

2027학년도 연세대학교 수시 논술

자연·통합계열 (수학) — 문항과 예시답안

이름	날짜	소요 시간
----	----	-------

수험생 복기를 바탕으로 재구성한 문항으로, 실제 출제 문항과 표현·수치가 다를 수 있습니다. 문제 1-3은 각 소문항 10점(3-2는 20점), 문제 4는 4-1 10점, 4-2 20점입니다.

[문제 1]

주머니에 1부터 n 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n 개의 공이 있다. (단, $n \geq 3$) 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼냈을 때, 공에 적힌 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c 라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] a 를 확률변수 X 라 하자. X 의 기댓값 $E(X) = f(n)$ 이라 할 때, $f(2027)$ 을 구하시오. [10점]

[문제 1-2] $c - a$ 를 확률변수 Y 라 하자. Y 의 기댓값 $E(Y) = g(n)$ 이라 할 때, $g(2027)$ 을 구하시오. [10점]

풀이

[문제 2]

다음 물음에 답하시오.

[문제 2-1] 다음 정적분의 값을 구하시오. [10점]

$$\int_0^1 x^5 (1 - x^3) \ln \left(\frac{2 - x^3}{1 + x^3} \right) dx$$

[문제 2-2] 구간 $[0, 1]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)^{2029}}{x^{2027} + (1-x)^{2027}}, \quad T(x) = \begin{cases} 3x & (0 \leq x < \frac{1}{3}) \\ -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}(\frac{1}{3} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

에 대하여 다음 정적분의 값을 구하시오. [10점]

$$\int_0^1 f(T(x)) dx$$

풀이

[문제 3]

양의 실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1) = 1$

(나) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

(다) $0 < x < 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 다음 부등식이 성립한다.

$$\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right) > -xf'(x) > 0$$

[문제 3-1] 구간 $(0, 1]$ 에서 정의된 함수 $H(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$ 의 최솟값을 구하시오. **[10점]**

[문제 3-2] $t \geq 1$ 인 실수 t 에 대하여 집합 A_t 를 $A_t = \{x \mid f(x) = t, x > 0\}$ 이라 하자. $t \geq 1$ 에서 정의된 함수 $g(t)$ 를

$$g(t) = \begin{cases} A_t \text{의 모든 원소의 곱} & (n(A_t) \geq 2) \\ A_t \text{의 유일한 원소} & (n(A_t) = 1) \\ 2 & (n(A_t) = 0) \end{cases}$$

이라 할 때, 함수 $g(t)$ 의 최댓값을 구하시오. (단, $n(A_t)$ 는 집합 A_t 의 원소의 개수이다.) **[20점]**

풀이

[문제 4]

좌표평면에 세 점 $P_1(2, -1)$, $P_2(0, -3)$, Q 가 있다. 상수 k 에 대하여 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \leq k$ 를 만족시키는 점 P 의 집합을 S 라 하자. (단, O 는 원점이다.)

[문제 4-1] 크기가 10인 벡터 $\vec{v}$ 와 음이 아닌 실수 t 에 대하여 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + t\vec{v}$ 를 만족시키는 점 R 의 집합을 T 라 하자. 벡터 $\vec{v}$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$ 의 최솟값을 구하시오. **[10점]**

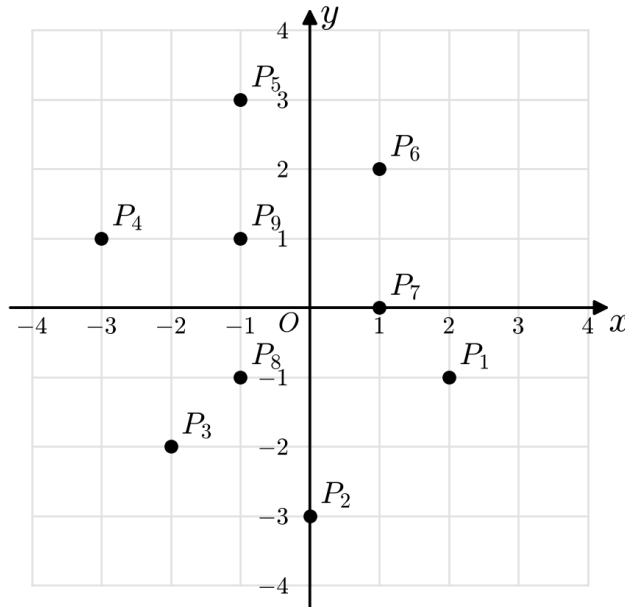
두 집합 S 와 T 의 공통부분은 반직선이다.

풀이

[문제 4-2] 좌표평면에 9개의 점 $P_1(2, -1)$, $P_2(0, -3)$, $P_3(-2, -2)$, $P_4(-3, 1)$, $P_5(-1, 3)$, $P_6(1, 2)$, $P_7(1, 0)$, $P_8(-1, -1)$, $P_9(-1, 1)$ 이 있다. $1 \leq i \leq 9$ 인 자연수 i 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 P 의 집합을 U_i 라 하자.

$$1 \leq j \leq 9 (j \neq i) \text{인 모든 자연수 } j \text{에 대하여 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{P_i P_j} \leq i - j \text{이다.}$$

U_i 에 속하는 임의의 서로 다른 두 점 Q, R 에 대하여 $|\overrightarrow{QR}| \leq k$ 를 만족시키는 양수 k 가 존재하도록 하는 모든 i 의 값의 합을 구하시오. [20점]



풀이

예시답안

[문제 1-1] 예시답안

답 507

▶ X 의 확률분포

$X = k$ 이라면 k 를 뽑고, 나머지 두 공을 k 보다 큰 $n - k$ 개의 수에서 골라야 한다. 따라서 $1 \leq k \leq n - 2$ 에 대하여

$$P(X = k) = \frac{\binom{n-k}{2}}{\binom{n}{3}}.$$

▶ 하키스틱 항등식으로 합 계산

$k\binom{n-k}{2} = \sum_{m=1}^k \binom{n-k}{2}$ 로 보고 합의 순서를 바꾸면

$$\sum_{k=1}^{n-2} k\binom{n-k}{2} = \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{k=m}^{n-2} \binom{n-k}{2} = \sum_{m=1}^{n-2} \binom{n-m+1}{3} = \binom{n+1}{4}.$$

(두 번째, 세 번째 등호에서 $\sum_{r=2}^N \binom{r}{2} = \binom{N+1}{3}$, $\sum_{r=3}^N \binom{r}{3} = \binom{N+1}{4}$ 를 사용하였다.)

▶ 결론

$$f(n) = E(X) = \frac{\binom{n+1}{4}}{\binom{n}{3}} = \frac{n+1}{4}, \quad f(2027) = \frac{2028}{4} = 507.$$

다른 관점 — 간격의 대칭성. 네 간격 $a, b-a, c-b, n+1-c$ 는 모두 1 이상이고 합이 $n+1$ 이다. (a, b, c) 와 네 간격의 순서쌍은 일대일대응이며, 간격을 어떤 순서로 바꾸어도 여전히 가능한 선택이 되므로 네 간격의 기댓값은 모두 같다. 따라서 $E(a) = \frac{n+1}{4}$ 이다.

[문제 1-2] 예시답안

답 1014

▶ 기댓값의 선형성

$E(Y) = E(c-a) = E(c) - E(a)$ 이므로 $E(c)$ 만 구하면 된다.

▶ 대칭 변환으로 $E(c)$ 구하기

각 수 x 를 $n+1-x$ 로 바꾸는 대응은 $\{1, \dots, n\}$ 의 3-부분집합 사이의 일대일대응이고, 이 대응에서 (a, b, c) 는 $(n+1-c, n+1-b, n+1-a)$ 로 옮겨진다. 따라서 $n+1-c$ 는 a 와 같은 분포를 가지므로

$$E(n+1-c) = E(a) = \frac{n+1}{4} \implies E(c) = \frac{3(n+1)}{4}.$$

▶ 결론

$$g(n) = \frac{3(n+1)}{4} - \frac{n+1}{4} = \frac{n+1}{2}, \quad g(2027) = \frac{2028}{2} = 1014.$$

검산. 직접 분포를 쓰면 $P(Y=d) = (d-1)(n-d)/\binom{n}{3}$ ($2 \leq d \leq n-1$)이다. a 와 c 를 정한 뒤 b 를 그 사이 $d-1$ 개 중에서 고르고, a 는 $n-d$ 가지가 가능하기 때문이다. $n=5, 7, 10$ 에 대해 전수 계산하면 $E(Y) = 3, 4, \frac{11}{2}$ 로 $\frac{n+1}{2}$ 와 일치한다.

[문제 2-1] 예시답안

답 0

▶ 치환 $t = x^3$ $dt = 3x^2 dx$ 이므로 $x^5 dx = \frac{1}{3}t dt$ 이고,

$$\int_0^1 x^5(1-x^3) \ln\left(\frac{2-x^3}{1+x^3}\right) dx = \frac{1}{3}I, \quad I = \int_0^1 t(1-t) \ln\left(\frac{2-t}{1+t}\right) dt.$$

▶ $t \rightarrow 1-t$ 대칭 $s = 1-t$ 로 치환하면 $t(1-t) = s(1-s)$ 는 그대로이고,

$$\frac{2-t}{1+t} = \frac{1+s}{2-s} \Rightarrow \ln\left(\frac{2-t}{1+t}\right) = -\ln\left(\frac{2-s}{1+s}\right).$$

따라서 $I = -I$, 즉 $I = 0$ 이다.

▶ 결론

구하는 값은 $\frac{1}{3} \cdot 0 = 0$ 이다.

피적분함수 $t(1-t) \ln\left(\frac{2-t}{1+t}\right)$ 는 $t = \frac{1}{2}$ 에 대하여 점대칭(기함수형)이다. 로그 부분을 부분적분으로 직접 처리할 수도 있으나, 대칭을 먼저 확인하는 것이 핵심이다.

[문제 2-2] 예시답안

답 $\frac{1}{60}$ ▶ T 에 의한 치환: $\int_0^1 f(T(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f(3x) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(s) ds \quad (s = 3x),$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 f\left(-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 f(s) ds \quad \left(s = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right).$$

두 식을 더하면 $\int_0^1 f(T(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx =: J$ 이다.▶ $x \rightarrow 1-x$ 대칭으로 J 구하기

$$f(x) = x^2(1-x)^2 \cdot \frac{(1-x)^{2027}}{x^{2027} + (1-x)^{2027}}, \quad f(1-x) = x^2(1-x)^2 \cdot \frac{x^{2027}}{x^{2027} + (1-x)^{2027}}$$

이므로 $f(x) + f(1-x) = x^2(1-x)^2$ 이다. 양변을 0부터 1까지 적분하면 $(\int_0^1 f(1-x) dx = J)$

$$2J = \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}.$$

▶ 결론

 $J = \frac{1}{60}$ 이다.

T 는 $[0, 1]$ 을 두 조각으로 나누어 각각 $[0, 1]$ 전체로 늘이는 함수이고, 두 조각의 기울기 절댓값 역수의 합이 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ 이다. 그래서 $f(T(x))$ 의 적분이 f 의 적분과 같아진다. 지수 2027을 직접 다루는 계산은 불가능에 가까우므로 대칭이 유일한 실마리다. 수치적분으로 확인한 값도 0.016666...이다.

[문제 3-1] 예시답안**답 0**▶ $H'(x)$ 의 부호 $0 < x < 1$ 에서

$$H'(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right) - f'(x) = -\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right) + xf'(x)\right\}.$$

조건 (다)에서 $\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right) > -xf'(x)$, 즉 $\frac{1}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right) + xf'(x) > 0$ 이므로 $H'(x) < 0$ 이다.

▶ 결론

H 는 $(0, 1]$ 에서 연속이고 $(0, 1)$ 에서 감소하므로 최솟값은 $H(1) = f(1) - f(1) = 0$ 이다.

[문제 3-2] 예시답안**답 1**▶ f 의 증감과 최솟값

조건 (다)의 오른쪽 부등식 $-xf'(x) > 0$ 에서 $0 < x < 1$ 일 때 $f'(x) < 0$ 이다. 또 $s = \frac{1}{x} > 1$ 로 두면 왼쪽 부등식에서 $sf'(s) > 0$, 즉 $s > 1$ 일 때 $f'(s) > 0$ 이다. 따라서 f 는 $(0, 1]$ 에서 감소, $[1, \infty)$ 에서 증가하며 최솟값은 $f(1) = 1$ 이다.

▶ A_t 의 원소

- $t = 1$: $f(x) = 1$ 의 해는 $x = 1$ 뿐이므로 $A_1 = \{1\}$, $g(1) = 1$.
- $t > 1$: f 는 연속이고 조건 (나)에서 양 끝으로 ∞ 로 발산하므로, 사잇값 정리와 단조성에 의해 $f(x) = t$ 의 해는 $(0, 1)$ 과 $(1, \infty)$ 에 하나씩 존재한다. 이를 $\alpha < 1 < \beta$ 라 하면 $g(t) = \alpha\beta$ 이다.

▶ $t > 1$ 이면 $\alpha\beta < 1$

문제 3-1에서 H 는 $(0, 1]$ 에서 감소하고 $H(1) = 0$ 이므로 $0 < \alpha < 1$ 이면 $H(\alpha) > 0$, 즉

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) > f(\alpha) = t = f(\beta).$$

$\frac{1}{\alpha}$ 와 β 는 모두 1보다 크고 f 는 $(1, \infty)$ 에서 증가하므로 $\beta < \frac{1}{\alpha}$, 즉 $\alpha\beta < 1$ 이다.

▶ 결론

$t > 1$ 이면 $g(t) < 1$ 이고 $g(1) = 1$ 이므로, $g(t)$ 의 최댓값은 1이다. ($n(A_t) = 0$ 인 경우는 일어나지 않는다.)

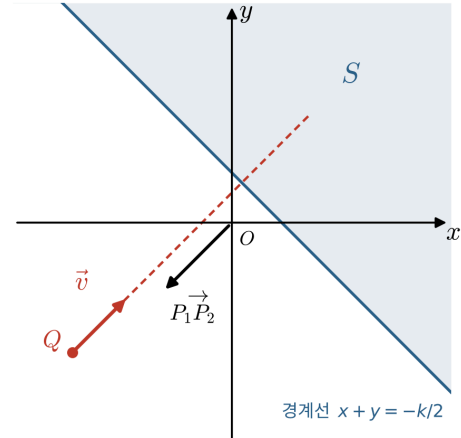
핵심 해석. $H(x) > 0$ 은 “ x 와 $\frac{1}{x}$ 중 1보다 큰 쪽에서 f 값이 더 크다”, 즉 f 가 오른쪽으로 더 가파르게 올라간다는 뜻이다. 그래서 같은 높이 t 에 놓인 두 해 중 큰 해 β 가 $\frac{1}{\alpha}$ 보다 안쪽에 있게 된다.

[문제 4-1] 예시답안**답** $-20\sqrt{2}$ **· 집합 S 는 반평면** $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, -2)$ 이므로 $P(x, y)$ 에 대하여

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \leq k \iff -2x - 2y \leq k \iff x + y \geq -\frac{k}{2}.$$

즉 S 는 직선 $x + y = -\frac{k}{2}$ 와 그 위쪽(방향 $(1, 1)$ 쪽)으로 이루어진 반평면이다.**· $S \cap T$ 가 반직선일 조건** T 는 Q 에서 출발하여 $\vec{v}$ 방향으로 뻗는 반직선이다. 점 $R = Q + t\vec{v}$ 에 대하여 $x + y$ 의 값은 t 에 대한 일차식이고, 그 기울기는 $\vec{v} \cdot (1, 1)$ 이다.

- $\vec{v} \cdot (1, 1) > 0$: t 가 충분히 크면 항상 S 에 속하므로 공통부분은 반직선이다.
- $\vec{v} \cdot (1, 1) = 0$: $Q \in S$ 일 때만 공통부분이 T 전체(반직선)이다.
- $\vec{v} \cdot (1, 1) < 0$: 공통부분은 공집합, 한 점, 또는 선분이므로 반직선이 될 수 없다.

따라서 필요조건은 $\vec{v} \cdot (1, 1) \geq 0$ 이다.반평면 S 와 반직선 T ($k < 0$ 예시)**· 최솟값**

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = -2\vec{v} \cdot (1, 1) \geq -2 \cdot |\vec{v}| \cdot |(1, 1)| = -2 \cdot 10 \cdot \sqrt{2} = -20\sqrt{2}.$$

등호는 $\vec{v} = 5\sqrt{2}(1, 1)$ 일 때 성립하고, 이때 $\vec{v} \cdot (1, 1) > 0$ 이므로 Q 의 위치와 관계없이 조건을 만족한다. 따라서 최솟값은 $-20\sqrt{2}$ 이다.

$\vec{v}$ 의 방향각을 θ 라 하면 가능한 범위는 $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ ($Q \in S$ 이면 양 끝 포함)이고, $\overrightarrow{P_1P_2}$ 와 정반대인 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 에서 내적이 최소가 된다.

[문제 4-2] 예시답안

답 24

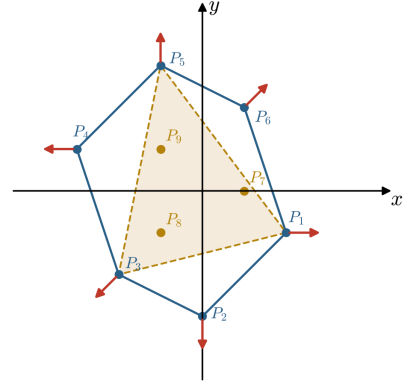
· 조건의 해석

“ U_i 의 임의의 두 점 사이 거리가 어떤 상수 k 이하”라는 것은 U_i 가 **유계**, 즉 원점을 중심으로 하는 어떤 원 안에 모두 들어간다는 뜻이다. (U_i 가 공집합이거나 한 점이어도 조건은 성립한다.)

각 부등식 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{P_i P_j} \leq i - j$ 는 $\overrightarrow{P_i P_j}$ 에 수직인 직선을 경계로 하는 반평면을 나타내므로, U_i 는 8개 반평면의 공통부분이다.

· (1) $1 \leq i \leq 6$: U_i 는 유계가 아니다

아래 표의 방향 $\vec{u}$ 에 대해 P_i 는 다른 8개 점보다 $\vec{u}$ 방향으로 **엄격히** 더 멀리 있다. 즉 모든 $j \neq i$ 에 대하여 $\vec{u} \cdot \overrightarrow{P_i P_j} < 0$ 이다. 예를 들어 $i = 1$ 이면 P_1 의 x 좌표가 나머지 점들의 x 좌표보다 크므로 $\vec{u} = (1, 0)$ 으로 잡으면 된다.

육각형 $P_1 \dots P_6$, 삼각형 $P_1 P_3 P_5$ 와 방향 $\vec{u}$

i	1	2	3	4	5	6
$\vec{u}$	$(1, 0)$	$(0, -1)$	$(-1, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
근거	x 최대	y 최소	$x + y$ 최소	x 최소	y 최대	$x + y$ 최대

이제 $\overrightarrow{OP} = t\vec{u}$ ($t > 0$)인 점 P 를 잡으면

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{P_i P_j} = t(\vec{u} \cdot \overrightarrow{P_i P_j})$$

이고 괄호 안이 음수이므로, t 를 충분히 크게 하면 8개 부등식이 모두 성립한다. 따라서 U_i 는 $\vec{u}$ 방향으로 한없이 뻗는 반직선을 포함하고, 임의로 멀리 떨어진 두 점을 가지므로 조건을 만족하지 않는다.

· (2) $7 \leq i \leq 9$: U_i 는 유계이다

P_7, P_8, P_9 는 삼각형 $P_1 P_3 P_5$ 의 내부에 있으며, 실제로

$$19P_7 = 13P_1 + P_3 + 5P_5, \quad 19P_8 = 4P_1 + 12P_3 + 3P_5, \quad 19P_9 = 2P_1 + 6P_3 + 11P_5$$

(계수가 모두 양수이고 합이 19)이다. $\vec{w}_j = \overrightarrow{P_i P_j}$ ($j = 1, 3, 5$)라 하면 양수 $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5$ 에 대하여

$$\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_3 \vec{w}_3 + \lambda_5 \vec{w}_5 = \vec{0}.$$

$P \in U_i$ 이면 $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{w}_j \leq i - j$ ($j = 1, 3, 5$)이므로, 예컨대

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{w}_1 = -\frac{\lambda_3(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{w}_3) + \lambda_5(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{w}_5)}{\lambda_1} \geq -\frac{\lambda_3(i-3) + \lambda_5(i-5)}{\lambda_1}$$

이 되어 $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{w}_1$ 이 위아래로 유계이다. 같은 방법으로 $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{w}_3$ 도 유계이고, $\vec{w}_1, \vec{w}_3$ 은 평행하지 않으므로 P 의 두 좌표가 모두 유계이다. 따라서 U_i 는 유계이고 조건을 만족한다.

· 결론

조건을 만족하는 i 는 7, 8, 9이고, 그 합은 $7 + 8 + 9 = 24$ 이다.

발상의 흐름. ① 유계가 아니려면 P 를 멀리 보내도 모든 부등식이 유지되는 방향이 필요하다. ② 그런 방향은 “모든 $\overrightarrow{P_i P_j}$ 와 둔각을 이루는 방향”, 즉 P_i 가 점들의 볼록껍질의 꼭짓점일 때만 존재한다. ③ 따라서 볼록껍질(육각형)의 꼭짓점 $P_1 \sim P_6$ 은 탈락, 내부의 $P_7 \sim P_9$ 만 남는다. 선형계획법으로 각 U_i 를 직접 검산한 결과도 같다.