

가톨릭대논술

의예과·약학과

목차

2026학년도 의예과 / 약학과	3
문항 1 (의예·약학 공통)	3
문항 2 (의예·약학 공통)	6
문항 3 (의예·약학 공통)	10
문항 4 (의예 전용)	14
 2025학년도 의예과 / 약학과	 18
문항 1 (의예·약학 공통)	18
문항 2 (의예·약학 공통)	22
문항 3 (의예·약학 공통)	25
문항 4 (의예 전용)	30
 2024학년도 의예과 / 약학과	 36
문항 1 (의예·약학 공통)	36
문항 2 (의예·약학 공통)	39
문항 3 (의예 전용)	41
문항 4 (의예 문항 4 / 약학 문항 3)	44

2026학년도 의예과 / 약학과

문항 1 (의예·약학 공통)

제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 논제에 답하시오. (200점)

제시문

(ㄱ) 정수의 값을 갖는 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 과 수열 $\{x_n\}$ 은 자연수 K 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 의 공차는 각각 0이 아닌 정수 d_1, d_2, d_3 이고 $a_K = b_K, b_{K+15} = c_{K+15}$ 이다.
 (나) $n \leq K$ 인 자연수 n 에 대하여 $x_n = a_n$ 이다.
 (다) $K \leq n \leq K + 15$ 인 자연수 n 에 대하여 $x_n = b_n$ 이다.
 (라) $n \geq K + 15$ 인 자연수 n 에 대하여 $x_n = c_n$ 이다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 수열 $\{x_n\}$ 에 대하여 $\{x_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 할 때, $\{x_n\}$ 과 S_n 은 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $x_1 = 35$
 (나) $x_{46}x_{47} < 0$
 (다) $S_7 = S_8$
 (라) $S_{19}S_{17} - S_{19}S_{18} + S_{18}^2 - S_{18}S_{17} - 25 = 0$

논제 (200점) 제시문의 d_1, d_2, d_3, K, S_{46} 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

■ 예시 답안

제시문에서 $S_{19}S_{17} - S_{19}S_{18} + S_{18}^2 - S_{18}S_{17} - 25 = 0$ 이므로 $(S_{18} - S_{17})(S_{19} - S_{18}) = -25$, 즉 $x_{18}x_{19} = -25$ 이고 x_{18} 과 x_{19} 는 서로 부호가 다를 수 있다. 또한 $x_{46}x_{47} < 0$ 이므로 x_{46} 과 x_{47} 도 서로 부호가 다르다.

한편 $S_7 = S_8$ 이므로 $x_8 = S_8 - S_7 = 0$ 이고, 만일 $K \leq 8$ 이면, $k > 8$ 일 때

- 1) $d_2 > 0, d_3 > 0$ 인 경우 x_k 는 증가
- 2) $d_2 > 0, d_3 < 0$ 인 경우 x_k 는 증가 후 감소
- 3) $d_2 < 0, d_3 < 0$ 인 경우 x_k 는 감소
- 4) $d_2 < 0, d_3 > 0$ 인 경우 x_k 는 감소 후 증가

의 경우밖에 없는데 어떤 경우라도 x_{18} 과 x_{19} 및 x_{46} 과 x_{47} 에서 부호가 바뀐다는 사실에 대하여 모순이다. 따라서 $K > 8$ 이다.

$x_8 = 0$ 이므로 $35 + (8 - 1)d_1 = 0$, 즉 $d_1 = -5$ 임을 알 수 있다.

$d_1 < 0$ 이므로, 만일 $d_2 < 0$ 이라면 x_k 는 모든 k 에 대하여 감소하거나 감소하다가 증가하는 경우밖에 없으므로 역시 $x_8 = 0$ 이고 x_{18} 과 x_{19} 및 x_{46} 과 x_{47} 에서 부호가 바뀔 수 없다. 따라서 $d_2 > 0$ 이고 $K \leq 18$ 임을 알 수 있다. 이때 $K > 8$ 에서 $K + 15 > 23$ 이므로 $x_{18} = b_{18}, x_{19} = b_{19}$ 이다. 즉 $x_{19} - x_{18} = d_2 > 0$ 이고, $x_{18}x_{19} = -25$ 에서 $x_{18} = -1, x_{19} = 25$, 또는 $x_{18} = -25, x_{19} = 1$, 또는 $x_{18} = -5, x_{19} = 5$ 이다.

- 1) $x_{18} = -1, x_{19} = 25$ 라면

$d_2 = 26$ 이고 $a_K = b_K$ 이어야 하지만 $a_K = 35 + (K - 1)(-5) = -1 + (18 - K)(-26) = b_K$ 를 만족시키는 정수 K 는 존재하지 않는다.

- 2) $x_{18} = -25, x_{19} = 1$ 이라면

$d_2 = 26$ 이고 $a_K = 35 + (K - 1)(-5) = -25 + (18 - K)(-26) = b_K$ 를 만족시키는 정수 K 는 존재하지 않는다.

- 3) $x_{18} = -5, x_{19} = 5$ 라면

$d_2 = 10$ 이고 $a_K = 35 + (K - 1)(-5) = -5 + (18 - K)(-10) = b_K$ 를 만족시키는 자연수 $K = 15$ 가 존재한다.

따라서 $K = 15$ 이고, $x_{30} = -35 + (30 - 15)(10) = 115$ 이다.

한편 $d_3 < 0$ 이므로, $x_{46} > 0$ 이고 $x_{47} < 0$ 이다.

$x_{46} = 115 + (46 - 30)d_3 > 0$ 에서 $d_3 > -\frac{115}{16} > -8$ 이고 $x_{47} = 115 + (47 - 30)d_3 < 0$ 에서

$d_3 < -\frac{115}{17} < -6$ 이므로 $d_3 = -7$ 이고, $x_{46} = 115 + (46 - 30)(-7) = 3$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} S_{46} &= S_{15} + (S_{30} - S_{15}) + (S_{46} - S_{30}) \\ &= \frac{15(35 - 35)}{2} + \frac{15(-25 + 115)}{2} + \frac{16(108 + 3)}{2} \\ &= 1563 \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
논제	제시문에서 $S_{19}S_{17} - S_{19}S_{18} + S_{18}^2 - S_{18}S_{17} - 25 = 0$ 이므로 $(S_{18} - S_{17})(S_{19} - S_{18}) = -25$, 즉 $x_{18}x_{19} = -25$ 이고 x_{18} 과 x_{19} 는 서로 부호가 다를 수 있다. 또한 $x_{46}x_{47} < 0$ 이므로 x_{46} 과 x_{47} 도 서로 부호가 다르다.	20
	한편 $S_7 = S_8$ 이므로 $x_8 = S_8 - S_7 = 0$ 이고, 만일 $K \leq 8$ 이면, $k > 8$ 일 때 1) $d_2 > 0, d_3 > 0$ 인 경우 x_k 는 증가 2) $d_2 > 0, d_3 < 0$ 인 경우 x_k 는 증가 후 감소 3) $d_2 < 0, d_3 < 0$ 인 경우 x_k 는 감소	40

하위문항	채점 기준	배점
	4) $d_2 < 0, d_3 > 0$인 경우 x_k는 감소 후 증가 의 경우밖에 없는데 어떤 경우라도 x_{18}과 x_{19} 및 x_{46}과 x_{47}에서 부호가 바뀐다는 사실에 대하여 모순이다. 따라서 $K > 8$이다. $x_8 = 0$이므로 $35 + (8 - 1)d_1 = 0$, 즉 $d_1 = -5$임을 알 수 있다.	
	$d_1 < 0$이므로, 만일 $d_2 < 0$이라면 x_k는 모든 k에 대하여 감소하거나 감소하다가 증가하는 경우밖에 없으므로 역시 $x_8 = 0$이고 x_{18}과 x_{19} 및 x_{46}과 x_{47}에서 부호가 바뀔 수 없다. 따라서 $d_2 > 0$이고 $K \leq 18$임을 알 수 있다. 이때 $K > 8$에서 $K + 15 > 23$이므로 $x_{18} = b_{18}, x_{19} = b_{19}$이다. 즉 $x_{19} - x_{18} = d_2 > 0$이고, $x_{18}x_{19} = -25$에서 $x_{18} = -1, x_{19} = 25$, 또는 $x_{18} = -25, x_{19} = 1$, 또는 $x_{18} = -5, x_{19} = 5$이다. 1) $x_{18} = -1, x_{19} = 25$라면 $d_2 = 26$이고 $a_K = b_K$이어야 하지만 $a_K = 35 + (K - 1)(-5) = -1 + (18 - K)(-26) = b_K$를 만족시키는 정수 K는 존재하지 않는다. 2) $x_{18} = -25, x_{19} = 1$이라면 $d_2 = 26$이고 $a_K = 35 + (K - 1)(-5) = -25 + (18 - K)(-26) = b_K$를 만족시키는 정수 K는 존재하지 않는다. 3) $x_{18} = -5, x_{19} = 5$라면 $d_2 = 10$이고 $a_K = 35 + (K - 1)(-5) = -5 + (18 - K)(-10) = b_K$를 만족시키는 자연수 $K = 15$가 존재한다. 따라서 $K = 15$이고, $x_{30} = -35 + (30 - 15)(10) = 115$이다.	60
	한편 $d_3 < 0$이므로, $x_{46} > 0$이고 $x_{47} < 0$이다. $x_{46} = 115 + (46 - 30)d_3 > 0$에서 $d_3 > -\frac{115}{16} > -8$이고 $x_{47} = 115 + (47 - 30)d_3 < 0$ 에서 $d_3 < -\frac{115}{17} < -6$이므로 $d_3 = -7$이고, $x_{46} = 115 + (46 - 30)(-7) = 3$이다.	40
	따라서 $ \begin{aligned} S_{46} &= S_{15} + (S_{30} - S_{15}) + (S_{46} - S_{30}) \\ &= \frac{15(35 - 35)}{2} + \frac{15(-25 + 115)}{2} + \frac{16(108 + 3)}{2} \\ &= 1563 \end{aligned} $	40

문항 2 (의예·약학 공통)

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제에 답하시오. (200점)

제시문

(ㄱ) 양수 a 와 상수 b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + a} & (x \geq 0) \\ bx & (x < 0) \end{cases}$$

(ㄴ) 실수 t 와 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$ 에 대하여 닫힌구간 $[t, t+c]$ 에서의 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라고 할 때, 함수 $f(x)$ 와 $g(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다. (단, c 는 양수이다.)

(가) $x \geq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq f(c)$ 이다.

(나) 함수 $g(t)$ 는 $t = -\frac{1}{2}$ 에서 미분가능하지 않다.

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 c 와 함수 $g(t)$ 에 대하여 기울기가 m 인 직선 l 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 l 의 방정식은 $y = mt + \frac{1}{c}$ 이다.

(나) $m = \frac{1}{25}$ 일 때, 직선 l 은 곡선 $y = g(t)$ 와 서로 다른 두 점에서 만난다.

(다) $0 < m < \frac{1}{25}$ 일 때, 직선 l 은 곡선 $y = g(t)$ 와 서로 다른 세 점에서 만난다.

논제 (200점) 제시문의 a, b, c 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

■ 예시 답안

제시문 (ㄴ)의 (가)에 의해,

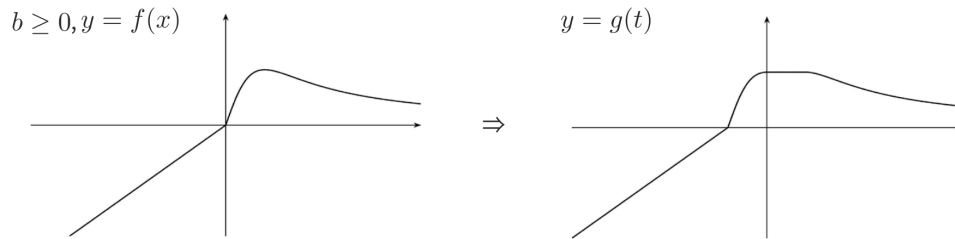
$$f'(c) = \frac{2a - 2c^2}{(c^2 + a)^2} = 0 \Rightarrow a = c^2$$

이므로 $f(c) = \frac{1}{c}$ 이다.

① $b \geq 0$ 인 경우, 함수 $g(t)$ 는

$$g(t) = \begin{cases} b(t+c) & (t \leq -c) \\ \frac{2(t+c)}{(t+c)^2 + a} & (-c < t \leq 0) \\ \frac{1}{c} & (0 < t \leq c) \\ \frac{2t}{t^2 + a} & (c \leq t) \end{cases}$$

이고, $g(t)$ 가 $t = -\frac{1}{2}$ 에서 미분가능하지 않기 위해서는 $c = \frac{1}{2}$ 이어야 한다.



한편, $c = \frac{1}{2}$ 일 때, $g(0) = 2$ 이므로 $(0, 2)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선과 $g(t)$ 의 교점은

㉠ $b \geq \frac{1}{25} : 0 < m \leq \frac{1}{25}$ 일 때 2개

㉡ $b < \frac{1}{25} : m = \frac{1}{25}$ 일 때 3개

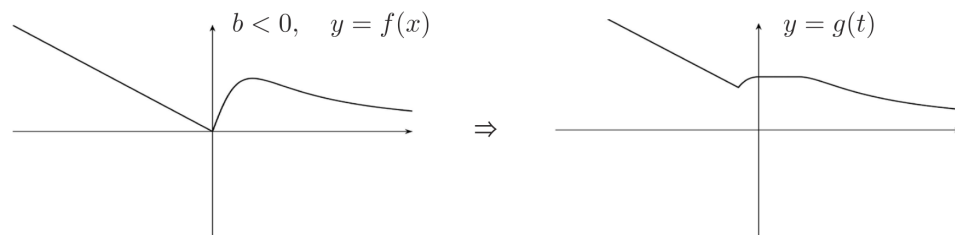
이므로 제시문 (ㄷ)을 만족하지 않는다.

② $b < 0$ 인 경우, $f(-\alpha) = f(c - \alpha)$ 를 만족시키는 α 가 구간 $(0, c)$ 에 존재하므로, 함수 $g(t)$ 는

$$g(t) = \begin{cases} bt & (t \leq -\alpha) \\ \frac{2(t+c)}{(t+c)^2 + a} & (-\alpha < t \leq 0) \\ \frac{1}{c} & (0 < t \leq c) \\ \frac{2t}{t^2 + a} & (c \leq t) \end{cases}$$

$g(t)$ 가 $t = -\frac{1}{2}$ 에서 미분가능하지 않기 위해서는 $\alpha = \frac{1}{2} < c$ 이어야 한다.

$g(0) = \frac{1}{c}$ 이므로 그래프는 다음과 같다.



따라서,

$$-\frac{1}{2}b = \frac{2(c - \frac{1}{2})}{(c - \frac{1}{2})^2 + a} \Rightarrow b = \frac{-4(c - \frac{1}{2})}{(c - \frac{1}{2})^2 + c^2}$$

제시문 (ㄷ)의 (나), (다)를 만족하기 위해서는 $(0, \frac{1}{c})$ 와 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}b)$ 를 잇는 직선의 기울기가 $\frac{1}{25}$ 이어야 한다. 즉,

$$\frac{\frac{1}{c} - (-\frac{1}{2}b)}{0 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{25} \Rightarrow b = \frac{1}{25} - \frac{2}{c}$$

따라서,

$$b = \frac{-4(c - \frac{1}{2})}{(c - \frac{1}{2})^2 + c^2} = \frac{1}{25} - \frac{2}{c} \Rightarrow 8c^3 - 4c^2 + c - 50 = 0$$

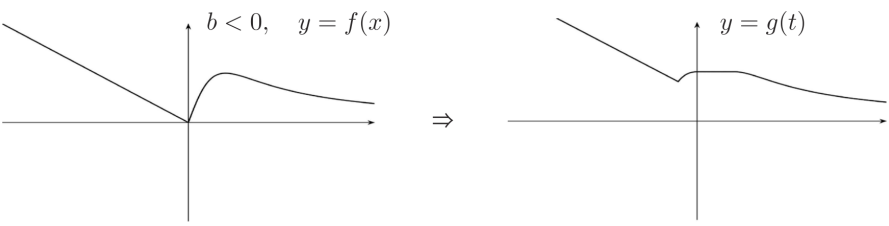
이고

$$8c^3 - 4c^2 + c - 50 = 0 \Leftrightarrow (c - 2)(8c^2 + 12c + 25) = 0$$

에 의해 $c = 2$ 이다. 따라서, $a = 4, b = -\frac{24}{25}, c = 2$ 이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
	제시문 (ㄴ)의 (가)에 의해, $f'(c) = \frac{2a - 2c^2}{(c^2 + a)^2} = 0 \Rightarrow a = c^2$ 이므로 $f(c) = \frac{1}{c}$이다.	30
논제	① $b \geq 0$ 인 경우, 함수 $g(t)$ 는 $g(t) = \begin{cases} b(t+c) & (t \leq -c) \\ \frac{2(t+c)}{(t+c)^2 + a} & (-c < t \leq 0) \\ \frac{1}{c} & (0 < t \leq c) \\ \frac{2t}{t^2 + a} & (c < t) \end{cases}$ 이고, $g(t)$가 $t = -\frac{1}{2}$에서 미분가능하지 않기 위해서는 $c = \frac{1}{2}$이어야 한다. $b \geq 0, y = f(x)$ ⇒ $y = g(t)$ 한편, $c = \frac{1}{2}$일 때, $g(0) = 2$이므로 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선과 $g(t)$의 교점은 ① $b \geq \frac{1}{25} : 0 < m \leq \frac{1}{25}$ 일 때 2개 ② $b < \frac{1}{25} : m = \frac{1}{25}$ 일 때 3개 이므로 제시문 (ㄷ)을 만족하지 않는다.	50
	② $b < 0$ 인 경우, $f(-\alpha) = f(c - \alpha)$ 를 만족시키는 α 가 구간 $(0, c)$ 에 존재하므로, 함수 $g(t)$ 는	50

하위문항	채점 기준	배점
	$g(t) = \begin{cases} bt & (t \leq -\alpha) \\ \frac{2(t+c)}{(t+c)^2+a} & (-\alpha < t \leq 0) \\ \frac{1}{c} & (0 < t \leq c) \\ \frac{2t}{t^2+a} & (c \leq t) \end{cases}$ $g(t)$가 $t = -\frac{1}{2}$에서 미분가능하지 않기 위해서는 $\alpha = \frac{1}{2} < c$이어야 한다. $g(0) = \frac{1}{c}$이므로 그래프는 다음과 같다.  따라서, $-\frac{1}{2}b = \frac{2(c-\frac{1}{2})}{(c-\frac{1}{2})^2+a} \Rightarrow b = \frac{-4(c-\frac{1}{2})}{(c-\frac{1}{2})^2+c^2}$	
	제시문 (ㄷ)의 (나), (다)를 만족하기 위해서는 $(0, \frac{1}{c})$와 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}b)$를 잇는 직선의 기울기가 $\frac{1}{25}$이어야 한다. 즉, $\frac{\frac{1}{c} - (-\frac{1}{2}b)}{0 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{25} \Rightarrow b = \frac{1}{25} - \frac{2}{c}$	20
	따라서, $b = \frac{-4(c-\frac{1}{2})}{(c-\frac{1}{2})^2+c^2} = \frac{1}{25} - \frac{2}{c} \Rightarrow 8c^3 - 4c^2 + c - 50 = 0$ 이고 $8c^3 - 4c^2 + c - 50 = 0 \Leftrightarrow (c-2)(8c^2 + 12c + 25) = 0$ 에 의해 $c = 2$이다. 따라서, $a = 4, b = -\frac{24}{25}, c = 2$이다.	50

문항 3 (의예·약학 공통)

제시문 (㉠)~(㉣)을 읽고 논제에 답하시오. (200점)

제시문

(㉠) 자연수 k 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \sin kx$$

(㉡) 실수 t 와 제시문 (㉠)의 함수 $f(x)$ 에 대하여 직선 $x = 4\pi$ 와 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이 만나는 점의 y 좌표를 $g(t)$ 라고 하자.

(㉢) $x < 4\pi$ 인 실수 x 와 제시문 (㉡)의 함수 $g(t)$ 에 대하여 닫힌구간 $[x, 4\pi]$ 에서의 함수 $g(t)$ 의 최댓값과 최솟값의 차를 $h(x)$ 라고 하자.

(㉣) 제시문 (㉠)의 자연수 k 와 제시문 (㉢)의 함수 $h(x)$ 에 대하여 $a = 4\pi - \frac{5\pi}{2k}$, $b = 4\pi - \frac{3\pi}{2k}$, $C = \int_a^b h(x) dx$ 라고 하자.

논제 (200점) 제시문의 k 와 C 에 대하여 $2kC$ 를 구하고 그 근거를 논술하시오.

■ 예시 답안

$f(x) = \sin kx$ 함수의 $(t, f(t))$ 에서의 접선은 $y = f'(t)(x - t) + f(t) = k(x - t) \cos kt + \sin kt$ 이고,
 $g(t) = k(4\pi - t) \cos kt + \sin kt$ 가 된다.

제시문의 적분 계산을 위해서는 구간 $[a, b]$, 즉 $\left[4\pi - \frac{5\pi}{2k}, 4\pi - \frac{3\pi}{2k}\right]$ 에서 $h(x)$ 의 함숫값이 필요하고,
 $h(x)$ 는 $x \leq t \leq 4\pi$ 에서 $g(t)$ 의 최댓값과 최솟값을 통해 계산할 수 있다.

$g'(t) = -k^2(4\pi - t) \sin kt$ 이므로 $\sin kt = 0$ 이거나 $t = 4\pi$ 일 때 $g'(t) = 0$ 이다. k 는 자연수이므로 $t = 4\pi$ 이면
 $g(t) = g(4\pi) = \sin 4\pi k = 0$ 이고 구간 $\left[4\pi - \frac{\pi}{k}, 4\pi\right]$ 에서 함수 $g(t)$ 는 증가하며 $t = 4\pi - \frac{\pi}{k}$ 일 때 극솟값을 갖는다.

마찬가지로, 자연수 n 에 대하여 함수 $g(t)$ 는 $t = 4\pi - \frac{(2n-1)\pi}{k}$ 에서는 극소, $t = 4\pi - \frac{2n\pi}{k}$ 에서는 극대이다.

따라서 $4\pi - \frac{5\pi}{2k} \leq t \leq 4\pi$ 인 t 에 대하여

함수 $g(t)$ 의 극값은 $g\left(4\pi - \frac{2\pi}{k}\right) = 2\pi, g\left(4\pi - \frac{\pi}{k}\right) = -\pi, g(4\pi) = 0$ 이다.

t	$4\pi - \frac{5\pi}{2k}$	...	$4\pi - \frac{2\pi}{k}$	...	$4\pi - \frac{3\pi}{2k}$	...	$4\pi - \frac{\pi}{k}$	...	4π
$g(t)$	-1	↗	2π	↘	1	↘	-π	↗	0

이제 $4\pi - \frac{5\pi}{2k} \leq x \leq 4\pi - \frac{3\pi}{2k}$ 인 실수 x 에 대하여 구간 $[x, 4\pi]$ 에서 $g(t)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하자.

$g\left(4\pi - \frac{5\pi}{2k}\right) = -1 > -\pi = g\left(4\pi - \frac{\pi}{k}\right)$ 이므로 구간 $[x, 4\pi]$ 에서 $g(t)$ 의 최솟값은 항상 $-\pi$ 임을 확인할 수 있다.

최댓값의 경우, $g\left(4\pi - \frac{3\pi}{2k}\right) = 1 > 0 = g(4\pi)$ 이므로 $4\pi - \frac{2\pi}{k} \leq x \leq 4\pi - \frac{3\pi}{2k}$ 인 경우에는

구간 $[x, 4\pi]$ 에서 $g(t)$ 의 최댓값이 $g(x)$ 가 되고, $4\pi - \frac{5\pi}{2k} \leq x \leq 4\pi - \frac{2\pi}{k}$ 인 경우에는

$g\left(4\pi - \frac{2\pi}{k}\right) = 2\pi$ 가 최댓값이다.

따라서 위 내용을 정리하면 $h(x) = \begin{cases} 3\pi & \left(4\pi - \frac{5\pi}{2k} \leq x \leq 4\pi - \frac{2\pi}{k}\right) \\ g(x) + \pi & \left(4\pi - \frac{2\pi}{k} \leq x \leq 4\pi - \frac{3\pi}{2k}\right) \end{cases}$ 이다.

주어진 적분 $\int_a^b h(x) dx$ 를 계산하면

$$\begin{aligned} \int_{4\pi - \frac{5\pi}{2k}}^{4\pi - \frac{3\pi}{2k}} h(x) dx &= 3\pi \times \left(\frac{\pi}{2k}\right) + \pi \times \left(\frac{\pi}{2k}\right) + \int_{4\pi - \frac{2\pi}{k}}^{4\pi - \frac{3\pi}{2k}} g(x) dx \\ &= \frac{2\pi^2}{k} + \int_{4\pi - \frac{2\pi}{k}}^{4\pi - \frac{3\pi}{2k}} (k(4\pi - x) \cos kx + \sin kx) dx \end{aligned}$$

이고, 부분적분을 통해 계산하면

$$\begin{aligned} \int (k(4\pi - x) \cos kx + \sin kx) dx &= \left[(4\pi - x) \sin kx - \frac{1}{k} \cos kx\right] - \int (-\sin kx) dx \\ &= (4\pi - x) \sin kx - \frac{2}{k} \cos kx \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{4\pi - \frac{5\pi}{2k}}^{4\pi - \frac{3\pi}{2k}} h(x) dx &= \frac{2\pi^2}{k} + \left[(4\pi - x) \sin kx - \frac{2}{k} \cos kx \right]_{x=4\pi - \frac{5\pi}{2k}}^{x=4\pi - \frac{3\pi}{2k}} \\
 &= \frac{2\pi^2}{k} + \left[\left(\frac{3\pi}{2k} \right) - \left(-\frac{2}{k} \right) \right] \\
 &= \frac{4\pi^2 + 3\pi + 4}{2k}
 \end{aligned}$$

따라서 $\int_{4\pi - \frac{5\pi}{2k}}^{4\pi - \frac{3\pi}{2k}} h(x) dx = \frac{4\pi^2 + 3\pi + 4}{2k}$ 이다. 즉, $2kC = 4\pi^2 + 3\pi + 4$ 이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점																				
논제	$f(x) = \sin kx$ 함수의 $(t, f(t))$ 에서의 접선은 $y = f'(t)(x - t) + f(t) = k(x - t) \cos kt + \sin kt$ 이고, $g(t) = k(4\pi - t) \cos kt + \sin kt$ 가 된다.	30																				
	제시문의 적분 계산을 위해서는 구간 $[a, b]$, 즉 $\left[4\pi - \frac{5\pi}{2k}, 4\pi - \frac{3\pi}{2k}\right]$에서 $h(x)$의 함숫값이 필요하고, $h(x)$는 $x \leq t \leq 4\pi$에서 $g(t)$의 최댓값과 최솟값을 통해 계산할 수 있다. $g'(t) = -k^2(4\pi - t) \sin kt$이므로 $\sin kt = 0$이거나 $t = 4\pi$일 때 $g'(t) = 0$이다. k는 자연수이므로 $t = 4\pi$이면 $g(t) = g(4\pi) = \sin 4\pi k = 0$이고 구간 $\left[4\pi - \frac{\pi}{k}, 4\pi\right]$에서 함수 $g(t)$는 증가하며 $t = 4\pi - \frac{\pi}{k}$일 때 극솟값을 갖는다. 마찬가지로, 자연수 n에 대하여 함수 $g(t)$는 $t = 4\pi - \frac{(2n-1)\pi}{k}$에서는 극소, $t = 4\pi - \frac{2n\pi}{k}$에서는 극대이다. 따라서 $4\pi - \frac{5\pi}{2k} \leq t \leq 4\pi$인 t에 대하여 함수 $g(t)$의 극값은 $g\left(4\pi - \frac{2\pi}{k}\right) = 2\pi, g\left(4\pi - \frac{\pi}{k}\right) = -\pi, g(4\pi) = 0$이다. <table> <tr> <td>$t$</td> <td>$4\pi - \frac{5\pi}{2k}$</td> <td>...</td> <td>$4\pi - \frac{2\pi}{k}$</td> <td>...</td> <td>$4\pi - \frac{3\pi}{2k}$</td> <td>...</td> <td>$4\pi - \frac{\pi}{k}$</td> <td>...</td> <td>$4\pi$</td> </tr> <tr> <td>$g(t)$</td> <td>-1</td> <td>↗</td> <td>2π</td> <td>↘</td> <td>1</td> <td>↘</td> <td>$-\pi$</td> <td>↗</td> <td>0</td> </tr> </table>	t	$4\pi - \frac{5\pi}{2k}$	...	$4\pi - \frac{2\pi}{k}$	...	$4\pi - \frac{3\pi}{2k}$	...	$4\pi - \frac{\pi}{k}$	...	4π	$g(t)$	-1	↗	2π	↘	1	↘	$-\pi$	↗	0	50
	t	$4\pi - \frac{5\pi}{2k}$	...	$4\pi - \frac{2\pi}{k}$	...	$4\pi - \frac{3\pi}{2k}$	...	$4\pi - \frac{\pi}{k}$	...	4π												
	$g(t)$	-1	↗	2π	↘	1	↘	$-\pi$	↗	0												
	이제 $4\pi - \frac{5\pi}{2k} \leq x \leq 4\pi - \frac{3\pi}{2k}$인 실수 x에 대하여 구간 $[x, 4\pi]$에서 $g(t)$의 최댓값과 최솟값을 구하자. $g\left(4\pi - \frac{5\pi}{2k}\right) = -1 > -\pi = g\left(4\pi - \frac{\pi}{k}\right)$이므로 구간 $[x, 4\pi]$에서 $g(t)$의 최솟값은 항상 $-\pi$임을 확인할 수 있다.	20																				
	최댓값의 경우, $g\left(4\pi - \frac{3\pi}{2k}\right) = 1 > 0 = g(4\pi)$이므로 $4\pi - \frac{2\pi}{k} \leq x \leq 4\pi - \frac{3\pi}{2k}$인 경우에는 구간 $[x, 4\pi]$에서 $g(t)$의 최댓값이 $g(x)$가 되고, $4\pi - \frac{5\pi}{2k} \leq x \leq 4\pi - \frac{2\pi}{k}$인 경우에는 $g\left(4\pi - \frac{2\pi}{k}\right) = 2\pi$가 최댓값이다.	20																				
따라서 위 내용을 정리하면 $h(x) = \begin{cases} 3\pi & \left(4\pi - \frac{5\pi}{2k} \leq x \leq 4\pi - \frac{2\pi}{k}\right) \\ g(x) + \pi & \left(4\pi - \frac{2\pi}{k} \leq x \leq 4\pi - \frac{3\pi}{2k}\right) \end{cases}$이다.	30																					
주어진 적분 $\int_a^b h(x) dx$를 계산하면	50																					

하위문항	채점 기준	배점
	$\int_{4\pi - \frac{5\pi}{2k}}^{4\pi - \frac{3\pi}{2k}} h(x) dx = 3\pi \times \left(\frac{\pi}{2k}\right) + \pi \times \left(\frac{\pi}{2k}\right) + \int_{4\pi - \frac{2\pi}{k}}^{4\pi - \frac{3\pi}{2k}} g(x) dx$ $= \frac{2\pi^2}{k} + \int_{4\pi - \frac{2\pi}{k}}^{4\pi - \frac{3\pi}{2k}} (k(4\pi - x) \cos kx + \sin kx) dx$ 이고, 부분적분을 통해 계산하면 $\int (k(4\pi - x) \cos kx + \sin kx) dx = \left[(4\pi - x) \sin kx - \frac{1}{k} \cos kx \right] - \int (-\sin kx) dx$ $= (4\pi - x) \sin kx - \frac{2}{k} \cos kx$ 이므로 $\int_{4\pi - \frac{5\pi}{2k}}^{4\pi - \frac{3\pi}{2k}} h(x) dx = \frac{2\pi^2}{k} + \left[(4\pi - x) \sin kx - \frac{2}{k} \cos kx \right]_{x=4\pi - \frac{2\pi}{k}}^{x=4\pi - \frac{3\pi}{2k}}$ $= \frac{2\pi^2}{k} + \left[\frac{3\pi}{2k} - \left(-\frac{2}{k}\right) \right]$ $= \frac{4\pi^2 + 3\pi + 4}{2k}$ 따라서 $\int_{4\pi - \frac{5\pi}{2k}}^{4\pi - \frac{3\pi}{2k}} h(x) dx = \frac{4\pi^2 + 3\pi + 4}{2k}$이다. 즉, $2kC = 4\pi^2 + 3\pi + 4$이다.	

문항 4 (의예 전용)**제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 논제에 답하시오. (200점)****제시문**

(ㄱ) 주머니에 1부터 n 까지의 자연수가 각각 적혀있는 공 n 개가 들어있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 자연수 중 작은 수를 i , 큰 수를 j 라고 하자. (단, $n \geq 3$)

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 자연수 i, j 에 대하여 $i, j-i, n-j+1$ 중 가장 작은 수를 확률변수 X 라고 하자.

논제 (200점) 제시문의 n 과 확률변수 X , $1 \leq k \leq n$ 인 자연수 k 에 대하여 확률 $P(X = k)$ 와 $n = 29, 30$ 일 때의 X 의 기댓값을 각각 구하고 그 근거를 논술하시오.

■ 예시 답안

제시문 (ㄴ)의 $i, j-i, n-j+1$ 의 총합은 항상 $n+1$ 이고, X 는 세 값 중 가장 작은 수이다. $\frac{n+1}{3}$ 을 넘지 않는 제일 큰 자연수를 q 라 할 때, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값 k 의 최댓값은 q 이며 X 가 $q < k \leq n$ 인 k 값을 가질 확률은 0이다.

(1) $k < q$ 인 경우

- ① i 가 최소인 경우 ($i = k$), j 가 가질 수 있는 모든 가능한 값들의 집합은 $\{2k, 2k+1, \dots, n-k+1\}$ 으로 총 $n-3k+2$ 개다.
 - ② $n-j+1$ 가 최소인 경우 ($j = n-k+1$), i 가 가질 수 있는 모든 가능한 값들 중 i 가 최솟값이 되는 경우를 제외한 값들의 집합은 $\{k+1, k+2, \dots, n-2k+1\}$ 으로 총 $n-3k+1$ 개이다.
 - ③ $j-i$ 가 최소인 경우 ($i > k, j < n-k+1$), $j-i$ 의 값이 k 이 되는 모든 가능한 순서쌍 중에서 $i, n-j+1$ 이 k 가 되는 경우를 제외한 집합은 $\{(k+1, 2k+1), \dots, (n-2k, n-k)\}$ 로 $n-3k$ 개다.
- 따라서 $k < q$ 일 때 $X = k$ 인 경우의 수의 총합은 $3(n-3k+1)$ 이다.

(2) $k = q$ 인 경우

- ① $n+1 = 3q$ 일 때, $i, j-i, n-j+1$ 이 모두 동일하게 q 인 경우이며, 이때 총 가능한 경우의 수는 1이다.
- ② $n+1 = 3q+1$ 일 때, $i, j-i, n-j+1$ 중 두 값이 동일하게 q 가 되고, 나머지 하나의 값이 $q+1$ 이 되는 경우이며, 이때 총 가능한 경우의 수는 3이다.
- ③ $n+1 = 3q+2$ 일 때, $i, j-i, n-j+1$ 중 두 값이 동일하게 q 가 되고 나머지 하나의 값이 $q+2$ 가 되는 경우와 두 값이 동일하게 $q+1$ 이 되고 나머지 하나의 값이 q 가 되는 경우로, 이때 총 가능한 경우의 수는 6이다.

제시문 (ㄱ)에 따라 뽑힌 두 자연수 i 와 j 의 모든 가능한 순서쌍의 개수는 $\frac{n(n-1)}{2}$ 이므로

1 이상인 자연수 m 에 대하여 $P(X = k)$ 는 다음과 같다.

1) $n = 3m$ 일 때

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{6(n-3k+1)}{n(n-1)} & \left(1 \leq k \leq \frac{n}{3} - 1\right) \\ \frac{6}{n(n-1)} & \left(k = \frac{n}{3}\right) \\ 0 & \left(\frac{n}{3} < k \leq n\right) \end{cases}$$

2) $n = 3m+1$ 일 때

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{6(n-3k+1)}{n(n-1)} & \left(1 \leq k \leq \frac{n-1}{3} - 1\right) \\ \frac{12}{n(n-1)} & \left(k = \frac{n-1}{3}\right) \\ 0 & \left(\frac{n-1}{3} < k \leq n\right) \end{cases}$$

3) $n = 3m+2$ 일 때

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{6(n-3k+1)}{n(n-1)} & \left(1 \leq k \leq \frac{n+1}{3} - 1\right) \\ \frac{2}{n(n-1)} & \left(k = \frac{n+1}{3}\right) \\ 0 & \left(\frac{n+1}{3} < k \leq n\right) \end{cases}$$

n 이 29일 때의 X 의 기댓값은,

$$\begin{aligned} a = E(X) &= \sum_{k=1}^9 \frac{6(29-3k+1)}{29 \times 28} \cdot k + 10 \times \frac{2}{29 \times 28} \\ &= \frac{1}{29 \times 28} \left[180 \sum_{k=1}^9 k - 18 \sum_{k=1}^9 k^2 + 20 \right] = \frac{1495}{406} \end{aligned}$$

n 이 30일 때의 X 의 기댓값은

$$\begin{aligned} b = E(X) &= \sum_{k=1}^9 \frac{6(30+1-3k)}{30 \times 29} \cdot k + 10 \times \frac{6}{30 \times 29} \\ &= \frac{1}{30 \times 29} \left[186 \sum_{k=1}^9 k - 18 \sum_{k=1}^9 k^2 + 60 \right] = \frac{110}{29} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
논제	제시문 (ㄴ)의 $i, j-i, n-j+1$ 의 총합은 항상 $n+1$ 이고, X 는 세 값 중 가장 작은 수이다. $\frac{n+1}{3}$ 을 넘지 않는 제일 큰 자연수를 q 라 할 때, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값 k 의 최댓값은 q 이며 X 가 $q < k \leq n$ 인 k 값을 가질 확률은 0이다.	30
	(1) $k < q$인 경우 ① i가 최소인 경우 ($i = k$), j가 가질 수 있는 모든 가능한 값들의 집합은 $\{2k, 2k+1, \dots, n-k+1\}$으로 총 $n-3k+2$개다. ② $n-j+1$가 최소인 경우 ($j = n+1-k$), i가 가질 수 있는 모든 가능한 값들 중 i가 최솟값이 되는 경우를 제외한 값들의 집합은 $\{k+1, k+2, \dots, n-2k+1\}$으로 총 $n-3k+1$개이다. ③ $j-i$가 최소인 경우 ($i > k, j < n-k+1$), $j-i$의 값이 k이 되는 모든 가능한 순서쌍 중에서 $i, n-j+1$이 k가 되는 경우를 제외한 집합은 $\{(k+1, 2k+1), \dots, (n-2k, n-k)\}$로 $n-3k$개다. 따라서 $k < q$일 때 $X = k$인 경우의 수의 총합은 $3(n-3k+1)$이다.	35
	(2) $k = q$인 경우 ① $n+1 = 3q$일 때, $i, j-i, n-j+1$이 모두 동일하게 q인 경우이며, 이때 총 가능한 경우의 수는 1이다. ② $n+1 = 3q+1$일 때, $i, j-i, n-j+1$ 중 두 값이 동일하게 q가 되고, 나머지 하나의 값이 $q+1$이 되는 경우이며, 이때 총 가능한 경우의 수는 3이다. ③ $n+1 = 3q+2$일 때, $i, j-i, n-j+1$ 중 두 값이 동일하게 q가 되고 나머지 하나의 값이 $q+2$가 되는 경우와 두 값이 동일하게 $q+1$이 되고 나머지 하나의 값이 q가 되는 경우로, 이때 총 가능한 경우의 수는 6이다.	35

하위문항	채점 기준	배점
	제시문 (ㄱ)에 따라 뽑힌 두 자연수 i와 j의 모든 가능한 순서쌍의 개수는 $\frac{n(n-1)}{2}$이므로 1 이상인 자연수 m에 대하여 $P(X = k)$는 다음과 같다. 1) $n = 3m$일 때 $P(X = k) = \begin{cases} \frac{6(n-3k+1)}{n(n-1)} & \left(1 \leq k \leq \frac{n}{3} - 1\right) \\ \frac{6}{n(n-1)} & \left(k = \frac{n}{3}\right) \\ 0 & \left(\frac{n}{3} < k \leq n\right) \end{cases}$ 2) $n = 3m + 1$일 때 $P(X = k) = \begin{cases} \frac{6(n-3k+1)}{n(n-1)} & \left(1 \leq k \leq \frac{n-1}{3} - 1\right) \\ \frac{12}{n(n-1)} & \left(k = \frac{n-1}{3}\right) \\ 0 & \left(\frac{n-1}{3} < k \leq n\right) \end{cases}$ 3) $n = 3m + 2$일 때 $P(X = k) = \begin{cases} \frac{6(n-3k+1)}{n(n-1)} & \left(1 \leq k \leq \frac{n+1}{3} - 1\right) \\ \frac{2}{n(n-1)} & \left(k = \frac{n+1}{3}\right) \\ 0 & \left(\frac{n+1}{3} < k \leq n\right) \end{cases}$	30
	n이 29일 때의 X의 기댓값은, $\begin{aligned} a = E(X) &= \sum_{k=1}^9 \frac{6(29-3k+1)}{29 \times 28} \cdot k + 10 \times \frac{2}{29 \times 28} \\ &= \frac{1}{29 \times 28} \left[180 \sum_{k=1}^9 k - 18 \sum_{k=1}^9 k^2 + 20 \right] = \frac{1495}{406} \end{aligned}$	35
	n이 30일 때의 X의 기댓값은 $\begin{aligned} b = E(X) &= \sum_{k=1}^9 \frac{6(30+1-3k)}{30 \times 29} \cdot k + 10 \times \frac{6}{30 \times 29} \\ &= \frac{1}{30 \times 29} \left[186 \sum_{k=1}^9 k - 18 \sum_{k=1}^9 k^2 + 60 \right] = \frac{110}{29} \end{aligned}$	35

2025학년도 의예과 / 약학과

문항 1 (의예·약학 공통)

제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오. (200점)

제시문

(ㄱ) 하나의 상자에 다음 시행을 반복하여 공을 넣거나 꺼내려고 한다.

한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 1이면 흰 공 3개를, 2 이상 4 이하이면 검은 공 2개를 상자에 넣고, 5 이상이면 상자에서 임의로 공 1개를 꺼낸다.

(단, 상자가 비어있을 때 나온 눈의 수가 5 이상이면 공을 넣지도 않고 꺼내지 않는다.)

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 상자가 비어있는 상태에서 시작하여 제시문 (ㄱ)의 시행을 k 번 반복한 후 상자에 들어 있는 흰 공의 개수를 a_k , 검은 공의 개수를 b_k 라고 하자. 이때 a_k 와 b_k 가 다음 조건을 모두 만족시키거나 $k = 10$ 이면 더 이상 시행을 반복하지 않고 멈추기로 한다.

(가) $a_k = 3$

(나) $b_k > 0$

(다) b_k 는 3의 배수 또는 3의 약수이다.

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 방법으로 시행을 반복할 때, 시작 후 멈출 때까지의 총 시행 횟수를 확률변수 X 라고 하자.

(ㄹ) 제시문 (ㄷ)의 확률변수 X 에 대하여 $X = 4$ 일 확률을 p , $X \leq 5$ 일 때 $X = 3$ 일 확률을 q 라고 하자.

[논제] (200점) 제시문 (ㄹ)의 p 와 q 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

■ 예시 답안

매 시행에서 흰 공을 3개 넣는 사건을 W , 검은 공을 2개 넣는 사건을 B 라고 하자. 공을 꺼내지 않는 사건을 U , 흰 공을 하나 꺼내는 사건을 V , 검은 공 하나를 꺼내는 사건을 A 라고 하자.

제시문 (ㄴ)의 조건에서 b_k 는 3의 배수 또는 약수이므로, 최대 시행 횟수가 10번까지임을 고려할 때, 검은 공의 개수 b_k 로 가능한 값은 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18이다. 이 중 제시문 (ㄹ)의 확률 p 는 $X = 4$ 인 경우를, q 는 $X \leq 5$ 인 경우를 고려하므로, 고려해야 할 흰 공과 검은 공 개수의 순서쌍 조합은 (3, 1), (3, 3), (3, 6)이다. $X \leq 5$ 이고 사건 U 는 공의 개수에 영향을 미치지 않으므로 사건 U 를 제외하고 생각했을 때, 각 순서쌍이 나올 수 있는 사건의 조합은 다음과 같다. 이때, 사건 A 는 이전 시행에서 사건 B 가 일어난 후에만 가능하다.

(1)	WBA
(2)	$WBBA$
(3)	$WBBB$

(1) 사건 W, B, A 가 각각 한 번씩 일어나는 경우

사건의 순서가 WBA, BWA 인 경우 $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$ 의 확률을 가지며, BAW 인 경우 확률이 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{6}$ 이다.

따라서 (1)의 확률은 $\left[2 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{6} \right) \right] = \frac{1}{20}$ 이다.

(2) 사건 W 와 사건 A 가 한 번씩, 사건 B 가 두 번 일어나는 경우

4가지의 경우($BAWB, BABW/BWAB, WBAB/BBAW/WBBA, BWBA, BBWA$)로 나누어 생각할 수 있으며, 이 중에서 세 가지 조합 $BAWB, BWAB, WBAB$ 경우는 제시문 (ㄴ)의 조건에 의해 세 번째 시행 후 중단되므로 제외한다. 나머지 경우로 생각할 수 있는 모든 조합에 대한 확률은 다음과 같다.

$$\left[\left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{4} \right) \times \frac{1}{6} \right) + \left(3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{7} \right) \right) \right] = \frac{13}{252}$$

(3) 사건 W 가 한 번, 사건 B 가 세 번 일어나는 경우

한 번의 사건 W 와 세 번의 사건 B 로 고려할 수 있는 모든 조합을 고려한 확률의 총합은 다음과 같다.

$$4 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12}$$

확률 p 의 계산

확률 p 는 $X = 4$ 일 확률이므로, 첫 사건으로 먼저 U 가 일어난 후 (1)의 경우가 일어나거나 ($UWBA, UBWA, UBAW$), (2), (3)이 일어나는 경우이다. 따라서, 제시문 (ㄹ)의 확률 p 는 위에서 계산한 세 개의 확률의 합이다.

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{20} + \frac{13}{252} + \frac{1}{12} = \frac{191}{1260}$$

확률 q 계산

제시문 (ㄹ)에 제시된 총 시행 횟수의 조건 $X \leq 5$ 을 고려할 때, $X = 3$ 일 확률은 (1)에서 구한 $\frac{1}{20}$ 이다.

$X = 5$ 일 확률은 크게 세 가지로 나누어서 생각할 수 있다.

- ① 첫 사건으로 먼저 U 가 두 번 일어난 후 (1)에서 고려한 사건의 조합이 일어나는 경우
($UUWBA, UUBWA, UUBAW$)
- ② 첫 사건으로 먼저 U 가 한 번 일어난 후 (2)에서 고려한 사건의 조합이 일어나는 경우
($UBABW, UBBWA, UWBBB, UBWBW, UBBBW$)
- ③ 첫 사건으로 먼저 U 가 한 번 일어난 후 (3)에서 고려한 사건의 조합이 일어나는 경우
($UWBBB, UBWBW, UBBBW, UBBBW$)

따라서 $X \leq 5$ 일 확률은 다음과 같다.

$$\frac{1}{20} \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \right) + \frac{13}{252} \times \left(1 + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{12} \times \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{13}{180} + \frac{13}{189} + \frac{1}{9}$$

따라서 조건부 확률 q 는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{\frac{1}{20}}{\frac{13}{180} + \frac{13}{189} + \frac{1}{9}} = \frac{189}{953}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점						
	매 시행에서 흰 공을 3개 넣는 사건을 W, 검은 공을 2개 넣는 사건을 B라고 하자. 공을 꺼내지 않는 사건을 U, 흰 공을 하나 꺼내는 사건을 V, 검은 공 하나를 꺼내는 사건을 A라고 하자. 제시문 (ㄴ)의 조건에서 b_k는 3의 배수 또는 약수이고, 최대 시행 횟수가 10번까지이나 제시문 (ㄷ)의 확률 p는 $X = 4$인 경우를, q는 $X \leq 5$인 경우를 고려하므로, 고려해야 할 흰 공과 검은 공 개수의 순서쌍 조합은 $(3, 1), (3, 3), (3, 6)$이다. 사건 U를 제외하고 생각했을 때, 각 순서쌍이 나올 수 있는 사건의 조합은 다음과 같다. <table> <tr> <td>(1)</td> <td>WBA</td> </tr> <tr> <td>(2)</td> <td>$WBBA$</td> </tr> <tr> <td>(3)</td> <td>$WBBB$</td> </tr> </table>	(1)	WBA	(2)	$WBBA$	(3)	$WBBB$	60
(1)	WBA							
(2)	$WBBA$							
(3)	$WBBB$							
논제	(1) 사건 W, B, A가 각각 한 번씩 일어나는 경우 사건의 순서가 WBA, BWA인 경우 $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$의 확률을 가지며, BAW인 경우 확률이 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{6}$이다. 따라서 (1)의 확률은 $\left[2 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{6} \right) \right] = \frac{1}{20}$이다. (2) 사건 W와 사건 A가 한 번씩, 사건 B가 두 번 일어나는 경우 5가지 경우의 조합($BABW/BBAW/WBBA, BWBA, BBWA$)으로 생각할 수 있으며, 이에 대한 확률은 다음과 같다. $\left[\left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{2} \right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{4} \right) \times \frac{1}{6} \right) + \left(3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{7} \right) \right) \right] = \frac{13}{252}$ (3) 사건 W가 한 번, 사건 B가 세 번 일어나는 경우 한 번의 사건 W와 세 번의 사건 B로 고려할 수 있는 모든 조합을 고려한 확률의 총합은 다음과 같다. $4 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12}$	60						
	확률 p는 $X = 4$일 확률이므로, 첫 사건으로 먼저 U가 일어난 후 (1)의 경우가 일어나거나 ($UWBA, UBWA, UBAW$), (2), (3)이 일어나는 경우이다. 따라서, 제시문 (ㄷ)의 확률 p는 위에서 계산한 세 개의 확률의 합이다. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{20} + \frac{13}{252} + \frac{1}{12} = \frac{191}{1260}$	30						
	제시문 (ㄷ)에 제시된 총 시행 횟수의 조건 $X \leq 5$을 고려할 때, $X = 3$일 확률은 (1)에서 구한 $\frac{1}{20}$이다. $X = 5$일 확률은 크게 세 가지로 나누어서 생각할 수 있다. ① 첫 사건으로 먼저 U가 두 번 일어난 후 (1)의 사건 조합이 일어나는 경우 ($UUWBA, UUBWA, UUBAW$) ② 첫 사건으로 먼저 U가 한 번 일어난 후 (2)의 사건 조합이 일어나는 경우 ($UBABW, UBBWA, UWBBB, UBWBA, UBBWA$)	60						

하위 문항	채점 기준	배점
	③ 첫 사건으로 먼저 U가 한 번 일어난 후 (3)의 사건 조합이 일어나는 경우 $(UWBBB, UBWBB, UBBWB, UBBBW)$ $X \leq 5$일 확률은 위의 세 가지 경우를 통합하여 다음과 같이 계산한다. $\frac{1}{20} \times \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \frac{13}{252} \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{12} \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{13}{180} + \frac{13}{189} + \frac{1}{9}$ 따라서 조건부 확률 q는 다음과 같이 계산된다. $\frac{\frac{1}{20}}{\frac{13}{180} + \frac{13}{189} + \frac{1}{9}} = \frac{189}{953}$	

문항 2 (의예·약학 공통)

제시문 (ㄱ)을 읽고 논제에 답하십시오. (200점)

제시문

(ㄱ) 최고차항의 계수가 3인 삼차함수 $f(x)$ 는 어떤 실수 α 에 대하여 $f(f(\alpha)) = \alpha$ 이고 다음 조건을 만족시킨다.

$$(\text{단, } p = \frac{\alpha + f(\alpha)}{2})$$

$$(\text{가}) \quad |\alpha - f(\alpha)| = 4$$

$$(\text{나}) \quad f(p) - p = 4$$

$$(\text{다}) \quad \int_p^{f(\alpha)} f(x)dx = 12$$

[논제] (200점) 제시문 (ㄱ)의 α 로 가능한 값을 모두 구하고 그 근거를 논술하십시오.

■ 예시 답안

제시문 (ㄱ)의 (가)에 의해 $\alpha \neq f(\alpha)$ 이고

점 $A(\alpha, f(\alpha)), B(f(\alpha), \alpha)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 의 중점은 (p, p) 로 직선 $y = x$ 위에 있다.

$g(x) = f(x+p) - p$ 라 하고 이를 $g(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + c$ 로 나타내자.

$f(p) - p = 4$ 이므로 $g(0) = c = 4$ 이다.

(1) $\alpha < f(\alpha)$ 일 때,

$f(\alpha) = \alpha + 4$ 이므로 점 A, B 는 각각 $A(\alpha, \alpha + 4), B(\alpha + 4, \alpha)$ 이고 $p = \alpha + 2$ 이다.

$$g(-2) = f(p-2) - p = f(\alpha) - \alpha - 2 = 2$$

$$g(2) = f(p+2) - p = f(f(\alpha)) - \alpha - 2 = \alpha - \alpha - 2 = -2$$

이므로

$$g(-2) = 4a - 2b - 20 = 2 \quad \text{--- ①}$$

$$g(2) = 4a + 2b + 28 = -2 \quad \text{--- ②}$$

이고, ① + ②에서 $a = -1$, ② - ①에서 $b = -13$, 즉

$g(x) = 3x^3 - x^2 - 13x + 4$ 이다.

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 (3x^3 - x^2 - 13x + 4)dx = -\frac{26}{3}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_p^{f(\alpha)} f(x)dx &= \int_{\alpha+2}^{\alpha+4} f(x)dx = \int_{\alpha+2}^{\alpha+4} (g(x - \alpha - 2) + \alpha + 2)dx \\ &= \int_0^2 g(x)dx + 2(\alpha + 2) = -\frac{26}{3} + 2\alpha + 4 = 12 \end{aligned}$$

을 만족한다. 따라서 $\alpha = \frac{25}{3}$ 이다.

(2) $\alpha > f(\alpha)$ 일 때

$f(\alpha) = \alpha - 4$ 이므로 점 A, B 는 각각 $A(\alpha, \alpha - 4), B(\alpha - 4, \alpha)$ 이고 $p = \alpha - 2$ 이다.

$$g(-2) = f(p-2) - p = f(f(\alpha)) - \alpha + 2 = 2$$

$$g(2) = f(p+2) - p = f(\alpha) - \alpha + 2 = -2$$

이므로

$$g(-2) = 4a - 2b - 20 = 2$$

$$g(2) = 4a + 2b + 28 = -2$$

이므로 (1)에서와 마찬가지로 $g(x) = 3x^3 - x^2 - 13x + 4$ 임을 알 수 있다.

$$\int_0^{-2} g(x)dx = \int_0^{-2} (3x^3 - x^2 - 13x + 4)dx = -\frac{58}{3}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_p^{f(\alpha)} f(x)dx &= \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(x)dx = \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} (g(x - \alpha + 2) + \alpha - 2)dx \\ &= \int_0^{-2} g(x)dx - 2(\alpha - 2) = -\frac{58}{3} - 2\alpha + 4 = 12 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $\alpha = -\frac{41}{3}$ 이다.

모든 경우를 고려하였으므로, 가능한 α 의 값은 $-\frac{41}{3}, \frac{25}{3}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	제시문 (ㄱ)의 (가)에 의해 $\alpha \neq f(\alpha)$이고 점 $A(\alpha, f(\alpha)), B(f(\alpha), \alpha)$에 대하여 $\overline{AB}$의 중점은 (p, p)로 직선 $y = x$ 위에 있다. $g(x) = f(x + p) - p$라 하고 이를 $g(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + c$로 나타내자. $f(p) - p = 4$이므로 $g(0) = c = 4$이다.	20
	(1) $\alpha < f(\alpha)$일 때 $f(\alpha) = \alpha + 4$이므로 점 A, B는 각각 $A(\alpha, \alpha + 4), B(\alpha + 4, \alpha)$이고 $p = \alpha + 2$이다. $g(-2) = f(p - 2) - p = f(\alpha) - \alpha - 2 = 2$ $g(2) = f(p + 2) - p = f(f(\alpha)) - \alpha - 2 = \alpha - \alpha - 2 = -2$ 이므로 $g(-2) = 4a - 2b - 20 = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$ $g(2) = 4a + 2b + 28 = -2 \quad \cdots \textcircled{2}$ 이고, $\textcircled{1} + \textcircled{2}$에서 $a = -1$, $\textcircled{2} - \textcircled{1}$에서 $b = -13$, 즉 $g(x) = 3x^3 - x^2 - 13x + 4$이다.	40
논제	이므로 $\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 (3x^3 - x^2 - 13x + 4)dx = -\frac{26}{3}$ $\int_p^{f(\alpha)} f(x)dx = \int_{\alpha+2}^{\alpha+4} f(x)dx$ $= \int_{\alpha+2}^{\alpha+4} (g(x - \alpha - 2) + \alpha + 2)dx$ $= \int_0^2 g(x)dx + 2(\alpha + 2)$ $= -\frac{26}{3} + 2\alpha + 4 = 12$ 을 만족한다. 따라서 $\alpha = \frac{25}{3}$이다.	50
	(2) $\alpha > f(\alpha)$일 때 $f(\alpha) = \alpha - 4$이므로 점 A, B는 각각 $A(\alpha, \alpha - 4), B(\alpha - 4, \alpha)$이고 $p = \alpha - 2$이다. $g(-2) = f(p - 2) - p = f(f(\alpha)) - \alpha + 2 = 2$ $g(2) = f(p + 2) - p = f(\alpha) - \alpha + 2 = -2$ 이므로 $g(-2) = 4a - 2b - 20 = 2$ $g(2) = 4a + 2b + 28 = -2$ 이므로 (1)에서와 마찬가지로 $g(x) = 3x^3 - x^2 - 13x + 4$임을 알 수 있다.	40
	이므로 $\int_0^{-2} g(x)dx = \int_0^{-2} (3x^3 - x^2 - 13x + 4)dx = -\frac{58}{3}$ $\int_p^{f(\alpha)} f(x)dx = \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} f(x)dx = \int_{\alpha-2}^{\alpha-4} (g(x - \alpha + 2) + \alpha - 2)dx$ $= \int_0^{-2} g(x)dx - 2(\alpha - 2) = -\frac{58}{3} - 2\alpha + 4 = 12$ 이다. 따라서 $\alpha = -\frac{41}{3}$이다. 모든 경우를 고려하였으므로 가능한 α의 값은 $-\frac{41}{3}, \frac{25}{3}$이다.	50

문항 3 (의예·약학 공통)

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하십시오. (200점)

제시문

(ㄱ) 실수 a, b, c 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다. (단, n 은 자연수이고 e 는 자연로그의 밑이다.)

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & (x < -1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3ae^{x+1}x^{2n}}{3x^{2n} + 1} + \frac{2(x^{2n-1} + x^{2n-2} + \cdots + x + 1)}{2x^{2n} + 1} \right) & (-1 \leq x < 1 \text{ 또는 } x > 1) \\ c & (x = 1) \end{cases}$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이다.

(나) 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 -1 에서 1 까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{1}{2}$ 이다.

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 p 의 집합을 A 라고 하자. (단, $p \neq 1$)

1과 p 사이에 있는 임의의 실수 r 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow r+} \frac{f(x) - f(r)}{x - r} \neq \frac{f(p) - f(1)}{p - 1}$ 이다.

[논제] (200점) 제시문 (ㄷ)의 집합 A 를 구하고 그 근거를 논술하십시오.

■ 예시 답안

각 범위에 맞는 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 의 값은 극한을 이용하여 다음과 같이 계산한다.

(i) $x > 1$ 이면,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3ae^{x+1}x^{2n}}{3x^{2n} + 1} + \frac{2(x^{2n-1} + x^{2n-2} + \cdots + x + 1)}{2x^{2n} + 1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{ae^{x+1}}{1 + \frac{1}{3x^{2n}}} + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{2x^{2n}}} \right) \\ &= ae^{x+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x^k} = ae^{x+1} + \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

즉, $f(x) = ae^{x+1} + \frac{1}{x-1}$ ($x > 1$)이다.

(ii) $|x| < 1$ 이면,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3ae^{x+1}x^{2n}}{3x^{2n} + 1} + \frac{2(x^{2n-1} + x^{2n-2} + \cdots + x + 1)}{2x^{2n} + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(x^{2n} - 1)}{(2x^{2n} + 1)(x - 1)} = \frac{2}{1 - x}$$

(iii) $x = -1$ 일 경우에는 $f(-1) = \frac{3}{4}a$ 이다.

(i), (ii), (iii)을 종합하면, 제시문 (ㄴ)의 (가) 조건에서 함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이므로

$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = a + b$, $f(-1) = \frac{3}{4}a$ 의 값이 일치하고, $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ 이다. (나) 조건에서는 x 가 -1 부터 1 까지 변할 때 $f(x)$ 의 평균변화율이 $\frac{1}{2}$ 이므로 $c = 2$ 이다.

(1)

$p > 1$ 일 때, 1 과 p 사이의 x 에 대하여 $f(x) = \frac{4}{3}e^{x+1} + \frac{1}{x-1}$ 이다.

점 $(1, f(1))$ 에서 함수 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 접점을 $(t, f(t))$ 라 하면 접선의 방정식은

$$y = \left(\frac{4}{3}e^{t+1} - \frac{1}{(t-1)^2} \right)(x-t) + \frac{4}{3}e^{t+1} + \frac{1}{t-1} \text{ 이고 } 2 = \frac{4}{3}(2-t)e^{t+1} + \frac{2}{t-1} \text{ 이므로}$$

$$\text{정리하면 } \left(\frac{4}{3}e^{t+1} + \frac{2}{t-1} \right)(2-t) = 0,$$

즉 $t = 2$ 이다. 이때, $f''(x) = \frac{4}{3}e^{x+1} + \frac{2}{(x-1)^3} > 0$ 이므로 $f'(x)$ 는 증가함수이다.

이제 점 $(1, f(1))$ 부터 $(p, f(p))$ 까지 선분을 그려보면 그래프의 개형으로부터 $p \leq 2$ 인 경우 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 두 끝점에서만 만나고, $p > 2$ 인 경우 교점이 하나 더 존재하게 되므로 1 과 2 사이의 값 q 에 대해 $(q, f(q))$ 에서도 만난다. 즉, $p > 2$ 이면 평균값정리에 의해 q 와 p 사이에 $\frac{f(p) - f(1)}{p - 1} = \frac{f(p) - f(q)}{p - q} = f'(r)$ 을 만족시키는 r 이 있으므로 $p > 2$ 이면 집합 A 에 속할 수 없다. 반대로 두 끝점에서만 만날 경우 $f'(x)$ 가 증가하므로 $f'(r)$ 은 선분의 기울기보다 항상 작게 되고, $1 < p \leq 2$ 이면 집합 A 에 속한다.

(2)

$-1 \leq p < 1$ 일 때, 함수 $y = \frac{2}{1-x}$ 는 $x = -1$ 에서의 미분계수가 $\frac{1}{2}$ 이고 증가함수이다.

따라서 두 점 $(-1, 1)$ 와 $(1, 2)$ 를 지나는 직선은 함수 $y = \frac{2}{1-x}$ 와 $x = -1$ 에서 접한다.

즉, x 가 p 부터 1 까지 변할 때 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은 $\frac{1}{2}$ 이하이다.

p 와 1 사이의 r 은 $f'(r) > \frac{1}{2}$ 이므로 평균변화율과 $f'(r)$ 이 일치할 수 없다.

즉, $-1 \leq p < 1$ 이면 A 에 속한다.

(3)

$p < -1$ 일 때, p 와 1 사이의 r 에 대하여 가능한 모든 $\lim_{x \rightarrow r+} \frac{f(x) - f(r)}{x - r}$ 의 값을 생각해보면

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) = -\frac{8}{3}, \lim_{x \rightarrow -1+} f'(x) = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \infty \text{이고}$$

$\lim_{x \rightarrow r+} \frac{f(x) - f(r)}{x - r}$ 은 r 이 커짐에 따라 항상 증가하므로 $-\frac{8}{3}$ 이상 $\frac{1}{2}$ 미만의 평균변화율은

$\lim_{x \rightarrow r+} \frac{f(x) - f(r)}{x - r}$ 과 일치할 수 없다. 먼저, $f(p) > 1$ 이므로 평균변화율은 모두 $\frac{1}{2}$ 미만이다.

점 $(1, f(1))$ 에서 기울기 $-\frac{8}{3}$ 에 해당하는 직선 $y = -\frac{8}{3}(x - 1) + 2$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 교점을

$$(s, f(s)) \text{라 하면 } \frac{4}{3}s^2 - \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}(s - 1) + 2 \text{이므로 } 4s^2 + 8s - 15 = 0 \text{이고,}$$

$s < -1$ 인 범위에서는 $s = -1 - \frac{\sqrt{19}}{2}$ 이다. 따라서 $-1 - \frac{\sqrt{19}}{2} \leq p < -1$ 인 경우에는 A 에 속한다.

$p < -1 - \frac{\sqrt{19}}{2}$ 이면 $\frac{f(1) - f(p)}{1 - p} < -\frac{8}{3}$ 이고, 그래프의 개형에 따르면 $f'(p) < \frac{f(1) - f(p)}{1 - p}$ 이다. 이때,

함수 $g(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}$ 에 대하여 $g'(p) = f'(p)$ 이고, $g'(-1) = -\frac{8}{3}$, $g'(x)$ 는 연속이므로

사잇값의 정리에 따르면 p 와 -1 사이에 $f'(r) = g'(r) = \frac{f(1) - f(p)}{1 - p}$ 인 r 이 존재하며,

따라서 p 는 A 에 속하지 않는다.

(1), (2), (3)을 종합하면 $A = \left\{ p \mid -1 - \frac{\sqrt{19}}{2} \leq p < 1, 1 < p \leq 2 \right\}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제	각 범위에 맞는 x에 대하여 함수 $f(x)$의 값을 극한을 이용하여 다음과 같이 계산한다. (i) $x > 1$이면, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3ae^{x+1}x^{2n}}{3x^{2n} + 1} + \frac{2(x^{2n-1} + x^{2n-2} + \dots + x + 1)}{2x^{2n} + 1} \right)$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{ae^{x+1}}{1 + \frac{1}{3x^{2n}}} + \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{2x^{2n}}} \right)$ $= ae^{x+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x^k} = ae^{x+1} + \frac{1}{x - 1}$ 즉, $f(x) = ae^{x+1} + \frac{1}{x - 1}$ ($x > 1$)이다. (ii) $x < 1$이면, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3ae^{x+1}x^{2n}}{3x^{2n} + 1} + \frac{2(x^{2n-1} + x^{2n-2} + \dots + x + 1)}{2x^{2n} + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(x^{2n} - 1)}{(2x^{2n} + 1)(x - 1)} = \frac{2}{1 - x}$ (iii) $x = -1$일 경우에는 $f(-1) = \frac{3}{4}a$이다. (i), (ii), (iii)을 종합하면, 제시문 (ㄴ)의 (가) 조건에서 함수 $f(x)$가 $x = -1$에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = a + b, f(-1) = \frac{3}{4}a \text{의 값이 일치하고, } a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3} \text{이다.}$	50

하위 문항	채점 기준	배점
	(나) 조건에서는 x가 -1부터 1까지 변할 때 $f(x)$의 평균변화율이 $\frac{1}{2}$이므로 $c = 2$이다. (1) $p > 1$일 때, 1과 p 사이의 x에 대하여 $f(x) = \frac{4}{3}e^{x+1} + \frac{1}{x-1}$이다. 점 $(1, f(1))$에서 함수 $y = f(x)$에 그은 접선의 접점을 $(t, f(t))$라 하면 접선의 방정식은 $y = \left(\frac{4}{3}e^{t+1} - \frac{1}{(t-1)^2}\right)(x-t) + \frac{4}{3}e^{t+1} + \frac{1}{t-1}$이고 $2 = \frac{4}{3}(2-t)e^{t+1} + \frac{2}{t-1}$이므로 정리하면 $\left(\frac{4}{3}e^{t+1} + \frac{2}{t-1}\right)(2-t) = 0$, 즉 $t = 2$이다. 이때, $f''(x) = \frac{4}{3}e^{x+1} + \frac{2}{(x-1)^3} > 0$이므로 $f'(x)$는 증가함수이다. 이제 점 $(1, f(1))$부터 $(p, f(p))$까지 선분을 그려보면 그래프의 개형으로부터 $p \leq 2$인 경우 함수 $y = f(x)$의 그래프와 두 끝점에서만 만나고, $p > 2$인 경우 교점이 하나 더 존재하게 되므로 1과 2 사이의 값 q에 대해 $(q, f(q))$에서도 만난다. 즉, $p > 2$이면 평균값정리에 의해 q와 p 사이에 $\frac{f(p)-f(1)}{p-1} = \frac{f(p)-f(q)}{p-q} = f'(r)$을 만족시키는 r이 있으므로 $p > 2$이면 집합 A에 속할 수 없다. 반대로 두 끝점에서만 만날 경우 $f'(x)$가 증가하므로 $f'(r)$은 선분의 기울기보다 항상 작게 되고, $1 < p \leq 2$이면 집합 A에 속한다.	30
	(2) $-1 \leq p < 1$일 때, 함수 $y = \frac{2}{1-x}$는 $x = -1$에서의 미분계수가 $\frac{1}{2}$이고 증가함수이다. 따라서 두 점 $(-1, 1)$와 $(1, 2)$를 지나는 직선은 함수 $y = \frac{2}{1-x}$와 $x = -1$에서 접한다. 즉, x가 p부터 1까지 변할 때 함수 $f(x)$의 평균변화율은 $\frac{1}{2}$ 이하이다. p와 1 사이의 r은 $f'(r) > \frac{1}{2}$이므로 평균변화율과 $f'(r)$이 일치할 수 없다. 즉, $-1 \leq p < 1$이면 A에 속한다.	30
	(3) $p < -1$일 때, p와 1 사이의 r에 대하여 가능한 모든 $\lim_{x \rightarrow r+} \frac{f(x)-f(r)}{x-r}$의 값을 생각해 보면 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1-} f'(x) = -\frac{8}{3}$, $\lim_{x \rightarrow -1+} f'(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \infty$이고 $\lim_{x \rightarrow r+} \frac{f(x)-f(r)}{x-r}$은 r이 커짐에 따라 항상 증가하므로 $-\frac{8}{3}$ 이상 $\frac{1}{2}$ 미만의 평균변화율은 $\lim_{x \rightarrow r+} \frac{f(x)-f(r)}{x-r}$과 일치할 수 없다. 먼저, $f(p) > 1$이므로 평균변화율은 모두 $\frac{1}{2}$ 미만이다. 점 $(1, f(1))$에서 기울기 $-\frac{8}{3}$에 해당하는 직선 $y = -\frac{8}{3}(x-1) + 2$와 함수 $y = f(x)$의 교점을 $(s, f(s))$라 하면 $\frac{4}{3}s^2 - \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}(s-1) + 2$이므로 $4s^2 + 8s - 15 = 0$이고, $s < -1$인 범위에서는 $s = -1 - \frac{\sqrt{19}}{2}$이다. 따라서 $-1 - \frac{\sqrt{19}}{2} \leq p < -1$인 경우에는 A에 속한다.	30
	$p < -1 - \frac{\sqrt{19}}{2}$이면 $\frac{f(1)-f(p)}{1-p} < -\frac{8}{3}$이고, 그래프의 개형에 따르면 $f'(p) < \frac{f(1)-f(p)}{1-p}$이다. 이때, 함수 $g(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}$에 대하여 $g'(p) = f'(p)$이고 $g'(-1) = -\frac{8}{3}$, $g'(x)$는 연속이므로 사잇값의 정리에 따르면 p와 -1 사이에 $f'(r) = g'(r) = \frac{f(1)-f(p)}{1-p}$인 r이 존재하며,	30

하위 문항	채점 기준	배점
	따라서 p 는 A 에 속하지 않는다.	
	(1), (2), (3)을 종합하면 $A = \left\{ p \mid -1 - \frac{\sqrt{19}}{2} \leq p < 1, 1 < p \leq 2 \right\}$ 이다.	30

문항 4 (의예 전용)

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하십시오. (200점)

제시문

(ㄱ) 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 와 정의역과 공역이 모두 실수 전체의 집합이고 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad 10 \leq |f(2) - f(1)| \leq 20$$

(나) 실수 t 가 $0 \leq t \leq 4$ 일 때 $f(g(t)) = f(t)$, $t < 0$ 일 때 $g(t) = g(0)$, $t > 4$ 일 때 $g(t) = g(4)$ 이다.

$$(다) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{\sqrt{x}} = \sqrt{3}$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(x)$ 로 가능한 모든 함수의 개수를 n 이라고 하자.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 로 가능한 모든 함수에 대하여 다음 S 의 값 중 가장 큰 값을 M , 가장 작은 값을 m 이라고 하자.

S 는 곡선 $y = f'(x)g(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 1$, $x = 4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이다.

[논제] (200점) 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(x)$ 로 가능한 함수를 모두 구하십시오. 또한 제시문 (ㄴ)의 n , 제시문 (ㄷ)의 M 과 m 의 값을 구하십시오. 이 모든 과정의 근거를 논술하십시오.

■ 예시 답안

$f(x)$ 의 최고차항의 계수를 k 라고 하면 실수 a, b, c 에 대하여 $f'(x) = k(3(x-a)^2 - b)$, $f(x) = k((x-a)^3 - b(x-a)) + c$ 로 쓸 수 있다. $b \leq 0$ 이면 $f(x)$ 는 일대일함수이므로 조건 (나)에 의해 실수 t 가 $0 \leq t \leq 4$ 일 때 $g(t) = t$ 이고, 이는 조건 (다)를 만족하지 않는다. 그러므로 $b > 0$ 이다.

실수 t 가 $0 \leq t \leq 4$ 일 때 $x = t$ 에서의 함숫값 $g(t) = s$ 는 조건 (나)에서 $f(s) = f(t)$ 이므로

$$k((s-a)^3 - b(s-a)) + c = k((t-a)^3 - b(t-a)) + c \text{이고}$$

$$(s-t)((s-a)^2 + (s-a)(t-a) + (t-a)^2 - b) = 0 \text{이다.}$$

따라서 $|t-a| > 2\sqrt{b/3}$ 일 때는 $s = t$ 이고,

$$|t-a| \leq 2\sqrt{b/3} \text{일 때는 } s = t \text{ 또는 } s = \frac{-(t-a) \pm \sqrt{4b-3(t-a)^2}}{2} + a \text{이다.}$$

정의역이 $[a-2\sqrt{b/3}, a+2\sqrt{b/3}]$ 인 두 함수 $\alpha(x), \beta(x)$ 를

$$\alpha(x) = \frac{-(x-a) - \sqrt{4b-3(x-a)^2}}{2} + a, \beta(x) = \frac{-(x-a) + \sqrt{4b-3(x-a)^2}}{2} + a,$$

정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $I(x)$ 를 $I(x) = x$ 라고 하면 위 결과로부터

$$0 \leq t \leq 4 \text{이고 } |t-a| > 2\sqrt{b/3} \text{일 때}$$

$$g(t) = I(t) \text{이고,} \quad \text{---- (*)}$$

$$0 \leq t \leq 4 \text{이고 } |t-a| \leq 2\sqrt{b/3} \text{일 때}$$

$$(g(t) - I(t))(g(t) - \alpha(t))(g(t) - \beta(t)) = 0 \text{이다.} \quad \text{---- (**)}$$

1) $0 < a - 2\sqrt{b/3}$ 또는 $a + 2\sqrt{b/3} \leq 0$ 인 경우:

(*)에 의해 $g(x)$ 는 어떤 구간 $(0, p_1]$ 에서 함수 $I(x)$ 와 일치한다. (단, $p_1 > 0$)

$$\text{따라서 } g(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} t = 0 \text{이고, } \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(t) - g(0)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t - 0}{\sqrt{t}} = 0 \text{이다.}$$

따라서 (다) 조건을 만족하지 않는다.

2) $a - 2\sqrt{b/3} \leq 0 < a + 2\sqrt{b/3}$ 인 경우:

(**)에 의해 $g(x)$ 는 어떤 닫힌구간 $[0, p_2]$ 에서 세 함수 $I(x), \alpha(x), \beta(x)$ 중 하나와 일치하게 된다. (단, $p_2 > 0$)

$$\text{조건 (다)에서 } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{g(x) - g(0)}{\sqrt{x}} = \infty \text{이므로}$$

이 구간에서 $g(x)$ 와 일치하는 함수는 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다. 따라서

이 구간에서 $g(x)$ 는 두 함수 $\alpha(x), \beta(x)$ 중 하나와 일치하고 $a - 2\sqrt{b/3} = 0$, 즉 $4b = 3a^2$ 이다.

$$\text{그런데 } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{\sqrt{x}} = \sqrt{3}, \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\alpha(x) - \alpha(0)}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{6a}}{2}, \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\beta(x) - \beta(0)}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{6a}}{2} \text{이므로}$$

닫힌구간 $[0, p_2]$ 에서 $g(x)$ 는 $\beta(x)$ 와 일치하고, $a = 2, b = 3$ 이다.

따라서 $f(x) = k((x-2)^3 - 3(x-2)) + c$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극댓값 $f(1) = 2k + c$, $x = 3$ 에서 극솟값 $f(3) = -2k + c$ 를 가진다. 그리고, 두 함수 $\alpha(x), \beta(x)$ 의 정의역은 $[0, 4]$ 이고,

$$\alpha(x) = \frac{-(x-2) - \sqrt{3x(4-x)}}{2} + 2, \beta(x) = \frac{-(x-2) + \sqrt{3x(4-x)}}{2} + 2 \text{이다.}$$

세 곡선 $y = I(x)$, $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$ 는 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$ 에서는 교점을 가지지 않으므로 (**)에 의해 각 닫힌구간 $[0, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 4]$ 에서는 $g(x)$ 는 세 함수 $I(x), \alpha(x), \beta(x)$ 중 하나와 일치하게 된다. 그런데 닫힌구간 $[0, p_2]$ 에서 $g(x)$ 가 $\beta(x)$ 와 일치하므로 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $g(x)$ 는 $\beta(x)$ 와 일치하고, $g(1) = \beta(1) = 4 \neq 1 = \alpha(1) = I(1)$ 이므로 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서도 $g(x)$ 는 $\beta(x)$ 와 일치한다. 닫힌구간 $[3, 4]$ 에서는 $g(3) = \beta(3) =$

$I(3) = 3 \neq 0 = \alpha(3)$ 이므로 닫힌구간 $[3, 4]$ 에서는 $g(x)$ 는 $I(x)$ 또는 $\beta(x)$ 와 일치한다. 따라서 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(x)$ 로 가능한 모든 함수는 다음 두 함수 $g_1(x), g_2(x)$ 이고 제시문 (ㄴ)의 n 의 값은 2이다.

$$g_1(x) = \begin{cases} 3 & (x < 0) \\ \frac{-(x-2) + \sqrt{3x(4-x)}}{2} + 2 & (0 \leq x \leq 3) \\ x & (3 < x \leq 4) \\ 4 & (4 < x) \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} 3 & (x < 0) \\ \frac{-(x-2) + \sqrt{3x(4-x)}}{2} + 2 & (0 \leq x \leq 4) \\ 1 & (4 < x) \end{cases}$$

함수 $f_1(x)$ 은 정의역이 $[3, 4]$, 공역이 $[-2k+c, 2k+c]$ 이며 $3 \leq t \leq 4$ 인 모든 t 에 대하여 $f_1(t) = f(t)$ 을 만족하는 함수이고, 함수 $f_2(x)$ 은 정의역이 $[1, 3]$, 공역이 $[-2k+c, 2k+c]$ 이며 $1 \leq t \leq 3$ 인 모든 t 에 대하여 $f_2(t) = f(t)$ 을 만족하는 함수라고 하자.

삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 $f(1) = 2k+c$, $x=3$ 에서 극솟값 $f(3) = -2k+c$ 를 가지고 $f(4) = 2k+c$ 이므로 두 함수 $f_1(x), f_2(x)$ 는 일대일대응이고 역함수를 가진다. $h_1(x)$ 를 $f_1(x)$ 의 역함수, $h_2(x)$ 를 $f_2(x)$ 의 역함수라고 하자.

$1 \leq t \leq 3$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $f(h_1(f(t))) = f(t)$ 이고,

$\alpha(t) \leq I(t) \leq h_1(f(t)), \alpha(t) \leq I(t) \leq \beta(t)$ 이므로 $h_1(f(t)) = \beta(t) = g_1(t) = g_2(t)$ 이고,

$3 \leq t \leq 4$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $f(h_1(f(t))) = f(t), f(h_2(f(t))) = f(t)$ 이고,

$\alpha(t) \leq \beta(t) \leq I(t), \alpha(t) \leq h_2(f(t)) \leq h_1(f(t))$ 이므로 $g_1(t) = h_1(f(t)), g_2(t) = h_2(f(t))$ 이다.

$1 \leq t \leq 4$ 인 실수 t 에 대하여 $g(t) \geq 0$ 이고, $1 \leq t \leq 3$ 인 실수 t 에 대하여 $f'(t) \leq 0$,

$3 \leq t \leq 4$ 인 실수 t 에 대하여 $f'(t) \geq 0$ 이므로 제시문 (ㄷ)의 S 는 다음과 같다.

$$S = - \int_1^3 f'(x)g(x)dx + \int_3^4 f'(x)g(x)dx = - \int_1^3 h_1(f(x))f'(x)dx + \int_3^4 f'(x)g(x)dx$$

$$\begin{aligned} 1) - \int_1^3 h_1(f(x))f'(x)dx &= - \int_{2k+c}^{-2k+c} h_1(x)dx = \int_{-2k+c}^{2k+c} h_1(x)dx \\ &= 4k \times h_1(2k+c) - \int_3^4 \{f(x) - (-2k+c)\}dx = 16k - \frac{5}{4}k = \frac{59}{4}k \end{aligned}$$

2) $g(x) = g_1(x)$ 인 경우:

$$\int_3^4 f'(x)g(x)dx = \int_3^4 h_1(f(x))f'(x)dx = \int_{-2k+c}^{2k+c} h_1(x)dx = \frac{59}{4}k$$

$g(x) = g_2(x)$ 인 경우:

$$\int_3^4 f'(x)g(x)dx = \int_3^4 h_2(f(x))f'(x)dx = \int_{-2k+c}^{2k+c} h_2(x)dx = 8k$$

따라서 $S = \frac{59}{2}k$ 또는 $\frac{91}{4}k$ 이다.

$|f(2) - f(1)| = 2k$ 이므로 제시문 (ㄱ)의 조건 (가)에서 $10 \leq 2k \leq 20$, 즉 $5 \leq k \leq 10$ 이다.

그러므로 $M = \frac{59}{2} \times 10 = 295, m = \frac{91}{4} \times 5 = \frac{455}{4}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
논제	$f(x)$ 의 최고차항의 계수를 k 라고 하면 실수 a, b, c 에 대하여 $f'(x) = k(3(x-a)^2 - b)$, $f(x) = k((x-a)^3 - b(x-a)) + c$ 로 쓸 수 있다. $b \leq 0$ 이면 $f(x)$ 는 일대일함수이므로 조건 (나)에 의해 실수 t 가 $0 \leq t \leq 4$ 일 때 $g(t) = t$ 이고, 이는 조건 (다)를 만족하지 않는다. 그러므로 $b > 0$ 이다.	20
	실수 t 가 $0 \leq t \leq 4$ 일 때 $x = t$ 에서의 함숫값 $g(t) = s$ 는 조건 (나)에서 $f(s) = f(t)$ 이므로 $k((s-a)^3 - b(s-a)) + c = k((t-a)^3 - b(t-a)) + c$ 이고 $(s-t)((s-a)^2 + (s-a)(t-a) + (t-a)^2 - b) = 0$ 이다. 따라서 $ t-a > 2\sqrt{b/3}$ 일 때는 $s = t$ 이고, $ t-a \leq 2\sqrt{b/3}$ 일 때는 $s = t$ 또는 $s = \frac{-(t-a) \pm \sqrt{4b-3(t-a)^2}}{2} + a$ 이다.	30
	정의역이 $[a - 2\sqrt{b/3}, a + 2\sqrt{b/3}]$ 인 두 함수 $\alpha(x), \beta(x)$ 를 $\alpha(x) = \frac{-(x-a) - \sqrt{4b-3(x-a)^2}}{2} + a$, $\beta(x) = \frac{-(x-a) + \sqrt{4b-3(x-a)^2}}{2} + a$, 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $I(x)$ 를 $I(x) = x$ 라고 하면 위 결과로부터 $0 \leq t \leq 4$ 이고 $ t-a > 2\sqrt{b/3}$ 일 때 $g(t) = I(t)$ 이고, ---- (*) $0 \leq t \leq 4$ 이고 $ t-a \leq 2\sqrt{b/3}$ 일 때 $(g(t) - I(t))(g(t) - \alpha(t))(g(t) - \beta(t)) = 0$ 이다. ---- (**) 1) $0 < a - 2\sqrt{b/3}$ 또는 $a + 2\sqrt{b/3} \leq 0$ 인 경우: (*)에 의해 $g(x)$ 는 어떤 구간 $(0, p_1]$ 에서 함수 $I(x)$ 와 일치한다. (단, $p_1 > 0$) 따라서 $g(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} t = 0$ 이고, $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{g(t) - g(0)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t-0}{\sqrt{t}} = 0$ 이다. 따라서 (다) 조건을 만족하지 않는다. 2) $a - 2\sqrt{b/3} \leq 0 < a + 2\sqrt{b/3}$ 인 경우: (**)에 의해 $g(x)$ 는 어떤 닫힌구간 $[0, p_2]$ 에서 세 함수 $I(x), \alpha(x), \beta(x)$ 중 하나와 일치하게 된다. (단, $p_2 > 0$) 조건 (다)에서 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{g(x) - g(0)}{\sqrt{x}} = \infty$ 이므로 이 구간에서 $g(x)$ 와 일치하는 함수는 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다. 따라서 이 구간에서 $g(x)$ 는 두 함수 $\alpha(x), \beta(x)$ 중 하나와 일치하고 $a - 2\sqrt{b/3} = 0$, 즉 $4b = 3a^2$ 이다. 그런데 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{\sqrt{x}} = \sqrt{3}$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\alpha(x) - \alpha(0)}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{6a}}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\beta(x) - \beta(0)}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{6a}}{2}$ 이므로 닫힌구간 $[0, p_2]$ 에서 $g(x)$ 는 $\beta(x)$ 와 일치하고, $a = 2, b = 3$ 이다. 따라서 $f(x) = k((x-2)^3 - 3(x-2)) + c$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극댓값 $f(1) = 2k + c$, $x = 3$ 에서 극솟값 $f(3) = -2k + c$ 를 가진다. 그리고, 두 함수 $\alpha(x), \beta(x)$ 의 정의역은 $[0, 4]$ 이고,	50

하위 문항	채점 기준	배점
	$\alpha(x) = \frac{-(x-2) - \sqrt{3x(4-x)}}{2} + 2$, $\beta(x) = \frac{-(x-2) + \sqrt{3x(4-x)}}{2} + 2$이다. 세 곡선 $y = I(x)$, $y = \alpha(x)$, $y = \beta(x)$는 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 4)$에서는 교점을 가지지 않으므로 (**)에 의해 각 닫힌구간 $[0, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 4]$에서는 $g(x)$는 세 함수 $I(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 중 하나와 일치하게 된다. 그런데 닫힌구간 $[0, p_2]$에서 $g(x)$가 $\beta(x)$와 일치하므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $g(x)$는 $\beta(x)$와 일치하고, $g(1) = \beta(1) = 4 \neq 1 = \alpha(1) = I(1)$이므로 닫힌구간 $[1, 3]$에서도 $g(x)$는 $\beta(x)$와 일치한다. 닫힌구간 $[3, 4]$에서는 $g(3) = \beta(3) = I(3) = 3 \neq 0 = \alpha(3)$이므로 닫힌구간 $[3, 4]$에서는 $g(x)$는 $I(x)$ 또는 $\beta(x)$와 일치한다. 따라서 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(x)$로 가능한 모든 함수는 다음 두 함수 $g_1(x)$, $g_2(x)$이고 제시문 (ㄴ)의 n의 값은 2이다. $g_1(x) = \begin{cases} 3 & (x < 0) \\ \frac{-(x-2) + \sqrt{3x(4-x)}}{2} + 2 & (0 \leq x \leq 3) \\ x & (3 < x \leq 4) \\ 4 & (4 < x) \end{cases}$ $g_2(x) = \begin{cases} 3 & (x < 0) \\ \frac{-(x-2) + \sqrt{3x(4-x)}}{2} + 2 & (0 \leq x \leq 4) \\ 1 & (4 < x) \end{cases}$	50
	함수 $f_1(x)$은 정의역이 $[3, 4]$, 공역이 $[-2k+c, 2k+c]$이며 $3 \leq t \leq 4$인 모든 t에 대하여 $f_1(t) = f(t)$을 만족하는 함수이고, 함수 $f_2(x)$은 정의역이 $[1, 3]$, 공역이 $[-2k+c, 2k+c]$이며 $1 \leq t \leq 3$인 모든 t에 대하여 $f_2(t) = f(t)$을 만족하는 함수라고 하자. 삼차함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 극댓값 $f(1) = 2k+c$, $x = 3$에서 극솟값 $f(3) = -2k+c$를 가지고 $f(4) = 2k+c$이므로 두 함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$는 일대일대응이고 역함수를 가진다. $h_1(x)$를 $f_1(x)$의 역함수, $h_2(x)$를 $f_2(x)$의 역함수라고 하자. $1 \leq t \leq 3$인 모든 실수 t에 대하여 $f(h_1(f(t))) = f(t)$이고, $\alpha(t) \leq I(t) \leq h_1(f(t))$, $\alpha(t) \leq I(t) \leq \beta(t)$이므로 $h_1(f(t)) = \beta(t) = g_1(t) = g_2(t)$ 이고, $3 \leq t \leq 4$인 모든 실수 t에 대하여 $f(h_1(f(t))) = f(t)$, $f(h_2(f(t))) = f(t)$이고, $\alpha(t) \leq \beta(t) \leq I(t)$, $\alpha(t) \leq h_2(f(t)) \leq h_1(f(t))$이므로 $g_1(t) = h_1(f(t))$, $g_2(t) = h_2(f(t))$이다. $1 \leq t \leq 4$인 실수 t에 대하여 $g(t) \geq 0$이고, $1 \leq t \leq 3$인 실수 t에 대하여 $f'(t) \leq 0$, $3 \leq t \leq 4$인 실수 t에 대하여 $f'(t) \geq 0$이므로 제시문 (ㄷ)의 S는 다음과 같다. $S = - \int_1^3 f'(x)g(x)dx + \int_3^4 f'(x)g(x)dx = - \int_1^3 h_1(f(x))f'(x)dx + \int_3^4 f'(x)g(x)dx$ 1) $-\int_1^3 h_1(f(x))f'(x)dx = - \int_{2k+c}^{-2k+c} h_1(x)dx = \int_{-2k+c}^{2k+c} h_1(x)dx$ $= 4k \times h_1(2k+c) - \int_3^4 \{f(x) - (-2k+c)\}dx = 16k - \frac{5}{4}k = \frac{59}{4}k$ 2) $g(x) = g_1(x)$인 경우:	50

하위 문항	채점 기준	배점
	$\int_3^4 f'(x)g(x)dx = \int_3^4 h_1(f(x))f'(x)dx = \int_{-2k+c}^{2k+c} h_1(x)dx = \frac{59}{4}k$ $g(x) = g_2(x) \text{인 경우:}$ $\int_3^4 f'(x)g(x)dx = \int_3^4 h_2(f(x))f'(x)dx = \int_{-2k+c}^{2k+c} h_2(x)dx = 8k$ 따라서 $S = \frac{59}{2}k$ 또는 $\frac{91}{4}k$이다. $f(2) - f(1) = 2k$이므로 제시문 (ㄱ)의 조건 (가)에서 $10 \leq 2k \leq 20$, 즉 $5 \leq k \leq 10$이다. 그러므로 $M = \frac{59}{2} \times 10 = 295$, $m = \frac{91}{4} \times 5 = \frac{455}{4}$이다.	

2024학년도 의예과 / 약학과

문항 1 (의예·약학 공통)

문항 1 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 논제에 답하십시오. (170점)

제시문

(ㄱ) 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 $t (t \geq 0)$ 에서의 위치는 다음과 같다.

$$x = 2 \sin t - (2t - \pi) \cos t$$

$$y = 2 \cos t + (2t - \pi) \sin t$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 점 P 에서 x 축과 y 축에 내린 수선의 발을 각각 Q 와 R 이라고 하면, 점 P 가 움직일 때 점 Q 는 x 축 위에서 직선 운동을 하고 점 R 은 y 축 위에서 직선 운동을 한다.

(ㄷ) 양수 a 에 대하여 제시문 (ㄱ)의 점 P 의 시각 $t = a$ 에서의 속력은 시각 $t = 0$ 에서의 속력의 3배이다. 이때 실수 s 는 다음과 같다.

s 는 $t = 0$ 에서 $t = a$ 까지 점 P 가 움직인 거리이다.

(ㄹ) 양수 b 에 대하여 제시문 (ㄴ)의 점 Q 는 시각 $t = 0$ 일 때 출발하여 시각 $t = b$ 에서 Q 의 운동 방향을 두 번 꺾어 바꾼다. 이때 실수 d 는 다음과 같다.

d 는 $t = 0$ 에서 $t = b$ 까지 점 Q 가 움직인 거리이다.

(ㅁ) 양수 c 에 대하여 제시문 (ㄴ)의 점 R 은 시각 $t = 0$ 일 때 출발하여 시각 $t = c$ 에서 R 의 운동 방향을 두 번 꺾어 바꾼다. 이때 실수 l 은 다음과 같다.

l 은 $t = 0$ 에서 $t = c$ 까지 점 R 이 움직인 거리이다.

[논제 1] (170점) 제시문 (ㄷ)~(ㅁ)의 s, d, l 의 값을 각각 구하고 그 근거를 논술하십시오.

■ 예시 답안

점 $P(x, y)$ 에 대하여 $\frac{dx}{dt} = (2t - \pi) \sin t$, $\frac{dy}{dt} = (2t - \pi) \cos t$ 이므로, 시간 t 에서 점 P 의 속력은 다음과 같다.

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\{(2t - \pi) \sin t\}^2 + \{(2t - \pi) \cos t\}^2} = \sqrt{(2t - \pi)^2} = |2t - \pi|$$

점 P 의 $t = 0$ 에서 속력은 $|2t - \pi| = \pi$ 이고, $t = a$ 에서의 속력은 $|2a - \pi| = 3\pi$ 이므로 $a = 2\pi$ 이다.

따라서 s 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} |2t - \pi| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (2t - \pi) dt \\ &= [\pi t - t^2]_0^{\frac{\pi}{2}} + [t^2 - \pi t]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{5}{2}\pi^2 \end{aligned}$$

시간 t 에서 점 Q 의 속도는 $v(t) = (2t - \pi) \sin t$ 이고, 점 R 의 속도는 $u(t) = (2t - \pi) \cos t$ 이다.

수직선을 따라 움직이는 점의 운동에서 속도의 부호는 점의 운동 방향을 나타내므로 두 점의 속도의 부호가 바뀌는 시각, 즉 운동 방향을 바꾸는 시각은 점 Q 에 대하여 $\frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, \dots$ 이고, 점 R 에 대하여 $\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \dots$ 이다.

따라서 $b = \pi$, $c = \frac{5}{2}\pi$ 이다.

그러므로 d 는

$$\begin{aligned} d &= \int_0^{\pi} |(2t - \pi) \sin t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2t) \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2t - \pi) \sin t dt \\ &= -2 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \sin t dt \right\} \text{ 이고,} \end{aligned}$$

부분적분법을 이용하면,

$$\begin{aligned} \int t \sin t dt &= t(-\cos t) - \int (-\cos t) dt = -t \cos t + \sin t \text{ 이므로,} \\ d &= -2 \left\{ [-t \cos t + \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + [t \cos t - \sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right\} = 2\pi - 4 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

또한 l 은

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{5}{2}\pi} |(2t - \pi) \cos t| dt = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (\pi - 2t) \cos t dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} (2t - \pi) \cos t dt \\ &= -3\pi - 2 \left\{ \int_0^{\frac{3}{2}\pi} t \cos t dt - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} t \cos t dt \right\} \text{ 이고,} \end{aligned}$$

부분적분법을 이용하면, $\int t \cos t dt = t \sin t - \int \sin t dt = t \sin t + \cos t$ 이므로,

$$l = -3\pi - 2 \left\{ [t \sin t + \cos t]_0^{\frac{3}{2}\pi} - [t \sin t + \cos t]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \right\} = 8\pi + 2 \text{ 이다.}$$

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
논제	점 $P(x, y)$에 대하여 $\frac{dx}{dt} = (2t - \pi) \sin t$, $\frac{dy}{dt} = (2t - \pi) \cos t$이므로, 시간 t에서 점 P의 속력은 다음과 같다. $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\{(2t - \pi) \sin t\}^2 + \{(2t - \pi) \cos t\}^2} = \sqrt{(2t - \pi)^2} = 2t - \pi $	40

하위문항	채점 기준	배점
	점 P의 $t = 0$에서 속력은 $2t - \pi = \pi$이고, $t = a$에서의 속력은 $2a - \pi = 3\pi$이므로 $a = 2\pi$이다. 따라서 s는 다음과 같다. $s = \int_0^{2\pi} 2t - \pi dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (2t - \pi) dt$ $= [\pi t - t^2]_0^{\frac{\pi}{2}} + [t^2 - \pi t]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{5}{2}\pi^2$	
	시간 t에서 점 Q의 속도는 $v(t) = (2t - \pi) \sin t$이고, 점 R의 속도는 $u(t) = (2t - \pi) \cos t$이다. 수직선을 따라 움직이는 점의 운동에서 속도의 부호는 점의 운동 방향을 나타내므로 두 점의 속도의 부호가 바뀌는 시각, 즉 운동 방향을 바꾸는 시각은 점 Q에 대하여 $\frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, \dots$이고, 점 R에 대하여 $\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \dots$이다. 따라서 $b = \pi, c = \frac{5}{2}\pi$이다.	50
	그러므로 d는 $d = \int_0^{\pi} (2t - \pi) \sin t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2t) \sin t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2t - \pi) \sin t dt$ $= -2 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \sin t dt \right\} \text{ 이고,}$ 부분적분법을 이용하면, $\int t \sin t dt = t(-\cos t) - \int (-\cos t) dt = -t \cos t + \sin t \text{ 이므로,}$ $d = -2 \left\{ [-t \cos t + \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + [t \cos t - \sin t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right\} = 2\pi - 4 \text{ 이다.}$	40
	또한 l은 $l = \int_0^{\frac{5}{2}\pi} (2t - \pi) \cos t dt = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (\pi - 2t) \cos t dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} (2t - \pi) \cos t dt$ $= -3\pi - 2 \left\{ \int_0^{\frac{3}{2}\pi} t \cos t dt - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} t \cos t dt \right\} \text{ 이고,}$ 부분적분법을 이용하면, $\int t \cos t dt = t \sin t - \int \sin t dt = t \sin t + \cos t$이므로, $l = -3\pi - 2 \left\{ [t \sin t + \cos t]_0^{\frac{3}{2}\pi} - [t \sin t + \cos t]_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \right\} = 8\pi + 2 \text{ 이다.}$	40

문항 2 (의예·약학 공통)

문항 2 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오. (170점)

제시문

(ㄱ) 실수 t 에 대하여 곡선 $y = e^{2x}$ 위의 점 (t, e^{2t}) 에서의 접선의 방정식을 $y = f(x)$ 라고 하자.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 실수 t 와 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = |f(x) + k - 2 \ln x|$ 가 구간 $(0, \infty)$ 에서 미분가능하도록 하는 실수 k 의 최솟값을 $m(t)$ 라 하자. 이때 함수 $h(t)$ 는 다음과 같다.

$$h(t) = e^{-t}(m(t) + 2t + 1)$$

(ㄷ) 두 실수 a, b ($a < b$)와 제시문 (ㄴ)의 함수 $h(t)$ 에 대하여 실수 s 는 다음과 같다.

$$s = \int_a^b (t-1)^2 h(t) dt$$

(ㄹ) 두 실수 α, β ($\alpha < \beta$)와 제시문 (ㄷ)의 실수 a, b, s 에 대하여 $a = \alpha, b = \beta$ 일 때, s 의 값이 최소가 된다.

[논제 1] (170점) 제시문 (ㄹ)의 두 실수 α, β 에 대하여 $\alpha + \beta$ 의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

■ 예시 답안

곡선 $y = e^{2x}$ 위의 점 (t, e^{2t}) 에서의 접선의 방정식은

$y = 2e^{2t}(x - t) + e^{2t}$ 이므로

$f(x) = 2e^{2t}(x - t) + e^{2t}$ 이다.

제시문 (ㄴ)의 함수 $g(x) = |f(x) + k - 2\ln x|$ 에 대하여, $g_1(x) = f(x) + k - 2\ln x$ 라고 하면

$g'_1(x) = f'(x) - \frac{2}{x} = 2e^{2t} - \frac{2}{x}$ 이므로 함수 $g_1(x)$ 는 $g'_1(x) = 0$ 을 만족하는 $x = e^{-2t}$ 에서 극솟값 $g_1(e^{-2t}) = (1 - 2t)e^{2t} + k + 4t + 2$ 을 갖는다.

따라서, $x > 0$ 인 모든 실수에 대해 함수 $g(x) = |f(x) + k - 2\ln x|$ 가 미분가능하기 위해서는 $g_1(e^{-2t}) = (1 - 2t)e^{2t} + k + 4t + 2 \geq 0$. 즉 $k \geq (2t - 1)e^{2t} - 4t - 2$ 을 만족해야 하므로,

$m(t) = (2t - 1)e^{2t} - 4t - 2$ 이고, $h(t) = e^{-t}(m(t) + 2t + 1) = e^t(2t - 1) - e^{-t}(2t + 1)$ 이다.

한편, $h'(t) = e^t(2t - 1) + 2e^t + e^{-t}(2t + 1) - 2e^{-t} = (1 + 2t)e^t - (1 - 2t)e^{-t}$ 이다.

$h'(0) = 0$ 이고, 임의의 양수 t 에 대해 $1 + 2t > 1 - 2t$, $e^t > e^{-t}$ 에 의해 $h'(t) > 0$ 이므로 $t \geq 0$ 에서 함수 $h(t)$ 는 증가함수이다. $h(0) = -2$, $h(1) = e - 3e^{-1} > 0$ 이므로 0과 1 사이의 어떤 실수 q 에서 $h(q) = 0$ 을 만족하고 $h(-t) = h(t)$ 이므로 $h(-q) = 0$ 이다.

모든 실수 t 에 대하여 $(t - 1)^2 \geq 0$ 이므로 $(t - 1)^2 h(t)$ 는 $-q < t < q$ 일 때만 음의 값을 가진다.

따라서, $\alpha = -q$, $\beta = q$ 일 때 s 가 최소가 된다. 따라서, $\alpha + \beta = 0$ 이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
논제	곡선 $y = e^{2x}$ 위의 점 (t, e^{2t}) 에서의 접선의 방정식은 $y = 2e^{2t}(x - t) + e^{2t}$ 이므로 $f(x) = 2e^{2t}(x - t) + e^{2t}$ 이다.	40
	제시문 (ㄴ)의 함수 $g(x) = f(x) + k - 2\ln x $ 에 대하여, $g_1(x) = f(x) + k - 2\ln x$ 라고 하면 $g'_1(x) = f'(x) - \frac{2}{x} = 2e^{2t} - \frac{2}{x}$ 이므로 함수 $g_1(x)$ 는 $g'_1(x) = 0$ 을 만족하는 $x = e^{-2t}$ 에서 극 솟값 $g_1(e^{-2t}) = (1 - 2t)e^{2t} + k + 4t + 2$ 을 갖는다. 따라서, $x > 0$ 인 모든 실수에 대해 함수 $g(x) = f(x) + k - 2\ln x $ 가 미분가능하기 위해 서는 $g_1(e^{-2t}) = (1 - 2t)e^{2t} + k + 4t + 2 \geq 0$. 즉 $k \geq (2t - 1)e^{2t} - 4t - 2$ 을 만족해야 하 므로, $m(t) = (2t - 1)e^{2t} - 4t - 2$ 이고, $h(t) = e^{-t}(m(t) + 2t + 1) = e^t(2t - 1) - e^{-t}(2t + 1)$ 이 다.	40
	한편, $h'(t) = e^t(2t - 1) + 2e^t + e^{-t}(2t + 1) - 2e^{-t} = (1 + 2t)e^t - (1 - 2t)e^{-t}$ 이다. $h'(0) = 0$ 이고, 임의의 양수 t 에 대해 $1 + 2t > 1 - 2t$, $e^t > e^{-t}$ 에 의해 $h'(t) > 0$ 이므로 $t \geq 0$ 에서 함수 $h(t)$ 는 증가함수이다. $h(0) = -2$, $h(1) = e - 3e^{-1} > 0$ 이므로 0과 1 사이의 어 떤 실수 q 에서 $h(q) = 0$ 을 만족하고 $h(-t) = h(t)$ 이므로 $h(-q) = 0$ 이다.	50
	모든 실수 t 에 대하여 $(t - 1)^2 \geq 0$ 이므로 $(t - 1)^2 h(t)$ 는 $-q < t < q$ 일 때만 음의 값을 가 진다. 따라서, $\alpha = -q$, $\beta = q$ 일 때 s 가 최소가 된다. 따라서, $\alpha + \beta = 0$ 이다.	40

문항 3 (의예 전용)

문항 3 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 논제에 답하십시오. (180점)

제시문

(ㄱ) 자연수 n ($1 \leq n \leq 500$)에 대하여 실수 a 는 다음과 같다.

$$a = \sin\left(\frac{n+1}{100}\right) + \sin\left(\frac{n+2}{100}\right) + \sin\left(\frac{n+3}{100}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n+100}{100}\right)$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 n 과 a 에 대하여 a 의 값이 최대가 되도록 하는 n 의 값을 m 이라고 하자.

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 자연수 m 에 대하여 실수 b 는 다음과 같다.

$$b = \cos\left(\frac{m+1}{100}\right) + \cos\left(\frac{m+2}{100}\right) + \cos\left(\frac{m+3}{100}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{m+100}{100}\right)$$

(ㄹ) 제시문 (ㄷ)의 실수 b 에 대하여 집합 A 는 다음과 같다.

$$A = \{k \mid 2b - k > 0, k \text{ 는 정수}\}$$

(ㄴ) [삼각함수의 성질과 원주율]

$$(가) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(나) 원주율 π 의 값은 $\pi = 3.141592\cdots$ 임이 알려져 있고, $1.570 < \frac{\pi}{2} < 1.571$ 이다.

[논제 1] (180점) 제시문 (ㄹ)의 집합 A 의 원소 중 가장 큰 값을 구하고 그 근거를 논술하십시오.

■ 예시 답안

$1 \leq n \leq 500$ 이므로, $\frac{n+100}{100}$ 의 최댓값은 $n = 500$ 일 때 $\frac{500+100}{100} = 6$ 이고, 제시문 (ㄱ)에 의해 $6 < 2\pi$ 이다.
 $n \geq 314$ 이면 $\sin\left(\frac{n+1}{100}\right), \sin\left(\frac{n+2}{100}\right), \dots, \sin\left(\frac{n+100}{100}\right)$ 은 모두 음수이므로 a 가 음수가 되어 최댓값이 될 수 없다. 어떤 자연수 k ($1 \leq k \leq 313$)에 대하여 $n = k$ 일 때의 a 의 값을 p , $n = k+1$ 일 때의 a 의 값을 q 라 하면

$$q - p = \sin\left(\frac{k+101}{100}\right) - \sin\left(\frac{k+1}{100}\right) \text{이다.}$$

$q - p$ 는 $\left|\frac{k+101}{100} - \frac{\pi}{2}\right| < \left|\frac{k+1}{100} - \frac{\pi}{2}\right|$ 이면 양수이고 $\left|\frac{k+101}{100} - \frac{\pi}{2}\right| > \left|\frac{k+1}{100} - \frac{\pi}{2}\right|$ 이면 음수가 되므로,
 $1 \leq k \leq 106$ 이면 양수이고 $107 \leq k \leq 313$ 이면 음수이다.

따라서 $k = 107$ 일 때 최초로 $q - p$ 가 음수가 되고 a 의 값이 최대가 되며 $m = 107$ 이다.

$m = 107$ 이므로 제시문 (ㄴ)의 b 는 $b = \cos(1.08) + \cos(1.09) + \dots + \cos(2.07)$ 이고,

$1.570 \leq \frac{\pi}{2} \leq 1.571$ 이므로 $\cos(1.08), \cos(1.09), \dots, \cos(1.57)$ 은 양수,

$\cos(1.58), \cos(1.59), \dots, \cos(2.07)$ 은 음수이다.

(1) 삼각함수의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$$\left|1.57 - \frac{\pi}{2}\right| < \left|1.58 - \frac{\pi}{2}\right| \Rightarrow \cos(1.57) + \cos(1.58) < 0$$

$$\left|1.56 - \frac{\pi}{2}\right| < \left|1.59 - \frac{\pi}{2}\right| \Rightarrow \cos(1.56) + \cos(1.59) < 0$$

⋮

$$\left|1.08 - \frac{\pi}{2}\right| < \left|2.07 - \frac{\pi}{2}\right| \Rightarrow \cos(1.08) + \cos(2.07) < 0$$

따라서,

$$b = (\cos(1.57) + \cos(1.58)) + \dots + (\cos(1.08) + \cos(2.07)) < 0 \text{ 이다.}$$

(2) 비슷한 방법으로 1.56과 1.58부터 비교하면,

$$\left|1.56 - \frac{\pi}{2}\right| > \left|1.58 - \frac{\pi}{2}\right| \Rightarrow \cos(1.56) + \cos(1.58) > 0$$

$$\left|1.55 - \frac{\pi}{2}\right| > \left|1.59 - \frac{\pi}{2}\right| \Rightarrow \cos(1.55) + \cos(1.59) > 0$$

⋮

$$\left|1.08 - \frac{\pi}{2}\right| > \left|2.06 - \frac{\pi}{2}\right| \Rightarrow \cos(1.08) + \cos(2.06) > 0$$

이고, $2.07 = \frac{207}{100} = \frac{621}{300} < \frac{2}{3}\pi$ 이므로 $\cos(2.07) > \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -0.5$ 이고, 따라서,

$$b = \cos(1.57) + (\cos(1.56) + \cos(1.58)) + \dots + (\cos(1.08) + \cos(2.06)) + \cos(2.07) > -0.5 \text{ 이다.}$$

따라서, (1)과 (2)에 의하여 $2b$ 는 $-1 < 2b < 0$ 을 만족하고, $k \leq -1$ 이면 $2b - k > 0$ 이고 $k \geq 0$ 이면 $2b - k < 0$ 이므로 집합 A 는 모든 음의 정수의 집합이고 A 의 가장 큰 원소는 -1 이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
논제	$1 \leq n \leq 500$ 이므로, $\frac{n+100}{100}$ 의 최댓값은 $n = 500$ 일 때 $\frac{500+100}{100} = 6$ 이고, 제시문 (ㄱ)에 의해 $6 < 2\pi$ 이다. $n \geq 314$ 이면 $\sin\left(\frac{n+1}{100}\right), \sin\left(\frac{n+2}{100}\right), \dots, \sin\left(\frac{n+100}{100}\right)$ 은 모두 음수이므로 a 가 음수가 되어 최댓값이 될 수 없다. 어떤 자연수 k ($1 \leq k \leq 313$)에 대하여 $n = k$ 일 때의 a 의 값을 p , $n = k+1$ 일 때의 a 의 값을 q 라 하면 $q - p = \sin\left(\frac{k+101}{100}\right) - \sin\left(\frac{k+1}{100}\right)$ 이다.	40

하위문항	채점 기준	배점
	$q - p$는 $\left \frac{k+101}{100} - \frac{\pi}{2} \right < \left \frac{k+1}{100} - \frac{\pi}{2} \right$이면 양수이고 $\left \frac{k+101}{100} - \frac{\pi}{2} \right > \left \frac{k+1}{100} - \frac{\pi}{2} \right$이면 음수가 되므로, $1 \leq k \leq 106$이면 양수이고 $107 \leq k \leq 313$이면 음수이다. 따라서 $k = 107$일 때 최초로 $q - p$가 음수가 되고 a의 값이 최대가 되며 $m = 107$이다.	40
	$m = 107$이므로 제시문 (ㄷ)의 b는 $b = \cos(1.08) + \cos(1.09) + \cdots + \cos(2.07)$이고, $1.570 \leq \frac{\pi}{2} \leq 1.571$이므로 $\cos(1.08), \cos(1.09), \dots, \cos(1.57)$은 양수, $\cos(1.58), \cos(1.59), \dots, \cos(2.07)$은 음수이다. (1) 삼각함수의 성질에 의하여 다음이 성립한다. $\left 1.57 - \frac{\pi}{2} \right < \left 1.58 - \frac{\pi}{2} \right \Rightarrow \cos(1.57) + \cos(1.58) < 0$ $\left 1.56 - \frac{\pi}{2} \right < \left 1.59 - \frac{\pi}{2} \right \Rightarrow \cos(1.56) + \cos(1.59) < 0$ $\vdots$ $\left 1.08 - \frac{\pi}{2} \right < \left 2.07 - \frac{\pi}{2} \right \Rightarrow \cos(1.08) + \cos(2.07) < 0$ 따라서, $b = (\cos(1.57) + \cos(1.58)) + \cdots + (\cos(1.08) + \cos(2.07)) < 0 \text{ 이다.}$	50
	(2) 비슷한 방법으로 1.56과 1.58부터 비교하면, $\left 1.56 - \frac{\pi}{2} \right > \left 1.58 - \frac{\pi}{2} \right \Rightarrow \cos(1.56) + \cos(1.58) > 0$ $\left 1.55 - \frac{\pi}{2} \right > \left 1.59 - \frac{\pi}{2} \right \Rightarrow \cos(1.55) + \cos(1.59) > 0$ $\vdots$ $\left 1.08 - \frac{\pi}{2} \right > \left 2.06 - \frac{\pi}{2} \right \Rightarrow \cos(1.08) + \cos(2.06) > 0 \text{ 이고,}$ $2.07 = \frac{207}{100} = \frac{621}{300} < \frac{2}{3}\pi \text{ 이므로 } \cos(2.07) > \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -0.5 \text{ 이고, 따라서,}$ $b = \cos(1.57) + (\cos(1.56) + \cos(1.58)) + \cdots + (\cos(1.08) + \cos(2.06)) + \cos(2.07) > -0.5 \text{ 이다.}$ 따라서, (1)과 (2)에 의하여 $2b$는 $-1 < 2b < 0$을 만족하고, $k \leq -1$이면 $2b - k > 0$이고 $k \geq 0$이면 $2b - k < 0$이므로 집합 A는 모든 음의 정수의 집합이고 A의 가장 큰 원소는 -1이다.	50

문항 4 (의예 문항 4 / 약학 문항 3)

문항 4 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하십시오. (180점)

제시문

(ㄱ) 실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - ax^2 - a^2x + 4a + 2a^2 & (x \geq 0) \\ -(a+4)^2x + 4a + 2a^2 & (x < 0) \end{cases}$$

(ㄴ) 양수 k 와 제시문 (ㄱ)의 실수 a , 함수 $f(x)$ 에 대하여 닫힌구간 $[-k, k]$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(a)$ 라고 하자.

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 양수 k 와 함수 $g(a)$ 에 대하여 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 $g(a)$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, 다음 조건을 만족시키는 k 값의 전체의 집합을 A 라고 하자.

$g(a) = m$ 을 만족시키는 a 의 값은 단 하나만 존재한다.

[논제 1] (180점) 제시문 (ㄷ)의 집합 A 의 원소가 아닌 양수 k 의 값을 모두 구하고 그 근거를 논술하십시오.

■ 예시 답안

$f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다. $f(x)$ 는 $x < 0$ 에서 기울기가 $-(a+4)^2$ 인 직선이므로 닫힌구간 $[-k, 0]$ 에서 $f(-k)$ 가 최대이다. 한편, 함수 $y = x^3 - ax^2 - a^2x + 4a + 2a^2$ 는 x^3 의 계수가 양수이고, $x = a$ 및 $x = -\frac{a}{3}$ 에서 극값을 가진다. 그러므로 $x \geq 0$ 에서 $f(x)$ 의 함숫값은 $a = 0$ 인 경우에는 증가하고 $a \neq 0$ 인 경우에는 감소하다가 증가한다.

즉, 닫힌구간 $[0, k]$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(0)$ 과 $f(k)$ 중 하나이다. 따라서 닫힌구간 $[-k, k]$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-k)$ 와 $f(k)$ 중 하나이다.

이때 $f(-k) = (2+k)a^2 + (8k+4)a + 16k$ 를 $g_1(a)$, $f(k) = (2-k)a^2 + (4-k^2)a + k^3$ 을 $g_2(a)$ 라고 하면,
 $g(a) = \begin{cases} g_1(a) & (g_1(a) \geq g_2(a)) \\ g_2(a) & (g_1(a) < g_2(a)) \end{cases}$ 이다.

함수 $g_1(a)$ 은 아래로 볼록한 이차함수이므로 꼭짓점 $(v, g_1(v))$ 에서 최솟값 $g_1(v)$ 를 갖는다.

한편 $g_1(a) - g_2(a) = 2ka^2 + (k^2 + 8k)a + 16k - k^3$ 은 a^2 의 계수가 양수인 이차함수이다.

(1) $g_1(a) - g_2(a) = 0$ 인 a 가 없거나 증근을 가질 경우의 k 에 대하여 모든 실수 a 에서 $g_1(a) - g_2(a) \geq 0$ 이므로 $g(a) = g_1(a)$ 가 되어 $g_1(v) = m$ 이고, 이러한 a 는 v 뿐이다.

따라서 $k \in A$ 이다.

(2) 이차방정식 $g_1(a) - g_2(a) = 0$ 가 서로 다른 두 근 α, β ($\alpha < \beta$)를 가지게 하는 k 에 대하여

$g(a) = \begin{cases} g_1(a) & (a < \alpha, a > \beta) \\ g_2(a) & (\alpha \leq a \leq \beta) \end{cases}$ 이다.

$g(a) \geq g_1(a)$ 이므로, $v < \alpha$ 이거나 $v > \beta$ 인 경우에는 $g(a)$ 가 v 에서 유일한 최솟값을 가지게 되어 $k \in A$ 이다. 따라서 $\alpha < v < \beta$ 인 경우만 확인하면 되고, 이때 함수 $g(a)$ 는 $a < \alpha$ 에서 감소하고 $a > \beta$ 에서 증가하므로 $g(a) = m$ 을 만족하는 a 는 구간 $[\alpha, \beta]$ 안에서만 존재한다.

함수 $g_2(a)$ 가 아래로 볼록일 경우 최솟값을 갖는 a 의 값은 두 개 이상 존재할 수 없다.

따라서 $g_2(a)$ 는 위로 볼록이거나 일차함수이어야 한다.

(i) $g_2(a)$ 가 일차함수이면 $k = 2$ 이고 $g_2(a) = 8$ 이다. 이때 $\alpha = -3, \beta = -2$ 이므로 $-3 \leq a \leq -2$ 인 모든 a 에 대하여 최솟값 $g_2(a) = 8$ 을 가진다. 2는 A 에 속하지 않는다.

(ii) $g_2(a)$ 가 위로 볼록인 경우 $g_2(\alpha) = g_2(\beta)$ 일 때만 $g(a) = m$ 인 a 의 값을 α, β 로 두 개 이상 가질 수 있고, 이때 $g_1(\alpha) = g_1(\beta)$ 이기도 하므로 두 함수 $g_1(a)$ 와 $g_2(a)$ 는 v 에서 극솟값을 갖는다. $g'_2(a) = 2(2-k)a + 4 - k^2$ 에서 $g'_2(v) = 0$ 이므로 $v = -\frac{2+k}{2}$ 이고,

$g'_1(v) = 2(2+k)v + (8k+4)$ 에서 $-(2+k)^2 + (8k+4) = 0$, 즉 $k(k-4) = 0$ 이고 $k = 4$ 이다.

이때 $\alpha = -6, \beta = 0$ 에서 최솟값 64를 가지므로 4는 A 에 속하지 않는다.

따라서 (1), (2)(i), (2)(ii)에 의해 A 에 속하지 않는 양수 k 는 2와 4이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
논제	$f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다. $f(x)$ 는 $x < 0$ 에서 기울기가 $-(a+4)^2$ 인 직선이므로 닫힌구간 $[-k, 0]$ 에서 $f(-k)$ 가 최대이다. 한편, 함수 $y = x^3 - ax^2 - a^2x + 4a + 2a^2$ 는 x^3 의 계수가 양수이고, $x = a$ 및 $x = -\frac{a}{3}$ 에서 극값을 가진다. 그러므로 $x \geq 0$ 에서 $f(x)$ 의 함숫값은 $a = 0$ 인 경우에는 증가하고 $a \neq 0$ 인 경우에는 감소하다가 증가한다. 즉, 닫힌구간 $[0, k]$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(0)$ 과 $f(k)$ 중 하나이다. 따라서 닫힌구간 $[-k, k]$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-k)$ 와 $f(k)$ 중 하나이다. 이때 $f(-k) = (2+k)a^2 + (8k+4)a + 16k$ 를 $g_1(a)$, $f(k) = (2-k)a^2 + (4-k^2)a + k^3$ 을 $g_2(a)$ 라고 하면, $g(a) = \begin{cases} g_1(a) & (g_1(a) \geq g_2(a)) \\ g_2(a) & (g_1(a) < g_2(a)) \end{cases}$ 이다.	30
	함수 $g_1(a)$ 은 아래로 볼록한 이차함수이므로 꼭짓점 $(v, g_1(v))$ 에서 최솟값 $g_1(v)$ 를 갖는다.	20

하위문항	채점 기준	배점
	한편 $g_1(a) - g_2(a) = 2ka^2 + (k^2 + 8k)a + 16k - k^3$은 a^2의 계수가 양수인 이차함수이다. (1) $g_1(a) - g_2(a) = 0$인 a가 없거나 중근을 가질 경우의 k에 대하여 모든 실수 a에서 $g_1(a) - g_2(a) \geq 0$이므로 $g(a) = g_1(a)$가 되어 $g_1(v) = m$이고, 이러한 a는 v뿐이다. 따라서 $k \in A$이다.	
	(2) 이차방정식 $g_1(a) - g_2(a) = 0$가 서로 다른 두 근 α, β ($\alpha < \beta$)를 가지게 하는 k에 대하여 $g(a) = \begin{cases} g_1(a) & (a < \alpha, a > \beta) \\ g_2(a) & (\alpha \leq a \leq \beta) \end{cases} \text{ 이다.}$ $g(a) \geq g_1(a)$이므로, $v < \alpha$이거나 $v > \beta$인 경우에는 $g(a)$가 v에서 유일한 최솟값을 가지게 되어 $k \in A$이다. 따라서 $\alpha < v < \beta$인 경우만 확인하면 되고, 이때 함수 $g(a)$는 $a < \alpha$에서 감소하고 $a > \beta$에서 증가하므로 $g(a) = m$을 만족하는 a는 구간 $[\alpha, \beta]$ 안에서만 존재한다. 함수 $g_2(a)$가 아래로 볼록일 경우 최솟값을 갖는 a의 값은 두 개 이상 존재할 수 없다. 따라서 $g_2(a)$는 위로 볼록이거나 일차함수이어야 한다.	50
	(i) $g_2(a)$가 일차함수이면 $k = 2$이고 $g_2(a) = 8$이다. 이때 $\alpha = -3, \beta = -2$이므로 $-3 \leq a \leq -2$인 모든 a에 대하여 최솟값 $g_2(a) = 8$을 가진다. 2는 A에 속하지 않는다.	30
	(ii) $g_2(a)$가 위로 볼록인 경우 $g_2(\alpha) = g_2(\beta)$일 때만 $g(a) = m$인 a의 값을 α, β로 두 개 이상 가질 수 있고, 이때 $g_1(\alpha) = g_1(\beta)$이기도 하므로 두 함수 $g_1(a)$와 $g_2(a)$는 v에서 극솟값을 갖는다. $g'_2(a) = 2(2 - k)a + 4 - k^2$에서 $g'_2(v) = 0$이므로 $v = -\frac{2+k}{2}$이고, $g'_1(v) = 2(2 + k)v + (8k + 4)$에서 $-(2 + k)^2 + (8k + 4) = 0$, 즉 $k(k - 4) = 0$이고 $k = 4$이다. 이때 $\alpha = -6, \beta = 0$에서 최솟값 64를 가지므로 4는 A에 속하지 않는다. 따라서 (1), (2)(i), (2)(ii)에 의해 A에 속하지 않는 양수 k는 2와 4이다.	50

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다