

04

케플러 법칙과 중력

수록 구성

- 개념 기본 문제
- 개념 적용 문제
- 1등급 도전 문제
- 정답과 해설

04 케플러 법칙과 중력

핵심 내용 **이해**

“행성의 운동에 관한 케플러 법칙으로부터 중력의 존재가 밝혀지는 과학사적 배경을 알 수 있다. 중력 법칙을 이해하고 이를 이용하여 행성과 인공위성의 운동을 분석할 수 있다.”

1 케플러 법칙

코페르니쿠스가 지구를 포함한 천체들이 태양을 중심으로 회전한다는 지동설을 발표하고, 케플러가 정밀한 천체 관측 자료를 분석하여 천체 운동에 관한 세 법칙을 발표하면서 천체의 운동에 관한 이해도가 높아졌다.

1. 케플러 법칙의 의의

중세 시대에 코페르니쿠스가 지구와 행성들이 태양을 중심으로 돈다는 지동설(태양 중심설)을 주장한 이후, 태양과 그 외 모든 천체들이 지구를 중심으로 돈다는 천동설(지구 중심설)과 지동설 사이에 많은 논쟁이 벌어졌다. 브라헤는 행성의 운동을 정밀하게 관측한 후 천동설과 지동설을 절충한 모형을 제기하였지만 인정받지 못했다. 이후 케플러는 브라헤가 수십 년 동안 관측한 자료를 분석하여 행성의 운동에 대한 세 가지 규칙성을 발견하여 지동설이 여러 과학자들의 지지를 받게 되었고, 뉴턴이 중력 법칙(만유인력 법칙)을 발견하는 데 큰 기여를 하였다.

2. 케플러 법칙

케플러는 그동안 기하학적으로 완벽한 원이라고 알고 있었던 행성의 궤도가 원이 아니라 타원이라는 새로운 이론을 내세웠다. 또, 태양으로부터 각 행성까지의 거리와 각 행성이 태양을 도는 데 걸리는 시간을 측정한 자료를 분석하여 행성의 공전 주기와 공전 궤도의 긴반지름 사이의 관계를 알아냈다. 이 법칙은 근대 과학의 근간이 되는 뉴턴 중력 법칙의 발견으로 이어진다.

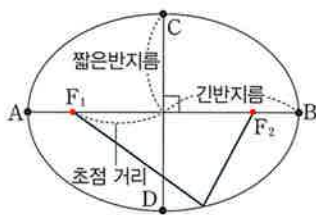
(1) 케플러 제1법칙

① 타원: 평면 위의 두 점으로부터 거리의 합이 일정한 점들의 집합으로, 이 두 점을 초점이라고 한다.

• 긴반지름: 두 초점과 타원의 중심을 지나는 긴 지름인 A와 B를 이은 선분의 절반을 긴반지름이라고 한다.

• 짧은반지름: 두 초점과 같은 거리에 있는 C와 D를 이은 선분의 절반을 짧은반지름이라고 한다.

② 케플러 제1법칙(타원 궤도 법칙): 행성은 태양을 한 초점으로 하는 타원 궤도를 그리면서 공전한다.



▲ 타원의 긴반지름과 짧은반지름

니콜라스 코페르니쿠스(Copernicus, N., 1473~1543)

폴란드의 천문학자로, 맨눈으로 천체를 관측하여 지동설(태양 중심설)을 주장하였다. 『천구의 회전에 관하여』를 저술하였다.

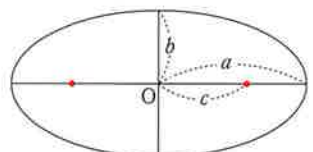
티코 브라헤(Brahe, T., 1546~1601)

덴마크의 천문학자로, 직접 천문대를 설치하여 행성에 관한 방대한 양의 정밀한 관측 기록을 남겼다.

요하네스 케플러(Kepler, J., 1571~1630)

독일의 천문학자로, 튀빙겐 대학에서 지동설을 접했다. 신교가 박해를 당하게 되자 체코슬로바키아 프라하로 가서 티코 브라헤의 조수가 된다.

긴반지름이 a , 짧은반지름이 b 인 타원에서의 초점 거리와 면적



• 초점 거리: 타원의 중심에서 초점까지의 거리로, 초점 거리를 c 라고 하면 $c^2 = a^2 - b^2$ 이다.

• 타원의 면적: πab

개념 기본 문제

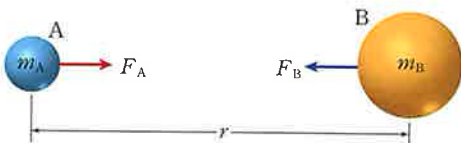
01 태양 주위를 공전하는 행성에 대한 케플러 법칙을 설명한 것으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

- ㄱ. 행성의 궤도는 모두 타원이다.
- ㄴ. 행성의 주기는 긴반지름의 제곱에 비례한다.
- ㄷ. 행성이 궤도를 따라 운동하면서 같은 시간 동안 쓸고 지나간 면적은 일정하다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 그림은 질량이 m_A 인 물체 A와 질량이 m_B 인 물체 B 사이 거리가 r 일 때 A와 B에 작용하는 중력이 각각 F_A, F_B 인 것을 나타낸 것이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

- ㄱ. F_B 는 r^2 에 비례한다.
- ㄴ. F_A 는 ' $m_A \times m_B$ '에 비례한다.
- ㄷ. F_A 와 F_B 는 작용 반작용 관계이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

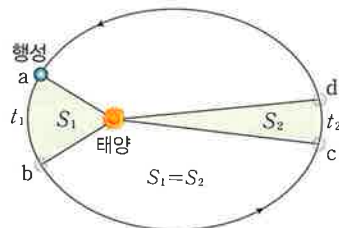
03 지구 주위를 공전하는 인공위성에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

- ㄱ. 인공위성에 작용하는 중력이 구심력이다.
- ㄴ. 정지 위성의 공전 주기는 지구의 자전 주기와 같다.
- ㄷ. 인공위성의 궤도의 높이가 낮을수록 주기가 짧다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 그림은 태양 주위의 타원 궤도를 따라 공전하는 행성을 나타낸 것이다. 행성이 a에서 b까지 이동하는 데 걸린 시간이 t_1 , c에서 d까지 이동하는 데 걸린 시간이 t_2 이고, t_1, t_2 동안 행성과 태양을 이은 직선이 쓸고 간 넓이는 각각 S_1, S_2 이며, $S_1 = S_2$ 이다.

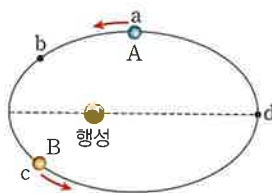


이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 시오.

보기

- ㄱ. $t_1 = t_2$ 이다.
- ㄴ. 공전 속력은 a에서가 c에서보다 빠르다.
- ㄷ. 태양이 작용하는 중력의 크기는 b에서가 d에서보다 크다.

05 그림 (가)는 두 위성 A, B가 행성을 한 초점으로 하는 동일한 타원 궤도를 따라 공전하는 어느 순간의 모습을 나타낸 것이고, 표 (나)는 A가 점 a, b, c, d, a를 차례로 지날 때의 시각을 나타낸 것이다. d는 행성으로부터 가장 먼 공전 궤도상의 점이다.



(가)

A의 위치	시각
a	0
b	t
c	$2t$
d	$4t$
a	$5t$

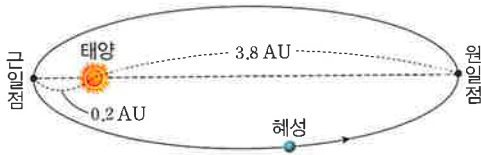
(나)

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 시오. (단, A, B에는 행성에 의한 중력만 작용한다.)

보기

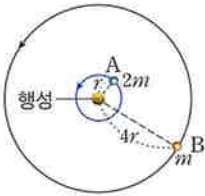
- ㄱ. B의 공전 주기는 $5t$ 이다.
- ㄴ. A가 c를 지날 때, B는 a를 지난다.
- ㄷ. B가 d를 지날 때, A와 B의 속력은 같다.

- 06** 그림과 같이 어떤 행성이 태양을 하나의 초점으로 하는 타원 궤도를 따라 공전하고 있다. 태양에서 근일점까지 거리는 0.2 AU이고 원일점까지 거리는 3.8 AU이다.



- (1) 행성의 속력은 근일점에서가 원일점에서의 몇 배인지 구하시오.
- (2) 지구 공전 궤도의 긴반지름이 1 AU이고, 지구의 공전 주기가 1년일 때 행성의 주기를 구하시오.

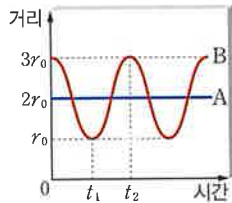
- 07** 그림은 질량이 $2m$, m 인 인공위성 A와 B가 반지름이 r , $4r$ 인 원 궤도를 따라 행성 주위를 공전하는 것을 나타낸 것이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 인공위성에는 행성의 중력만 작용한다.)



- 보기
- ㄱ. 인공위성의 주기는 B가 A의 8배이다.
- ㄴ. 인공위성의 속력은 A가 B의 $2\sqrt{2}$ 배이다.
- ㄷ. 중력의 크기는 A가 B의 16배이다.

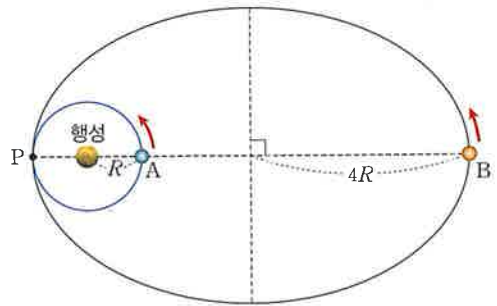
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 08** 그림은 동일한 행성 주위를 위성 A는 원 궤도를 따라, 위성 B는 타원 궤도를 따라 운동할 때 A, B와 행성 사이의 거리를 시간에 따라 나타낸 것이다. (단, A, B에는 행성에 의한 중력만 작용한다.)



- (1) A의 주기를 구하시오.
- (2) B의 가속도 크기는 t_1 일 때가 t_2 일 때의 몇 배인지 구하시오.

- 09** 그림은 위성 A와 B가 동일한 행성 주위를 각각 원 궤도, 타원 궤도를 따라 운동하는 것을 나타낸 것이다. A의 공전 궤도 반지름은 R 이고, B의 공전 궤도 긴반지름은 $4R$ 이다. A와 B의 궤도는 점 P에서 접한다.



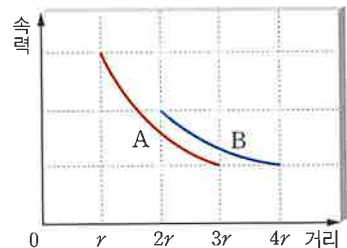
이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, A, B에는 행성에 의한 중력만 작용한다.)

보기

- ㄱ. B의 속력은 P에서 가장 크다.
- ㄴ. 공전 주기는 B가 A의 4배이다.
- ㄷ. 가속도의 최댓값은 A와 B가 같다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 10** 그림은 위성 A, B가 동일한 행성을 한 초점으로 각각의 타원 궤도를 따라 한 주기 동안 운동할 때, A와 B의 속력을 행성 중심에서 위성 중심까지의 거리에 따라 나타낸 것이다. (단, A, B에는 행성에 의한 중력만 작용한다.)

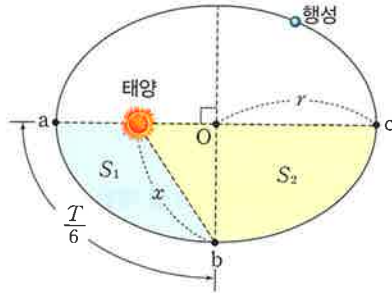


- (1) 공전 주기는 B가 A의 몇 배인지 구하시오.
- (2) A의 가속도 크기는 행성으로부터의 거리가 r 일 때가 $3r$ 일 때의 몇 배인지 구하시오.

개념 적용 문제

▶ 케플러 법칙

- 01** 그림은 태양 주위를 T 의 주기로 공전하는 행성의 타원 궤도를 나타낸 것이다. O에서 c까지의 거리는 r 이고, 태양에서 b까지의 거리는 x 이다. 행성이 a에서 b까지 운동하는 데 걸린 시간은 $\frac{T}{6}$ 이고, S_1 과 S_2 는 각각의 색칠된 부분의 면적이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 타원의 중심이다.)



▶ 타원은 두 초점으로부터의 거리의 합이 일정하며, 행성과 태양을 이은 직선이 같은 시간 동안 쓸고 지나가는 면적은 항상 일정하다.

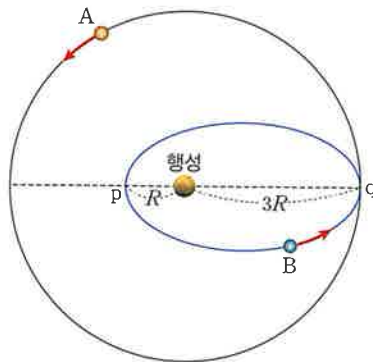
보기

- ㄱ. $x=r$ 이다
- ㄴ. S_2 는 S_1 의 3배이다.
- ㄷ. 행성의 속력은 a에서가 c에서보다 빠르다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▶ 케플러 법칙과 뉴턴 중력 법칙

- 02** 그림과 같이 위성 A는 행성을 중심으로 반지름이 $3R$ 인 원운동을 하고, B는 같은 행성을 한 초점으로 하는 타원 궤도를 따라 운동하고 있다. 점 p는 B가 행성과 가장 가까운 점, 점 q는 행성과 가장 먼 점이고, 행성에서의 거리가 각각 R , $3R$ 이다. A와 B의 궤도는 q에서 접한다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, A, B에는 행성에 의한 중력만 작용한다.)



▶ 같은 행성 주위를 공전하는 위성의 공전 주기(T)의 제곱은 타원의 긴반지름(r)의 세제곱에 비례한다.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

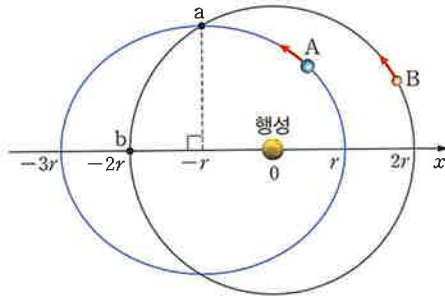
보기

- ㄱ. B의 공전 주기는 A의 공전 주기의 $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ 배이다.
- ㄴ. B의 속력은 p에서가 q에서의 3배이다.
- ㄷ. p에서 B의 가속도 크기는 A의 가속도 크기의 3배이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

➤ 케플러법칙과 뉴턴중력법칙

- 03** 그림은 행성을 한 초점으로 타원 궤도를 따라 운동을 하는 위성 A와 동일한 행성을 중심으로 원운동을 하는 위성 B를 나타낸 것이다. 점 a는 두 궤도가 만나는 지점이고, 점 b와 행성은 x 축상에 있다. B가 a에서 b까지 운동하는 데 걸리는 시간은 T 이다. A의 운동에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, A, B에는 행성에 의한 중력만 작용한다.)



➤ 케플러 제2법칙에 의해 같은 시간 동안 위성과 행성을 잇는 직선이 쓸고 지나간 면적은 항상 같다.

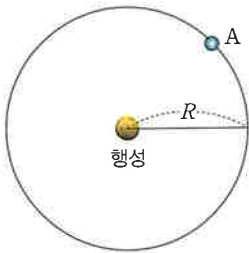
보기

- ㄱ. 공전 주기는 $6T$ 이다.
- ㄴ. 속력의 최댓값은 최솟값의 9배이다.
- ㄷ. a에서 가속도 크기는 가속도 최솟값의 $\frac{9}{4}$ 배이다.

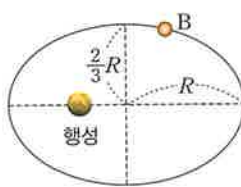
- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

➤ 케플러법칙과 뉴턴중력법칙

- 04** 그림 (가)는 위성 A가 행성의 주위를 반지름 R 인 원 궤도를 따라 운동하는 것을, 그림 (나)는 위성 B가 동일한 행성의 주위를 짧은반지름 $\frac{2}{3}R$, 긴반지름 R 인 타원 궤도를 따라 운동하는 것을 나타낸 것이다.



(가)



(나)

➤ 행성의 공전 주기(T)의 제곱은 타원의 긴반지름(r)의 세제곱에 비례한다.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \rightarrow T^2 \propto r^3$$

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, A, B에는 행성에 의한 중력만 작용한다.)

보기

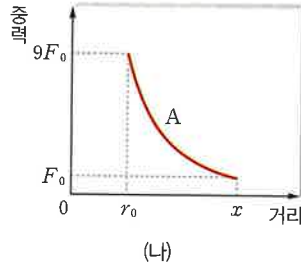
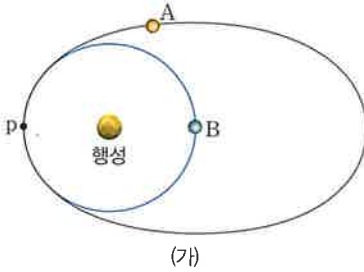
- ㄱ. A와 B의 공전 주기는 같다.
- ㄴ. B에 작용하는 알짜힘의 크기는 일정하다.
- ㄷ. 한 번 공전하는 동안 A와 B의 평균 속력은 같다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

➤ 케플러법칙과 뉴턴중력법칙

- 05** 그림 (가)는 위성 A가 행성을 한 초점으로 하는 타원 궤도, 위성 B가 행성을 중심으로 하는 원 궤도를 따라 운동하는 것을 나타낸 것이다. A, B의 궤도는 점 p에서 만난다. 그림 (나)는 A가 한 주기 동안 운동할 때, A에 작용하는 중력의 크기를 행성의 중심으로부터 A까지의 거리에 따라 나타낸 것이다.

➤ 타원의 긴반지름은 두 초점과 타원의 중심을 지나는 긴 자름의 절반이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, A, B에는 행성에 의한 중력만 작용한다.)

보기

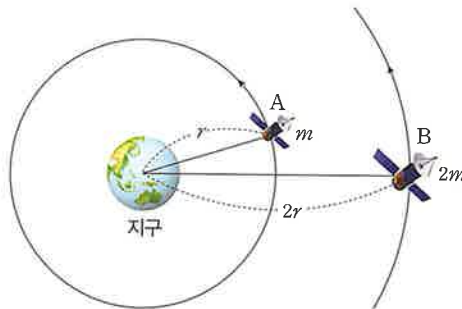
- ㄱ. A의 속력은 p에서 최소이다.
- ㄴ. $x = 2.5r_0$ 이다.
- ㄷ. 공전 주기는 A가 B의 $2\sqrt{2}$ 배이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

➤ 인공위성의운동

- 06** 그림은 두 인공위성 A, B가 각각 지구를 중심으로 등속 원운동을 하는 것을 나타낸 것이다. 지구 중심에서 A, B까지의 거리는 각각 $r, 2r$ 이고, A와 B의 질량은 각각 $m, 2m$ 이다.

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, A, B에는 지구에 의한 중력만 작용한다.)



➤ 인공위성에 작용하는 중력이 구심력이므로

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \text{이다.}$$

보기

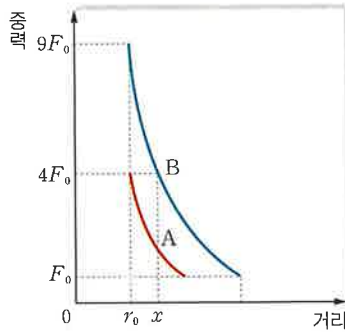
- ㄱ. 공전 주기는 A가 B의 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 배이다.
- ㄴ. 운동 에너지는 A가 B의 2배이다.
- ㄷ. 인공위성에 작용하는 구심력의 크기는 A가 B의 2배이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

➤ 케플러 법칙과 뉴턴 중력 법칙

07 그림은 질량이 각각 m_1, m_2 인 위성 A, B가 동일한 행성을 한 초점으로 하는 각각의 타원 궤도를 따라 한 주기 동안 운동할 때, 행성 중심에서 A, B 중심까지의 거리에 따라 행성이 A, B에 각각 작용하는 중력의 크기를 나타낸 것이다.

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, A, B에는 행성에 의한 중력만 작용한다.)



➤ 중력은 두 물체의 질량의 곱에 비례하고, 두 물체 사이 거리의 제곱에 반비례한다.

보기

ㄱ. $x = \frac{3}{2}r_0$ 이다.

ㄴ. $m_1 : m_2 = 4 : 9$ 이다.

ㄷ. 공전 주기는 B가 A의 $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ 배이다.

① ㄱ

② ㄷ

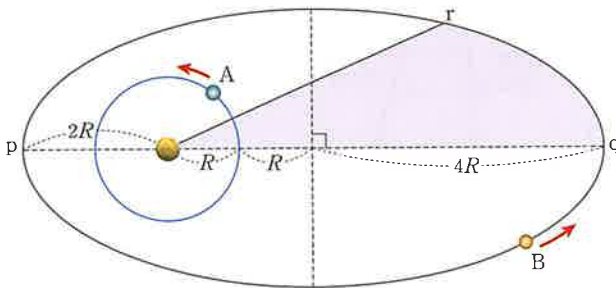
③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

➤ 케플러 법칙과 뉴턴 중력 법칙

08 그림과 같이 위성 A와 B가 동일한 행성을 중심으로 공전 궤도를 따라 운동하고 있다. A의 공전 궤도는 반지름이 R 인 원이고 주기는 T 이며, B의 공전 궤도는 p가 행성에서 가장 가까운 점, q가 행성에서 가장 먼 점인 타원이다. 행성에서 p, q까지의 거리는 각각 $2R, 6R$ 이고, B가 q에서 r까지 공전하는 데 걸린 시간은 r에서 p까지 공전하는 데 걸린 시간과 같다.



➤ 타원의 한 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 일정하고, 타원의 면적은 πab (a : 긴 반지름, b : 짧은반지름)이다. 또한 타원의 중심에서 초점까지의 거리인 초점 거리 c 는 $c^2 = a^2 - b^2$ 이다.

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, A, B에는 행성에 의한 중력만 작용한다.)

보기

ㄱ. B의 속력은 p에서 q에서의 3배이다.

ㄴ. B가 q에서 r까지 가는 데 걸린 시간은 $2T$ 이다.

ㄷ. 그림에서 색칠한 부분의 면적은 $4\sqrt{3}\pi R^2$ 이다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 08 나. 빗면과 나란한 방향을 x 축, 빗면과 수직인 방향을 y 축으로 하여 문제를 분석하면 x 축으로는 처음 속도가 0이고 가속도가 $g\sin\theta$ 인 등가속도 운동을 한다. y 축으로는 처음 속도가 v_0 이고 가속도가 $-g\cos\theta$ 인 등가속도 운동을 하며, P는 y 축상으로 가장 멀리 이동한 지점이므로 이 점에서 y 축 방향(=빗면과 수직인 방향)의 속도가 0이 된다. P에 도달한 후에는 빗면을 향해 가속도가 $-g\cos\theta$ 인 등가속도 운동을 하므로 O에서 P까지 가는 데 걸린 시간과 P에서 다시 빗면에 도달하는 데 걸리는 시간은 $\frac{v_0}{g\cos\theta}$ 으로 같다. 따라서 O에서 Q까지 가는 데 걸리는 시간은 O에서 P까지 가는 데 걸리는 시간의 2배인 $\frac{2v_0}{g\cos\theta}$ 이다.

[바로알기] ㄱ. P에서 물체의 속도는 빗면과 나란한 방향이므로 속도의 연직 방향 성분은 0이 아니다.

ㄴ. y 축 방향으로 물체는 처음 속력이 v_0 이고 가속도는 $-g\cos\theta$ 인 등가속도 운동을 하므로 등가속도 직선 운동의 식을 적용하면 $0^2 - v_0^2 = 2 \times (-g\cos\theta) \times H$ 에서

$$H = \frac{v_0^2}{2g\cos\theta} \text{이다.}$$

03 원운동

중요 개념 체크

39쪽

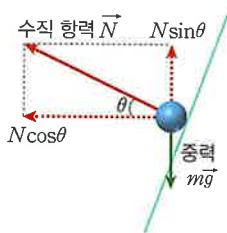
- 1 크기, 방향 2 각속도 3 $\frac{mv^2}{r}$
4 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) × (5) ○

질문 분석 유제

41쪽

- 1 (1) $\frac{mg}{\sin\theta}$ (2) $\sqrt{\frac{gr}{\tan\theta}}$

- 1 (1) 물체에 작용하는 수직 항력을 $\vec{N}$ 이라고 하면 $\vec{N}$ 의 연직 성분 $N\sin\theta$ 는 물체에 작용하는 중력 mg 과 힘의 평형을 이루므로 $N\sin\theta = mg$ 에서 $N = \frac{mg}{\sin\theta}$ 이다.



- (2) 수직 항력 $\vec{N}$ 의 수평 성분은 $N\cos\theta$ 이다. 수직 항력의 수평 성분이 구심력이므로

$$N\cos\theta = \frac{mg}{\sin\theta}\cos\theta = \frac{mg}{\tan\theta} = \frac{mv^2}{r} \text{에서}$$

$$v = \sqrt{\frac{gr}{\tan\theta}} \text{이다.}$$

개념 기본 문제

42쪽~43쪽

01 ②

02 (1) 2초 (2) 0.5 Hz (3) π rad/s (4) 0.4π m/s

03 ㉠ $4r$, ㉡ $\sqrt{2}v$ 04 (1) 2π 초 (2) 1 rad/s

05 ① 06 ⑤ 07 ④ 08 1:6

09 $\sqrt{\frac{2g}{l}}$

10 (1) 장력의 크기: $\frac{mg}{\cos\theta}$, 구심력의 크기: $mg\tan\theta$

(2) $\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$ (3) $2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$

- 01 나. B에 작용하는 알짜힘은 구심력이다. 등속 원운동을 하는 물체에 작용하는 구심력과 물체의 운동 방향은 서로 수직이다.

[바로알기] ㄱ. A는 빗면을 내려오는 방향, 즉 물체의 운동 방향과 같은 방향으로 일정한 알짜힘을 받으므로 등가속도 운동을 하고, B는 운동 방향과 수직인 방향으로 알짜힘을 받으므로 등속 원운동을 한다. 따라서 A의 속력은 증가하고 B의 속력은 일정하다.

ㄴ. A의 가속도는 크기와 방향이 모두 일정하지만, B의 가속도는 크기만 일정하고 방향은 원의 중심을 향하여 계속 변하므로 가속도가 일정하지 않다.

02 (1) 그림에서 물체가 $\frac{1}{10}$ 초 간격으로 20번 찍혀 있으므로

주기 $T = 20 \times \frac{1}{10}(\text{s}) = 2 \text{ s}$ 이다.

(2) 진동수 f 는 주기와 역수 관계이므로 $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \text{ s}} = 0.5 \text{ Hz}$ 이다.

(3) 각속도의 크기 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2 \text{ s}} = \pi \text{ rad/s}$ 이다.

(4) 속력 $v = r\omega = 0.4 \times \pi = 0.4\pi (\text{m/s})$ 이다.

- 03 A의 구심력이 $F = \frac{mv^2}{r}$ 이므로 B의 구심력
 $F = \frac{m(2v)^2}{r} = \frac{4mv^2}{r}$ 에서 ㉠ = $4r$ 이다. 마찬가지로 C의
 구심력 $2F = \frac{2m \times \text{㉠}^2}{2r} = 2 \times \frac{mv^2}{r}$ 에서 ㉡ = $\sqrt{2}v$ 이다.

- 04 (1) A가 2초 동안 $2r$ 의 거리를 이동하므로 A의 속력은
 v (m/s)이다. B와 A의 속력은 같으므로 B의 주기는
 $\frac{2\pi r}{v} = 2\pi$ (s)이다.

- (2) 각속도 $\omega = \frac{v}{r}$ 이므로 B의 각속도는
 $\frac{r(\text{m/s})}{r(\text{m})} = 1$ rad/s이다.

- 05 ㄴ. 등속 원운동에서 주기 $T = \frac{2\pi r}{v}$ 이다. 속력이 같고 반
 지름은 A가 B의 $\frac{1}{2}$ 배이므로, 주기는 A가 B의 $\frac{1}{2}$ 배이다.

[바로알기] ㄱ. 등속 원운동에서 속력 $v = r\omega$ 이다. A와 B
 의 속력이 v 로 같다면 A의 각속도가 B의 각속도의 2배이
 므로 반지름은 A가 B의 $\frac{1}{2}$ 배이다.

ㄷ. 등속 원운동에서 구심력 $F = mr\omega^2$ 이다. 각속도가 같
 다면 반지름이 A가 B의 $\frac{1}{2}$ 배이고 A와 B의 질량이 같으
 므로, A의 구심력의 크기는 B의 $\frac{1}{2}$ 배이다.

- 06 ㄱ. A가 있는 바퀴와 B가 있는 바퀴는 체인으로 연결되어
 회전하므로 같은 시간 동안 A와 B가 이동한 거리가 같다.
 따라서 A와 B의 속력은 같다.

ㄴ. 등속 원운동에서 속력 $v = r\omega$ 이다. A와 B의 각속도
 를 각각 ω_A , ω_B 라고 하면 A와 B의 속력이 같으므로

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \text{에서 } \omega_A = \frac{r_B}{r_A} \omega_B \text{이다.}$$

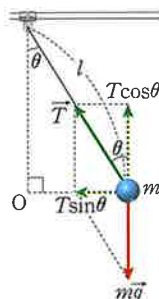
ㄷ. B와 C가 함께 회전하므로 각속도는 같다. 등속 원운
 동에서 구심 가속도 $a = r\omega^2$ 인데 각속도가 ω_B 로 같으므로
 구심 가속도의 크기는 반지름에 비례한다. 따라서 C가 B
 의 $\frac{r_C}{r_B}$ 배이다.

- 07 물체를 당기는 실의 장력의 크기와 질량 0.1 kg인 추에 작
 용하는 중력의 크기는 같으므로 $\frac{mv^2}{r} = 0.1 \text{ kg} \times g$ 이다.
 따라서 반지름을 r 로 일정하게 하면서 물체의 속력이 2배
 가 되면 구심력이 4배가 되므로 추의 질량 0.1 kg의 4배
 인 0.4 kg이 되어야 한다.

- 08 원판 위 물체가 회전할 때 구심력은 물체에 작용하는 마찰
 력이다. 등속 원운동에서 구심력 $F = mr\omega^2$ 이므로
 $f_A : f_B = (m \times r \times \omega^2) : (3m \times 2r \times \omega^2) = 1 : 6$ 이다.

- 09 실의 장력의 크기를 T 라고 하면 장력의 연직 방향 성분이
 물체의 무게와 같으므로 $T \sin 30^\circ = \frac{T}{2} = mg$ 에서
 $T = 2mg$ 이다. 구심력은 실의 장력의 수평 방향 성분이므
 로 구심력의 크기 $F = T \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}T}{2} = \sqrt{3}mg$ 이다.
 따라서 구심력 $F = mr\omega^2 = m(l \cos 30^\circ)\omega^2 =$
 $\frac{\sqrt{3}ml\omega^2}{2} = \sqrt{3}mg$ 에서 각속도 $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ 이다.

- 10 (1) 물체는 연직 방향으로 힘의 평형을
 이루고 있다. 물체에 작용하는 장력을
 $\vec{T}$ 라고 하면 $T \cos \theta = mg$ 이므로 장
 력의 크기 $T = \frac{mg}{\cos \theta}$ 이다. 구심력은
 장력의 수평 성분이므로 구심력
 $F = T \sin \theta = mg \tan \theta$ 이다.



- (2) 구심력 $F = mr\omega^2 = mg \tan \theta$ 이
 고, 물체의 회전 반지름은 $r = l \sin \theta$ 이므로
 $m(l \sin \theta)\omega^2 = mg \tan \theta$ 에서 각속도 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}}$ 이다.
 (3) 주기는 $\frac{2\pi}{\omega}$ 이므로 $2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta}{g}}$ 이다.

개념 적용 문제

44쪽~47쪽

- 01 ⑤ 02 ④ 03 ⑤ 04 ③ 05 ③ 06 ②
 07 ⑤ 08 ⑤

- 01 ㄱ. 물체가 등속 원운동을 하므로 속력은 같다. 따라서
 $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$ 이다.

ㄴ. 구심력은 원의 중심을 향하고, 속도의 방향은 원의 접
 선 방향이므로, 구심력의 방향과 속도의 방향은 직각을 이
 룬다. 구심력의 방향과 가속도의 방향은 같으므로 $\vec{v}_1$ 과 $\vec{a}$
 의 방향은 수직이다.

ㄷ. 등속 원운동에서 주기는 원 궤도를 한 바퀴($=2\pi r$) 도
 는 데 걸리는 시간이므로 주기 $T = \frac{2\pi r}{|v_1|}$ 이다.

- 02 ㄱ. A의 주기 T 가 2초이므로, A의 각속도 $\omega_A = \frac{2\pi}{T} = \pi$ (rad/s)이다. 두 원판이 맞닿아 함께 회전하여 같은 시간 동안 회전한 원둘레는 같고 A가 회전하는 원 궤도의 반지름 $r_A = 2$ m이므로 A, B의 속력 $v = r_A \omega_A = 2$ m $\times$ π rad/s $= 2\pi$ m/s이다.

ㄷ. A와 B의 속력이 같으므로 B의 속력이 2π m/s이고 B가 회전하는 원 궤도의 반지름 $r_B = 3$ m이므로 B의 각속도 ω_B 는 $v = r_B \omega_B = 2\pi$ m/s에서 $\omega_B = \frac{2}{3}\pi$ (rad/s)이다.

따라서 B의 주기 $T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$ (s)이다.

A의 주기는 2초, B의 주기는 3초이므로 A, B는 6초일 때 다시 기준선과 동시에 만난다.

[바로알기] ㄴ. 등속 원운동에서 가속도는 $a = r\omega^2$ 이므로 A의 가속도 크기 $a_A = r_A \omega_A^2 = 2\pi^2$ (m/s²)이고 B의 가속도의 크기 $a_B = r_B \omega_B^2 = 3 \times \left(\frac{2}{3}\pi\right)^2 = \frac{4}{3}\pi^2$ (m/s²)이다.

따라서 $\frac{a_A}{a_B} = \frac{2\pi^2}{\frac{4}{3}\pi^2} = \frac{3}{2}$ 에서 A의 가속도의 크기는 B의

$\frac{3}{2}$ 배이다.

- 03 ㄱ. 등속 원운동에서 속력은 $v = r\omega$ 이다. 각속도 ω 가 동일할 때 등속 원운동하는 물체의 속력은 반지름 r 에 비례하므로 C의 속력은 A의 3배이다.

ㄴ. 등속 원운동에서 가속도의 크기 $a = r\omega^2$ 이다. 각속도 ω 가 일정할 때 가속도의 크기는 반지름 r 에 비례하므로 B의 가속도의 크기는 A의 2배이다.

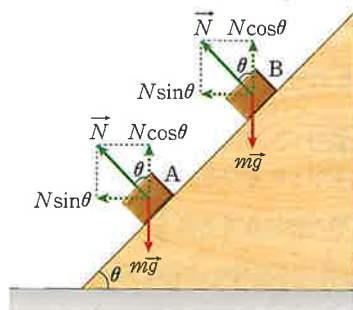
ㄷ. 구심력 $F = mr\omega^2$ 이므로 A, B, C에 작용하는 알짜힘인 구심력의 크기는 각각 $md\omega^2$, $2md\omega^2$, $3md\omega^2$ 이다. 실 $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 장력의 크기를 각각 T_1 , T_2 , T_3 이라고 하면 $T_1 - T_2 = md\omega^2$, $T_2 - T_3 = 2md\omega^2$, $T_3 = 3md\omega^2$ 이므로 $\overline{OA}$ 의 장력 $T_1 = 6md\omega^2$ 이다.

- 04 ㄱ. (가)에서 A의 구심력의 크기를 F_A 라고 하면 $F_A = \frac{mv_A^2}{r}$ 이고, 가속도의 크기를 a_A 라고 하면 $F_A = ma_A$ 이므로 $a_A = \frac{F_A}{m} = \frac{v_A^2}{r}$ 이다.

ㄴ. (나)에서 A가 B를 잡아당기는 힘이 구심력이다. 이때 A에 작용하는 중력 mg 와 같은 크기의 힘으로 잡아당기므로, 구심력의 크기는 mg 이다.

[바로알기] ㄷ. (가)와 (나)에서 구심력의 크기는 각각 $2mg$, mg 이고, 회전 반지름은 r 로 같다. 따라서 $\frac{mv_A^2}{r} : \frac{2mv_B^2}{r} = 2mg : mg$ 에서 $v_A^2 = 4v_B^2$ 이므로 $v_A : v_B = 2 : 1$ 이다.

- 05 ㄱ. A의 질량을 m , A에 작용하는 수직 항력을 $\vec{N}$ 이라고 하면 A에 작용하는 중력 $m\vec{g}$ 와 빗면이 A를 떠받치는 수직 항력 $\vec{N}$ 의 합력이 구심력이다. 그림과 같이 경사각을 θ 라고 할 때 수직 항력의 연직 방향 성분 $N \cos \theta$ 와 중력의 크기 mg 가 힘의 평형을 이루므로 $N \cos \theta = mg$ 에서 $N = \frac{mg}{\cos \theta}$ 이다. B의 경우 질량이 m , 경사각도 θ 로 A와 동일하므로, A와 B의 수직 항력 $\vec{N}$ 의 크기는 같다.



ㄴ. 구심력은 수직 항력의 수평 방향 성분과 같으므로 구심력의 크기는 $N \sin \theta = \frac{mg}{\cos \theta} \times \sin \theta = mg \tan \theta$ 이다.

따라서 구심 가속도의 크기는 $\frac{mg \tan \theta}{m} = g \tan \theta$ 로, A와 B의 경사각 θ 가 같으므로 A와 B의 구심 가속도의 크기는 같다.

[바로알기] ㄷ. A와 B에 작용하는 구심력의 크기가 같으므로 $\frac{mv_A^2}{r_1} = \frac{mv_B^2}{r_2}$ 에서 $v_A = v_B \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$ 이므로 A의 속력은 B의 속력의 $\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$ 배이다.

- 06 ㄱ. 원판 위에서 등속 원운동을 하고 있는 물체에 작용하는 마찰력이 구심력이며, 이때 작용하는 마찰력은 정지 마찰력이다. 물체의 각속도가 증가하여 ω 가 될 때까지 물체에 작용하는 구심력의 크기도 증가하므로 물체에 작용하는 마찰력의 크기도 증가한다.

ㄴ. 구심력이 최대 정지 마찰력이 될 때까지 물체가 미끄러지지 않고 등속 원운동을 계속하므로 $f = \mu mg = mr\omega^2$ 에서 $\mu = \frac{r\omega^2}{g}$ 이다.

바로알기 ㄷ. 물체에 작용하는 마찰력이 구심력이므로, 회전 원판의 각속도가 $\frac{\omega}{2}$ 일 때 구심력의 크기는 $mr\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 = \frac{mr\omega^2}{4}$ 에서 마찰력의 크기는 $\frac{mr\omega^2}{4}$ 이다.

- 07** ㄱ. 회전 중심에서 실이 매달린 곳까지의 거리가 r 이고, 회전 반지름도 r 이므로 물체를 매단 실이 회전면과 이루는 각도는 45° 이다. 등속 원운동을 하는 동안 물체에 작용하는 중력 mg 와 장력 T 의 합력이 구심력 F 이다. 이때 장력 T 의 연직 성분이 중력과 힘의 평형을 이루므로 $T \sin 45^\circ = \frac{T}{\sqrt{2}} = mg$ 이고, 구심력은 장력 T 의 수평 성분과 같으므로 구심력의 크기 $F = T \cos 45^\circ = \frac{T}{\sqrt{2}} = mg$ 이다.

ㄴ. 물체의 각속도를 ω 라고 하면 구심력의 크기

$$F = mr\omega^2 = mg \text{에서 각속도 } \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} \text{이다.}$$

ㄷ. 실이 끊어지면 물체에는 중력만 작용하는데, 물체의 속도의 방향은 원의 접선 방향인 수평 방향이므로 물체는 수평으로 던진 물체와 같은 포물선 운동을 한다. 연직 방향으로로는 가속도가 g 인 등가속도 운동을 하므로 수평면에 떨어지는 데 걸리는 시간을 t 라고 하면 $\frac{1}{2}gt^2 = r$ 에서 $t = \sqrt{\frac{2r}{g}}$ 이다. 이 사이에 수평 방향으로로는 속력 $r\omega = r\sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{gr}$ 로 등속도 운동을 하므로 수평 방향 이동 거리는 $\sqrt{gr} \times \sqrt{\frac{2r}{g}} = \sqrt{2}r$ 이다.

- 08** ㄱ. P에서 Q까지 궤도가 물체에 작용하는 힘은 운동 방향에 수직이므로, 알짜힘이 물체에 한 일은 중력이 물체에 한 일과 같다. 따라서 P에서 Q까지 알짜힘이 한 일은 중력이 한 일인 $W = mg \times 2R = 2mgR$ 이다.
- ㄴ. P에서 궤도가 물체에 작용하는 힘이 0이므로, 물체는 중력을 구심력으로 하여 원운동을 한다. 따라서 $mg = \frac{mv_0^2}{R}$ 에서 $v_0 = \sqrt{gR}$ 이다. 즉, P에서 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mgR$ 이므로 Q에서 운동 에너지는 P에서 운동 에너지와 P에서 Q까지 알짜힘이 한 일의 합인 $\frac{1}{2}mgR + 2mgR = \frac{5}{2}mgR$ 이다.
- ㄷ. Q에서 운동 에너지는 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{5}{2}mgR$ 이므로 속력 $v = \sqrt{5gR} = \sqrt{5}v_0$ 이다.

04 케플러 법칙과 중력

중요 개념 체크

54쪽

1 타원 2 제곱, 세제곱 3 질량, 거리

4 $\sqrt{\frac{GM}{r}}$ 5 (1) ○ (2) × (3) × (4) ○

탐구 확인 문제

54쪽

1 ㄱ, ㄴ, ㄷ

- 1 ㄱ, ㄷ. 행성의 공전 주기의 제곱은 타원 궤도 긴반지름의 세제곱에 비례한다. 따라서 $\frac{T_A^3}{T_B^3} = \frac{r_A^3}{r_B^3}$ 이고, $r_A < r_B$ 라고 하였으므로 $T_A < T_B$ 이다.
- ㄴ. 행성은 태양을 한 초점으로 하는 타원 궤도를 그리면서 공전한다.

개념 기본 문제

56쪽~57쪽

- 01 ③ 02 ④ 03 ⑤ 04 ㄱ, ㄴ, ㄷ
05 ㄱ 06 (1) 19배 (2) $2\sqrt{2}$ 배 07 ①
08 (1) t_2 (2) 9배 09 ④
10 (1) $\frac{3}{4}\sqrt{6}$ 배 (2) 9배

- 01** ㄱ. 행성들은 태양을 한 초점으로 하는 타원 궤도를 따라 공전한다.
- ㄷ. 행성과 태양을 잇는 직선이 같은 시간 동안 쓸고 지나간 면적은 일정하다. 즉, 행성의 면적 속도는 일정하다.
- 바로알기** ㄴ. 행성의 주기의 제곱은 긴반지름의 세제곱에 비례한다.
- 02** ㄴ. $F_A = G \frac{m_A m_B}{r^2}$ 이므로 F_A 는 ' $m_A \times m_B$ '에 비례한다.
- ㄷ. F_A 와 F_B 는 A와 B 사이에 상호작용 하는 힘이므로 작용 반작용 관계이다.
- 바로알기** ㄱ. $F_B = G \frac{m_A m_B}{r^2}$ 에서 F_B 는 r^2 에 반비례한다.
- 03** ㄱ. 인공위성에 작용하는 중력이 구심력 역할을 한다.
- ㄴ. 정지 위성은 지표면에서 볼 때 위치가 변하지 않는 인공위성으로, 공전 주기가 지구의 자전 주기와 같아 정지해 있는 것처럼 보인다.

