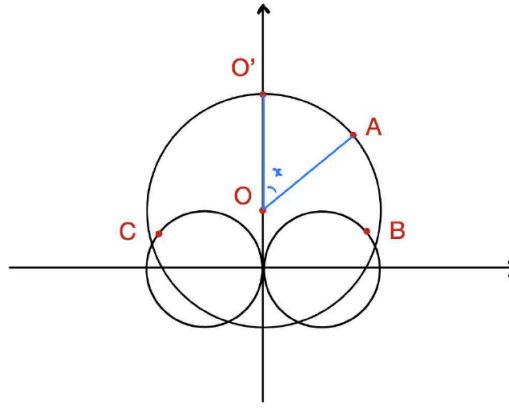
[준비] 세 점의 좌표를 하나의 매개변수 x 로 나타낸다

세 점은 동시에 출발하고 각자의 원을 한 바퀴 도는 데 걸리는 시간이 모두 같으며 속력은 일정하다. 따라서 한 바퀴에 걸리는 시간을 T 라 하면, 시각 t 까지 각 점이 자기 원의 중심을 기준으로 돌아간 중심각의 크기는 세 점 모두 $x = 2\pi t/T$ 로 같다. 원 X 의 중심을 $O(0, 1)$, 출발점을 $O'(0, 3)$ 이라 하면 $x = \angle AOO'$ 이다. 한 바퀴만 보므로 $0 \leq x < 2\pi$ 로 두면 충분하다. 각 점은 자기 원의 꼭대기에서 출발하므로, 중심을 기준으로 한 위치벡터의 출발 방향은 모두 $+y$ 이다. 여기서 시계 방향으로 x 만큼 돌면 방향은 $(\sin x, \cos x)$, 반시계방향으로 x 만큼 돌면 $(-\sin x, \cos x)$ 가 된다. 그러므로

$$A = (0, 1) + 2(\sin x, \cos x) = (2 \sin x, 2 \cos x + 1),$$

$$B = (1, 0) + (\sin x, \cos x) = (\sin x + 1, \cos x),$$

$$C = (-1, 0) + (-\sin x, \cos x) = (-\sin x - 1, \cos x).$$

[답안 그림 1] 중심 $O(0, 1)$, 출발점 $O'(0, 3)$, 중심각 $x = \angle AOO'$

이 표현에서 곧바로 읽히는 두 사실이 이후 논증의 뼈대가 된다.

- (가) B 와 C 의 y 좌표는 언제나 $\cos x$ 로 서로 같다.
- (나) A 의 y 좌표에서 B (또는 C)의 y 좌표를 빼면

$$(2 \cos x + 1) - \cos x = \cos x + 1 \geq 0$$

이고, 등호는 $\cos x = -1$, 즉 $x = \pi$ 일 때만 성립한다. 즉 A 는 항상 B, C 와 같은 높이이거나 그보다 위에 있다.

(1) 2회 ($x = \pi$ 와 $x = 3\pi/2$)

(a) 먼저 두 점이 겹칠 수 있는지를 모두 따진다 — 이렇게 해야 경우 나누기가 빠짐없이 서로 겹치지 않게 된다.

- $A = B$: x 좌표가 같으려면 $2 \sin x = \sin x + 1$, 즉 $\sin x = 1$ 이므로 $x = \pi/2$ 뿐이다. 그런데 이때 A 의 y 좌표는 $2 \cos(\pi/2) + 1 = 1$, B 의 y 좌표는 $\cos(\pi/2) = 0$ 으로 서로 다르다. 따라서 $A = B$ 인 순간은 없다.
- $A = C$: y 좌표가 같으려면 (나)에서 $\cos x = -1$ 이어야 하고, 이때 $\sin x = 0$ 이므로 $A = (0, -1)$, $C = (-1, -1)$ 로 x 좌표가 다르다. 따라서 $A = C$ 인 순간도 없다.
- $B = C$: $-\sin x - 1 = \sin x + 1$, 즉 $\sin x = -1$ 이므로 $x = 3\pi/2$ 이다. 이때 $B = C = (0, 0)$ 이다.

그러므로 세 점이 모두 한 점에서 만나는 일은 없고, 가능한 상황은 다음 두 가지뿐이며 이 둘은 서로 배타적이다.

(b) 경우 1 — 세 점이 모두 서로 다른 위치에 있을 때 ($x \neq 3\pi/2$)

(가)에 의해 $B \neq C$ 이고 두 점의 y 좌표가 같으므로, 직선 BC 는 수평선 $y = \cos x$ 이다. 세 점이 한 직선 위에 있을 필요충분조건은 A 가 이 수평선 위에 있는 것, 즉

$$2 \cos x + 1 = \cos x \Leftrightarrow \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1$$

이다. $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\cos x = -1$ 의 해는 $x = \pi$ 하나뿐이다. 이때

$$A = (0, -1), \quad B = (1, -1), \quad C = (-1, -1)$$

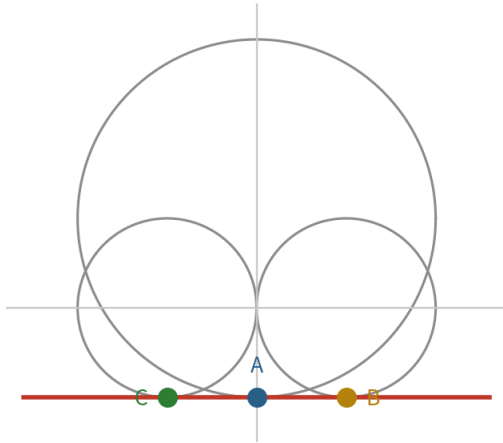
로 세 점이 모두 직선 $y = -1$ 위에 있다. (1회)

(c) 경우 2 — 두 점이 같은 위치에 있을 때

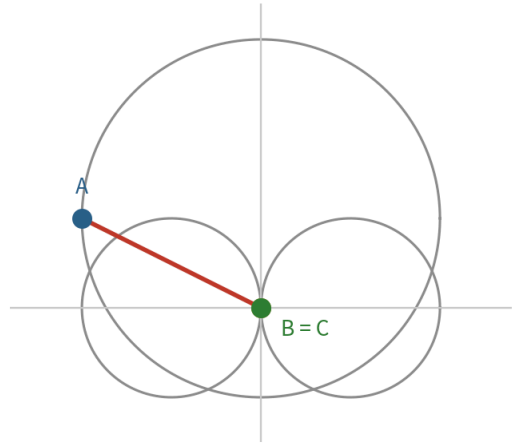
(a)에서 본 대로 이 경우는 $B = C$, 즉 $x = 3\pi/2$ 뿐이다. 이때 $B = C = (0, 0)$, $A = (-2, 1)$ 이다. 서로 다른 두 점 A 와 $B(=C)$ 를 지나는 직선은 반드시 존재하고 세 점이 모두 그 위에 있으므로, A 의 위치와 관계없이 세 점은 한 직선 위에 있다. (1회)

두 경우는 서로 다른 시각($x = \pi, x = 3\pi/2$)에 일어나고 그 밖의 x 에서는 일어나지 않으므로,
한 직선 위에 있는 횟수 = $1 + 1 = 2$ 회

$x = \pi$: $A(0, -1)$, $B(1, -1)$, $C(-1, -1)$



$x = \frac{3\pi}{2}$: $B = C = (0, 0)$, $A(-2, 1)$



[답안 그림 2] 세 점이 한 직선 위에 놓이는 두 순간. 왼쪽은 세 점이 모두 다른 위치, 오른쪽은 B 와 C 가 겹치는 경우.

(2) 최댓값 $= \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ (이때 $x = \pi/4$)

(a) 넓이를 x 의 함수로 나타낸다 — 밑변을 $\overline{BC}$ 로 잡는다. (가)에 의해 B 와 C 의 y 좌표가 같으므로 선분 BC 는 수평이고, 그 길이는

$$\overline{BC} = (\sin x + 1) - (-\sin x - 1) = 2(\sin x + 1) \geq 0$$

이다 ($\sin x \geq -1$ 이므로 절댓값 기호가 필요 없다). 밑변이 수평이므로 A 에서 직선 BC 까지의 거리는 두 y 좌표의 차이이며, (나)에 의해

$$h = (2 \cos x + 1) - \cos x = \cos x + 1 \geq 0$$

이다. 따라서 넓이는

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2(\sin x + 1)(\cos x + 1) = (\sin x + 1)(\cos x + 1)$$

이다. 두 인수가 모두 음이 아니므로 $f(x) \geq 0$ 이고, (1)에서 본 두 순간($x = \pi$, $x = 3\pi/2$)에는 $f(x) = 0$ 이 되어 삼각형이 찌그러진다. 즉 이 식 하나로 모든 x 를 한꺼번에 다룰 수 있다.

(b) 풀이 1 (합성) — $\sin x + \cos x$ 하나의 변수로 줄인다

$s = \sin x + \cos x$ 로 두면 $s^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ 에서 $\sin x \cos x = (s^2 - 1)/2$ 이므로

$$f(x) = 1 + (\sin x + \cos x) + \sin x \cos x = 1 + s + \frac{s^2 - 1}{2} = \frac{(s + 1)^2}{2}.$$

한편 삼각함수의 합성에 의해 $s = \sqrt{2} \sin(x + \pi/4)$ 이므로 s 가 가질 수 있는 값의 범위는 정확히 $-\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2}$ 이다. 이 구간에서 $(s + 1)^2$ 은 $s = -1$ 에서 0으로 최소이고, s 가 -1 에서 멀수록 커진다. 두 끝점까지의 거리를 비교하면

$$|\sqrt{2} - (-1)| = \sqrt{2} + 1 \approx 2.414 > |-\sqrt{2} - (-1)| = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$$

이므로 $(s + 1)^2$ 은 $s = \sqrt{2}$ 에서 최대가 된다. 그리고 $s = \sqrt{2}$ 는 $\sin(x + \pi/4) = 1$, 즉 $x = \pi/4$ 에서 실제로 얻어진다. 따라서

$$f_{\max} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}.$$

(c) 풀이 2 (미분) — 채점 기준이 요구하는 방식

$f(x) = (\sin x + 1)(\cos x + 1)$ 를 곱의 미분법으로 미분하면

$$f'(x) = \cos x(\cos x + 1) - (\sin x + 1)\sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x) + (\cos x - \sin x)$$

이고, $\cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$ 이므로 공통인수 $\cos x - \sin x$ 로 묶여

$$f'(x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x + 1)$$

이다. 따라서 $f'(x) = 0$ 인 곳은 다음 두 경우이며, 두 방정식을 각각 남김없이 푼다.

(i) $\cos x - \sin x = 0$ — $\cos x = 0$ 이면 $\sin x = 0$ 이 되어 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 에 어긋나므로 $\cos x \neq 0$ 이고, 양변을 $\cos x$ 로 나누면 $\tan x = 1$ 이다. $0 \leq x < 2\pi$ 에서

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{또는} \quad x = \frac{5\pi}{4}.$$

(ii) $\cos x + \sin x + 1 = 0$ — 합성하면 $\sqrt{2}\sin(x + \pi/4) = -1$, 즉 $\sin(x + \pi/4) = -1/\sqrt{2}$ 이다. $0 \leq x < 2\pi$ 이면 $\pi/4 \leq x + \pi/4 < 2\pi + \pi/4$ 이므로 이 구간에서의 해는 $x + \pi/4 = 5\pi/4$ 또는 $7\pi/4$, 즉

$$x = \pi \quad \text{또는} \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

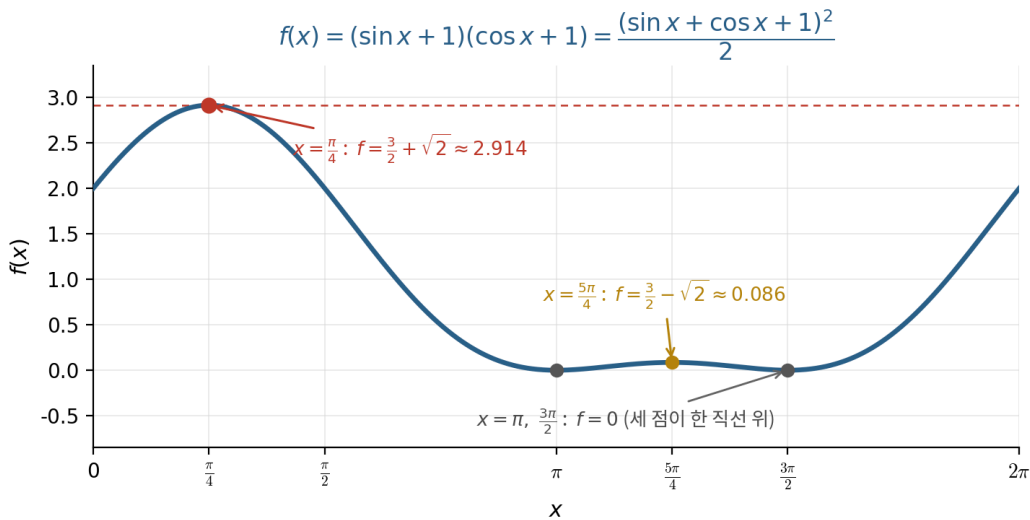
(양변을 제곱해 $\cos^2 x = 1 + 2\sin x + \sin^2 x$ 로 풀면 $2\sin x(\sin x + 1) = 0$ 에서 $\sin x = 0$ 또는 $\sin x = -1$ 을 얻는데, $\sin x = 0$ 이 주는 $x = 0$ 은 $\cos 0 + \sin 0 + 1 = 2 \neq 0$ 이므로 제곱 과정에서 생긴 **무연근**이다. 반드시 원래 식에 대입해 걸러내야 한다.)

(d) **네 임계점의 함숫값을 비교한다** — f 는 주기가 2π 인 연속함수이므로 최댓값은 반드시 존재하고, 그 최댓값은 임계점에서만 나타난다. 네 값을 모두 계산하면

x	$\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$
$f(x)$	$3/2 + \sqrt{2}$	0	$3/2 - \sqrt{2}$	0
근삿값	2.914	0	0.086	0

가장 큰 값은 $x = \pi/4$ 에서의 $3/2 + \sqrt{2}$ 이다. 두 풀이가 같은 답을 준다.

$$\max f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \approx 2.914$$



[답안 그림 3] $f(x) = (\sin x + 1)(\cos x + 1)$ 의 그래프. $x = \pi/4$ 에서 최댓값 $3/2 + \sqrt{2}$, $x = \pi$ 와 $x = 3\pi/2$ 에서 $f = 0$ (세 점이 한 직선 위에 놓이는 순간).

의미 해석 — $x = \pi/4$ 일 때 세 점은

$$A = (\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1), \quad B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad C = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

에 있고, 밑변 $\overline{BC} = 2 + \sqrt{2}$, 높이 $h = 1 + \sqrt{2}/2$ 이다. 실제로

$$\frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1) = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

로 앞의 결과와 일치한다. 밑변은 $\sin x$ 만으로, 높이는 $\cos x$ 만으로 결정되는데 두 인수가 동시에 커지는 지점은 $\sin x = \cos x$ 인 $x = \pi/4$ 이며, 이것이 $f'(x)$ 의 첫 번째 인수 $\cos x - \sin x$ 가 0이 되는 조건과 정확히 같다. 한편 $x = 5\pi/4$ 에서 얻는 $3/2 - \sqrt{2} \approx 0.086$ 은 두 인수가 동시에 작아지는 지점이어서 최댓값이 아니라 **극솟값**이며, f' 의 두 번째 인수가 0이 되는 $x = \pi, 3\pi/2$ 에서는 삼각형 자체가 사라져 $f = 0$ 이 된다. 즉 (1)에서 찾은 두 순간이 (2)의 그래프에서 두 개의 최솟값 자리로 그대로 다시 나타난다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 세 점이 일직선에 있는 두 가지 경우를 모두 찾고 각각에 대해 올바른 논증을 하면 2점. - 세 점이 일직선에 있는 한 가지 경우만 찾고 이를 논증하면 1점. - 세 점이 일직선에 있는 두 가지 경우를 모두 찾았지만 이를 논증하지 못하면 0점.	2점
(2)	- 삼각형 ABC 넓이의 공식 $f(x) = (\sin x + 1)(\cos x + 1)$과 그 미분식을 구하면 1점 - (ii) $\cos x + \sin x + 1 = 0$ 경우를 언급하지 않고 답만 맞으면 최대 2점. (만약, 삼각형 ABC 넓이의 공식은 틀렸지만 문제에서 제시한 도형을 옳게 설명하고 자신이 구한 넓이의 옳은 최댓값을 구하면 2번에서 최대 2점.)	3점

2023학년도 · 해설편

문제 1	공간의 원·정다각형이 xy 평면에 만드는 자취
문제 2	일렬 타일 위를 걷는 개미와 조건부확률
문제 3	순서쌍의 친화도
문제 4	벽을 미끄러지는 직각삼각형의 그림자

단원	함수·극한·미적분 · 수열·급수 · 기하·벡터 · 삼각함수 · 확률과 통계
핵심 개념	공간에서의 직선과 평면, 닮음과 정사영, 정다각형의 넓이·둘레, 삼각함수의 극한, 이항계수와 조건부확률, 이차방정식의 판별식과 근과 계수의 관계, 삼각함수의 합성과 최대·최소, 미분
문항 수	4문항 (소문항 10개) · 20점

II. 예시답안

문제 1 공간의 원·정다각형이 xy 평면에 만드는 자취

공간의 직선 · 닻음 · 정다각형의 넓이와 둘레

(1) $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 1$ (xy 평면 위의 원)

(a) 교점을 매개변수로 나타낸다. 집합 A 는 중심 $M(0, 0, 6)$, 반지름 2인 $z=6$ 평면 위의 원이므로 그 점을 $P = (2\cos t, 2\sin t, 6)$ ($0 \leq t < 2\pi$)로 둘 수 있다. $Q = (2, 4, 2)$ 이고 두 점의 z 좌표가 $2 \neq 6$ 이므로 직선 QP 는 z 축 방향 성분이 0이 아니어서 xy 평면과 정확히 한 점에서 만난다. 직선 위의 점을 $Q + s(P - Q)$ 로 두면 z 좌표는

$$2 + s(6 - 2) = 2 + 4s = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{2}$$

이다.

(b) 교점의 좌표를 계산한다.

$$x = 2 - \frac{1}{2}(2\cos t - 2) = 3 - \cos t, \quad y = 4 - \frac{1}{2}(2\sin t - 4) = 6 - \sin t$$

이므로 교점은 $(3 - \cos t, 6 - \sin t, 0)$ 이다. 따라서

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

이 성립하고, 거꾸로 이 원 위의 임의의 점은 적당한 t 에서 얻어지므로 교점들의 집합은 정확히 이 원 전체이다.

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 1 \quad (\text{단, } z=0)$$

중심 $C(3, 3, 0)$ 이 아니라 $(3, 6, 0)$ 임에 주의하자. 이는 $Q(2, 4, 2)$ 를 $M(0, 0, 6)$ 에서 본 xy 평면 위의 상이다: $\frac{3}{2}(2, 4) = (3, 6)$.

(2) $S_n = \pi + 6n \sin(\pi/n) + (9n/2) \sin(2\pi/n)$

(a) 상(像)의 좌표를 일반화한다. $z=2$ 평면 위의 점 W 와 $P \in A$ 에 대해, (1)과 똑같이 $s = -1/2$ 이므로 xy 평면과의 교점 W' 은 (평면 좌표로 써서)

$$W' = W + \left(-\frac{1}{2}\right)(P - W) = \frac{3}{2}W - \frac{1}{2}P$$

이다. 여기서 $\frac{1}{2}P = (\cos t, \sin t)$ 는 원점 중심 단위원 전체를 훑는다. 따라서 정 n 각형(변과 내부를 포함) K 가 만드는 상의 집합은

$$E = \left\{ \frac{3}{2}w + u : w \in K, |u| = 1 \right\}$$

이다 ($-u$ 도 단위원 전체를 훑으므로 부호는 상관없다).

(b) $K' := (3/2)K$ 를 확인한다. K 는 중심 $R(2, 2)$, 외접원의 반지름 2인 정 n 각형이므로 K' 은 중심 $\frac{3}{2}(2, 2) = (3, 3)$, 외접원의 반지름 $\frac{3}{2} \times 2 = 3$ 인 정 n 각형이다. 이 중심 $C(3, 3, 0)$ 은 실제로 직선 MR 가 xy 평면과 만나는 점이다.

(c) 보조정리 — E 는 K' 을 반지름 1만큼 부풀린 도형이다. 즉 $E = \{z : \text{dist}(z, K') \leq 1\}$ 임을 보인다.

- ($\subseteq$) $z = w + u$ ($w \in K', |u| = 1$)이면 $\text{dist}(z, K') \leq |z - w| = 1$.
- ($\supseteq$) $\text{dist}(z, K') \leq 1$ 이라 하자. K' 은 볼록이고 내접원의 반지름이 $3 \cos(\pi/n) \geq 3 \cos(\pi/3) = 3/2$ 이므로 ($n \geq 3$) 지름이 3 이상이다. 곧 $|p - q| \geq 3$ 인 $p, q \in K'$ 이 있는데, 만약 K' 의 모든 점이 z 에서 거리 1 이하라면 $|p - q| \leq 2$ 가 되어 모순이다. 그러므로 K' 안에는 z 까지의 거리가 1보다 큰 점도 있고 1 이하인 점도 있다. 연속함수 $w \mapsto |z - w|$ 를 연결집합 K' 위에서 보면 사잇값 정리에 의해 $|z - w| = 1$ 인 $w \in K'$ 이 존재하고, $u = z - w$ 로 두면 $z = w + u, |u| = 1$ 이다.

(d) 부풀린 도형을 세 부분으로 나눈다. K' 이 볼록다각형이므로 E 는 다음 세 부분이 (경계를 빼고) 겹치지 않게 붙은 도형이다.

• 다각형 K' 자신

• 각 변 위에 세운 직사각형 n 개 — 가로는 그 변의 길이, 세로는 1. 넓이의 합은 (둘레) $\times$ 1.

• 각 꼭짓점에서의 부채꼴 n 개 — 반지름 1, 중심각은 그 꼭짓점의 외각. 볼록다각형의 외각의 합이 2π 이므로 이 부채꼴들을 모으면 정확히 반지름 1인 원 하나가 되어 넓이의 합은 π .

따라서 $S_n = (K' \text{의 넓이}) + (K' \text{의 둘레}) + \pi$ 이다.

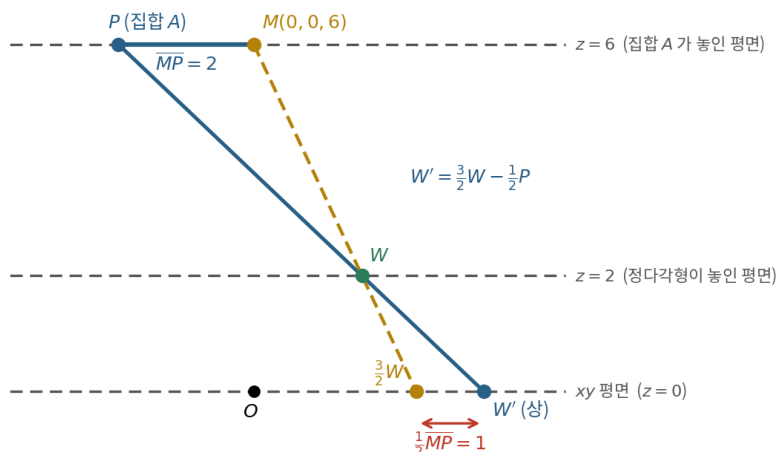
(e) 정 n 각형의 넓이와 둘레. 외접원의 반지름이 3이므로 중심과 한 변이 이루는 이등변삼각형의 꼭지각은 $2\pi/n$ 이고,

$$(K' \text{의 넓이}) = n \times \frac{1}{2} \cdot 3^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{9n}{2} \sin \frac{2\pi}{n},$$

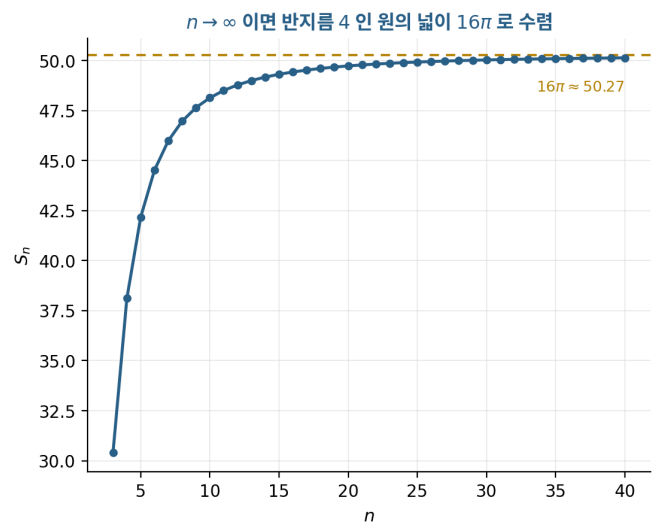
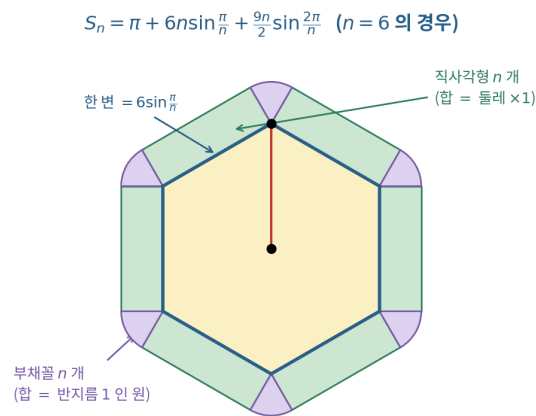
$$(\text{한 변의 길이}) = 2 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{n} \Rightarrow (K' \text{의 둘레}) = 6n \sin \frac{\pi}{n}.$$

$$S_n = \pi + 6n \sin \frac{\pi}{n} + \frac{9n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

$z = 2$ 의 점 W 와 $z = 6$ 의 점 P 를 잇는 직선이 xy 평면과 만나는 점



[답안 그림 1] $z = 2$ 평면의 점 W 는 xy 평면의 $(3/2)W - (1/2)P$ 로 옮겨진다. $(1/2)P$ 가 단위원을 훑으므로 상은 $(3/2)K$ 를 반지름 1만큼 부풀린 도형이 된다.



[답안 그림 2] (왼쪽) S_n 의 세 조각 — 정 n 각형(노랑) + 직사각형 n 개(초록) + 부채꼴 n 개(보라, 합치면 반지름 1인 원). (오른쪽) n 이 커질수록 S_n 은 16π 에 수렴한다.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 16\pi$

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$ 을 두 번 쓴다. $n \rightarrow \infty$ 이면 $\pi/n \rightarrow 0, 2\pi/n \rightarrow 0$ 이므로

$$6n \sin \frac{\pi}{n} = 6\pi \cdot \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \rightarrow 6\pi, \quad \frac{9n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = 9\pi \cdot \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} \rightarrow 9\pi$$

이다. 따라서 $S_n \rightarrow \pi + 6\pi + 9\pi = 16\pi$.

(b) 기하적 확인. $n \rightarrow \infty$ 이면 정 n 각형 K' 은 중심 $C(3, 3)$, 반지름 3인 원에 가까워지고, 이를 반지름 1만큼 부풀린 도형은 반지름 $3 + 1 = 4$ 인 원이 된다. 그 넓이는 $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$ 로 위 계산과 일치한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 16\pi$$

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	답을 구하면 1점	1점
(2)	S_n 식을 구하면 3점 (만약, S_n 의 식은 틀렸지만 옳은 도형을 설명하면 1점.)	3점
(3)	$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 을 구하면 1점. ((2)번의 S_n 식을 이용하거나 반지름이 4인 원의 넓이로 이해해서 답을 구하면 1점)	1점

문제 2 일렬 타일 위를 걷는 개미와 조건부확률

중복순열(다항계수) · 이웃 항의 비 · 조임 정리

(1) ${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m = (2n)!/(m! m! (2n-2m)!)$ 가지

(a) 한 번의 움직임은 동·서·수직 세 종류뿐이다. 타일이 일렬로 놓여 있으므로 교차점은 위쪽 줄과 아래쪽 줄에만 있고, 각 교차점에 연결된 세 변은 동쪽 1개, 서쪽 1개, 그리고 수직 방향 1개이다 (아래쪽 줄에서는 북쪽, 위쪽 줄에서는 남쪽). 즉 수직 방향은 현재 서 있는 줄이 정해지면 자동으로 결정되므로, $2n$ 번의 움직임은 동·서·수직의 나열로 완전히 결정된다.

(b) 출발점으로 돌아올 필요충분조건. 서쪽 m 회, 동쪽 e 회, 수직 v 회 하려면 $m + e + v = 2n$ 이다.

• 동서 방향: 최종 위치의 가로 좌표가 처음과 같으려면 $e = m$ 이어야 하고, 역도 성립한다.

• 남북 방향: 수직 이동은 줄을 한 번씩 바꾸므로, 처음 줄로 돌아오려면 v 가 짝수여야 한다. 그런데 $e = m$ 일 때 $v = 2n - 2m$ 은 항상 짝수이므로 이 조건은 자동으로 만족된다.

따라서 “ $2n$ 번째에 A 로 돌아오고 서쪽 이동이 m 회”인 것은 곧 “서쪽 m 회, 동쪽 m 회, 수직 $2n - 2m$ 회를 어떤 순서로든 나열한 것”과 같다. (채점 기준의 표현대로 하면 북쪽·남쪽이 각각 $n - m$ 회씩이다.)

(c) 경우의 수를 센다. $2n$ 개의 자리 중 서쪽이 놓일 m 개를 고르고, 남은 $2n - m$ 개 중 동쪽이 놓일 m 개를 고르면 나머지는 모두 수직으로 정해지므로

$${}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m = \frac{(2n)!}{m!(2n-m)!} \cdot \frac{(2n-m)!}{m!(2n-2m)!} = \frac{(2n)!}{m! m! (2n-2m)!}$$

가지이다. ($m = 0$ 이면 1가지, $m = n$ 이면 $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = {}_{2n}C_n$ 가지로 맞다.)

$$N_m := {}_{2n}C_m \cdot {}_{2n-m}C_m = \frac{(2n)!}{m! m! (2n-2m)!}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/n = 2/3$

(a) 조건부확률은 경우의 수에 비례한다. 모든 길이 $2n$ 의 경로는 확률 $(1/3)^{2n}$ 로 똑같이 일어나므로, 조건 “ $2n$ 번째에 A 로 돌아옴” 아래에서

$$p_{n,m} = \frac{N_m}{\sum_{k=0}^n N_k}$$

이다. 분모는 m 에 무관한 상수이므로 $p_{n,m}$ 을 최대로 하는 m 은 곧 N_m 을 최대로 하는 m 이며, $f(n)$ 은 그 중 가장 작은 값이다.

(b) 이웃한 두 항의 비. $0 \leq m \leq n-1$ 에서

$$\frac{N_{m+1}}{N_m} = \frac{(2n)!}{(m+1)!(m+1)!(2n-2m-2)!} \cdot \frac{m! m! (2n-2m)!}{(2n)!} = \frac{(2n-2m)(2n-2m-1)}{(m+1)^2}$$

이다. 따라서 N_{m+1} 과 N_m 의 대소는 $(m+1)^2$ 과 $(2n-2m)(2n-2m-1)$ 의 대소로 결정된다. 이때 $m \leq n-1$ 이므로 $2n-2m \geq 2$, $2n-2m-1 \geq 1$ 로 두 인수 모두 양수이다.

(c) 증가 구간. $m \leq (2n-2)/3$, 곧 $m+1 \leq 2n-2m-1$ 이면

$$(m+1)^2 \leq (2n-2m-1)^2 < (2n-2m-1)(2n-2m)$$

이므로 (마지막 부등호는 $2n-2m > 2n-2m-1 > 0$) $N_{m+1} > N_m$ 이다. 즉 N 은 $m = 0$ 부터 $m_0 := \lfloor (2n-2)/3 \rfloor$ 를 지나 $m_0 + 1$ 까지 순증가한다. 따라서 $m \leq m_0$ 인 어떤 m 도 최대가 될 수 없고

$$f(n) \geq m_0 + 1 > \frac{2n-2}{3}.$$

(d) 감소 구간. $m \geq (2n-1)/3$, 곧 $m+1 \geq 2n-2m$ 이면

$$(m+1)^2 \geq (2n-2m-1)^2 > (2n-2m-1)(2n-2m)$$

이므로 $N_{m+1} < N_m$ 이다. 즉 $m_1 := \lceil (2n-1)/3 \rceil$ 이상에서 N 은 **순감소**한다. 따라서 $m > m_1$ 인 m 은 최대가 될 수 없고

$$f(n) \leq m_1 < \frac{2n-1}{3} + 1.$$

(e) **조임 정리.** (c)·(d)를 합치면

$$\frac{2n-2}{3} < f(n) < \frac{2n-1}{3} + 1$$

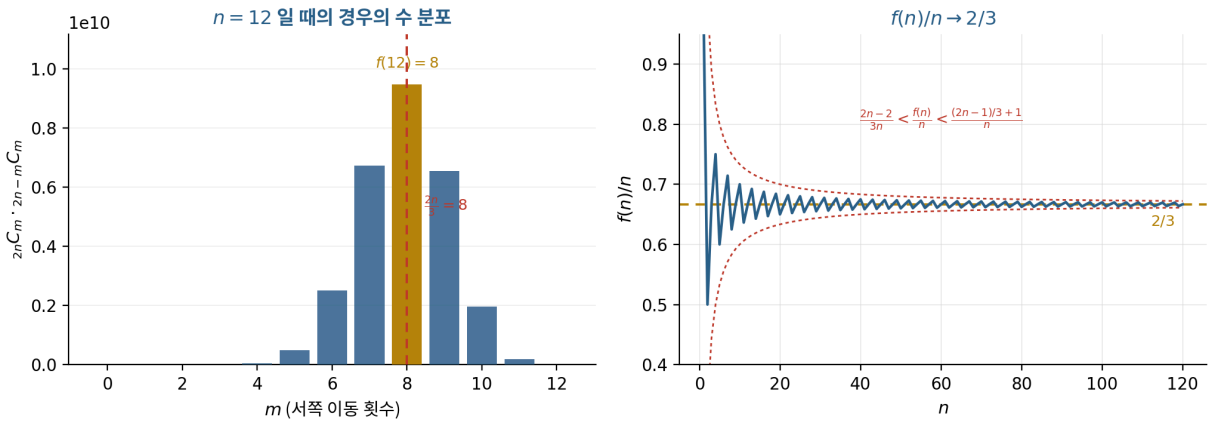
이고, 양변을 n 으로 나누면

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{3n} < \frac{f(n)}{n} < \frac{2}{3} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3n}$$

이다. 양 끝이 모두 $2/3$ 으로 수렴하므로 조임 정리에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = \frac{2}{3}$$

직관적으로도 각 걸음이 확률 $1/3$ 로 서쪽이므로 $2n$ 걸음 중 서쪽은 평균 $2n/3$ 회이며, 되돌아온다는 조건 아래에서도 이 비율이 유지된다는 뜻이다.



[답안 그림 3] (왼쪽) $n = 12$ 일 때 N_m 의 분포 — 최댓값은 $2n/3 = 8$ 에서 난다. (오른쪽) $f(n)/n$ 은 (c)·(d)의 두 경계 사이에 갇혀 $2/3$ 으로 수렴한다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	(1점) 서쪽 움직임을 m 회 실시하면서 $2n$ 번째 교차점이 출발점과 일치하려면, 동쪽 움직임 횟수도 m 회라는 사실을 도출. (일반적으로, 북, 남, 동, 서쪽으로 각각 $n-m, n-m, m, m$ 회 이동해야 한다.) (1점) 경우의 수를 이항계수를 이용하여 정확히 도출.	2점
(2)	(1점) 조건부확률 $p_{n,m}$ 을 도출. (1점) 이웃한 두 경우의 수를 비교하는 아이디어를 언급. (1점) m 이 커짐에 따라 조건부확률이 증가하다 감소한다는 사실을 이항계수의 정의를 이용하여 관찰하여, 증감성이 변하는 지점이 $2n/3$ 근방이라는 사실을 도출. (※ 채점 시 주의사항) - $f(n)$ 의 범위가 위 풀이와 정확히 일치하지 않아도, 적절한 상수 $c_1, c_2 \geq 0$ 에 대해 $(2n - c_1)/3 \leq f(n) \leq (2n + c_2)/3$ 를 도출하여도 정답 인정. - 위 풀이처럼 m 의 범위에 대한 경우를 나누지 않고, $(m+1)^2$ 와 $(2n-2m)(2n-2m-1)$ 의 대소관계를 m 에 대한 이차식으로 간주하여 다른 방법으로 해결한 경우 (예시: 근의 공식 이용)도 정답 인정. (특수 상황, 1점) 각 교차점에서 서쪽 움직임의 확률이 $1/3$ 이라서 $f(n)$ 의 값이 대략 $2n \times 1/3 = 2n/3$ 이라고 언급하면 총점 3점 중 1점.	3점

문제 3 순서쌍의 친화도

판별식 · 근과 계수의 관계 · 수학적 귀납법

(1) 정의되고, 친화도는 1

(a) $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0$ 이므로 실수해는 $x = 3$ (중근)이다. 중근은 두 개로 세므로 $(a_1, b_1) = (3, 3)$ 이다.

- (b) 다음 방정식
- $x^2 + 3x + 3 = 0$
- 의 판별식은

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 = -3 < 0$$

이므로 실수해가 없다. 즉 실수해를 갖지 않는 최소의 k 가 $k = 1$ 이다.

$(-6, 9)$ 의 친화도는 정의되며 그 값은 **1**이다.

(2) 정의되지 않는다

- (a) 처음 두 단계를 계산한다. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$ 에서 해는 1, 2이므로 $(a_1, b_1) = (2, 1)$ 이다. 다음으로 $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0$ 에서 해는 -1 (중근)이므로 $(a_2, b_2) = (-1, -1)$ 이다. 여기서 $b_2 = -1 < 0$ 이다.
- (b) 보조정리 A — 어떤 k 에서 $b_k < 0$ 이면 과정은 결코 끝나지 않는다.

$b_k < 0$ 이라 하자. 판별식이

$$D = a_k^2 - 4b_k > 0$$

이므로 방정식 $x^2 + a_k x + b_k = 0$ 은 서로 다른 두 실수해를 가진다. 근과 계수의 관계에서 두 해의 곱은 $b_k < 0$ 이므로 두 해의 부호가 서로 다르고, $a_{k+1} \geq b_{k+1}$ 이라는 약속에 의해

$$a_{k+1} > 0 > b_{k+1}$$

이다. 특히 $b_{k+1} < 0$ 이다. 따라서 “ $b_k < 0$ ”은 다음 단계로 그대로 이어지며, 수학적 귀납법에 의해 모든 $j \geq k$ 에 대하여 (a_j, b_j) 가 존재하고 $b_j < 0$ 이다. 즉 실수해가 없어지는 일이 결코 일어나지 않는다.

- (c) (a)에서 $b_2 = -1 < 0$ 이므로 보조정리 A에 의해 과정이 끝나지 않는다.

$(-3, 2)$ 의 친화도는 정의되지 않는다.

실제로 $(a_3, b_3) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$ 이고 이후에도 $b_k < 0$ 이 계속된다.

(3) 친화도의 최댓값은 1

- (a) 보조정리 B — $b_1 = 0$ 이면 친화도는 정의되지 않는다. $b_1 = 0$ 이고 $a_1 \geq b_1 = 0$ 이라 하자. 방정식 $x^2 + a_1 x = x(x + a_1) = 0$ 은 언제나 실수해 0, $-a_1$ 을 가지므로 친화도가 1일 수는 없고, $a_2 = \max(0, -a_1)$, $b_2 = \min(0, -a_1)$ 이다.

• $a_1 > 0$ 이면 $(a_2, b_2) = (0, -a_1)$ 이고 $b_2 < 0$ 이므로 보조정리 A에 의해 정의되지 않는다.

• $a_1 = 0$ 이면 $(a_2, b_2) = (0, 0)$ 이고, 이후 모든 단계에서 $(a_k, b_k) = (0, 0)$ 이 반복되어 $x^2 = 0$ 이 늘 실수해를 가지므로 과정이 끝나지 않는다.

- (b) 친화도가 정의되고 1 이상이면 $a_1 \geq b_1 > 0$ 이다. 친화도가 1 이상이라는 것은 첫 방정식 $x^2 + a_0 x + b_0 = 0$ 이 실수해 $a_1 \geq b_1$ 을 가진다는 뜻이다. 보조정리 A에서 $b_1 < 0$ 은 불가능하고, 보조정리 B에서 $b_1 = 0$ 도 불가능하므로 $b_1 > 0$ 이며, $a_1 \geq b_1 > 0$ 이다.

- (c) 친화도가 2 이상일 수 없다. 친화도가 2 이상이라면 $x^2 + a_1 x + b_1 = 0$ 도 실수해 $a_2 \geq b_2$ 를 가져야 한다. 근과 계수의 관계에서

$$a_2 b_2 = b_1 > 0, \quad a_2 + b_2 = -a_1 < 0$$

이므로 두 해는 부호가 같으면서 합이 음수, 즉 둘 다 음수이다. 특히 $b_2 < 0$ 이고, 보조정리 A에 의해 친화도가 정의되지 않는다 — 가정에 모순이다. 따라서 친화도가 정의되면 그 값은 0 또는 1뿐이다.

- (d) 1이 실제로 달성된다. (1)에서 $(-6, 9)$ 의 친화도가 1임을 확인했다. (친화도 0의 예로는 $(0, 1)$ 이 있다: $x^2 + 1 = 0$ 은 실수해가 없다.)

친화도가 정의되는 순서쌍의 친화도는 0 또는 1이며, 그 최댓값은 **1**이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$x^2 - 6x + 9 = 0$ 의 해를 구하고, $x^2 + 3x + 3 = 0$ 의 해가 없음을 구해서 $(-6, 9)$ 의 친화도가 1임을 확인한다. (1점)	1점
(2)	$(a_0, b_0) = (-3, 2)$ 인 경우, $(a_1, b_1) = (2, 1)$ 이고, $(a_2, b_2) = (-1, -1)$ 라는 것을 확인한다. (1점) b_k 가 음수가 될 경우, 앞의 과정이 끝나지 않고 계속 반복되어 친화도가 정의되지 않음을 설명한다. (1점)	2점
(3)	$x^2 + a_0x + b_0 = 0$ 가 음수해를 가질 경우, (a_0, b_0) 의 친화도가 정의되지 않음을 이해한다. (1점) 두 실수해가 있을 경우, 그 중 하나는 음수가 되어야 함을 설명한다. (1점) 이를 이용해서 친화도의 최댓값이 1임을 보인다. (1점)	2점

문제 4 벽을 미끄러지는 직각삼각형의 그림자

좌표 설정 · 삼각함수의 합성 · 미분을 이용한 최대

좌표 설정 — 바닥을 x 축, 벽을 y 축으로 두고 O 를 원점이라 하자. $\angle OAB = \theta$ 이고 $\overline{AB} = 4$ 이므로 A 에서 B 까지의 변위는 수평으로 $4 \sin \theta$, 수직으로 $-4 \cos \theta$ 이다. 따라서

$$A = (0, 4 \cos \theta), \quad B = (4 \sin \theta, 0), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$\angle ABC = \pi/2$ 이고 $\overline{BC} = 3$ 이며 C 는 $\overline{AB}$ 의 오른쪽에 있으므로, $\overline{AB}$ 를 90° 돌린 단위벡터 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 방향으로

$$C = B + 3(\cos \theta, \sin \theta) = (4 \sin \theta + 3 \cos \theta, 3 \sin \theta)$$

이다. (확인: $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 0$ 이 모두 성립한다.) 또 $\angle BCA = \alpha$ 는 직각삼각형에서 $\tan \alpha = \overline{AB}/\overline{BC} = 4/3$ 을 만족한다.

(1) $f(\theta) = 4 \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \alpha$), $f(\theta) = 3 \sin \theta$ ($\alpha < \theta \leq \pi/2$)

(a) 그림자는 y 축으로의 정사영이다. 빛이 수평이고 삼각형을 뚫지 않으므로, 벽에 생기는 그림자는 삼각형 ABC 를 y 축 위로 정사영한 선분이다. 볼록집합인 삼각형의 정사영은 세 꼭짓점의 y 좌표의 최솟값부터 최댓값까지의 구간이므로, 그 길이는

$$\max(4 \cos \theta, 0, 3 \sin \theta) - \min(4 \cos \theta, 0, 3 \sin \theta).$$

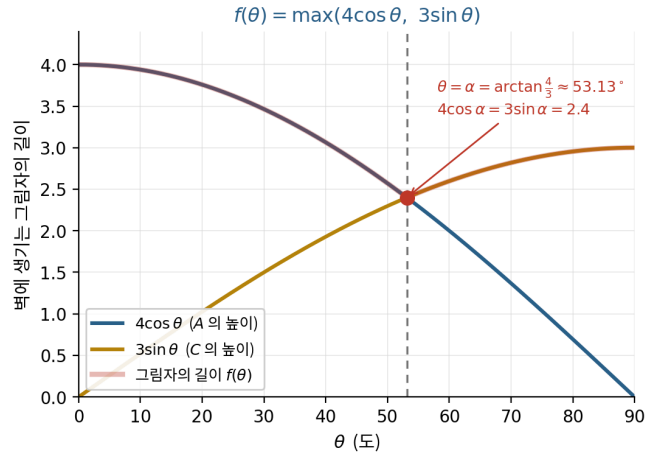
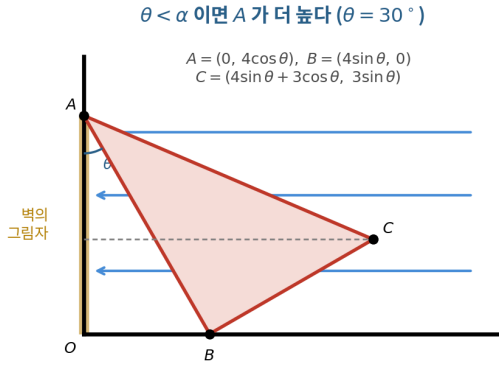
$0 \leq \theta \leq \pi/2$ 에서 $4 \cos \theta \geq 0$, $3 \sin \theta \geq 0$ 이므로 최솟값은 B 의 y 좌표 0이고, 그림자의 길이는 $\max(4 \cos \theta, 3 \sin \theta)$ 이다.

(b) 두 값의 대소는 α 에서 바뀐다.

$$4 \cos \theta \geq 3 \sin \theta \Leftrightarrow \tan \theta \leq \frac{4}{3} = \tan \alpha \Leftrightarrow \theta \leq \alpha$$

이다 ($\tan$ 은 $[0, \pi/2)$ 에서 순증가). 특히 $\theta = \alpha$ 에서 두 값이 같고 ($4 \cos \alpha = 3 \sin \alpha = 12/5$), $\theta = \pi/2$ 에서는 $4 \cos \theta = 0 < 3 = 3 \sin \theta$ 이다.

$$f(\theta) = \begin{cases} 4 \cos \theta & (0 \leq \theta \leq \alpha) \\ 3 \sin \theta & (\alpha < \theta \leq \pi/2) \end{cases}, \quad \tan \alpha = \frac{4}{3}$$



[답안 그림 4] (왼쪽) $\theta < \alpha$ 이면 A 가 C 보다 높아 그림자의 위 끝이 A 이다. (오른쪽) 두 곡선 $4\cos\theta$ 와 $3\sin\theta$ 의 위쪽 포락선이 $f(\theta)$ 이며, 두 곡선은 $\theta = \alpha$ 에서 만난다.

(2) $x = 2\sqrt{2}$

(a) 사다리꼴의 넓이를 θ 로 나타낸다. 빛이 수직이므로 C 의 그림자는 $D = (4\sin\theta + 3\cos\theta, 0)$ 이다. 사각형 $AODC$ 에서 $\overline{AO}$ 와 $\overline{DC}$ 는 모두 y 축에 평행한 선분이므로 이 사각형은 사다리꼴이고, 두 평행변의 길이는

$$\overline{AO} = 4\cos\theta, \quad \overline{DC} = 3\sin\theta$$

이며 두 평행변 사이의 거리는 $\overline{OD} = 4\sin\theta + 3\cos\theta$ 이다. 따라서

$$(\text{넓이}) = \frac{1}{2}(4\cos\theta + 3\sin\theta)(4\sin\theta + 3\cos\theta).$$

(b) 전개하여 정리한다.

$$\frac{1}{2}(16\sin\theta\cos\theta + 12\cos^2\theta + 12\sin^2\theta + 9\sin\theta\cos\theta) = \frac{1}{2}(25\sin\theta\cos\theta + 12) = 6 + \frac{25}{4}\sin 2\theta$$

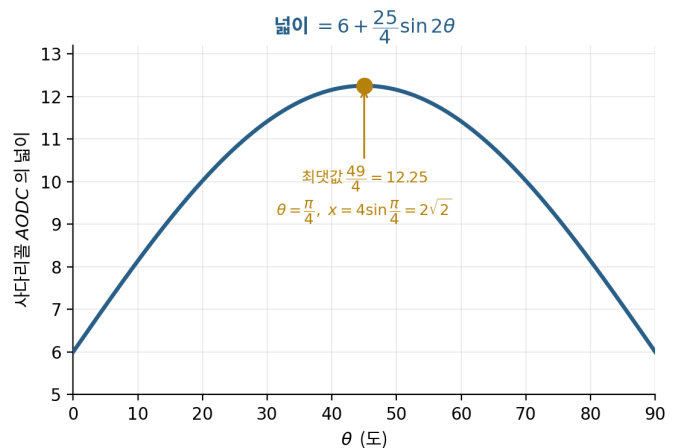
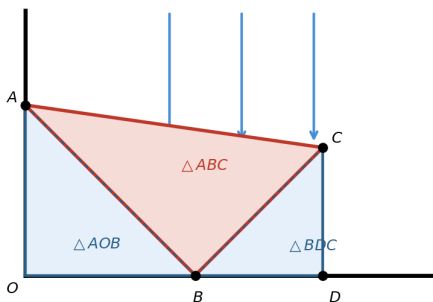
이다 ($\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 과 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 를 사용). 삼각형 세 개로 잘라 세어도 같다:

$$\triangle ABC + \triangle AOB + \triangle BDC = 6 + 8\sin\theta\cos\theta + \frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta = 6 + \frac{25}{4}\sin 2\theta.$$

(c) 최댓값. $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 이므로 $0 \leq 2\theta \leq \pi$ 이고, 이 범위에서 $\sin 2\theta$ 는 $2\theta = \pi/2$, 곧 $\theta = \pi/4$ 에서만 최댓값 1을 가진다. 이때 넓이는 $6 + 25/4 = 49/4$ 이고

$$x = \overline{OB} = 4\sin\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

사다리꼴 $AODC = \triangle ABC + \triangle AOB + \triangle BDC$



[답안 그림 5] (왼쪽) 사다리꼴 $AODC$ 는 세 삼각형으로 잘린다. (오른쪽) 넓이 $6 + (25/4)\sin 2\theta$ 는 $\theta = 45^\circ$ 에서 최대가 된다.

(3) $\triangle AOB$ 의 넓이 = $100/\sqrt{706} = 50\sqrt{706}/353 \approx 3.76$

(a) D 의 위치와 θ 의 범위. 빛이 바닥과 45° 를 이루며 오른쪽 위에서 왼쪽 아래로 내려오므로, 높이 h 인 점의 그림자는 x 좌표가 h 만큼 왼쪽으로 옮겨진다. 따라서

$$D = (C_x - C_y, 0) = (4\sin\theta + 3\cos\theta - 3\sin\theta, 0) = (\sin\theta + 3\cos\theta, 0).$$

D 가 B 의 오른쪽에 있을 조건은

$$\sin \theta + 3 \cos \theta \geq 4 \sin \theta \Leftrightarrow 3 \cos \theta \geq 3 \sin \theta \Leftrightarrow \tan \theta \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

- (b) 넓이를 θ 로 나타낸다. $E = (C_x, 0)$ 이라 하면 $AOEC$ 는 (2)에서 다룬 사다리꼴이고, 사각형 $AODC$ 는 거기서 삼각형 CDE 를 뺀 것이다. $\overline{DE} = C_x - D_x = C_y = 3 \sin \theta$ 이고 $\overline{CE} = C_y = 3 \sin \theta$ 이므로

$$\triangle CDE = \frac{1}{2}(3 \sin \theta)(3 \sin \theta) = \frac{9}{2} \sin^2 \theta$$

이고, 따라서

$$f(\theta) = 6 + \frac{25}{4} \sin 2\theta - \frac{9}{2} \sin^2 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

- (c) 삼각함수의 합성으로 최댓값을 찾는다 (미분 없이). $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$ 를 대입하면

$$f(\theta) = 6 + \frac{25}{4} \sin 2\theta - \frac{9}{4}(1 - \cos 2\theta) = \frac{15}{4} + \frac{1}{4}(25 \sin 2\theta + 9 \cos 2\theta)$$

이고, $\sqrt{25^2 + 9^2} = \sqrt{625 + 81} = \sqrt{706}$ 이므로

$$f(\theta) = \frac{15}{4} + \frac{\sqrt{706}}{4} \sin(2\theta + \varphi), \quad \cos \varphi = \frac{25}{\sqrt{706}}, \quad \sin \varphi = \frac{9}{\sqrt{706}}$$

로 합성된다. $\varphi = \arctan(9/25) \approx 19.80^\circ$ 이고 $0 \leq 2\theta \leq 90^\circ$ 이므로 $2\theta + \varphi$ 는 φ 부터 $90^\circ + \varphi$ 까지 움직이며, 그 사이에 $2\theta + \varphi = 90^\circ$ 가 들어 있다. 그때 $\sin(2\theta + \varphi) = 1$ 로 최대이고,

$$2\theta = 90^\circ - \varphi \Rightarrow \tan 2\theta = \tan(90^\circ - \varphi) = \frac{1}{\tan \varphi} = \frac{25}{9}$$

이다. $0 < 2\theta < 90^\circ$ 이므로 $\sin 2\theta, \cos 2\theta$ 가 모두 양수여서

$$\sin 2\theta = \frac{25}{\sqrt{706}}, \quad \cos 2\theta = \frac{9}{\sqrt{706}}, \quad f_{\max} = \frac{15}{4} + \frac{\sqrt{706}}{4} = \frac{15 + \sqrt{706}}{4} \approx 10.39.$$

($\theta \approx 35.10^\circ$ 로 범위 $[0, 45^\circ]$ 안에 있다. 양 끝값은 $f(0) = 6, f(\pi/4) = 6 + 25/4 - 9/4 = 10$ 으로 모두 이보다 작다.)

- (d) 별해 - 미분.

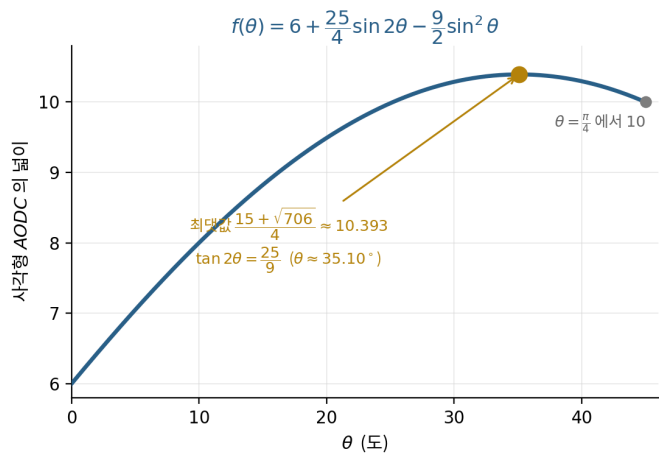
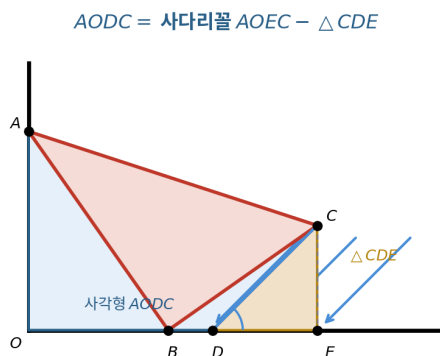
$$f'(\theta) = \frac{25}{2} \cos 2\theta - 9 \sin \theta \cos \theta = \frac{25}{2} \cos 2\theta - \frac{9}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \cos 2\theta (25 - 9 \tan 2\theta)$$

이므로 $0 < 2\theta < \pi/2$ 에서 $\cos 2\theta > 0$ 이고, $\tan 2\theta$ 가 순증가하므로 f' 의 부호는 $\tan 2\theta < 25/9$ 일 때 양, $> 25/9$ 일 때 음이다. 즉 $\tan 2\theta = 25/9$ 인 유일한 θ 에서 극대이자 최대이며, 이는 (c)의 결과와 같다.

- (e) 구하는 넓이. 삼각형 AOB 는 직각을 낀 두 변이 $\overline{OA} = 4 \cos \theta, \overline{OB} = 4 \sin \theta$ 인 직각삼각형이므로

$$\triangle AOB = \frac{1}{2}(4 \cos \theta)(4 \sin \theta) = 8 \sin \theta \cos \theta = 4 \sin 2\theta = 4 \cdot \frac{25}{\sqrt{706}} = \frac{100}{\sqrt{706}}.$$

$$\triangle AOB = \frac{100}{\sqrt{706}} = \frac{100\sqrt{706}}{706} = \frac{50\sqrt{706}}{353} \approx 3.76$$



[답안 그림 6] (왼쪽) 45° 빛에서는 D 가 E 보다 $3 \sin \theta$ 만큼 왼쪽에 놓이므로 $AODC = AOEC - \triangle CDE$ 이다. (오른쪽) $f(\theta)$ 는 $\tan 2\theta = 25/9$ 에서 최댓값 $(15 + \sqrt{706})/4$ 를 가진다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	그림자의 길이를 θ 에 대한 함수로 맞게 나타내면 1점	1점
(2)	사다리꼴 $AODC$ 의 넓이를 식으로 맞게 나타내면 1점 사다리꼴 $AODC$ 의 넓이가 최대가 되는 순간 x 값을 맞게 구하면 1점	2점
(3)	미분을 사용하여 최댓값을 가지는 θ 를 구하면 1점 사각형 $AODC$ 의 넓이가 최대가 되는 순간 삼각형 AOB 의 넓이를 맞게 구하면 1점	2점

KAIST

2022학년도 · 해설편

문제 1 두 동심원과 세 현의 길이의 제곱합
문제 2 원과 다각형에 줄을 감을 때 끝점의 궤적

단원 함수·극한·미적분 · 기하·벡터 · 삼각함수
핵심 개념 원의 현과 피타고라스 정리, 코사인법칙, 평면벡터의 내적, 삼각함수의 덧셈정리,
곡선의 길이(신개선), 정적분과 구분구적법
문항 수 2문항 (소문항 4개) · 10점

II. 예시답안

문제 1 두 동심원과 세 현의 길이의 제곱합

현과 중심거리 · 평면벡터의 내적 · 덧셈정리

(1) $\overline{Y_1Z_1} = 2\sqrt{5 - \cos^2 \theta_1} = \sqrt{18 - 2\cos(\angle X_1OX_2)}$, 단 $\theta_1 = 1/2 \cdot \angle X_1OX_2$ (a) 중심에서 현에 내린 수선의 발을 잡는다. $\angle X_1OX_2 = 2\theta_1$ 이라 두자. 직선 X_1X_2 에 O 에서 내린 수선의 발을 Q 라 하면, $\overline{OX_1} = \overline{OX_2} = 1$ 이므로 $\triangle OX_1X_2$ 는 이등변삼각형이고 Q 는 밑변 X_1X_2 의 중점이며 $\angle X_1OQ = \angle X_2OQ = \theta_1$ 이다. 따라서 직각삼각형 OQX_1 에서

$$\overline{OQ} = \cos \theta_1, \quad \overline{QX_1} = \sin \theta_1, \quad \text{즉} \quad \overline{X_1X_2} = 2 \sin \theta_1$$

이다.

(b) 같은 수선이 큰 원의 현도 이등분한다. 직선 Y_1Z_1 은 직선 X_1X_2 와 같은 직선이고, $\overline{OY_1} = \overline{OZ_1} = \sqrt{5}$ 이므로 $\triangle OY_1Z_1$ 도 이등변삼각형이며 O 에서 내린 수선의 발 Q 가 Y_1Z_1 의 중점이다. 직각삼각형 OQY_1 에 피타고라스 정리를 쓰면

$$\overline{QY_1}^2 = \overline{OY_1}^2 - \overline{OQ}^2 = 5 - \cos^2 \theta_1$$

이고 ($\cos^2 \theta_1 \leq 1 < 5$ 이므로 우변은 양수), 따라서

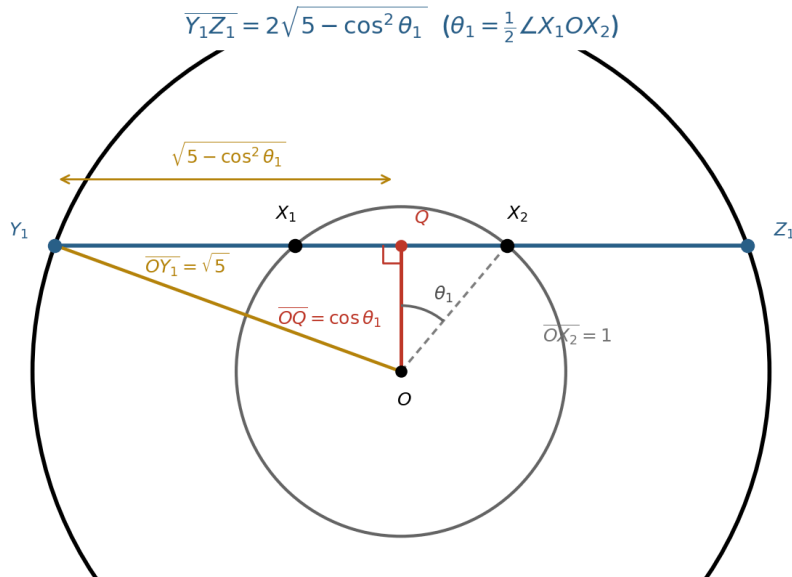
$$\overline{Y_1Z_1} = 2\overline{QY_1} = 2\sqrt{5 - \cos^2 \theta_1}.$$

(c) 중심각으로 바꿔 쓴다. 배각공식 $\cos 2\theta_1 = 2\cos^2 \theta_1 - 1$ 에서 $\cos^2 \theta_1 = (1 + \cos 2\theta_1)/2$ 이므로

$$\overline{Y_1Z_1}^2 = 4(5 - \cos^2 \theta_1) = 20 - 2(1 + \cos 2\theta_1) = 18 - 2\cos(\angle X_1OX_2).$$

$$\overline{Y_1Z_1} = 2\sqrt{5 - \cos^2\left(\frac{1}{2}\angle X_1OX_2\right)} = \sqrt{18 - 2\cos(\angle X_1OX_2)}$$

즉 현의 길이는 중심각이 커질수록 길어지며, $\angle X_1OX_2 = \pi$ (지름)일 때 최대인 $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $\angle X_1OX_2 \rightarrow 0$ 일 때 최소인 4에 가까워진다.



[답안 그림 1] O 에서 공통 수선을 내리면 그 발 Q 가 작은 원의 현과 큰 원의 현을 동시에 이등분한다.

- (d) **별해 — 코사인법칙.** Y_1 을 X_1 쪽 교점이라 하고 $\overline{Y_1X_1} = x$ 라 하자. $\triangle OX_1X_2$ 의 밑각이 $(\pi - 2\theta_1)/2 = \pi/2 - \theta_1$ 이고 Y_1 은 X_2 의 반대쪽에 있으므로 $\angle OX_1Y_1 = \pi - (\pi/2 - \theta_1) = \pi/2 + \theta_1$ 이다. $\triangle OX_1Y_1$ 에 코사인법칙을 쓰면

$$5 = \overline{OY_1}^2 = 1 + x^2 - 2x \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_1\right) = 1 + x^2 + 2x \sin \theta_1$$

이므로 $x^2 + 2x \sin \theta_1 - 4 = 0$, 즉 $x = -\sin \theta_1 + \sqrt{\sin^2 \theta_1 + 4}$ ($x > 0$ 이므로 양의 근). 대칭성에 의해 $\overline{X_2Z_1} = x$ 이므로

$$\overline{Y_1Z_1} = x + \overline{X_1X_2} + x = 2x + 2 \sin \theta_1 = 2\sqrt{\sin^2 \theta_1 + 4} = 2\sqrt{5 - \cos^2 \theta_1}$$

로 같은 결과를 얻는다.

(2) **최댓값은 57 (정삼각형일 때)**

- (a) **세 중심각의 합이 2π 임을 먼저 확인한다.** 세 점 X_1, X_2, X_3 은 원 A 를 세 호로 나누며, 그 중심각을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ 이라 하면 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$ 이다. 원주각 정리에 의해 삼각형의 각 내각은 마주보는 호의 중심각의 절반이므로,

O (외심)가 $\triangle X_1X_2X_3$ 의 내부 또는 변 위에 있다 $\Leftrightarrow$ 삼각형이 둔각삼각형이 아니다 $\Leftrightarrow$ 모든 $\alpha_i \leq \pi$

가 성립한다. 그런데 $\alpha_i \leq \pi$ 이면 그 호에 대응하는 두 점 사이의 (우각이 아닌) 중심각이 정확히 α_i 이다. 따라서

$$\angle X_1OX_2 + \angle X_2OX_3 + \angle X_3OX_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi.$$

이제 $\angle X_1OX_2 = 2\theta_1, \angle X_2OX_3 = 2\theta_2, \angle X_3OX_1 = 2\theta_3$ 이라 두면

$$2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 = 2\pi, \quad 0 < 2\theta_i \leq \pi.$$

- (b) **구하는 값을 코사인의 합으로 정리한다.** (1)에 의해

$$\sum_{i=1}^3 \overline{Y_iZ_i}^2 = \sum_{i=1}^3 4(5 - \cos^2 \theta_i) = 60 - 4 \sum_{i=1}^3 \cos^2 \theta_i$$

이고, $\cos^2 \theta_i = (1 + \cos 2\theta_i)/2$ 를 대입하면

$$60 - 4 \sum_{i=1}^3 \frac{1 + \cos 2\theta_i}{2} = 60 - 6 - 2 \sum_{i=1}^3 \cos 2\theta_i = 54 - 2M, \quad M := \sum_{i=1}^3 \cos 2\theta_i.$$

따라서 구하는 최댓값은 M 의 최솟값으로 결정된다.

- (c) **보조정리 — $M \geq -3/2$ (평면벡터의 내적).** $\vec{a} = \overrightarrow{OX_1}, \vec{b} = \overrightarrow{OX_2}, \vec{c} = \overrightarrow{OX_3}$ 이라 하면 셋 다 단위벡터이고, 두 벡터가 이루는 각이 곧 중심각이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos 2\theta_1, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \cos 2\theta_2, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = \cos 2\theta_3$$

이다. 그런데

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 3 + 2M$$

이고 좌변은 항상 0 이상이므로

$$M = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 - 3) \geq -\frac{3}{2}$$

이며, 등호는 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ 일 때에만 성립한다.

- (d) 등호가 실제로 달성된다. X_1, X_2, X_3 을 원 A 의 내접 정삼각형의 꼭짓점으로 잡으면 세 단위벡터의 합은 $\vec{0}$ 이고, 세 중심각이 모두 $2\pi/3 \leq \pi$ 이므로 O 는 삼각형의 무게중심으로서 내부에 있다. 즉 문제의 조건을 만족한다. 이때 $\theta_i = \pi/3$ 이므로 각 현의 길이는

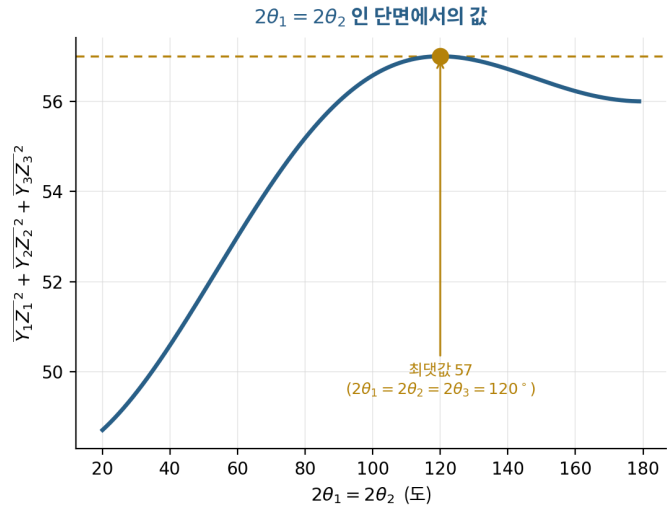
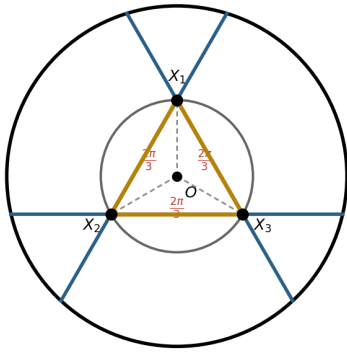
$$\overline{Y_i Z_i} = 2\sqrt{5 - \cos^2(\pi/3)} = 2\sqrt{5 - \frac{1}{4}} = \sqrt{19}$$

이고 제곱의 합은 $3 \times 19 = 57$ 이다. 이는 $54 - 2M = 54 - 2(-3/2) = 57$ 과 일치한다.

$$\max(\overline{Y_1 Z_1}^2 + \overline{Y_2 Z_2}^2 + \overline{Y_3 Z_3}^2) = 54 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 57$$

등호는 $\triangle X_1 X_2 X_3$ 이 정삼각형일 때, 즉 세 중심각이 모두 120° 일 때에만 성립한다.

최대: 정삼각형 배치 $\Rightarrow$ 각 현 $= \sqrt{19}$, 합 $= 3 \times 19 = 57$



[답안 그림 2] (왼쪽) 최댓값을 주는 정삼각형 배치. (오른쪽) $2\theta_1 = 2\theta_2$ 인 단면에서 본 제곱합 — 120° 에서 최댓값 57을 가진다.

- (e) 별해 — 삼각함수의 덧셈정리. $x = 2\theta_1$, $y = 2\theta_2$ 라 두면 $2\theta_3 = 2\pi - x - y$ 이고 $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$ 이므로 $\cos 2\theta_3 = \cos(x + y)$ 이다. 그러면 $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ 를 대입하여

$$\begin{aligned} 2M + 3 &= 2\cos x + 2\cos y + 2\cos(x + y) + 3 \\ &= 2\cos x + 2\cos y + 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y + 3 \end{aligned}$$

이고, 우변의 3을 $(\cos^2 x + \sin^2 x) + (\cos^2 y + \sin^2 y) + 1$ 로 바꾸어 묶으면

$$\begin{aligned} 2M + 3 &= (\cos^2 x + \cos^2 y + 1 + 2\cos x \cos y + 2\cos x + 2\cos y) + (\sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y) \\ &= (\cos x + \cos y + 1)^2 + (\sin x - \sin y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

이 되어 $M \geq -3/2$ 를 얻는다. 등호 조건은 $\cos x + \cos y + 1 = 0$ 이면서 $\sin x = \sin y$ 인 것이다. $0 < x, y \leq \pi$ 에서 $\sin x = \sin y$ 이면 $y = x$ 또는 $y = \pi - x$ 인데,

- $y = \pi - x$ 이면 $\cos y = -\cos x$ 이므로 $\cos x + \cos y + 1 = 1 \neq 0$ — 불가능
- $y = x$ 이면 $2\cos x + 1 = 0$, 즉 $\cos x = -1/2$ 이므로 $x = y = 2\pi/3$

이고 이때 $2\theta_3 = 2\pi - 4\pi/3 = 2\pi/3$ 이다. 즉 정삼각형일 때에만 등호가 성립한다는 (c)·(d)의 결론과 일치한다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	코사인법칙이나 피타고라스 정리를 이용해서 큰 원의 현의 길이에 관한 관계식을 구한다.	1점
(2)	세 선분의 길이의 제곱 합을 세 각 $\angle X_1OX_2, \angle X_2OX_3, \angle X_3OX_1$ 을 이용하여 나타내고, 코사인값의 합의 최솟값을 구해야 함을 설명한다. 코사인값의 합을 평면벡터나 내적을 사용하거나 또는 삼각함수의 공식을 적절히 이용하여 제곱의 합으로 바꾼다. 얻은 식을 분석하여 최댓값을 정확히 찾아낸다.	4점

문제 2 원과 다각형에 줄을 감을 때 끝점의 궤적

신개선의 매개변수 표현 · 곡선의 길이 · 정적분

(1) 궤적의 총 길이 = $1/(2a)$

(a) 매개변수 표현을 세운다. 원의 중심을 원점에 두고 $P = (a, 0)$ 이라 하자. 줄을 반시계 방향으로 각 θ 만큼 감았을 때 줄이 원에 닿는 마지막 점(접점)은 $T(\theta) = (a \cos \theta, a \sin \theta)$ 이고, 감긴 부분의 길이는 호의 길이 $a\theta$ 이므로 풀려 있는 부분의 길이는 $1 - a\theta$ 이다. 이 자유 부분은 $T(\theta)$ 에서의 접선 방향으로 팽팽하게 뻗어 있고, 반시계 방향으로 감고 있으므로 그 방향은 단위벡터 $(-\sin \theta, \cos \theta)$ 이다. 따라서

$$(x(\theta), y(\theta)) = (a \cos \theta, a \sin \theta) + (1 - a\theta)(-\sin \theta, \cos \theta)$$

이고, 줄이 다 감기는 $\theta = 1/a$ 까지 $0 \leq \theta \leq 1/a$ 이다.

(b) 속력을 계산한다. 곡의 미분법으로

$$x'(\theta) = -a \sin \theta + a \sin \theta - (1 - a\theta) \cos \theta = -(1 - a\theta) \cos \theta,$$

$$y'(\theta) = a \cos \theta - a \cos \theta - (1 - a\theta) \sin \theta = -(1 - a\theta) \sin \theta$$

이므로

$$\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} = \sqrt{(1 - a\theta)^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = |1 - a\theta| = 1 - a\theta$$

이다 (마지막 등호는 $0 \leq \theta \leq 1/a$ 에서 $1 - a\theta \geq 0$ 이기 때문). 이 결과에는 기하적 의미가 있다. $(x', y') = -(1 - a\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ 는 접점 T 에서 점 Q 로 향하는 방향에 수직이므로, 점 Q 는 매 순간 접점 T 를 중심으로 반지름 $1 - a\theta$ 인 원운동을 한다. 곧 “호의 길이 = 반지름 $\times$ 중심각”이 미소 단위로 성립한다.

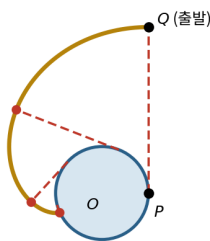
(c) 적분한다.

$$R = \int_0^{1/a} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = \int_0^{1/a} (1 - a\theta) d\theta = \left[\theta - \frac{a\theta^2}{2} \right]_0^{1/a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}.$$

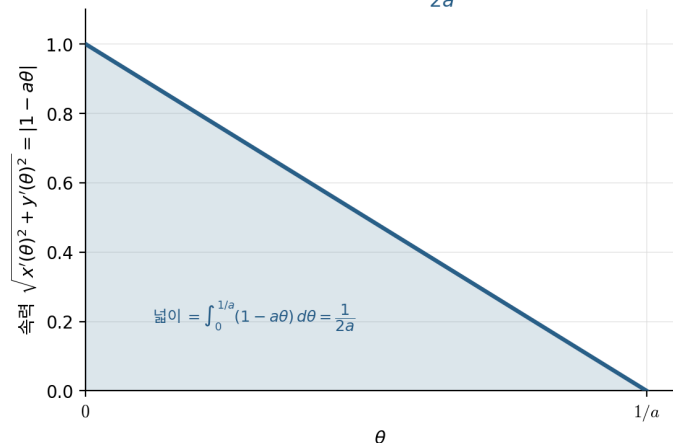
$$R = \int_0^{1/a} (1 - a\theta) d\theta = \frac{1}{2a}$$

$a \rightarrow 0^+$ 이면 $R \rightarrow \infty$ 이다. 원이 작을수록 줄이 여러 바퀴 감기면서 큰 반지름의 호를 오래 그리기 때문이다.

신개선(involute) — 남은 줄의 길이 $1 - a\theta$



궤적의 길이 = $\frac{1}{2a}$



[답안 그림 3] (왼쪽) 줄 끝점 Q 가 그리는 신개선. 접선은 각 순간의 풀린 줄이며 그 길이가 $1 - a\theta$ 이다. (오른쪽) 속력이 $1 - a\theta$ 이므로 궤적의 길이는 사각형의 넓이 $1/(2a)$ 이다.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n)/n = \pi$ (a) **축소한 오각형의 자료를 정리한다.** 원래 오각형의 둘레가 1이므로 닮음비 $1/n$ 로 축소한 오각형의 둘레는 $1/n$ 이다. 각 변의 길이를 $a_1/n, \dots, a_5/n$ 이라 하면

$$a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 1$$

이고, 다섯 외각을 $\theta_1, \dots, \theta_5$ 라 하면 볼록다각형의 외각의 총합은 2π 이므로

$$\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_5 = 2\pi$$

이다. 줄의 길이가 1이고 한 바퀴에 $1/n$ 씩 감기므로 줄은 **정확히 n 바퀴** 감긴다.(b) **궤적을 호로 분해한다.** 줄의 자유 부분은 언제나 한 꼭짓점에서 꺾여 있고, 그 꼭짓점을 중심으로 회전한다. 꼭짓점 하나를 도는 동안 줄 끝점은 **반지름 = 남은 줄의 길이, 중심각 = 그 꼭짓점의 외각**인 호를 그리므로, 그 호의 길이는 (남은 줄의 길이) $\times$ (외각)이다. 한 꼭짓점을 돌고 나면 남은 줄의 길이는 그 다음 변의 길이만큼 줄어든다. k 번째 바퀴($k = 0, 1, \dots, n-1$)의 j 번째 꼭짓점($j = 1, \dots, 5$)에서 이미 감긴 줄의 길이는 $\frac{k}{n} + \frac{s_j}{n}$ 이다. 여기서

$$s_1 = 0, \quad s_j = a_1 + a_2 + \dots + a_{j-1} \quad (j \geq 2)$$

이다. 따라서 그 호의 반지름은 $r_{k,j} = 1 - \frac{k}{n} - \frac{s_j}{n}$ 이고,

$$R(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^5 \theta_j r_{k,j} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^5 \theta_j \left(1 - \frac{k}{n} - \frac{s_j}{n}\right).$$

(마지막 호의 반지름은 $r_{n-1,5} = 1 - (n-1)/n - (1-a_5)/n = a_5/n > 0$ 이고 그 뒤 남은 줄이 정확히 0이 되어, 줄이 오각형에 꼭 맞게 다 감긴다.)(c) **합을 정확히 계산한다.** 먼저 k 에 대해 더하면, $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$ 이므로

$$\sum_{k=0}^{n-1} r_{k,j} = n - \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} - n \cdot \frac{s_j}{n} = n - \frac{n-1}{2} - s_j = \frac{n+1}{2} - s_j$$

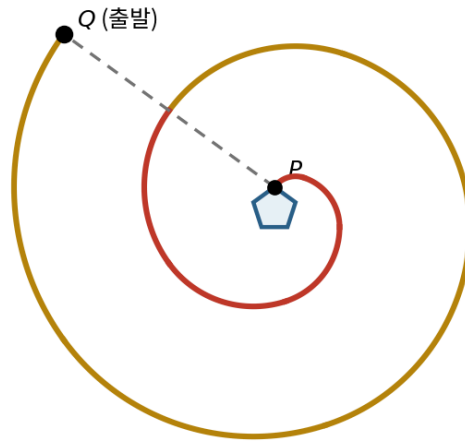
이다. 따라서 $\sum_j \theta_j = 2\pi$ 를 이용하면

$$R(n) = \sum_{j=1}^5 \theta_j \left(\frac{n+1}{2} - s_j\right) = \frac{n+1}{2} \cdot 2\pi - \sum_{j=1}^5 \theta_j s_j = \pi(n+1) - C, \quad C := \sum_{j=1}^5 \theta_j s_j$$

이고, C 는 n 과 무관한 상수이다 ($0 \leq s_j \leq 1$ 이므로 $0 \leq C \leq 2\pi$).(d) **극한을 취한다.**

$$\frac{R(n)}{n} = \frac{\pi(n+1) - C}{n} = \pi \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{C}{n} \rightarrow \pi + 0 - 0 = \pi \quad (n \rightarrow \infty).$$

$$R(n) = \pi(n+1) - \sum_{j=1}^5 \theta_j s_j \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{n} = \pi$$

둘레 $1/n$ 인 정오각형에 길이 1 인 줄을 감을 때 점 Q 의 궤적

$n = 2$ 인 경우. 줄이 n 바퀴 감기는 동안 각 꼭짓점에서 외각 θ_j 만큼의 호를 그리고, 호의 반지름은 그 변의 길이만큼씩 줄어들어 마지막에 0 이 된다.

[답안 그림 4] 줄 끝점의 궤적은 반지름이 한 변씩 줄어드는 호들의 나선이다. n 바퀴가 끝나면 남은 줄이 정확히 0이 된다.

(e) **별해 — 구분구적법(정적분)으로 보는 방법.** $0 \leq s_j \leq 1$ 이므로 모든 j 에 대해

$$1 - \frac{k+1}{n} \leq r_{k,j} \leq 1 - \frac{k}{n}$$

이고, 여기에 $\theta_j \geq 0$ 을 곱해 j 에 대해 더하면 $\sum_j \theta_j = 2\pi$ 에서

$$2\pi \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{j=1}^5 \theta_j r_{k,j} \leq 2\pi \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

이다. k 에 대해 더하고 n 으로 나누면

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \leq \frac{R(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

이 되는데, 양 끝은 각각 $\pi \frac{n-1}{n}$ 과 $\pi \frac{n+1}{n}$ 로 계산되어 둘 다 π 로 수렴하므로 조임 정리에 의해 $R(n)/n \rightarrow \pi$ 이다.

이 두 합은 모두 함수 $2\pi(1-x)$ 의 $[0, 1]$ 위의 구분구적법 합이며, 그 극한은

$$\int_0^1 2\pi(1-x) dx = 2\pi \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

이다.

(f) **(1)의 결과와의 일관성.** 둘레가 $1/n$ 인 원에 같은 작업을 하면 반지름이 $a = 1/(2\pi n)$ 이므로 (1)에 의해 궤적의 길이는 $1/(2a) = \pi n$ 이고, $R(n)/n = \pi$ 가 정확히 성립한다. 오각형의 경우에도 극한값이 같다는 것은, 다각형을 여러 바퀴 감을수록 “꼭짓점에서 꺾이는” 효과가 사라지고 원에 감는 것과 구별되지 않게 됨을 뜻한다. 또한 답 π 는 오각형의 모양(변의 길이 배분 a_j 와 외각 θ_j)에 전혀 의존하지 않는데, 이는 (c)에서 모양에 의존하는 항이 n 과 무관한 상수 C 하나로 모여 n 으로 나눌 때 사라지기 때문이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	전체 배점은 2점. $(x(\theta), y(\theta))$ 의 좌표를 구하면 1점 부여. 길이 구하는 공식을 아는데 계산을 실수하면 0.5점을 감점.	2점
(2)	전체 배점은 3점. 한 바퀴 도는 동안의 줄 끝 궤적의 길이를 구하는 식을 구하면 1점. 정적분 계산 실수는 1점만 감점.	3점

2021학년도 · 해설편

문제 1	평행광선이 만드는 눈사람의 그림자
문제 2	원점을 지나는 직선까지의 거리 제곱합의 최소
문제 3	단위원의 접선·할선이 만드는 두 삼각형과 극한
문제 4	주사위 두 개의 최댓값·최솟값과 기댓값

단원	함수·극한·미적분 · 기하·벡터 · 삼각함수 · 확률과 통계
핵심 개념	평행광선에 의한 그림자와 정사영, 두 원의 공통내접·외접 조건, 점과 직선 사이의 거리, 유리함수의 최대·최소, 삼각함수의 극한, 이차방정식의 판별식, 이산확률변수의 기댓값과 이항정리
문항 수	4문항 (소문항 9개) · 20점

II. 예시답안

문제 1 평행광선이 만드는 눈사람의 그림자

빛에 수직인 평면으로의 정사영 · 두 원의 내접 조건

(1) r 의 최댓값은 $1/3$ (a) 좌표를 잡고 문제를 평면 문제로 바꾼다. 바닥을 $z = 0$ 평면으로 두면, 아래쪽 구는 중심 $L = (0, 0, 1)$ ·반지름 1이고 위쪽 구는 두 구가 접하므로 중심 $U = (0, 0, 2 + r)$ ·반지름 r 이다. 광선의 진행 방향을 단위벡터

$$\vec{d} = (\cos 60^\circ, 0, -\sin 60^\circ) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

로 잡자 (지면과 이루는 각이 60°). 이제 $\vec{d}$ 에 수직인 평면 Π 를 하나 잡고, $\vec{d}$ 방향으로의 정사영 $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \Pi$ 를 생각한다.

(b) 보조정리 — 구의 그림자는 정사영한 원판으로 결정된다. 반지름 ρ , 중심 O_0 인 구를 $\vec{d}$ 방향으로 Π 위에 정사영하면 중심 $\pi(O_0)$, 반지름 ρ 인 원판이 된다 (구는 어느 방향에서 보아도 반지름이 같은 원판으로 보인다). 한편 바닥 위의 점 X 가 그 구의 그림자에 속한다는 것은 X 를 지나 $\vec{d}$ 방향인 직선이 구와 만난다는 뜻이고, 이는 $\pi(X)$ 가 그 원판에 속한다는 것과 동치이다.

$\vec{d}$ 는 바닥과 평행하지 않으므로 ($-\sin 60^\circ \neq 0$) π 를 바닥에 제한한 사상은 바닥에서 Π 위로의 일대일 대응이다. 따라서

$$(\text{위 구의 그림자}) \subseteq (\text{아래 구의 그림자}) \iff (\text{위 구의 원판}) \subseteq (\text{아래 구의 원판})$$

이 성립하여, 3차원 문제가 Π 위의 두 원판의 포함 문제로 바뀐다.

- (c) 두 원판의 중심 거리를 구한다. $\overrightarrow{LU} = (0, 0, 1+r)$ 이고, 이 벡터를 Π 위로 정사영한 것의 길이는 $\overrightarrow{LU}$ 와 $\vec{d}$ 가 이루는 각 ψ 에 대해 $|\overrightarrow{LU}| \sin \psi$ 이다. $\overrightarrow{LU}$ 는 위쪽(+z), $\vec{d}$ 는 아래쪽으로 기울어져 있으므로

$$\cos \psi = \frac{(0, 0, 1) \cdot \vec{d}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \psi = 150^\circ, \quad \sin \psi = \frac{1}{2}$$

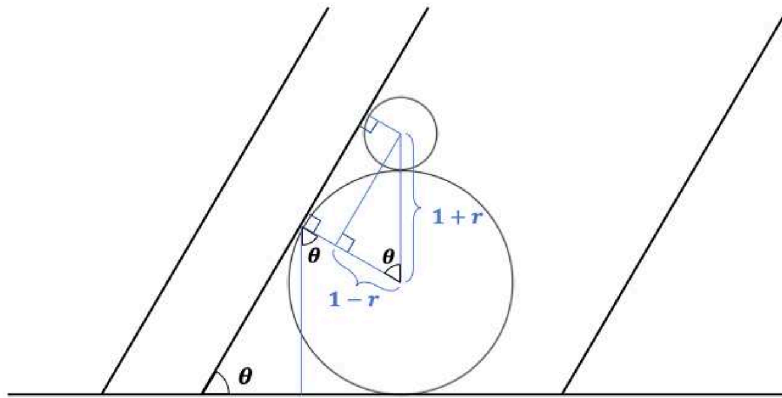
이고, 따라서 두 원판의 중심 거리는 $\frac{1+r}{2}$ 이다.

- (d) 포함 조건을 본다. 반지름 r 인 원판이 반지름 1인 원판에 포함될 필요충분조건은 (중심 거리) $+r \leq 1$ 이므로

$$\frac{1+r}{2} + r \leq 1 \Leftrightarrow 1+3r \leq 2 \Leftrightarrow r \leq \frac{1}{3}.$$

$0 < r \leq 1/3$ 인 모든 r 에서 조건이 성립하므로 최댓값은 $r = 1/3$ 이고, 이때 두 원판은 **내접**한다. 내접한다는 것은 두 구에 동시에 접하는 광선이 존재한다는 뜻이며, 이는 위 구의 그림자 경계와 아래 구의 그림자 경계가 한 점에서 만나는 상황이다.

$$\frac{1+r}{2} = 1-r \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{1-r}{1+r} \Rightarrow r_{\max} = \frac{1}{3}$$



[답안 그림 1] 최댓값이 되는 순간의 단면 — 두 구에 동시에 접하는 광선이 존재한다. 중심선(길이 $1+r$)과 그 광선에 수직인 방향이 이루는 각이 $\theta = 60^\circ$ 이므로 $\cos 60^\circ = (1-r)/(1+r)$ 이다.

- (2) 그림자의 넓이 $= 8\sqrt{3}\pi/9 + 1$

- (a) Π 위의 그림자는 반지름 1인 두 원판의 합집합이다. $r = 1$ 이므로 (1)의 (b)·(c)에 의해 Π 위의 그림자는 반지름이 모두 1이고 중심 거리가 $\frac{1+1}{2} = 1$ 인 두 원판 D_1, D_2 의 합집합이다.

- (b) 겹치는 부분(렌즈꼴)의 넓이. 두 원의 교점을 V, W 라 하면 $\overline{O_1V} = \overline{O_2V} = \overline{O_1O_2} = 1$ 이므로 $\triangle O_1O_2V$ 는 정삼각형이고, 마찬가지로 $\triangle O_1O_2W$ 도 정삼각형이다. 따라서 $\angle VO_1W = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ 이다.

겹치는 부분은 두 개의 활꼴로 이루어지며, 한 활꼴의 넓이는 (중심각 120° 인 부채꼴) $-(\triangle O_1VW)$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

이고, 겹치는 부분의 넓이는

$$2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다. (부채꼴을 60° 단위로 잘라 세면, 60° 부채꼴에서 한 변의 길이가 1인 정삼각형을 뺀 도형 4개와 그 정삼각형 2개로 보아 $4(\pi/6 - \sqrt{3}/4) + 2 \cdot \sqrt{3}/4$ 로 계산해도 같은 값이다.)

- (c) Π 위의 합집합 넓이. 포함-배제에 의해

$$|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2| - |D_1 \cap D_2| = 2\pi - \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

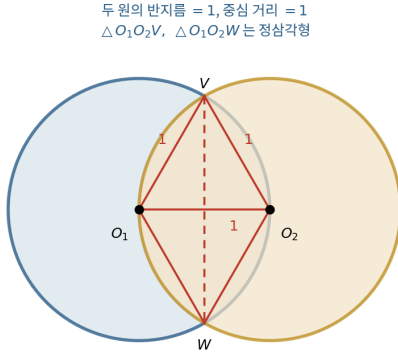
- (d) 바닥으로 되돌린다. $\vec{d}$ 는 Π 의 법선이므로 “ $\vec{d}$ 방향의 정사영”은 곧 Π 위로의 직교정사영이다. 바닥의 법선 $(0, 0, 1)$ 과 Π 의 법선 $\vec{d}$ 가 이루는 각이 150° 이므로 두 평면이 이루는 각은 $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ 이고, 평면도형을 각 30° 만큼 기울어진 평면 위로 직교정사영하면 넓이는 $\cos 30^\circ$ 배가 된다. 즉

$$(\text{바닥의 그림자 넓이}) \cdots \cdots \cos 30^\circ = |D_1 \cup D_2|$$

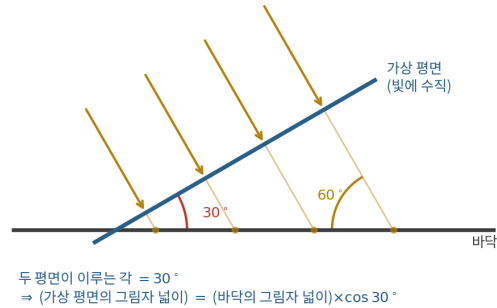
이므로

$$(\text{그림자 넓이}) = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{9} + 1$$

빛에 수직인 가상 평면 위의 그림자



가상 평면 → 바닥으로의 정사영



[답안 그림 2] (왼쪽) 빛에 수직인 가상 평면 위에서는 그림자가 반지름 1, 중심 거리 1인 두 원의 합집합이 된다. (오른쪽) 그 평면과 바닥이 이루는 각이 30° 이므로 넓이는 $\cos 30^\circ$ 로 나누어 되돌린다.

값의 가늠 — $(8\sqrt{3}\pi)/9 + 1 \approx 5.84$ 이다. 만약 두 구가 아주 멀리 떨어져 그림자가 겹치지 않았다면 넓이는 $2\pi \div \cos 30^\circ = (4\sqrt{3}\pi)/3 \approx 7.26$ 이었을 것이고, 두 그림자가 완전히 포개졌다면 $\pi \div \cos 30^\circ = (2\sqrt{3}\pi)/3 \approx 3.63$ 이었을 것이다. 구한 값은 그 사이에 놓인다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 2점: 정확한 답과 근거 제시 - 1점: 2차원 그림을 그려서 문제를 파악하면 1점 부여 가능	2점
(2)	- 3점: 정확한 답과 근거 제시 (아래 ①-③까지 모두 제시) - 부분 점수 요소 ① 1점: 가상의 평면을 평행 광선에 수직하게 놓으면 이 평면상의 그림자는 반지름 1인 두 원이 합쳐져서 생기는 모양이며, 이를 계산하여 원래의 바닥에 정사영한 그림자 넓이를 구하면 계산이 쉬워진다. ② 1점: 두 원의 그림자가 겹쳐지는 부분의 모양을 보고 겹쳐지는 부분의 넓이를 구한다. ③ 1점: 정사영한 원래 바닥의 그림자 넓이를 정확히 구한다.	3점

문제 2 원점을 지나는 직선까지의 거리 제곱합의 최소

수선의 발 · 점과 직선 사이의 거리 · 유리함수의 최대·최소

(1) $Q_i = ((x_i + ry_i)/(1 + r^2), r(x_i + ry_i)/(1 + r^2))$

(a) 가장 가까운 점은 수선의 발이다. $P_i = (x_i, y_i)$ 라 하고 $L(r)$ 위의 점을 $Q(z) = (z, rz)$ 로 두면

$$|P_i Q(z)|^2 = (x_i - z)^2 + (y_i - rz)^2 = (1 + r^2)z^2 - 2(x_i + ry_i)z + x_i^2 + y_i^2$$

는 z 에 대한 이차함수이고 $1 + r^2 > 0$ 이므로 아래로 볼록하다. 따라서 최솟값은 꼭짓점에서 유일하게 나며, 그 z 는

$$z = \frac{x_i + ry_i}{1 + r^2}$$

이다. (같은 결과를 $\overrightarrow{QP_i} \cdot (1, r) = 0$, 즉 $(x_i - z) + r(y_i - rz) = 0$ 을 풀어 얻어도 된다. 이차함수의 완전제곱 논법은 “수선의 발이 최단”이라는 사실을 따로 인용하지 않아도 되는 장점이 있다.)

$$Q_i = \left(\frac{x_i + ry_i}{1 + r^2}, \frac{r(x_i + ry_i)}{1 + r^2} \right)$$

(2) $d_i(r) = |rx_i - y_i| / \sqrt{1 + r^2}$

(a) (1)의 이차함수에 $z = (x_i + ry_i)/(1 + r^2)$ 를 대입하면 최솟값은

$$d_i(r)^2 = x_i^2 + y_i^2 - \frac{(x_i + ry_i)^2}{1 + r^2} = \frac{(x_i^2 + y_i^2)(1 + r^2) - (x_i + ry_i)^2}{1 + r^2}$$

이고, 분자를 전개하면

$$x_i^2 + r^2 x_i^2 + y_i^2 + r^2 y_i^2 - x_i^2 - 2rx_i y_i - r^2 y_i^2 = r^2 x_i^2 - 2rx_i y_i + y_i^2 = (rx_i - y_i)^2$$

이다. 따라서 $d_i(r)^2 = (rx_i - y_i)^2 / (1 + r^2)$ 이고, 거리는 음이 아니므로 제곱근을 취한다.

$$d_i(r) = \sqrt{\frac{r^2 x_i^2 - 2rx_i y_i + y_i^2}{1 + r^2}} = \frac{|rx_i - y_i|}{\sqrt{1 + r^2}}$$

이는 직선 $rx - y = 0$ 에 대한 점과 직선 사이의 거리 공식과 일치한다.

(3) $b := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ 이라 할 때, $b > 0$ 이면 $r = 1$, $b < 0$ 이면 $r = -1$

(a) 목적함수를 한 변수 유리함수로 정리한다. $a = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$, $b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \neq 0$ 이라 두면 (2)에 의해

$$t(r) := \sum_{i=1}^n d_i(r)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r^2 x_i^2 - 2rx_i y_i + y_i^2)}{1 + r^2} = \frac{ar^2 - 2br + a}{1 + r^2}.$$

여기서 $b \neq 0$ 이므로 어떤 i 에 대해 $x_i y_i \neq 0$, 곧 $x_i \neq 0$ 이어서 $a > 0$ 이다. 분자에서 $a(1 + r^2)$ 을 빼내면

$$t(r) = a - \frac{2br}{1 + r^2} = a - bu, \quad u := \frac{2r}{1 + r^2}.$$

(b) 보조정리 — u 의 치역은 정확히 $[-1, 1]$ 이고, $u = 1$ 은 $r = 1$ 에서만, $u = -1$ 은 $r = -1$ 에서만 얻어진다.

$$1 - u = \frac{1 + r^2 - 2r}{1 + r^2} = \frac{(r - 1)^2}{1 + r^2} \geq 0, \quad 1 + u = \frac{(r + 1)^2}{1 + r^2} \geq 0$$

이므로 $-1 \leq u \leq 1$ 이다. 또 $1 - u = 0$ 은 $(r - 1)^2 = 0$, 즉 $r = 1$ 일 때만, $1 + u = 0$ 은 $r = -1$ 일 때만 성립한다. 마지막으로 $u(r)$ 은 $\mathbb{R}$ 에서 연속이고 $u(-1) = -1$, $u(1) = 1$ 이므로 사잇값 정리에 의해 $[-1, 1]$ 의 모든 값을 취한다.

(c) 최솟값과 그 위치. $t = a - bu$ 는 u 에 대한 일차식이므로 $u \in [-1, 1]$ 에서

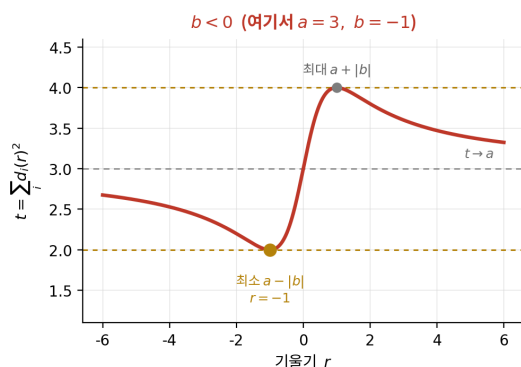
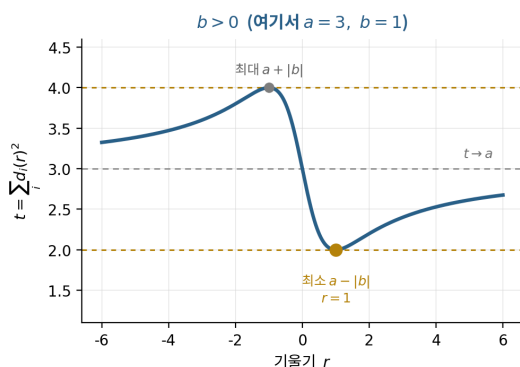
$$a - |b| \leq t \leq a + |b|$$

이고, 최솟값 $a - |b|$ 은 $bu = |b|$ 일 때, 곧

- $b > 0$ 이면 $u = 1$, 즉 (b)에 의해 $r = 1$ 에서만
- $b < 0$ 이면 $u = -1$, 즉 (b)에 의해 $r = -1$ 에서만

달성된다. 두 경우를 합치면 $r = \text{sgn}(b)$ 이고, 이때 최솟값은 $a - |b|$ 이다.

$$\min_{r \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n d_i(r)^2 = a - |b|, \quad r = \begin{cases} 1 & (b = \sum_i x_i y_i > 0) \\ -1 & (b = \sum_i x_i y_i < 0) \end{cases}$$



[답안 그림 3] $t(r) = a - b \cdot 2r/(1 + r^2)$ 의 개형. r

에서 최솟값 $a - |b|$ 과 최댓값 $a + |b|$ 을 각각 가진다.

(d) **별해 - 판별식을 쓰는 방법.** $t = (ar^2 - 2br + a)/(1 + r^2)$ 을 r 에 대해 정리하면

$$(t - a)r^2 + 2br + (t - a) = 0$$

이다. $t = a$ 이면 $2br = 0$ 에서 $b \neq 0$ 이므로 $r = 0$, 즉 $t = a$ 는 실제로 취해진다. $t \neq a$ 이면 이는 r 에 대한 이차방정식이고 실근을 가질 조건은

$$\frac{D}{4} = b^2 - (t - a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (t - a)^2 \leq b^2 \Leftrightarrow a - |b| \leq t \leq a + |b|$$

이다. 따라서 t 의 최솟값은 $a - |b|$ 이며, 그때 방정식은 $(-|b|)r^2 + 2br - |b| = 0$, 즉 $b > 0$ 에서 $-b(r - 1)^2 = 0$, $b < 0$ 에서 $|b|(r + 1)^2 = 0$ 이 되어 각각 $r = 1, r = -1$ 을 준다.

(e) **별해 - 미분을 쓰는 방법.**

$$t'(r) = -2b \cdot \frac{(1 + r^2) - r \cdot 2r}{(1 + r^2)^2} = \frac{2b(r^2 - 1)}{(1 + r^2)^2} = \frac{2b(r + 1)(r - 1)}{(1 + r^2)^2}$$

이고 분모는 항상 양수이므로 t' 의 부호는 $b(r + 1)(r - 1)$ 의 부호와 같다. $b > 0$ 이면 t 는 $(-\infty, -1)$ 에서 증가, $(-1, 1)$ 에서 감소, $(1, \infty)$ 에서 증가하므로 $r = 1$ 에서 극소이자 최솟값이며 극솟값은 $t(1) = (a - 2b + a)/2 = a - b$ 이다. ($r \rightarrow \pm\infty$ 에서 $t \rightarrow a > a - b$ 이므로 최소가 맞다.) $b < 0$ 이면 증감이 뒤집혀 $r = -1$ 에서 최솟값 $t(-1) = a + b = a - |b|$ 을 가진다.

(f) **의미.** $\sum x_i^2 = \sum y_i^2$ 은 자료가 x 축 방향과 y 축 방향으로 똑같이 퍼져 있다는 뜻이다. 이 균형 때문에 최적의 직선은 언제나 $y = x$ 또는 $y = -x$ 가 되고, 어느 쪽인지는 상관 정도를 나타내는 $b = \sum x_i y_i$ 의 부호만으로 결정된다. 그때의 최솟값 $a - |b|$ 과 최댓값 $a + |b|$ 의 합이 $2a$ 로 일정한 것도 두 방향이 서로 수직임을 반영한다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	정확한 답 $Q(r)$ 을 제시	1점
(2)	정확한 답 $d_i(r)$ 을 제시	1점
(3)	- 1점: $\sum_{i=1}^n d_i(r)^2 = \sum_{i=1}^n \frac{r^2 x_i^2 - 2r x_i y_i + y_i^2}{1 + r^2} = \frac{ar^2 - 2br + a}{1 + r^2}$ 이 식을 유도 - [미분을 사용하지 않는 풀이] ① 위 식을 t 로 두고, r 이 실근을 갖는 조건으로부터 t 의 범위를 $a - b \leq t \leq a + b $ 로 유도하면 1점 ② 정확한 기울기 값 r 을 구하면 1점 - [미분을 사용하는 풀이] ① t 를 r 로 미분하여 도함수를 정확히 구하면 1점 ② 정확한 기울기 값 r 을 구하면 1점	3점

문제 3 단위원의 접선·할선이 만드는 두 삼각형과 극한

원의 접선 · 삼각함수의 정리 · $\lim(\sin \theta)/\theta = 1$

이하 $0 < \theta < \pi/2$ 이고 $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ 이다.

(1) A 의 y 좌표 $= \sin \theta/(1 - \cos \theta)$, F 의 x 좌표 $= \cos \theta/(1 - \sin \theta)$

(a) F - 직선 CP 와 x 축의 교점. $C = (0, 1)$, $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ 이고 $\cos \theta \neq 0$ 이므로 직선 CP 의 기울기는 $(\sin \theta - 1)/\cos \theta$, y 절편은 1이다. 따라서

$$y = \frac{\sin \theta - 1}{\cos \theta} x + 1.$$

$0 < \theta < \pi/2$ 에서 $\sin \theta < 1$ 이므로 기울기는 0이 아니고, $y = 0$ 을 풀면

$$x = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}.$$

(b) A - 직선 DP 와 y 축의 교점. $D = (1, 0)$, $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ 이고 $\cos \theta \neq 1$ 이므로 기울기는 $\frac{\sin \theta - 0}{\cos \theta - 1} = -\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$ 이다. 따라서

$$y = -\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}(x - 1)$$

이고 $x = 0$ 을 대입하면 $y = (\sin \theta)/(1 - \cos \theta)$ 이다.

$$A = \left(0, \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}\right) = \left(0, \cot \frac{\theta}{2}\right), \quad F = \left(\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}, 0\right)$$

(반각 변형: $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{2 \sin^2(\theta/2)} = \cot \frac{\theta}{2}$ 이므로 $\theta \rightarrow +0$ 에서 A 의 y 좌표는 $+\infty$ 로 발산한다.)

(2) $\lim_{\theta \rightarrow +0} (S \times T)/\theta = 1/4$

(a) **접선 BE의 두 절편.** 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ 에서의 접선은 $x \cos \theta + y \sin \theta = 1$ 이다. $0 < \theta < \pi/2$ 에서 $\cos \theta > 0, \sin \theta > 0$ 이므로 x 절편과 y 절편이 모두 존재하여

$$E = \left(\frac{1}{\cos \theta}, 0\right), \quad B = \left(0, \frac{1}{\sin \theta}\right).$$

(b) T — 삼각형 EFP . E, F 가 모두 x 축 위에 있으므로 $\overline{EF}$ 를 밑변으로 보면 높이는 P 의 y 좌표 $\sin \theta$ 이다. 밑변의 길이는

$$\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta - (1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} = \frac{\sin \theta - \sin^2 \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} = \frac{\sin \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} = \tan \theta$$

이다 (둘째 등호에서 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ 를 썼고, $1 - \sin \theta \neq 0$ 이므로 약분할 수 있다). $\tan \theta > 0$ 이므로 F 는 E 의 오른쪽에 있고, 길이는 그대로 $\tan \theta$ 이다. 따라서

$$T = \frac{1}{2} \tan \theta \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}.$$

(c) S — 삼각형 ABP . A, B 가 모두 y 축 위에 있으므로 $\overline{AB}$ 를 밑변으로 보면 높이는 P 의 x 좌표 $\cos \theta$ 이다. 밑변의 길이는

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta - (1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{\cos \theta - \cos^2 \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{\cos \theta(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \cot \theta$$

이다. $\cot \theta > 0$ 이므로 A 가 B 보다 위에 있고, 따라서

$$S = \frac{1}{2} \cot \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}.$$

(d) **곱과 극한.** 두 식을 곱하면 약분이 크게 일어난다.

$$S \times T = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8} \sin 2\theta.$$

따라서

$$\frac{S \times T}{\theta} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \cos \theta$$

이고, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ 과 $\lim_{\theta \rightarrow +0} \cos \theta = 1$ 및 극한의 곱 법칙에 의해

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S \times T}{\theta} = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

(e) **의미.** $\theta \rightarrow +0$ 에서 $S = \frac{\cos^2 \theta}{2 \sin \theta} \rightarrow +\infty$ 로 발산하고 $T = \frac{\sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \rightarrow 0$ 로 수렴한다. 즉 한쪽 삼각형은 무한히 커지고 다른 쪽은 사라지지만, $S \sim 1/(2\theta)$ 이고 $T \sim \theta^2/2$ 이므로 곱은 $\theta/4$ 정도로 0에 수렴하며, θ 로 나눈 값이 유한한 극한 $1/4$ 을 갖는다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 1점: F 의 x 좌표를 제시 - 1점: A 의 y 좌표를 제시	2점
(2)	- 1점: 식을 정리하여, $T = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \tan \theta \sin \theta$ 를 구할 수 있다. - 1점: 식을 정리하여, $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \cot \theta \cos \theta$ 를 구할 수 있다. - 1점: $\lim_{\theta \rightarrow +0} (S \times T)/\theta = 1/4$ 답을 구할 수 있다.	3점

문제 4 주사위 두 개의 최댓값·최솟값과 기댓값

판별식 · 확률분포 · 이항정리

주사위를 던져 나온 첫 번째 수를 X , 두 번째 수를 Y 라 하면 X, Y 는 서로 독립이고 각각 $1, \dots, 6$ 을 확률 $1/6$ 로 취한다. $a = \max(X, Y), b = \min(X, Y)$ 이며 표본공간은 순서쌍 (X, Y) 전체로 크기가 36이고 각 근원사건의 확률은 $1/36$ 이다.

(1) $1/12$

(a) 조건을 판별식으로 바꾼다. $x^2 + ax + b = 0$ 이 실근을 갖지 않을 필요충분조건은

$$D = a^2 - 4b < 0.$$

(b) a 의 범위를 먼저 좁힌다. 정의에 의해 $1 \leq b \leq a \leq 6$ 이다. $a^2 < 4b$ 이고 $b \leq a$ 이므로

$$a^2 < 4b \leq 4a \Rightarrow a^2 < 4a \Rightarrow a < 4$$

이다 ($a > 0$ 이므로 양변을 a 로 나눌 수 있다). 따라서 $a \in \{1, 2, 3\}$ 이다.

(c) 세 경우를 빠짐없이 확인한다. 각 a 에 대해 $a^2/4 < b \leq a$ 인 정수 b 를 모두 찾으면 된다.

$$\bullet a = 1: 0.25 < b \leq 1 \Rightarrow b = 1. \text{ 이때 } D = 1 - 4 = -3 < 0 \checkmark$$

$$\bullet a = 2: 1 < b \leq 2 \Rightarrow b = 2. \text{ 이때 } D = 4 - 8 = -4 < 0 \checkmark$$

$$\bullet a = 3: 2.25 < b \leq 3 \Rightarrow b = 3. \text{ 이때 } D = 9 - 12 = -3 < 0 \checkmark$$

즉 조건을 만족하는 순서쌍은 $(a, b) = (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ 뿐이다. (특히 $a = b$ 인 경우만 남는데, 이는 $b \leq a - 1$ 이면 $a^2 - 4b \geq a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2 \geq 0$ 이 되어 조건을 만족할 수 없다는 것으로도 확인된다.)

(d) 확률로 옮긴다. $a = b = k$ 가 되는 것은 $X = Y = k$ 일 때뿐이므로 해당 근원사건은 $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ 의 3개이다. 따라서

$$P(D < 0) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(2) $E[{}_a C_b] = 13/2 = 6.5$

(a) (a, b) 의 확률분포. $1 \leq s \leq t \leq 6$ 인 정수 s, t 에 대해

$$P(a = t, b = s) = \begin{cases} \frac{2}{36} & (s < t) \quad (\text{근원사건 } (t, s), (s, t)) \\ \frac{1}{36} & (s = t) \quad (\text{근원사건 } (t, t)) \end{cases}$$

이다. 이 확률들의 총합은 $2 \times {}_6 C_2 / 36 + 6/36 = 30/36 + 6/36 = 1$ 로 확인된다.

(b) $a = t$ 인 항들을 먼저 모은다. 기댓값의 정의에 의해

$$E[{}_a C_b] = \sum_{t=1}^6 \sum_{s=1}^t {}_t C_s \cdot P(a = t, b = s) = \sum_{t=1}^6 \left[\frac{2}{36} \sum_{s=1}^{t-1} {}_t C_s + \frac{1}{36} {}_t C_t \right]$$

이다. 여기서 이항정리 $\sum_{s=0}^t {}_t C_s = (1+1)^t = 2^t$ 를 쓰면

$$\sum_{s=1}^{t-1} {}_t C_s = 2^t - {}_t C_0 - {}_t C_t = 2^t - 2$$

이므로 (이 식은 $t = 1$ 일 때도 좌변이 빈 합 0, 우변이 $2 - 2 = 0$ 으로 성립한다) 안쪽 값은

$$\frac{2}{36}(2^t - 2) + \frac{1}{36} = \frac{2^{t+1} - 4 + 1}{36} = \frac{2^{t+1} - 3}{36}$$

이다.

(c) t 에 대해 더한다. 등비수열의 합 $\sum_{t=1}^6 2^{t+1} = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^7 = \frac{4(2^6 - 1)}{2 - 1} = 252$ 이므로

$$E[{}_a C_b] = \frac{1}{36} \sum_{t=1}^6 (2^{t+1} - 3) = \frac{252 - 3 \times 6}{36} = \frac{234}{36} = \frac{13}{2}.$$

$$E[{}_a C_b] = \frac{13}{2} = 6.5$$

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	이차방정식의 판별식을 이용하여 구한 a, b 사이의 관계식과 주어진 조건을 만족하는 a, b 의 순서쌍을 구하고, 수학적 확률을 사용할 수 있는 표본공간을 결정하여 확률을 구한다.	2점
(2)	(1)의 결과를 이용하여 ${}_a C_b$ 를 확률변수로 하는 확률분포표를 만들고 이산확률변수의 기댓값을 구한다. 기댓값을 계산하기 위해서는 a 의 값을 기준으로 분류하여 정리한 후 이항정리를 이용해야 한다.	3점

2020학년도 · 해설편

- 문제 1** 삼각함수 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이와 극한
문제 2 구에 접하는 평면의 존재와 접점 벡터의 내적

-
- 단원** 함수·극한·미적분 · 기하·벡터 · 삼각함수
핵심 개념 삼각방정식과 삼각함수의 그래프, 치환적분법, 직선·구의 방정식과 벡터의 내적, 조건부확률, 부분적분법과 확률밀도함수, 적분과 미분의 관계, 이차함수의 최솟값, 미분불가능한 함수의 최솟값
문항 수 전형별 2문항, 총 4문항

II. 예시답안

일반전형

문제 1 삼각함수 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이와 극한

삼각방정식 · 주기성 · 치환적분법

(1) 교점의 x 좌표 — 두 곡선이 만나는 교점은 등식 $f(x) = g(x)$ 에서 알 수 있다. 만약 $\cos(nx) = 0$ 이면 $\sin^3(nx) = \pm 1 \neq 0$ 이므로 등식이 성립할 수 없다. 따라서 $\cos(nx) \neq 0$ 이고, 양변을 $\cos^3(nx)$ 로 나누면

$$\tan^3(nx) = 1 \rightarrow \tan(nx) = 1 \rightarrow nx = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \text{ 는 정수})$$

를 얻는다. 즉 교점의 x 좌표는 $x = \frac{(4k+1)\pi}{4n}$ 꼴이다. 주어진 구간 $[0, 2\pi]$ 에 들어갈 조건은

$$0 \leq \frac{(4k+1)\pi}{4n} \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 4k+1 \leq 8n \Leftrightarrow k = 0, 1, \dots, 2n-1$$

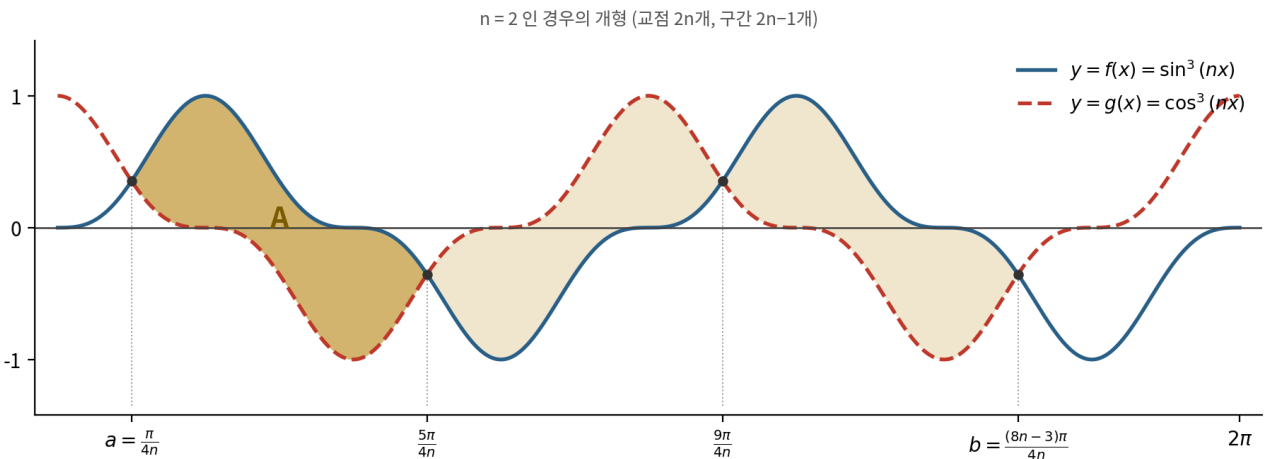
이므로 교점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{4n}, \frac{5\pi}{4n} \left(= \frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{n}\right), \dots, \frac{(8n-3)\pi}{4n} \left(= \frac{\pi}{4n} + \frac{(2n-1)\pi}{n}\right)$$

로 총 $2n$ 개이다.

$$a = \frac{\pi}{4n}, \quad b = \frac{(8n-3)\pi}{4n} = 2\pi - \frac{3\pi}{4n}$$

(2) 넓이 S_n 과 그 극한 — 삼각함수의 기본 성질(주기성 혹은 대칭성)을 고려하면 두 곡선을 다음과 같이 나타낼 수 있다.



예시 작도 — $y = \sin^3(nx)$ 와 $y = \cos^3(nx)$ 의 개형 및 이웃한 두 교점 사이의 넓이 A

구간 $[\frac{\pi}{4n}, \frac{5\pi}{4n}]$ 에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 A 라고 하자. 이 구간에서는 $f(x) \geq g(x)$ 이므로 적분을 이용해

$$A = \int_{\frac{\pi}{4n}}^{\frac{5\pi}{4n}} [f(x) - g(x)] dx$$

임을 알 수 있다. 주어진 구간 내의 교점의 개수가 $2n$ 개이므로 이웃한 두 교점이 만드는 구간은 $2n-1$ 개이고, 삼각함수의 주기성에 의해 각 구간에서의 넓이가 모두 A 로 같다. 따라서 $S_n = (2n-1)A$ 가 된다.

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 부정적분은 치환 $y = \cos(nx)$, $z = \sin(nx)$ 및 등식 $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ 을 통해 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\int f(x) dx = \int [1 - \cos^2(nx)] \sin(nx) dx = \frac{1}{n} \int (y^2 - 1) dy = \frac{1}{n} \left[\frac{\cos^3(nx)}{3} - \cos(nx) \right] + C$$

$$\int g(x) dx = \int [1 - \sin^2(nx)] \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \int (1 - z^2) dz = \frac{1}{n} \left[\sin(nx) - \frac{\sin^3(nx)}{3} \right] + C$$

(C 는 적분상수). 위의 부정적분은 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ 를 이용해 계산할 수도 있다. 이를 이용하면

$$nA = \left[\frac{\cos^3(nx) + \sin^3(nx)}{3} - \cos(nx) - \sin(nx) \right]_{x=\frac{\pi}{4n}}^{x=\frac{5\pi}{4n}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} - \left(-\frac{5\sqrt{2}}{6} \right) = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

임을 알 수 있다. 따라서 $A = \frac{5\sqrt{2}}{3n}$ 이고

$$S_n = (2n-1)A = \left(2 - \frac{1}{n}\right) \frac{5\sqrt{2}}{3} = \frac{10\sqrt{2}n - 5\sqrt{2}}{3n}$$

를 얻게 되고, 극한값을 구하게 된다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{10\sqrt{2}}{3} \approx 4.714$$

문제 2 구에 접하는 평면의 존재와 접점 벡터의 내적

직선·구의 방정식 · 판별식 · 조건부확률

(1) 접평면이 2개 존재할 확률 — 2개의 접평면이 존재하는 것은 직선이 구와 만나지 않는 것이다. 직선 l 을 매개변수로 다음과 같이 표현하자.

$$l = \{(1, 0, -1) + t(-1, 1, 2) : t \text{ 는 실수}\} = \{(1-t, t, -1+2t) : t \text{ 는 실수}\}$$

직선 l 과 구 S 가 만나는 점을 구하기 위해, 구의 방정식 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 에 직선 위의 점 $(1-t, t, -1+2t)$ 를 대입해서 정리하면

$$(1-t)^2 + t^2 + (-1+2t)^2 = R^2, \quad \text{즉} \quad 6t^2 - 6t + 2 - R^2 = 0$$

이다. 실근을 가지지 않을 양의 실수 R 의 범위는 판별식 $D/4 = 9 - 6(2 - R^2) < 0$ 으로부터 $0 < R < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 를 얻게 된다. R 이 구간 $0 \leq R \leq 1$ 에서 균일하게 분포되어 있는 확률변수이므로, 직선 l 과 구 S 가 만나지 않을 확률은 다음과 같다.

$$P\left(0 < R < \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7071$$

(다른 풀이) 원점에서 직선 l 에 내리는 수선의 발을 다음과 같이 구하자. 먼저 l 의 방정식은 $(1, 0, -1) + t\vec{v}$, $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ 이다. 벡터 $\vec{v}$ 와 수직이면서 원점을 지나는 평면 P 를 생각하자. P 의 방정식은 $-x + y + 2z = 0$ 이다. l 과 P 의 교점이 원점에서 l 에 내리는 수선의 발이다. 교점의 좌표는

$$-(1-t) + t + 2(-1+2t) = 0, \quad \text{즉} \quad t = \frac{1}{2}$$

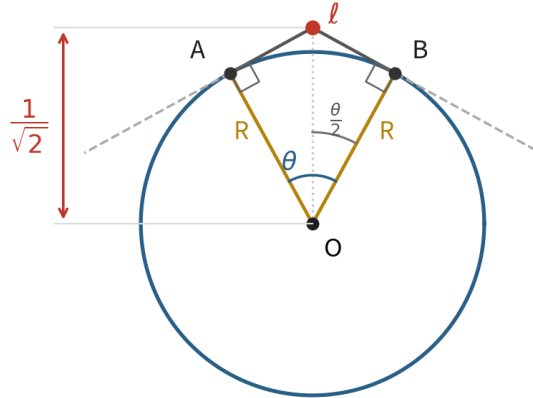
를 대입하면 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 이므로, 원점에서 l 과의 거리는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 임을 얻게 된다. 따라서 구 S 가 직선 l 과 만나지 않을 확률은 구의 반지름 R 이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 보다 작을 확률이며, R 은 구간 $0 \leq R \leq 1$ 에서 균일하게 분포되어 있는 확률변수이기에 원하는 확률은 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 임을 얻게 된다.

(2) 내적이 0보다 클 조건부 확률 — 먼저 $\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각을 θ 라고 하자. 점 A 와 B 가 모두 구 S 위에 있기 때문에 $\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{OB}$ 의 길이가 모두 R 이므로,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2 \cos \theta$$

이다. $\cos \theta$ 를 구하기 위해 직선 l 의 방향에서 투영하여 보면 아래와 같은 그림을 얻는다. ($\overrightarrow{OA}$ 는 접평면의 법선이고 접평면은 l 을 포함하므로 $\overrightarrow{OA} \perp l$ 이며, 따라서 $\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{OB}$ 는 투영한 단면 위에 그대로 놓인다.)

직선 l 방향으로 투영한 단면



예시 작도 — 직선 l 방향으로 투영한 단면. 원점에서 l 까지의 거리는 $1/\sqrt{2}$ 이다.

이 그림에서 직각삼각형의 관계로부터

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{R}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}R, \quad \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 4R^2 - 1$$

이다. 따라서

$$\text{내적} > 0 \Leftrightarrow \cos \theta > 0 \Leftrightarrow 4R^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow R > \frac{1}{2}$$

가 된다. 이제 두 사건을 다음과 같이 정의하자.

사건 E : 각도가 90° 보다 작은 사건, 즉 $E = \{R > 1/2\}$

사건 F : 2개의 접평면이 존재하는 사건, 즉 $F = \{0 < R < 1/\sqrt{2}\}$

따라서 구하는 조건부 확률은

$$P(E | F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(1/2 < R < 1/\sqrt{2})}{1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.2929$$

(다른 풀이) 먼저 점 A 와 B 의 좌표를 다음과 같이 구하자. 접평면과 구 S 가 만나는 점을 (x_0, y_0, z_0) 라 하자. 구의 중심이 원점이기 때문에 접평면의 법선 방향이 (x_0, y_0, z_0) 가 되어 접평면의 방정식은

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$$

이 된다. 점 (x_0, y_0, z_0) 가 구 S 상에 있고 주어진 두 점 $P(1, 0, -1)$ 과 $Q(0, 1, 1)$ 이 접평면 $x_0x + y_0y + z_0z = R^2$ 상에 있으므로, 대입하면 $x_0 - z_0 = R^2, y_0 + z_0 = R^2$ 를 만족한다. 이를 $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2$ 과 연립하면

$$x_0 = R^2 \pm R\sqrt{\frac{1-2R^2}{3}}, \quad y_0 = R^2 \mp R\sqrt{\frac{1-2R^2}{3}}, \quad z_0 = \pm R\sqrt{\frac{1-2R^2}{3}}$$

을 얻게 된다. 두 (x_0, y_0, z_0) 값이 주는 벡터가 $\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{OB}$ 이므로, 내적을 계산하면

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left(R^4 - \frac{R^2 - 2R^4}{3}\right) + \left(R^4 - \frac{R^2 - 2R^4}{3}\right) - \frac{R^2 - 2R^4}{3} = 4R^4 - R^2$$

임을 얻는다. 따라서 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2(4R^2 - 1)$ 임을 얻는다. θ 가 예각이면 내적이 양수이므로 $4R^2 - 1 > 0$ 이 된다.

따라서 각도가 90° 보다 작은 사건 $E = \{R > 1/2\}$ 이고 앞 질문에서 구한 2개의 접평면이 존재하는(즉, 구와 직선이 만나지 않는) 사건 $F = \{0 < R < 1/\sqrt{2}\}$ 이다. 따라서 구하는 조건부 확률은 위와 같이 $1 - 1/\sqrt{2}$ 이다.

학교장추천전형 · 고른기회전형

문제 1 확률밀도함수와 구간확률을 최대화 만드는 위치

부분적분법 · 적분과 미분의 관계 · 최댓값

(1) 상수 c_2 — 함수 $f_2(x)$ 가 확률밀도함수가 되기 위해서는 연속확률변수 X_2 가 값을 가지는 영역에서의 적분값이 1이 되어야 한다. 즉, $f_2(x)$ 의 양의 실수축에서 적분값이 1이어야 한다. 이를 확인하기 위해서 부분적분을 이용하면

$$\int_0^M x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^M + \int_0^M e^{-x} dx = -M e^{-M} + [-e^{-x}]_0^M = 1 - e^{-M} - M e^{-M}$$

이고, 다시 부분적분을 이용하면

$$\int_0^M x^2 e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^M + 2 \int_0^M x e^{-x} dx = -M^2 e^{-M} + 2(1 - e^{-M} - M e^{-M})$$

를 얻는다. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$ 을 활용하여 M 이 무한대로 커지는 경우를 고려하면, $x^2 e^{-x}$ 의 양의 실수축 상에서 적분값이 2임을 알 수 있다. 따라서 $c_2 \cdot 2 = 1$ 이다.

$$c_2 = \frac{1}{2} = 0.5$$

(2) 확률이 최대가 되는 a — 방법 1 (적분과 미분의 관계)

$$P(a \leq X_n \leq a+r) = \int_a^{a+r} f_n(x) dx = \int_0^{a+r} f_n(x) dx - \int_0^a f_n(x) dx$$

이므로 편의상 이 값을 $g(a) = \int_0^{a+r} f_n(x) dx - \int_0^a f_n(x) dx$ 로 놓는다. 최대화 만들고 싶은 $g(a)$ 를 a 에 대해서 미분하면 적분과 미분의 관계에 의해

$$\begin{aligned} g'(a) &= f_n(a+r) - f_n(a) = c_n(a+r)^n e^{-(a+r)} - c_n a^n e^{-a} \\ &= c_n a^n e^{-(a+r)} \left(\left(\frac{a+r}{a} \right)^n - e^r \right) = c_n a^n e^{-(a+r)} \left(\left(1 + \frac{r}{a} \right)^n - e^r \right) \end{aligned}$$

우선 $g'(a) = 0$ 을 찾는다. $g'(0) = c_n r^n e^{-r} > 0$ 이므로 $a > 0$ 인 경우만을 고려하였다. $(1 + \frac{r}{a})^n - e^r = 0$ 을 풀면

$$\left(1 + \frac{r}{a} \right)^n = e^r \Leftrightarrow 1 + \frac{r}{a} = e^{r/n} \Leftrightarrow a^* = \frac{r}{e^{r/n} - 1}$$

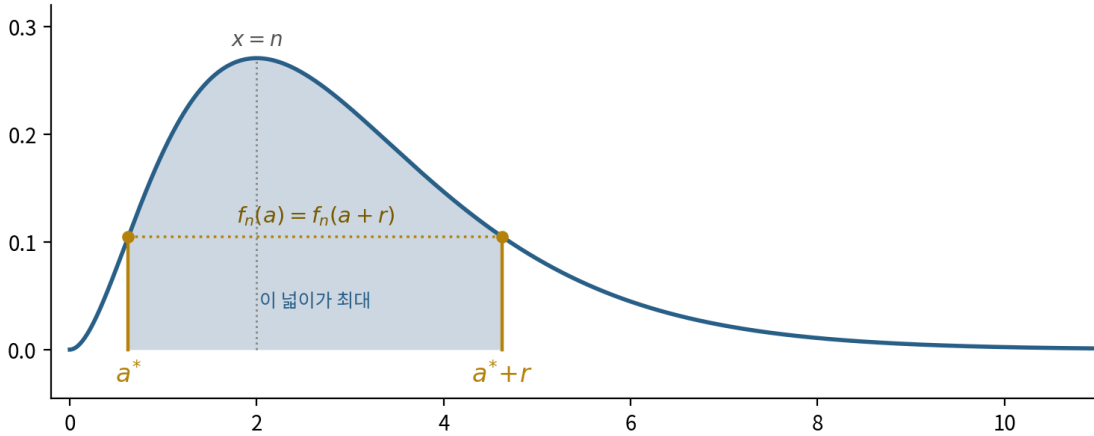
일 때 $g'(a^*) = 0$ 임을 알 수 있다. 이 값에서 최대가 되는 것을 확인하기 위해서는 여러 방법이 있을 수 있지만 표준적인 방법은 a^* 전후에서 $g'(a)$ 의 부호를 보는 것이다. $(1 + r/a)^n$ 은 a 에 대해 감소하므로, 식에서 확인할 수 있듯이 $g'(a)$ 는 a^* 보다 작은 a 에 대해 양수이고 a^* 보다 큰 a 에 대해 음수이므로, $g(a)$ 는 증가하다가 $a = a^*$ 일 때 확률이 최대가 되고 a 가 더 커지면 $g(a)$ 는 감소하게 된다.

방법 2 (넓이의 비교) — 해당 확률은 a 부터 $a+r$ 까지의 x 축과 $f_n(x)$ 의 그래프 사이의 넓이다. 따라서 이 넓이를 최대 하는 a 값에 대하여 $f_n(a)$ 와 $f_n(a+r)$ 의 값이 다르다면, 값이 작은 f_n 값 쪽의 x 축 구간을 조금 절약하여 큰 f_n 값 쪽 x 구간에 더하면 (함수 f_n 이 연속이므로) 넓이가 늘어나게 된다. 따라서 넓이가 최대라는 가정에 모순이므로 a 와 $a+r$ 에서 f_n 의 두 값은 같아야 한다. 따라서 $f_n(a) = f_n(a+r)$ 을 풀면 방법 1에서와 같은 절차로 $a^* = r/(e^{r/n} - 1)$ 를 얻는다. 특히

$$f_n'(x) = nc_n x^{n-1} e^{-x} - c_n x^n e^{-x} = c_n x^{n-1} e^{-x} (n - x)$$

이므로 $f_n(x)$ 의 값은 0부터 n 까지 증가하여 $x = n$ 에서 최댓값을 취한 뒤 계속 감소하고 $f_n(0) = 0, f_n(\infty) = 0$ 이다. 따라서 같은 f_n 값을 갖는 두 값 a 와 $a+r$ 을 찾는 것이 가능하며, 그러한 a 가 유일하게 존재한다.

$f_n(x) = c_n x^n e^{-x}$ ($n=2, r=4$) — 양 끝 함수값이 같을 때 넓이가 최대



예시 작도 — $f_n(a) = f_n(a+r)$ 일 때 폭이 r 인 구간의 넓이가 최대가 된다

$$a = \frac{r}{e^{r/n} - 1}$$

문제 2 가중제곱합과 절댓값 합을 최소로 만드는 상수

이차함수의 최솟값 · 미분불가능한 함수 · 중앙값

(1) 가중제곱합의 최소 — $f(a) = \sum_{i=1}^n w_i \times (x_i - a)^2$ 는 a 에 대하여 이차항의 계수가 양수 $\sum_{i=1}^n w_i$ 인 이차식이므로 미분이 0이 되도록 a 를 정하면 된다. 즉,

$$f'(a) = -2 \sum_{i=1}^n w_i (x_i - a) = -2 \sum_{i=1}^n w_i x_i + 2a \sum_{i=1}^n w_i = 0$$

을 풀면 $a = (\sum_{i=1}^n w_i x_i) / (\sum_{j=1}^n w_j)$ 를 얻는다. 이때 $f''(a) = 2 \sum_{i=1}^n w_i > 0$ 이므로 최솟값임을 알 수 있다.

또는 $f(a) = a^2 \sum_{i=1}^n w_i - 2a \sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{i=1}^n w_i x_i^2$ 이 a 에 대한 이차식이므로 완전제곱 형태로 변환하여 최솟값을 구해도 된다.

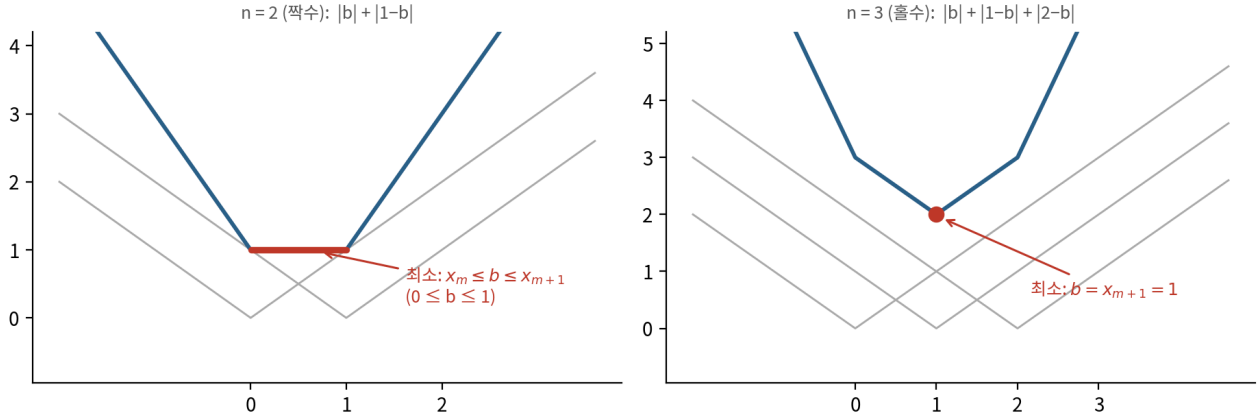
$$a = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{j=1}^n w_j}$$

즉 가중치 $w_1, \dots, w_n$ 에 대한 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 들의 가중평균이다.

(2) 절댓값 합의 최소 — 간단한 예로 살펴보기

우선 제일 간단한 경우로 $n = 2$ (짝수)이고 $x_1 = 0, x_2 = 1$, 즉 $|b| + |1 - b|$ 를 생각해 보면, $(0, 0), (1, 0)$ 을 지나는 2개의 절댓값 함수들의 합으로 0보다 작은 영역에서는 -2 의 기울기로 감소하다가 0과 1 사이에서는 상숫값을 갖고 1보다 큰 영역에서는 2의 기울기로 증가하는 연속함수이다. 따라서 함수값을 최소로 하는 b 값은 0과 1 사이의 모든 값이다.

간단하지만 다른 형태인 $n = 3$ (홀수)이고 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$, 즉 $|b| + |1 - b| + |2 - b|$ 를 생각해 보면, $(0, 0), (1, 0), (2, 0)$ 을 지나는 절댓값 함수들의 합으로 0보다 작은 영역에서는 -3 의 기울기로 감소하다가 0과 1 사이에서는 -1 의 기울기를 갖고 1과 2 사이에서는 1의 기울기, 그리고 2보다 큰 영역에서는 3의 기울기로 증가하는 연속함수이다. 따라서 함수값을 최소로 하는 b 값은 1이 유일하다.



예시 작도 — 회색은 각 절댓값 함수, 남색은 그 합, 붉은색은 최솟값을 주는 b 의 범위

일반적인 경우 — $x_k \leq b \leq x_{k+1}$ 이라면

$$x_1 - b \leq \dots \leq x_{k-1} - b \leq x_k - b \leq 0 \leq x_{k+1} - b \leq \dots \leq x_n - b$$

이므로

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{i=1}^n |x_i - b| \\ &= (b - x_1) + \dots + (b - x_{k-1}) + (b - x_k) + (x_{k+1} - b) + \dots + (x_n - b) \\ &= (k - (n - k))b - \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{j=k+1}^n x_j \\ &= (2k - n)b + \text{constant} \end{aligned}$$

인 연속함수로 x_k 와 x_{k+1} 사이에서 $2k - n$ 의 기울기를 갖는다.

이때,

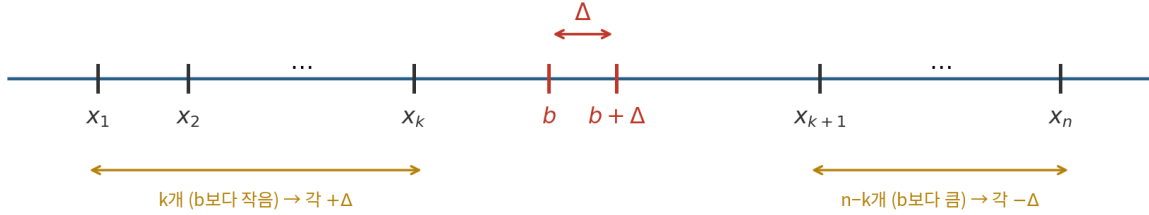
- $n = 2m$ 으로 짝수라면 $k = m = n/2$ 일 때, 즉 b 가 x_m 와 x_{m+1} 사이일 때는 기울기가 0이 되어 구하는 b 는 x_m 와 x_{m+1} 사이의 모든 값이다. 참고로, x_{m-1} 와 x_m 사이에서는 -2 의 기울기를, x_{m+1} 와 x_{m+2} 사이에서는 2의 기울기를 갖는다.

- $n = 2m + 1$ 로 홀수라면 $k = m = (n - 1)/2$ 으로 b 가 x_m 와 x_{m+1} 사이일 때 -1 의 기울기를, $k = m + 1$ (즉 $(n + 1)/2$)로 b 가 x_{m+1} 와 x_{m+2} 사이일 때는 1의 기울기를 갖게 되어 $b = x_{m+1}$ 에서 유일한 최솟값을 갖는다.

이 값은 통계학에서 중앙값(median)으로 불린다.

$n = 2m$ (짝수): $x_m \leq b \leq x_{m+1}$ 인 모든 b
 $n = 2m + 1$ (홀수): $b = x_{m+1}$ — 두 경우 모두 $x_1, \dots, x_n$ 의 중앙값

(다른 풀이) $x_k \leq b \leq x_{k+1}$ 라 하자. 적당한 크기의 양수 Δ 에 대해서 대소 관계들을 다음과 같이 그릴 수 있다.



예시 작도 $-b$ 를 $b + \Delta$ 로 옮겼을 때 각 항의 변화

b 가 $b + \Delta$ 로 변화할 때, $f(b + \Delta)$ 의 증감을 살펴보면

$$f(b) = \sum_{i=1}^k (b - x_i) + \sum_{i=k+1}^n (x_i - b)$$

$$f(b + \Delta) = \sum_{i=1}^k (b + \Delta - x_i) + \sum_{i=k+1}^n (x_i - b - \Delta) = f(b) + k\Delta - (n - k)\Delta = f(b) + (2k - n)\Delta$$

즉, $b \rightarrow b + \Delta$ 로 변할 때 $(2k - n)\Delta$ 만큼 증감한다. (b 보다 작은 k 개에 대하여 $k\Delta$ 만큼 증가하고, b 보다 큰 $(n - k)$ 개에 대하여 $(n - k)\Delta$ 만큼 감소한다.) 따라서,

- $k < n - k$ 이면 ($2k - n < 0$ 이면), 양의 Δ 에 대하여 $f(b + \Delta)$ 가 감소하고,
- $k > n - k$ 이면 ($2k - n > 0$ 이면), 음의 Δ 에 대하여 $f(b + \Delta)$ 가 감소한다.

즉, b 의 좌우에 있는 x_i 의 개수가 다른 경우($k \neq n - k$), 적절한 b 의 증감이 $f(b)$ 를 감소시킬 수 있으므로 $k = n - k$ 인 중앙값에서 함숫값이 최소가 된다. 최종적으로, n 이 짝수인지 홀수인지에 따라서 두 경우로 나누어 생각하면 이전 방법으로 구한 답을 얻는다.

2019학년도 · 해설편

- 문제 1** 트랙 위를 구르는 원 위 한 점의 궤적
문제 2 이차함수의 판별식과 조건부확률

-
- 단원** 함수·극한·미적분 · 기하·벡터 · 확률과 통계 · 방정식·부등식
핵심 개념 수열의 극한과 정적분, 판별식과 조건부확률, 삼각함수의 극한과 공간좌표, 대칭
이동과 삼각함수의 미분
문항 수 전형별 2문항, 총 4문항

II. 예시답안

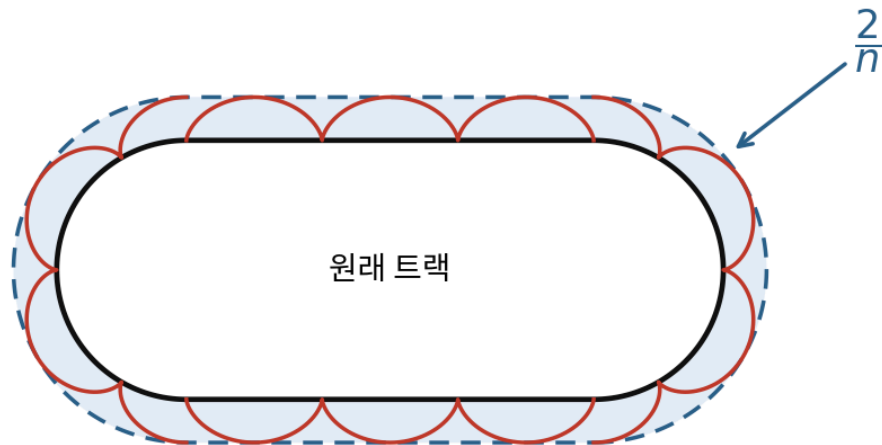
일반전형

문제 1 트랙 위를 구르는 원 위 한 점의 궤적

극한의 대소 관계 · 사이클로이드 · 곡선의 길이

(1) 궤적으로 둘러싸인 넓이의 극한

작은 원의 지름이 $2/n$ 이므로, 원 위에 고정된 점은 트랙에서 바깥쪽으로 최대 $2/n$ 만큼 떨어질 수 있다. 즉 이 궤적으로 둘러싸인 영역 A 는 원래 트랙(실선)과 거기에서 $2/n$ 만큼 떨어진 트랙(점선) 사이에 존재하므로, 그 면적은 두 트랙의 면적 사이에 있다.



바깥 트랙 (점선)

작은 원 위 고정점의 궤적

원래 트랙(실선)과 $2/n$ 만큼 바깥쪽인 트랙(점선), 그리고 그 사이의 궤적

원래 트랙은 반지름 1인 반원 2개(= 반지름 1인 원 1개)와 $\pi \times 2$ 인 직사각형으로 이루어지므로 그 면적은 $\pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 2 = 3\pi$ 이다. 바깥 트랙은 반원의 반지름이 $1 + 2/n$, 직사각형의 세로가 $2 + 4/n$ 이므로

$$\pi + 2\pi \leq A \leq \pi \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \pi \left(2 + \frac{4}{n}\right)$$

이고, 오른쪽 변은

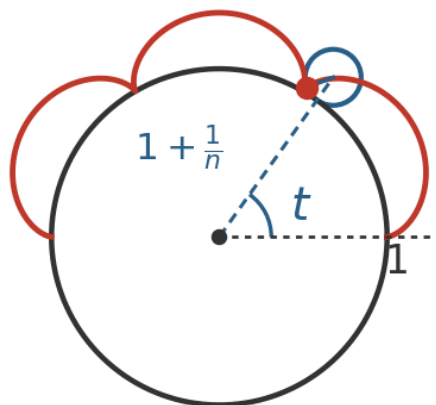
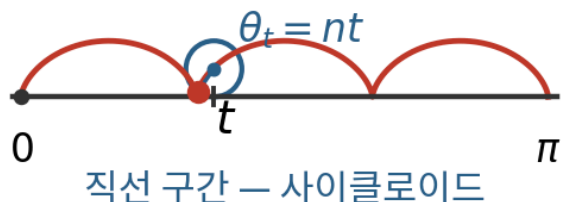
$$\pi \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \pi \left(2 + \frac{4}{n}\right) = 3\pi + \frac{8\pi}{n} + \frac{4\pi}{n^2}$$

이다. 두 트랙 사이의 튜브 면적이 0으로 수렴하므로 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A = 3\pi$$

(2) 궤적의 곡선의 길이

전체 궤적은 직선 구간 2개(위·아래)와 원호 구간 2개(좌·우)로 나뉜다. 곡선(반원) 부분과 직선 부분의 길이가 모두 π 로, 작은 원의 둘레 $2\pi/n$ 의 $n/2$ 배이고 n 은 짝수이므로 정수배가 된다. 따라서 작은 원 위 고정점의 위치(각도)는 각 구간의 시작과 끝에서 제자리가 되고, 네 구간의 궤적을 따로 계산해 더할 수 있다.



원호 구간 — 에피사이클로이드

직선 구간과 원호 구간에서 작은 원이 구를 때 고정점이 그리는 궤적

직선 구간 — 직선 위를 구르는 경우 고정된 점이 그리는 궤적은

$$(x(t), y(t)) = \left(t - \frac{1}{n} \sin nt, \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \cos nt \right), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

이므로, $(x'(t), y'(t)) = (1 - \cos nt, \sin nt)$ 를 대입하여

$$\int_0^\pi \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^\pi \sqrt{2 - 2 \cos nt} dt = \int_0^\pi 2 \left| \sin \frac{nt}{2} \right| dt$$

를 얻는다. $u = nt$ 로 치환하면 피적분함수의 주기가 2π 이고 n 이 짝수이므로

$$\frac{1}{n} \int_0^{n\pi} 2 \left| \sin \frac{u}{2} \right| du = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{u}{2} du = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

따라서 직선 구간을 구를 때의 궤적은 아래·위 합하여 8이 된다.

원호 구간 — 작은 원의 중심의 좌표는 $((1 + \frac{1}{n}) \cos t, (1 + \frac{1}{n}) \sin t), 0 \leq t \leq \pi$ 이다. 작은 원의 중심이 t 만큼 회전할 때 작은 원 자체는 nt 만큼 회전하는데, 이동한 원의 중심에서 본 각도는 $nt + t$ 만큼 회전하게 된다. $t = 0$ 일 때 작은 원의 중심에서 본 고정점의 각이 π 에서 시작하므로, 고정점의 (작은 원의 중심에 대한) 각은 $t + nt + \pi$ 가 된다. 따라서 $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta, \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ 를 이용하면 궤적의 매개좌표는 아래와 같다.

$$x(t) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos t - \frac{1}{n} \cos((n+1)t), \quad y(t) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin t - \frac{1}{n} \sin((n+1)t)$$

곡선의 길이를 구하기 위해

$$x'(t) = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin t + \frac{n+1}{n} \sin((n+1)t), \quad y'(t) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos t - \frac{n+1}{n} \cos((n+1)t)$$

를 계산하여 길이를 구하면, $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt &= \frac{n+1}{n} \int_0^\pi \sqrt{2 - 2[\sin t \sin((n+1)t) + \cos t \cos((n+1)t)]} dt \\ &= \frac{n+1}{n} \int_0^\pi \sqrt{2 - 2 \cos nt} dt = 4 \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

이다. 따라서 원호 구간을 구할 때의 궤적은 좌·우 합하여 $8(n+1)/n$ 이 된다.

원호 구간 2번과 직선 구간 2번을 모두 더하면

$$L_n = 8 + 8 \frac{n+1}{n} = 16 + \frac{8}{n} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 16$$

(다른 풀이) 원호 구간을 둘 때 궤적의 길이는 n 이 커지면 직선 구간을 둘 때 궤적의 길이로 수렴하는데, 이것은 n 이 커지면 $1/n$ 스케일에서 보았을 때(즉, 작은 원의 입장에서 보았을 때) 반지름이 1인 원이 거의 평평한 직선으로 근사되기 때문이다. 따라서 극한값이 직선 구간을 둘 때 궤적의 길이(4π 를 굴렸을 때)와 같다는 것을 계산 없이 짐작할 수 있다.

문제 2 이차함수의 판별식과 조건부확률

판별식 · 근과 계수의 관계 · 조건부확률

(1) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 일 확률

2차식이 항상 0 이상이 되려면 그 **판별식의 값이 0 이하**가 되어야 한다. 즉 $D = a^2 - 4b \leq 0$ 이어야 하므로 $a \leq \sqrt{4b}$ 를 만족시켜야 한다. 그러한 경우의 수는 $b = 1, 2, \dots, 6$ 에 대하여 각각 $\lceil \sqrt{4b} \rceil$ 개씩 있다. ($\lceil x \rceil$ 는 x 보다 크지 않은 가장 큰 정수를 나타내는 기호)

경우의 수를 다 합하면

$$\lceil \sqrt{4} \rceil + \lceil \sqrt{8} \rceil + \lceil \sqrt{12} \rceil + \lceil \sqrt{16} \rceil + \lceil \sqrt{20} \rceil + \lceil \sqrt{24} \rceil = 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4 = 19$$

총 36개 경우 중에서 이렇게 될 확률을 구하는 것이므로

$$P(a^2 - 4b \leq 0) = \frac{19}{36}$$

경우를 모두 써 보면 $(a, b) = (1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6)$ 이다.

(별해) $b \geq a^2/4$ 라는 것에 착안하여 $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 각각별로 셀 수도 있다. $a = 1, 2$ 이면 $b = 1 \sim 6$, $a = 3$ 이면 $b = 3 \sim 6$, $a = 4$ 이면 $b = 4 \sim 6$, $a = 5, 6$ 이면 가능한 b 가 없으므로 $12 + 4 + 3 = 19$ 가지이다.

(2) r 의 기댓값

근과 계수 사이의 관계를 사용하면 $f(x) = 2019$, 즉 $x^2 + ax + (b - 2019) = 0$ 의 두 해의 합은 $-a$ 이므로, a, b 를 고정한 상황에서 r 의 기댓값은 두 해의 평균인

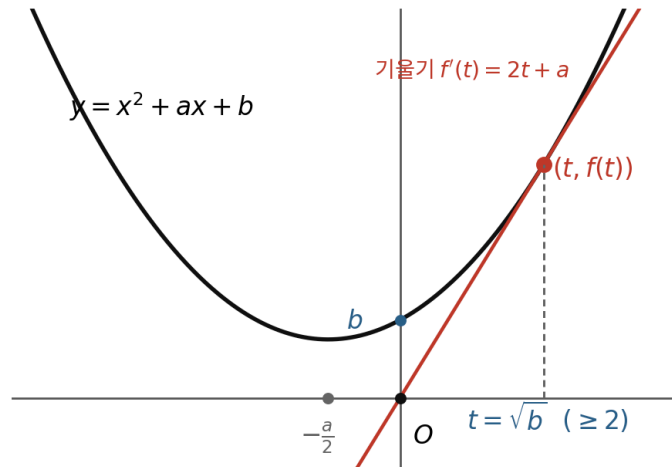
$$E[r | a, b] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = -\frac{a}{2}$$

가 된다. a 가 1부터 6까지 변할 수 있고 같은 확률로 나타나므로 a 의 기댓값은 그 평균인 $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6 = 3.5$ 가 된다. 따라서

$$E(r) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = -\frac{7}{4} = -1.75$$

(3) 접선이 원점을 지나며 $t \geq 2$ 인 t 가 존재할 확률

이 문제는 조건부 확률을 묻는 문제이다.



$(t, f(t))$ 에서의 접선이 원점을 지나는 상황 — 접점의 x 좌표는 $t = \sqrt{b}$

첫 번째 풀이 — 곡선 위의 점에서 접선의 방정식을 이용

$(t, f(t))$ 에서 접선의 기울기는 $f'(t) = 2t + a$ 이다. 따라서 접선의 방정식을 써 보면 $y - f(t) = (2t + a)(x - t)$ 가 된다. 이 접선이 y 축을 만나는 지점은 $x = 0$ 을 대입하면

$$y = f(t) - t(2t + a) = t^2 + at + b - (2t^2 + at) = -t^2 + b$$

임을 얻는다. 이때 $y = 0$ 이 되려면 $-t^2 + b = 0$ 이어야 한다. 따라서 $t = \sqrt{b}$ 이고, $t \geq 2$ 가 되려면 $b \geq 4$ 가 되어야 한다.

$b \geq 4$ 이면서 $a^2 - 4b \leq 0$ 인 경우는 $[\sqrt{16}] + [\sqrt{20}] + [\sqrt{24}] = 4 + 4 + 4 = 12$ 가지가 있다. 따라서 이 문제가 묻는 조건부 확률, 즉 $a^2 - 4b \leq 0$ 인 경우에 $b \geq 4$ 가 될 확률은 전체 19개 경우 중 12가지 경우이므로

$$P(t \geq 2 | f(x) \geq 0) = \frac{12}{19}$$

두 번째 풀이 — 원점을 지나고 이 곡선에 접하는 직선의 방정식을 찾는 방식

$(0, 0)$ 을 지나고 $y = f(x)$ 에 접하는 직선을 $y = sx$ 라고 하자. 이 직선이 $y = f(x)$ 에 접해야 하므로 $f(x) = sx$ 라는 식의 해가 중근이 나와야 한다. 따라서 $x^2 + ax + b = sx$ 의 판별식은 0, 즉 $(a - s)^2 - 4b = 0$ 이 되어야 하고 이것을 풀면 $s = a \pm \sqrt{4b}$ 가 된다.

일단 $f(x)$ 가 항상 0 이상이라고 하였고 (1)에서 그렇게 될 조건이 $a^2 \leq 4b$ 임을 알고 있기 때문에 $a - \sqrt{4b} \leq 0$ 이 된다. 그런데 원점에서 기울기가 0 이하인 직선이라면 $y = f(x)$ 를 만나는 곳은 $x < 0$ 인 곳밖에 될 수 없다. 따라서 $x \geq 2$ 인 곳에서 $y = sx$ 가 $y = f(x)$ 를 만나려면 $s = a + \sqrt{4b}$ 이어야 한다.

$x^2 + ax + b = (a + \sqrt{4b})x$ 식을 풀면 $(x - \sqrt{b})^2 = 0$ 이 나와서 $x = \sqrt{b}$ 가 된다. (혹은 이 식을 미분하여 얻어지는 $2x + a = s$ 에서 x 를 구할 수도 있다.)

따라서 $\sqrt{b} \geq 2$ 가 될 확률, 즉 $a^2 - 4b \leq 0$ 인 경우에 $b \geq 4$ 가 될 확률을 구하면 되고, 이제 남은 부분은 첫 번째 풀이와 같다.

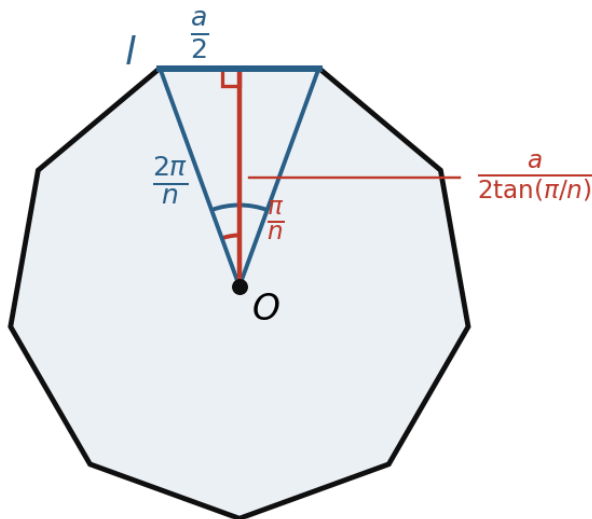
학교장추천전형 · 고른기회전형

문제 1 정다각형 넓이의 극한과 정이십각형 각뿔의 부피

삼각함수의 극한 · 공간좌표 · 각뿔의 부피

(1) 넓이의 비의 극한

한 변의 길이가 a 이고 n 개의 변을 가진 정다각형을 $A_n(a)$ 이라고 하자. $A_n(a)$ 의 외접원의 중심에서 $A_n(a)$ 의 한 변 l 에 수직으로 그은 선분의 길이는 $a/(2\tan(\pi/n))$ 이다.

정 n 각형의 중심각 $2\pi/n$ 과 변까지의 수선의 길이

따라서 외접원의 중심과 변 l 의 두 꼭짓점으로 이루어진 삼각형의 넓이는 $a^2/(4\tan(\pi/n))$ 이 된다. 다각형 $A_n(a)$ 은 이와 같은 n 개의 삼각형으로 분할되기에

$$S_n(a) = \frac{na^2}{4\tan(\frac{\pi}{n})}$$

을 얻게 된다. 치환 $t = 1/n$ 과 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 을 이용하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{mn}(a)}{S_n(a)} = m \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan(\frac{\pi}{n})}{\tan(\frac{\pi}{mn})} = m^2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \cdot \frac{\frac{\pi t}{m}}{\sin(\frac{\pi t}{m})} \cdot \frac{\cos(\frac{\pi t}{m})}{\cos(\pi t)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{mn}(a)}{S_n(a)} = m^2$$

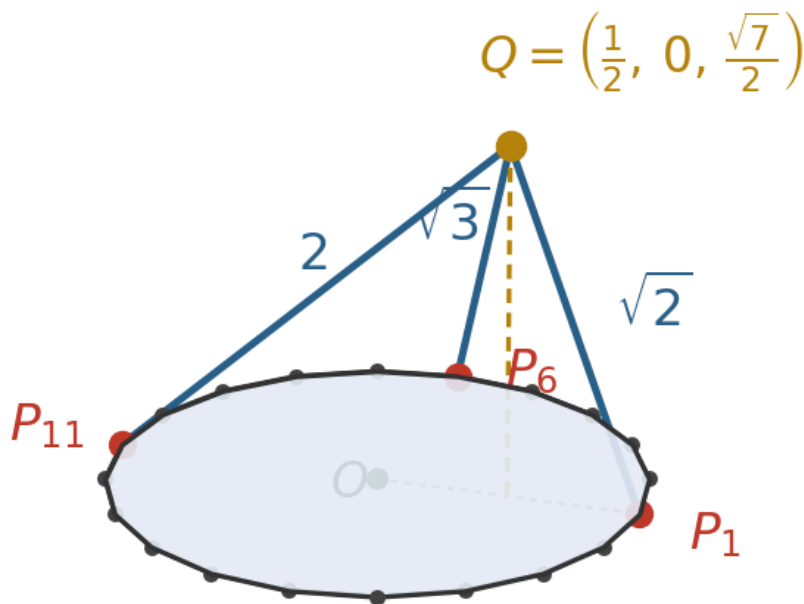
(로피탈 정리를 적용해

$$m \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan(\pi/n)}{\tan(\pi/(mn))} = m \cdot \frac{\pi(-1/n^2)\sec^2 0}{(\pi/m)(-1/n^2)\sec^2 0} = m^2$$

를 구해도 된다.)

(2) 각뿔 A 의 부피

3차원 좌표를 도입해 다음과 같이 각뿔을 표현하자. 주어진 정다각형을 xy 평면에 놓고 외접원의 중심이 원점 O 가 되게 하자. 변의 길이가 $2\sin(\pi/20)$ 이므로 외접원의 반지름 R 은 $2R\sin(\pi/20) = 2\sin(\pi/20)$ 에서 $R = 1$ 이 되고, 회전을 통해 꼭짓점 P_1 을 x 축에 위치시키면 $P_1 = (1, 0, 0)$ 이 된다. 각 P_1OP_2 가 $\pi/10$ 이고 꼭짓점 P_6, P_{11} 이 각각 꼭짓점 P_1 으로부터 5번째, 10번째에 위치하므로 이들의 좌표는 $P_6 = (0, 1, 0), P_{11} = (-1, 0, 0)$ 이 된다.



xy 평면 위의 정이십각형과 밑면 밖의 꼭짓점 Q

각뿔 A 의 밑면 밖에 있는 꼭짓점을 $Q = (x, y, z)$ 라고 하자. 주어진 세 선분의 길이가 각각 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$ 이므로 좌표를 이용한 두 점 사이의 거리로부터 세 개의 방정식

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3, \quad (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4$$

를 얻게 되고, 이로부터 $x-y = \frac{1}{2}, x+y = \frac{1}{2}$ 를 얻을 수 있다. 즉 $x = \frac{1}{2}, y = 0$ 이 된다. x, y 를 위 세 방정식 중 하나에 대입하면 $z = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 를 얻게 된다.

따라서 A 의 부피는

$$\begin{aligned} \frac{S_{20}(2\sin(\frac{\pi}{20})) \cdot z}{3} &= \frac{20 \cdot (2\sin(\frac{\pi}{20}))^2}{3 \cdot 4 \tan(\frac{\pi}{20})} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{10\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{\sin^2(\frac{\pi}{20})}{\tan(\frac{\pi}{20})} \\ &= \frac{10\sqrt{7}}{3} \sin\left(\frac{\pi}{20}\right) \cos\left(\frac{\pi}{20}\right) = \frac{10\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{10})}{2} \end{aligned}$$

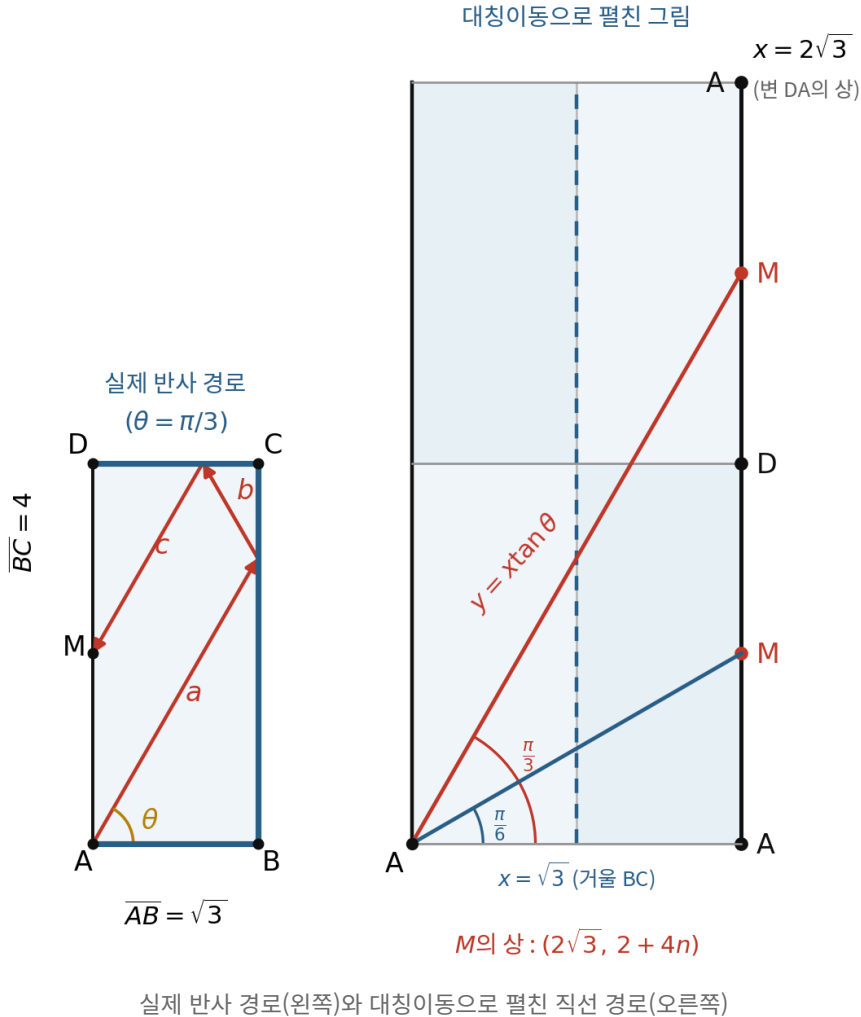
$$V = \frac{5\sqrt{7}}{3} \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{175}{9}} \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \approx 1.363$$

문제 2 거울 직사각형 안에서의 빛의 반사

대칭이동 · 삼각함수의 미분 · 순간변화율

좌표평면 위에서 A가 (0, 0), B가 $(\sqrt{3}, 0)$, C가 $(\sqrt{3}, 4)$, D가 (0, 4) 에 있다고 하자.

이 문제를 쉽게 풀기 위해서는 빛이 반사되어 움직이는 대신 **빛은 직선으로 이동하고 대신 원래 그림을 그 직선으로 대칭 이동시켜서** 생각하는 것이 편리하다. 그러면 결국 아래 오른쪽 그림처럼 $y = 8, 16, 24, \dots$ 와 같은 직선은 직선 AB와 같아지며, $y = 4, 12, 20, \dots$ 과 같은 직선은 직선 CD와 같아진다. 직선 BC에 대칭이동시켜 생각하면 $x = 2\sqrt{3}$ 은 직선 DA와 같다.



(1) P가 처음으로 M과 같아질 때의 θ

점 M은 (0, 2) 에 위치하며, 이 점은 정수 n 에 대하여 $(2\sqrt{3}, 2 + 4n)$ 와 같다. x 를 증가시켰을 때 가장 먼저 만나는 점은 $(2\sqrt{3}, 2)$ 이 되고, 원점에서 $(2\sqrt{3}, 2)$ 를 잇는 직선의 기울기는

$$\tan \theta = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad (= 30^\circ)$$

(다른 풀이) 대칭성을 착안하지 못하여도 다음처럼 풀 수 있다. 빛이 처음으로 M을 만나려면 빛이 $\overline{BC}$ 위의 점 $(\sqrt{3}, 1)$ 에서 반사하면 된다. 따라서 각도는 $\tan \theta = 1/\sqrt{3}$ 에서 얻을 수 있다.

(2) $\theta = \pi/3$ 일 때의 이동 거리와 $\overline{AP}$

θ 가 $\pi/3$ 인 경우 $\tan \theta = \sqrt{3}$ 이므로 $y = \sqrt{3}x$ 인 직선이 $x = 2\sqrt{3}$ 인 직선을 만나는 지점은 $(2\sqrt{3}, 6)$ 이 된다. 이때 $(2\sqrt{3}, 4)$ 는 D와 같고 $(2\sqrt{3}, 8)$ 은 A와 같으므로 P는 M과 같아진다. 즉 P와 A 사이 거리는 2가 된다.

한편 빛이 이동한 거리는 피타고라스 정리에 의해 $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{12 + 36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ 이 된다.

A에서 P까지 이동한 총 거리 = $4\sqrt{3}$ 선분 AP의 길이 = 2

(참고) 대칭성을 착안하지 못하여도 빛의 반사 경로를 직접 추적하여 구할 수 있다. 앞 그림의 왼쪽처럼 경로를 세 부분 a, b, c 로 나누면

$$a = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}, \quad b = \sqrt{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, \quad c = \sqrt{\frac{12}{9}+4} = \frac{\sqrt{12+36}}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$a+b+c = \left(2+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

(3) P가 n 번째로 M과 같아질 때의 속력 a_n

P의 직선 $x = 2\sqrt{3}$ 위에서의 y 좌표를 y 라고 하면 $y = 2\sqrt{3}\tan \theta$ 가 된다. 1초당 θ 가 $\sqrt{3}/2$ 씩 일정하게 증가하므로 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 따라서

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(2\sqrt{3}\tan \theta)}{dt} = 2\sqrt{3}\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = 3\sec^2 \theta$$

가 된다. 한편 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 의 양변을 $\cos^2 \theta$ 로 나누면 $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 임을 얻는다. 따라서 대입하면 $\frac{dy}{dt} = 3(1 + \tan^2 \theta)$ 를 얻는다.

이제 P가 n 번째로 M이 된다면 $y = 2 + 4(n-1)$ 이 되어야 하므로 $4n-2 = 2\sqrt{3}\tan \theta$ 가 되어서 $\tan \theta = \frac{4n-2}{2\sqrt{3}} = \frac{2n-1}{\sqrt{3}}$ 이 된다. 이것을 위 식에 대입하면 n 번째로 P가 M을 만날 때 이동속도가 아래 식으로 구해진다.

$$a_n = \frac{dy}{dt} = 3\left(1 + \left(\frac{2n-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) = 3\left(1 + \frac{(2n-1)^2}{3}\right) = 3 + (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 4$$

핵심 개념 색인

각 학년도 문항이 다루는 핵심 개념과 그 개념이 등장한 학년도. 같은 개념이 여러 해에 반복되는지 한눈에 확인할 수 있다.

곡선의 길이(신개선)	2022
공간에서의 직선과 평면	2023
귀납적으로 정의된 수열	2025
극댓값·최댓값	2024
닮음과 정사영	2023
대칭이동과 삼각함수의 미분	2019
두 원의 공통내접·외접 조건	2021
미분	2023
미분불가능한 함수의 최솟값	2020
부분적분법과 확률밀도함수	2020
삼각방정식과 삼각함수의 그래프	2020
삼각함수의 극한	2023, 2021
삼각함수의 극한과 공간좌표	2019
삼각함수의 덧셈정리	2022
삼각함수의 합성과 미분	2024
삼각함수의 합성과 최대·최소	2023
삼차방정식의 실근의 개수	2025
세 점이 한 직선 위에 있을 조건	2024
수열의 극한과 정적분	2019
수학적 귀납법	2025
쌍곡선과 점근선	2026
원 위를 움직이는 점의 매개변수 표시	2024
원의 방정식	2026
원의 접선과 할선	2025
원의 현과 피타고라스 정리	2022
유리함수의 최대·최소	2021
이산확률변수의 기댓값과 이항정리	2021
이차방정식의 판별식	2021
이차방정식의 판별식과 근과 계수의 관계	2023
이차함수의 최솟값	2020
이항계수와 조건부확률	2023
적분과 미분의 관계	2020
점과 직선 사이의 거리	2021
정다각형의 넓이·둘레	2023
정육각형 격자 위의 확률	2026
정적분과 구분구적법	2022
조건부확률	2020
직선·구의 방정식과 벡터의 내적	2020
집합	2025
치환적분법	2020
코사인법칙	2026, 2022
판별식과 조건부확률	2019
평면벡터의 내적	2026, 2022
평행광선에 의한 그림자와 정사영	2021
피타고라스 정리	2025
함수의 증가와 감소	2025
확률의 덧셈정리·곱셈정리	2026

KAIST 수학 기출 문항집

해설편 · 2019-2026 · 19문항 (8개년)

발행일	2026년 8월 17일 초판 발행
발행인	김민용
발행처	연주미디어
연락처	blueslap@naver.com
사업자등록번호	459-94-01364

문항과 제시문의 저작권은 원 출제 기관에 있으며, 편집·구성 및 예시답안의 저작권은 연주미디어에 있습니다.

이 책의 내용 일부 또는 전부를 저작권자의 서면 동의 없이 복제·배포·전송할 수 없습니다. 잘못 만들어진 책은 구입처에서 바꾸어 드립니다.

써봄 AI 논술 자동 첨삭

쓴 글을 올리면, 바로 채점과 피드백이 돌아옵니다.

무료

3회 무료 분석

회원가입만 하면 3회까지 무료로 분석해 드립니다.

결제 정보 없이 바로 시작할 수 있습니다. 첨삭 결과는 PDF 리포트로 내려받을 수 있습니다.

네 가지 영역을 점수로 보여 줍니다

- 논리 구조
- 근거 타당성
- 주장 명확성
- 언어 표현

받아 보는 것

영역별 점수와 함께 **강점, 개선점, 구체적 제안사항**이 담긴 상세 피드백이 나옵니다.

이런 분께

혼자 쓴 답안을 바로 점검하고 싶은 **수험생**, 여러 학생 글을 한 번에 채점해야 하는 **논술 교사·강사·학원**.



writegrow.net

QR 을 찍으면 바로 열립니다

이용 방법

1

회원가입

이메일로 가입하면 곧바로 무료 분석 3회가 주어집니다.

2

답안 올리기

PDF · DOCX · TXT 파일을 올립니다. 한 번에 최대 10편까지 일괄 처리됩니다.

3

첨삭 받기

영역별 점수와 상세 피드백을 확인하고 PDF 리포트로 내려받습니다.