서울대학교 2026년도 면접 및 구술고사

[문제 1] 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

민호는 1그램, 영희는 2그램의 금을 보유하고 있고, 다음 [규칙]에 따라 금을 주고받는 시행을 한다.

(가) 어떤 실수 a $(0 \le a \le 1)$에 대하여, 민호는 a그램의 금을 영희에게 지급한다.
이때, a의 값을 투자량이라고 한다.

(나) 어떤 실수 b $(0 \le b \le 1)$에 대하여, 공정한 주사위를 한 번 던져 그 결과에 따라 영희는 민호에게 다음과 같이 금을 지급한다.

- 나온 눈의 수가 2 이하이면 투자량 1그램 당 $(2+b)$그램의 금을 지급
- 나온 눈의 수가 3 이상이면 투자량 1그램 당 $(1-b)$그램의 금을 지급

이때, b의 값을 활성도라고 한다.

위 [규칙]에 주어진 a와 b의 값은 (나)에서 주사위를 던지기 전에 다음 두 방식 중 하나로 결정된다.

[방식 1] 영희가 먼저 b를 결정하여 공지하면, 민호는 그 값을 알고 a를 결정

[방식 2] 민호가 먼저 a를 결정하여 공지하면, 영희는 그 값을 알고 b를 결정

민호와 영희가 시행의 결과로 보유하게 될 금의 그램 수를 나타내는 확률변수를 각각 X와 Y라고 하자. 민호와 영희는 평균을 기대수익으로, 분산을 위험도로 간주한 후, 각자 적절한 자산관리지표를 설정한다.

[1-1] 주어진 두 실수 a, b $(0 \le a \le 1,\ 0 \le b \le 1)$에 대하여, 투자량이 a로, 활성도가 b로 결정되었을 때, 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하시오.

[1-2] 주어진 실수 b $(0 \le b \le 1)$에 대하여 영희가 먼저 활성도를 b로 결정하여 공지하였다. 민호의 자산관리지표 U는 다음과 같다.

$$\mathrm{U} = \mathrm{E}(X) - \frac{1}{2}\mathrm{V}(X)$$

범위 $0 \le a \le 1$에서 자산관리지표 U의 값이 최대가 되도록 하는 투자량 a의 값을 민호의 최적 투자량이라고 할 때, 이 값을 구하시오.

[1-3] 주어진 실수 a $(0 \le a \le 1)$에 대하여 민호가 먼저 투자량을 a로 결정하여 공지하였다. 영희의 자산관리지표 W는 다음과 같다.

$$\mathrm{W} = \mathrm{E}(Y) - \frac{1}{2}\mathrm{V}(Y)$$

범위 $0 \le b \le 1$에서 자산관리지표 W의 값이 최대가 되도록 하는 활성도 b의 값을 영희의 최적 활성도라고 할 때, 이 값을 구하시오. (단, W의 값이 최대가 되도록 하는 b의 값이 여러 개인 경우, 그 값들을 모두 최적 활성도라고 한다.)

[1-4] 다음 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)를 모두 구하시오. (단, $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$)

(ㄱ) 영희가 먼저 활성도를 b로 결정하여 공지했을 때, a는 민호의 최적 투자량이다.
(ㄴ) 민호가 먼저 투자량을 a로 결정하여 공지했을 때, b는 영희의 최적 활성도이다

[문제 2] 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

(가) 세 문자 x, y, z로 이루어진 단항식, 간단하게 단항식은 실수 a와 음이 아닌 정수 l, m, n에 대해 $ax^l y^m z^n$과 같이 표현되는 식을 의미한다. 세 문자 x, y, z로 이루어진 다항식, 간단하게 다항식은 단항식들의 합으로 표현되는 식을 의미한다. 특히, 0을 포함한 실수 또한 다항식으로 본다.

(나) 두 다항식 p와 q에 대하여, 어떤 실수 a, b, c를 p와 q의 세 문자 x, y, z에 대입($x=a$, $y=b$, $z=c$) 하여 얻은 식의 값이 서로 다르면 p와 q는 서로 다른 다항식이다.

(다) 계수가 1인 단항식을 기본 단항식이라 한다. 즉, 기본 단항식은 음이 아닌 정수 l, m, n에 대하여 $x^l y^m z^n$과 같이 표현되는 단항식을 의미한다. 이때, 기본 단항식 $x^l y^m z^n$의 차수는 $l+m+n$을 의미한다.

(라) 세 다항식 p_1, p_2, p_3이 주어져 있을 때, 어떤 세 다항식 q_1, q_2, q_3에 대하여
$r = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$과 같이 다항식의 합과 곱을 이용하여 나타낼 수 있는 기본 단항식 r을 p_1, p_2, p_3의 열매라고 한다.

예를 들어, 세 다항식 $p_1 = x^2 + 3yz$, $p_2 = 7xz + 4z^2$, $p_3 = 2xy$는

$$x^4 = (x^2+3yz)x^2 + (7xz+4z^2)(-xy) + (2xy)(2xz+2z^2)$$

을 만족하므로 기본 단항식 x^4은 p_1, p_2, p_3의 열매이다.

[2-1] 차수가 4인 기본 단항식 가운데 다음 세 다항식 p_1, p_2, p_3의 열매가 아닌 것의 개수를 구하시오.

$$p_1 = 2x^2 - 2xy - xz + yz,\ p_2 = 2xy - xz - 2y^2 + yz,\ p_3 = 4xy - 2xz - 2yz + z^2$$

[2-2] 실수 a에 대하여 세 다항식 p_1, p_2, p_3이 다음과 같이 주어져 있다.

$$p_1 = x^2 - y^2 + yz,\ p_2 = ax^2 + xz + y^2,\ p_3 = z^2$$

기본 단항식 가운데 p_1, p_2, p_3의 열매가 아닌 것이 무수히 많도록 하는 a의 값을 구하시오.

[2-3] 다음 세 다항식 p_1, p_2, p_3의 열매 중 차수가 4인 것을 모두 구하시오.

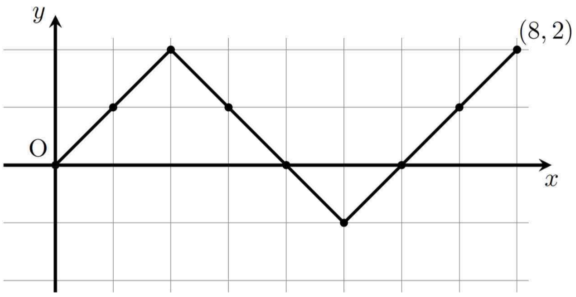
$$p_1 = x^2 - y^2 + yz,\ p_2 = x^2 + xz + y^2,\ p_3 = z^2$$

[문제 3] 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

자연수 n에 대하여 $-2n \le k \le 2n$을 만족하는 정수 k가 주어져 있을 때, 다음 조건을 모두 만족하며 좌표평면 위를 움직이는 도둑이 있다.

(가) 점 (x, y)에 위치한 도둑은 한 번 움직일 때마다 점 $(x+1, y+1)$ 또는 $(x+1, y-1)$까지 최단 거리로 이동한다.
(나) 도둑은 원점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서 출발해 $4n$번 움직여 점 $(4n, 2k)$에 도착한다.

도둑이 이동하는 동안 지나간 모든 점들의 집합을 **도주경로**라 하자. (단, 도둑의 크기는 무시한다.)
예를 들어, [그림 1]은 $n=2$이고 $k=1$일 때 가능한 도주경로 중 하나를 나타낸 것이다.



[그림 1]

경찰은 도둑이 점 $(4n, 2k)$에 도착하였다는 제보를 받고, 도둑의 가능한 모든 도주경로 중 하나를 임의로 선택하여 수사를 진행한다. (단, 각 도주경로가 선택될 확률은 모두 같다.) 경찰이 선택한 도주경로가 세 점 $(2n, 2n)$, $(2n, 0)$, $(2n, -2n)$중 하나를 포함하면 경찰은 **단서를 발견**한다고 하자.

[3-1] 자연수 n의 값이 3이고 정수 k의 값이 0, 2, 4일 때, 경찰이 단서를 발견할 확률을 각각 구하시오.

[3-2] 자연수 n에 대하여, 정수 k의 값이 $2n-3$일 때 경찰이 단서를 발견할 확률을 p_n이라 하자. 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} p_n$$

[3-3] 주어진 자연수 n $(n \ge 2)$에 대하여, 경찰이 단서를 발견할 확률이 최소가 되도록 하는 정수 k의 값을 모두 구하시오.

[3-4] 자연수 n에 대하여, 정수 k의 값이 [3-3]에서 구한 값 중 가장 큰 값일 때 경찰이 단서를 발견할 확률을 q_n이라 하자. 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln q_n$$

[문제 4] 양의 실수 s가 주어져 있다. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1, s)$와 $\mathrm{B}(s+1, 0)$에 대하여, 다음을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$를 어떤 실수 k, a, b에 대하여 다음과 같이 나타낼 수 있을 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 꺾인 선이라고 한다. $$f(x)=\begin{cases} k(x-a)+b & (x \le a) \\ (k+1)(x-a)+b & (x > a) \end{cases}$$ 이때, 실수 k와 점 (a, b)를 각각 이 꺾인 선의 비탈과 꺾인 점이라고 한다.   (나) 주어진 양의 실수 m에 대하여, 꺾인 점이 (a, b)인 꺾인 선의 **활성도**는 ma^2+b를 의미한다.

[4-1] 두 점 A와 B를 모두 지나는 꺾인 선의 비탈로 가능한 값의 범위를 구하시오.

[4-2] 두 점 A와 B를 모두 지나는 꺾인 선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최솟값을 s에 대한 식으로 나타내시오.

[4-3] 양의 실수 s의 값이 2일 때, 다음 조건을 만족하는 m의 값을 모두 구하시오.

두 점 A와 B를 모두 지나는 꺾인 선 가운데 활성도가 가장 작은 것의 개수는 2이다.