

등속원운동과 진자운동



(1) **등속 원운동**: 원 궤도를 따라 일정한 속력으로 회전하는 운동이다.

(2) **주기와 진동수**

① 주기: 등속 원운동 하는 물체가 한 바퀴 회전하는 데 걸리는 시간이다.

② 진동수: 1초 동안 회전하는 횟수이다. 단위는 Hz(헤르츠)이다.

③ 주기와 진동수의 관계: 주기가 0.1초이면 1초 동안 10바퀴 회전한다. 이와 같이 주기 T 와 진동수 f 는 서로 역수 관계이다.

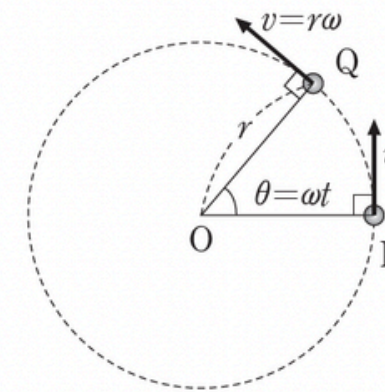
$$f = \frac{1}{T}, \quad T = \frac{1}{f}$$

(3) **각속도**: 1초 동안 회전하는 중심각의 변화이다. 단위는 rad/s이다.

① 회전 반지름이 정해지면 회전한 각만 이용하여 물체의 위치를 나타낼 수 있다.

② 시간 t 동안 회전하는 중심각이 θ 이면 각속도 ω 는 다음과 같다.

$$\omega = \frac{\theta}{t}, \quad \theta = \omega t$$



③ 속력과 각속도: P에서 Q까지 호의 길이가 $l = r\theta$ 이다. 속력은 $v = \frac{l}{t}$ 이고, $\frac{l}{t} = r\frac{\theta}{t}$ 이므로 다음 관계가 성립한다.

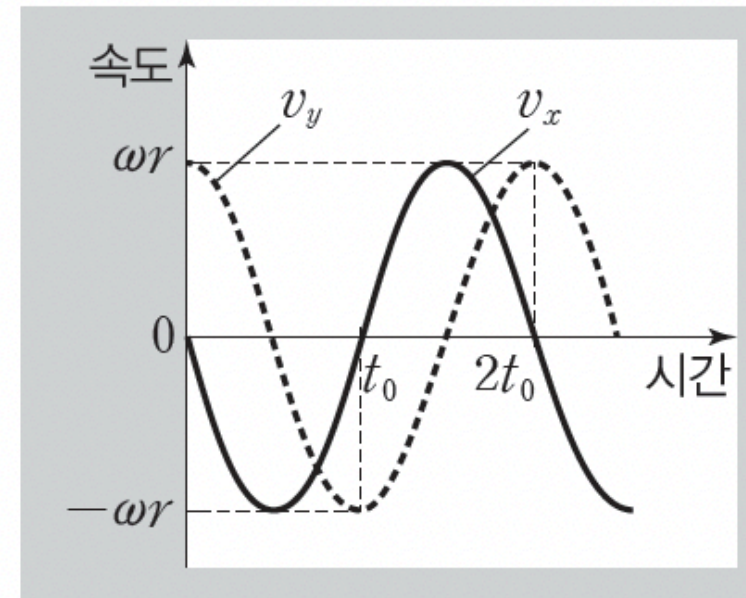
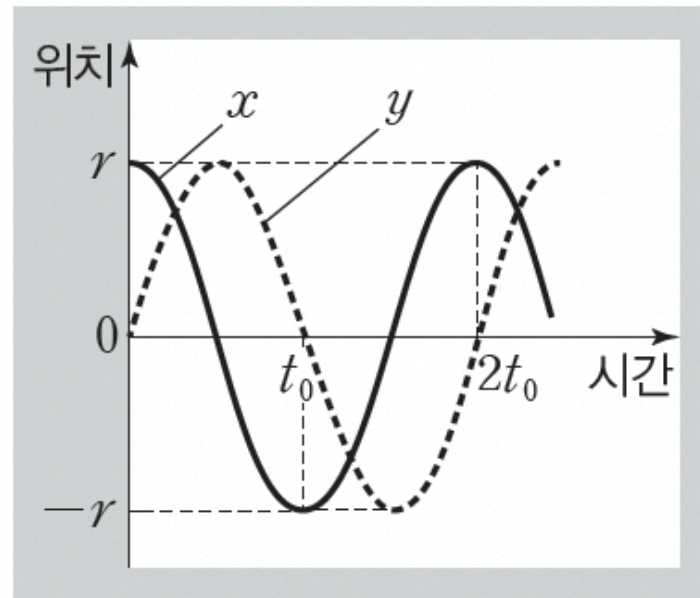
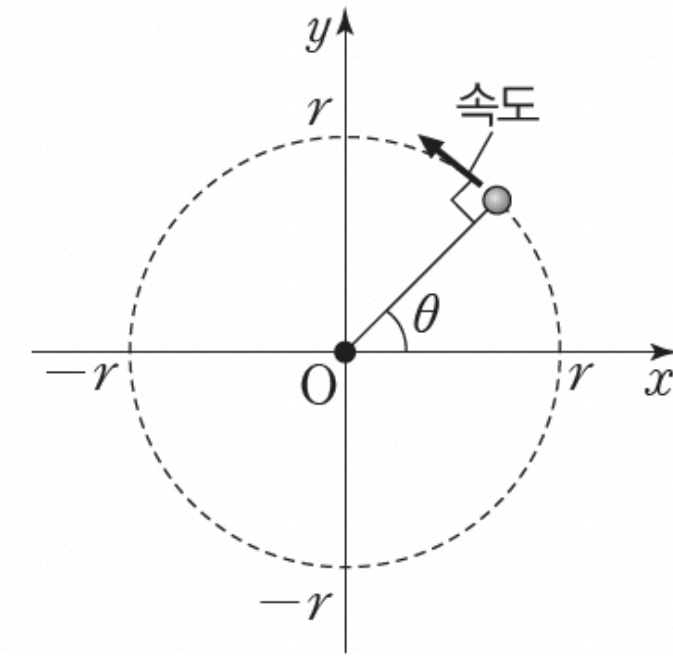
$$v = r\omega, \quad \omega = \frac{v}{r}$$

④ 주기, 진동수와 각속도: 1초 동안 f 바퀴 회전하면 중심각은 $2\pi f$ 만큼 회전한다. 따라서 다음 관계가 성립한다.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

그림과 같이 시간 $t=0$ 일 때 x 축의 $x=r$ 를 통과한 물체가 xy 평면에서 반지름 r , 각속도 $\omega=\frac{\theta}{t}$ 로 등속 원운동을 하고 있다.

위치의 x 성분은 $x=r\cos\theta=r\cos\omega t_0$ 이고 y 성분은 $y=r\sin\theta=r\sin\omega t_0$ 이다. 속도의 x 성분은 $v_x=-\omega r\sin\omega t_0$ 이고 y 성분은 $v_y=\omega r\cos\omega t_0$ 이다.



(1) 구심 가속도

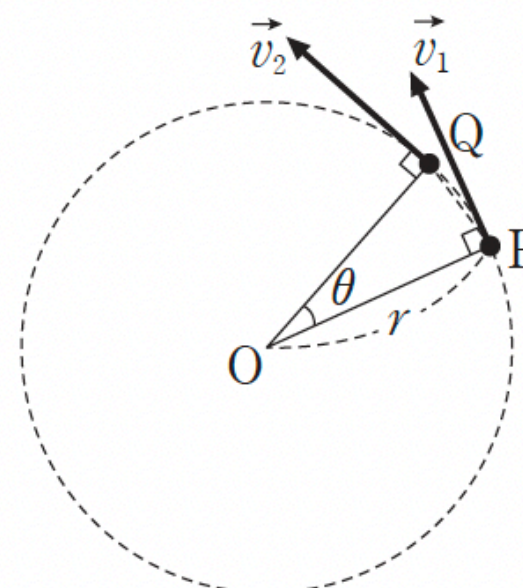
① 속도 변화량 $\Delta \vec{v}$: 그림 (가)와 같이 점 P, Q에서의 속도가 각각 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ 이면, (나)와 같이 속도 변화량은 $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ 이다.

- P에서 Q까지 중심각이 θ 이므로 (나)에서 $\vec{v}_1$ 과 $\vec{v}_2$ 가 이루는 각은 θ 이다.

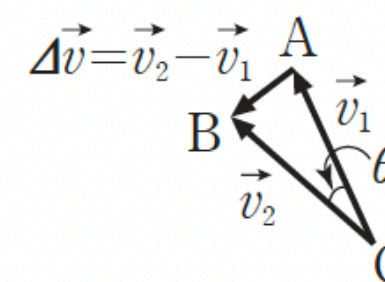
- $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ 의 크기가 같으므로 $\triangle ABC$ 는 이등변 삼각형이다. 따라서 $\angle CAB = \angle CBA$ 이다.

- 걸린 시간이 매우 짧도록 P, Q를 가까이하면 θ 가 매우 작아진다. 따라서 물체의 속력이 v 일 때, $|\Delta \vec{v}| \approx v\theta$, $\angle CAB = \angle CBA \approx 90^\circ$ 이다.

- 순간 속도의 크기와 방향: 걸린 시간이 거의 0이 되도록 극한을 취하면, $|\Delta \vec{v}| = v\theta$ 이고 $\angle CAB = \angle CBA = 90^\circ$ 이다.



(가)



(나)

② 가속도 $\vec{a}$: $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{t}$ 이므로, 가속도의 크기와 방향은 다음과 같다.

• 크기: $|\vec{a}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{t} = \frac{v\theta}{t}$ 이다. $\frac{\theta}{t} = \omega$ 이고, $\omega = \frac{v}{r}$ 이므로 가속도의 크기는

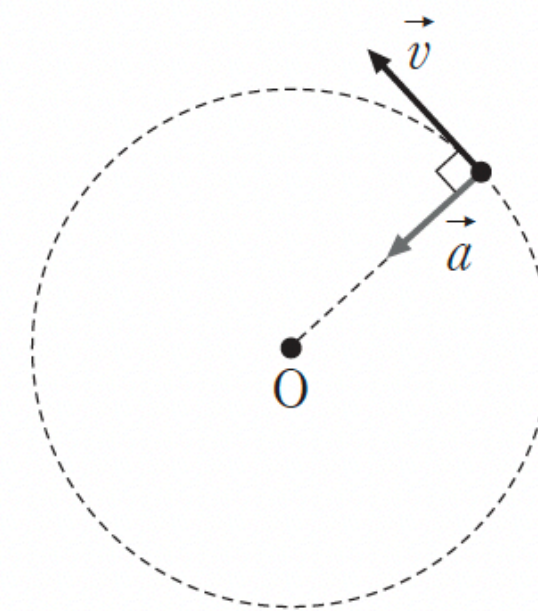
$$a = v\omega = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \text{이다.}$$

• 방향: $\Delta \vec{v}$ 의 방향은 운동 방향에 수직이다. 원에서 그은 법선은 원의 중심을 지나므로, 가속도 $\vec{a}$ 의 방향은 원의 중심을 향한다.

③ 구심 가속도: 등속 원운동 하는 물체의 가속도의 방향은 항상 원의 중심을 향한다. 따라서 등속 원운동의 가속도를 구심 가속도라고 한다.

• 크기: $a = v\omega = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$ 이다.

• 방향: 원운동의 중심 방향이다.



- 위치 $\vec{r}$ 는 다음과 같다.

$$\vec{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$$

- 속도 $\vec{v}$ 는 위치 $\vec{r}$ 를 시간에 대하여 미분한 값과 같다.

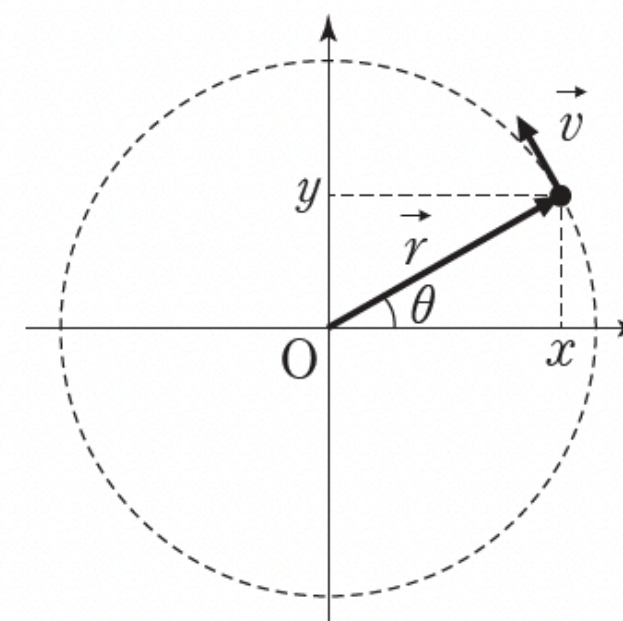
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega r (-\sin \omega t, \cos \omega t)$$

- 가속도 $\vec{a}$ 는 속도 $\vec{v}$ 를 시간에 대하여 미분한 값과 같다.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 r (\cos \omega t, \sin \omega t) = -\omega^2 \vec{r}$$

- $\vec{a}$ 의 크기는 $\omega^2 r = \frac{v^2}{r}$ 이다.

- $\vec{a}$ 의 방향은 $-\vec{r}$ 방향이다. 따라서 원의 중심을 향한다.



- 가속도의 방향이 운동 방향과 나란하면 물체의 속력이 변하므로, 물체의 속력이 일정하면 물체의 운동 방향과 나란한 방향으로 물체의 가속도 성분이 없다. 등속 원운동을 하는 물체의 운동 방향은 원의 접선 방향이므로, 물체의 구심 가속도의 방향은 원의 중심을 향한다.

(2) 구심력: $\vec{F} = m\vec{a}$ 이므로 등속 원운동 하는 물체에 작용하는 힘의 방향은 가속도의 방향과 같이 원의 중심을 향한다. 이와 같이 등속 원운동 하는 물체에 작용하는 힘은 원의 중심 방향을 향하므로 구심력이라고 한다.

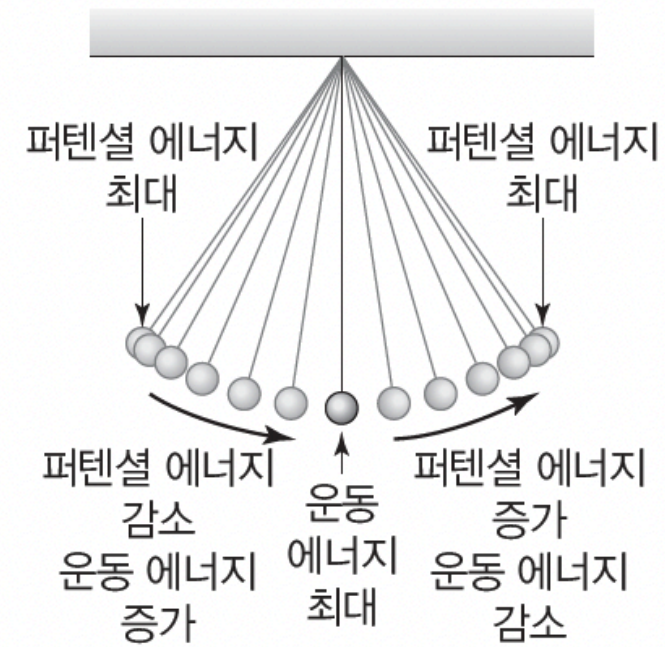
① 크기: $F = ma = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$

② 방향: 원운동의 중심 방향이다.

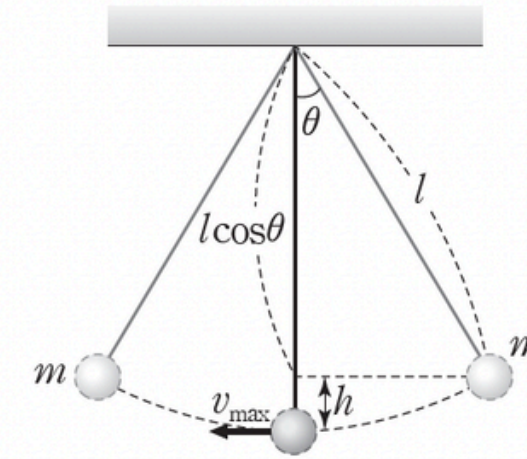
(1) 단진자의 역학적 에너지

① 단진자 운동과 역학적 에너지: 질량을 무시할 수 있는 줄에 작은 물체를 매달고 연직 방향에 대해 줄을 기울였다가 놓으면 물체가 연직면에서 왕복 운동하는데, 이를 단진자라고 한다. 공기 저항과 마찰을 무시하면 단진자의 역학적 에너지는 보존된다.

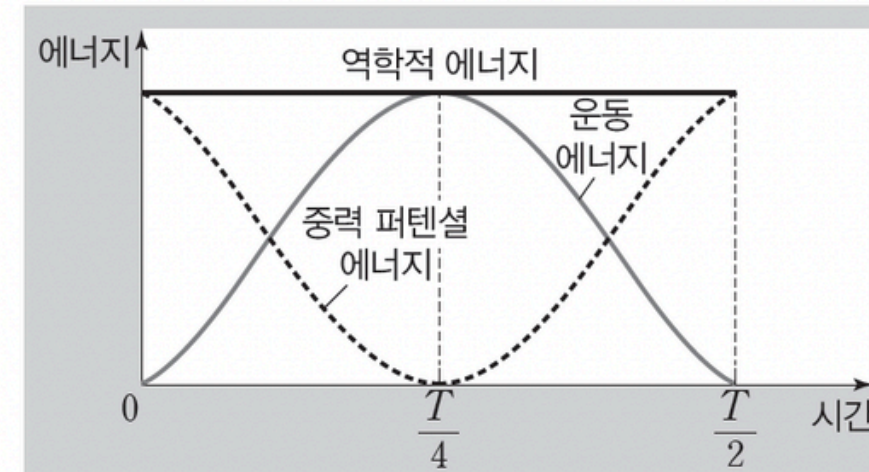
- ➡ 그림과 같이 진자가 출발점에서 진동의 중심을 향해 아래 방향으로 운동할 때 운동 에너지의 증가량은 중력 퍼텐셜 에너지의 감소량과 같고, 진동의 중심을 지나 출발점과 높이가 같은 지점에 도달하는 동안 운동 에너지의 감소량은 중력 퍼텐셜 에너지의 증가량과 같다.
- 진동의 중심(최저점): 복원력과 수평 방향으로의 가속도가 0이고, 속력은 최대이다.
 - ➡ 속력이 최대이므로 운동 에너지는 최대이고, 중력 퍼텐셜 에너지는 최소이다.
 - 진동의 양 끝(최고점): 복원력과 수평 방향으로의 가속도의 크기가 최대이고, 속력은 0이다.
 - ➡ 속력이 0이므로 운동 에너지는 0이고, 중력 퍼텐셜 에너지는 최대이다.



- ② 최저점에서 진자의 속력 $v_{\max}$: 그림과 같이 길이 l , 질량 m 인 단진자를 진폭 θ 로 진동시킬 때, 최저점에서 중력 퍼텐셜 에너지를 0으로 하면, 최저점과 최고점의 높이 차가 h 이므로 최고점에서 역학적 에너지는 $mgh = mgl(1 - \cos\theta)$ 이고, 최저점에서 역학적 에너지는 $\frac{1}{2}mv_{\max}^2$ 이므로 $\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = mgl(1 - \cos\theta)$ 에서 $v_{\max} = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta)}$ 이다.



- (2) 단진자 운동의 에너지-시간 그래프: 진자의 최저점에서 진자의 중력 퍼텐셜 에너지를 0이라고 하면, 주기가 T 인 단진자에 대해 시간에 따른 역학적 에너지는 그림과 같다.



- (3) 단진동하는 단진자의 주기: 진폭 θ 가 매우 작으면 단진자의 주기는 진자의 길이에만 의존한다.

- ① 추에 작용하는 힘: θ 가 매우 작으므로 그림에서 $\sin\theta \approx \frac{x}{l}$ 이다.

추에 작용하는 접선 방향의 힘은 $F = -mg\sin\theta = -\frac{mg}{l}x$ 이고, $(-)$ 부호는 복원력이 변위와 반대 방향임을 의미한다.

- ② 진자의 주기(T): $\omega^2 = \frac{g}{l}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 이므로 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 이다.

- ③ 진자의 등시성: 단진자의 주기는 추의 질량이나 진폭에 관계없이 진자의 길이에만 관계가 있다.

