

건국대논술

자연계

목차

2026학년도 자연계 (KU논술우수자)	3
문제 1	3
문제 2	5
문제 3	7
문제 4	9
2025학년도 자연계 (KU논술우수자)	11
문제 1	11
문제 2	13
문제 3	16
문제 4	18
2024학년도 자연계 A · B (KU논술우수자)	21
A형 · 문제 1	21
A형 · 문제 2	24
A형 · 문제 3	26
A형 · 문제 4	28
B형 · 문제 1	31
B형 · 문제 2	34
B형 · 문제 3	36
B형 · 문제 4	39

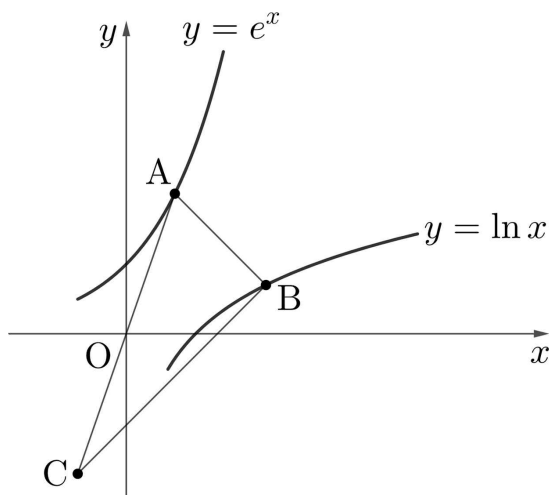
2026학년도 자연계 (KU논술우수자)

문제 1

제시문

[가] 좌표평면 위의 점 (x, y) 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, -y)$ 이다.

[나] 그림에서 점 A는 제1사분면 위의 점으로 곡선 $y = e^x$ 위에 있다. 점 B는 곡선 $y = \ln x$ 위의 점으로 직선 AB의 기울기는 -1 이다. 점 C는 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점이다.



[문제 1] (17점)

(나)에서 $\angle ACB$ 의 크기가 최소일 때 점 A의 좌표를 구하고 풀이과정을 쓰시오.

■ 예시 답안

(답) $(1, e)$

(풀이)

점 A의 좌표를 (a, e^a) 이라 하자. 점 A와 점 B는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이고 점 A와 점 C는 원점에 대하여 대칭이므로 $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 이다. 삼각형 OBC는 이등변삼각형이고

$$\angle AOB = \angle OCB + \angle OBC = 2\angle OCB = 2\angle ACB.$$

따라서, $\angle AOB$ 의 크기가 최소일 때 $\angle ACB$ 의 크기가 최소이다.

$y = e^x$ 의 그래프와 $y = \ln x$ 의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이고 점 A와 점 B가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로, 직선 OA가 곡선 $y = e^x$ 의 접선일 때 직선 OB도 곡선 $y = \ln x$ 의 접선이고 이때 $\angle AOB$ 의 크기가 최소이다.

직선 OA가 곡선 $y = e^x$ 의 점 A에서의 접선이라고 하자. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ 이므로 직선 OA의 기울기는 e^a 이고, 직선 OA의 방정식은 $y = e^a x$ 이다. 이 직선이 점 $A(a, e^a)$ 를 지나므로 $e^a = e^a \times a$ 이다. 따라서 $a = 1$ 이고 답은 $(1, e)$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	A+: 답과 풀이가 맞음. A : 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: 직선 OA의 방정식 $y = e^a x$ 을 구함. B: 직선 OA가 곡선 $y = e^x$ 의 접선일 때 $\angle ACB$ 의 크기가 최소임을 적음. C: $\angle AOB$ 의 크기가 최소일 때 $\angle ACB$ 의 크기가 최소임을 적음. D: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	17점

문제 2

제시문

[가] 자연수의 거듭제곱의 합에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

[나] 이산확률변수 X 의 확률질량함수가 $P(X = x_i) = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)일 때, X 의 기댓값 $E(X)$ 는 $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$

[문제 2] (23점)

n 장의 카드가 들어 있는 상자가 있다. 각각의 카드에는 1부터 n 까지 자연수 중 한 개가 적혀 있고, 서로 다른 카드에 적혀 있는 자연수는 서로 다르다. 이 상자에서 임의로 카드 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 수 중 가장 큰 수에서 가장 작은 수를 뺀 값을 확률변수 X 라 하자. (단, n 은 3 이상의 자연수)

- (1) $n = 10$ 일 때, $P(X = 9)$ 를 구하고 풀이과정을 쓰시오.
- (2) $E(X) = 30$ 일 때, n 을 구하고 풀이과정을 쓰시오.

■ 예시 답안

(답) (1) $\frac{1}{15}$ (2) 59

(풀이)

(1) 10장의 카드가 들어있는 상자에서 세 장의 카드를 꺼내는 방법의 수는 $_{10}C_3$ 이다. 카드에 적힌 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차가 9이면, 가장 큰 수는 10, 가장 작은 수는 1이다. 나머지 수는 2, 3, ..., 9의 8가지 경우가 가능하다. 따라서

$$P(X = 9) = \frac{8}{_{10}C_3} = \frac{1}{15}$$

(2) $P(X = k)$ 를 구하자. (단, $2 \leq k \leq n - 1$)

n 장의 카드가 들어있는 상자에서 세 장의 카드를 꺼내는 방법의 수는 $_nC_3$ 이다. 세 장의 카드에 적힌 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차가 k 이므로, 세 장의 카드에 적힌 수를 크기순으로 a, b, c 라 하면 $c = a + k$ 이다. $a + k \leq n$ 이므로 $a \leq n - k$ 이다. 따라서 a 가 될 수 있는 수는 $1, 2, \dots, n - k$ 로 $n - k$ 가지이다. 각각의 a 에 대하여 $a < b < a + k$ 이므로 b 는 $a + 1$ 부터 $a + k - 1$ 까지의 수 중 하나이다. 따라서 각각의 a 에 대하여 b 가 될 수 있는 수는 $k - 1$ 가지이다. 따라서 카드에 적힌 세 개의 수 중 가장 큰 수에서 가장 작은 수를 뺀 값이 k 인 것은 총 $(n - k) \times (k - 1)$ 가지가 있다.

따라서 $P(X = k) = \frac{(n - k)(k - 1)}{_nC_3}$ 이다.

기댓값은

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{_nC_3} \sum_{k=2}^{n-1} k(n - k)(k - 1) = \frac{1}{_nC_3} \sum_{k=1}^n k(n - k)(k - 1) \\ &= \frac{1}{_nC_3} \sum_{k=1}^n (-k^3 + (n + 1)k^2 - nk) \\ &= \frac{6}{n(n - 1)(n - 2)} \left\{ -\frac{n^2(n + 1)^2}{4} + \frac{n(n + 1)^2(2n + 1)}{6} - \frac{n^2(n + 1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n + 1}{2} \end{aligned}$$

$E(X) = 30$ 이므로 $\frac{n + 1}{2} = 30$ 이고, $n = 59$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. 또는, $E(X) = \frac{n + 1}{2}$을 구함. B+: $E(X)$를 n에 관한 식으로 나타냈으나, 간단한 식으로 정리하지 못함. B: $P(X = k) = \frac{(n - k)(k - 1)}{_nC_3}$를 구함. C: $P(X = 9) = \frac{1}{15}$을 구함. D: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	23점

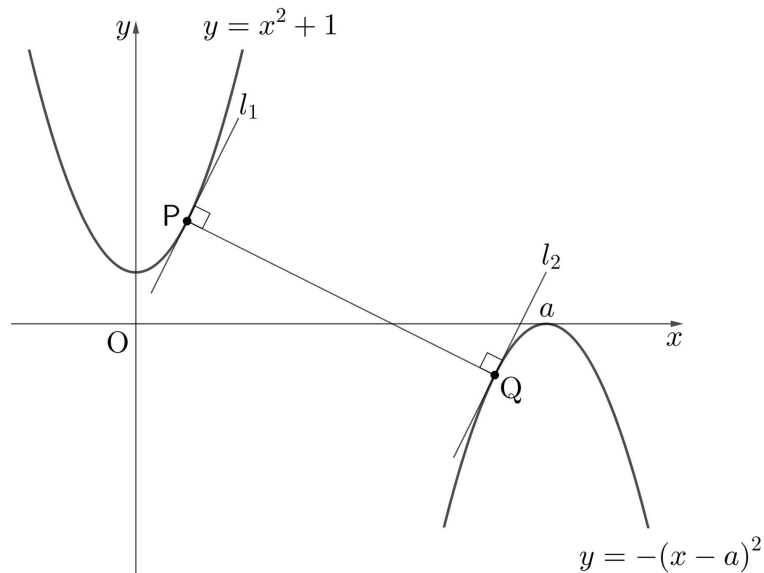
문제 3

제시문

[가] 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y' = f'(g(x))g'(x)$$

[나] 그림에서 직선 l_1 은 곡선 $y = x^2 + 1$ 위의 점 P에서의 접선이고, 직선 l_2 는 곡선 $y = -(x - a)^2$ 위의 점 Q에서의 접선이다. 직선 PQ는 직선 l_1, l_2 와 각각 수직이다.



[문제 3] (29점)

- (1) (나)에서 $a = 8$ 일 때, 점 P의 좌표를 구하고 풀이과정을 쓰시오.
- (2) (나)에서 선분 PQ의 길이를 L 이라 하자. $a = 8$ 일 때, $\frac{dL}{da}$ 의 값을 구하고 풀이과정을 쓰시오.

■ 예시 답안

(답) (1) (1, 2) (2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(풀이)

(1) 점 P의 좌표를 $(b, b^2 + 1)$ 이라고 하자. 점 P에서의 접선 l_1 의 기울기는 $2b$ 이다.

점 Q의 좌표를 $(c, -(c - 8)^2)$ 이라고 하자. 점 Q에서의 접선 l_2 의 기울기는 $-2(c - 8)$ 이다.

직선 l_1 과 l_2 가 평행하므로 $2b = -2(c - 8)$ 이고 정리하면 $c = 8 - b$ 이다.

직선 PQ의 기울기는 $\frac{-(c - 8)^2 - (b^2 + 1)}{c - b} = \frac{-2b^2 - 1}{8 - 2b}$ 이다.

직선 PQ가 직선 l_1 과 수직이므로 $2b \times \left(\frac{-2b^2 - 1}{8 - 2b} \right) = -1$ 이다. 따라서 $b^3 + b - 2 = 0$ 이다.

$(b - 1)(b^2 + b + 2) = 0$ 이고, $b = 1$ 이다. 따라서 점 P의 좌표는 (1, 2)이다.

(2) 점 P의 좌표를 $(b, b^2 + 1)$, 점 Q의 좌표를 $(c, -(c - a)^2)$ 라고 하자.

접선 l_1 의 기울기는 $2b$ 이고, 접선 l_2 의 기울기는 $-2(c - a)$ 이다.

직선 l_1 과 l_2 가 평행하므로 $2b = -2(c - a)$ 이고 정리하면 $c = a - b$ 이다. 따라서 점 Q의 좌표는 $(a - b, -b^2)$ 이다.

직선 PQ의 기울기는 $\frac{-b^2 - (b^2 + 1)}{(a - b) - b} = \frac{-2b^2 - 1}{a - 2b}$ 이다.

직선 PQ가 직선 l_1 과 수직이므로 $2b \times \left(\frac{-2b^2 - 1}{a - 2b} \right) = -1$ 이다. 따라서

$$a = 4b^3 + 4b \quad \dots\dots(*)$$

또한 점 Q의 좌표는 $(4b^3 + 3b, -b^2)$ 이다. 점 P의 좌표가 $(b, b^2 + 1)$ 이므로

$$L = \sqrt{(4b^3 + 2b)^2 + (2b^2 + 1)^2} = \sqrt{4b^2(2b^2 + 1)^2 + (2b^2 + 1)^2} = (2b^2 + 1)\sqrt{4b^2 + 1}$$

$$\frac{dL}{db} = 4b\sqrt{4b^2 + 1} + (2b^2 + 1) \times \frac{8b}{2\sqrt{4b^2 + 1}} = \frac{8b(3b^2 + 1)}{\sqrt{4b^2 + 1}}$$

$a = 8$ 일 때 (*)에 의해 $b = 1$ 이고, $\frac{dL}{db} = \frac{32}{\sqrt{5}}$.

(*)에서 $\frac{da}{db} = 12b^2 + 4$ 이고, 역함수의 미분법에 의하여 $\frac{db}{da} = \frac{1}{12b^2 + 4}$ 이다. $b = 1$ 일 때, $\frac{db}{da} = \frac{1}{16}$ 이다.

따라서 $a = 8$ 일 때 $\frac{dL}{da} = \frac{dL}{db} \times \frac{db}{da} = \frac{32}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{16} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3	A+: 답과 풀이가 맞음. A : 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $\frac{db}{da} = \frac{1}{12b^2 + 4}$를 구함. B: L을 b에 대한 식으로 표현하고, $\frac{dL}{db} = \frac{8b(3b^2 + 1)}{\sqrt{4b^2 + 1}}$을 구함. C: P(1, 2)를 정확히 구함. D: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	29점

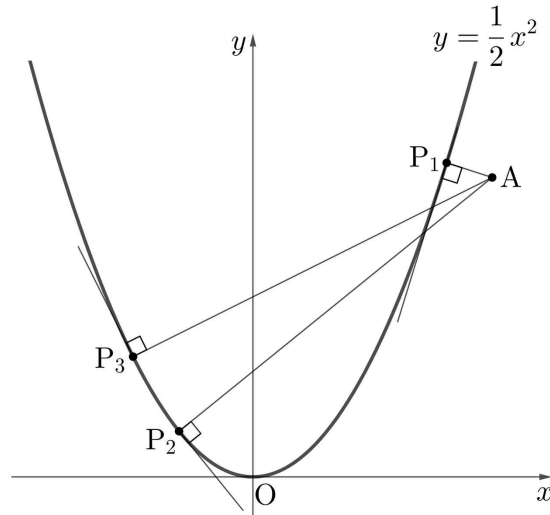
문제 4

제시문

[가] 함수 $y = f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

[나] [그림]에서 세 점 P_1, P_2, P_3 은 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위에 있고, 점 A 는 곡선 위에 있지 않다. 세 직선 AP_1, AP_2, AP_3 은 각각 점 P_1, P_2, P_3 에서 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 접선과 수직이다.



[그림]

[문제 4] (31점)

다음 조건 (1), (2)를 모두 만족시키는 점 $A(a, b)$ 의 개수를 구하고 풀이과정을 쓰시오.

(1) a 와 b 는 모두 자연수이고 $4 \leq a \leq 20, 5 \leq b \leq 7$ 이다.

(2) [그림]처럼 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $P\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ 에서의 접선과 직선 AP 가 수직이 되는 점 P 가 3개 있다.

■ 예시 답안

(답) 8

(풀이)

점 P에서의 접선이 기울기가 t 이고 직선 AP와 수직이므로 $t \times \frac{\frac{1}{2}t^2 - b}{t - a} = \frac{t^3 - 2bt}{2(t - a)} = -1$ 이다. 정리하면

$$t^3 - 2(b - 1)t - 2a = 0.$$

$f(t) = t^3 - 2(b - 1)t - 2a$ 라 하면 $f'(t) = 3t^2 - 2(b - 1)$ 이다. $f'(t) = 0$ 일 때 $t = \pm\sqrt{\frac{2(b - 1)}{3}}$ 이다.

조건 (2)를 만족시키려면 $f(t) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

(i) $b = 5$ 일 때

$\sqrt{\frac{2(b - 1)}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$ 이다. $f(t) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가질 조건은 $f\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}\right) < 0$ 이다.

따라서 $\left(\frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} - 8\sqrt{\frac{8}{3}} - 2a\right)\left(-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} + 8\sqrt{\frac{8}{3}} - 2a\right) < 0$ 이고, $\left(a + \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}\right)\left(a - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}\right) < 0$ 이다.

$-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} < a < \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}$ 이고, $a^2 < \frac{512}{27} = 18 + \frac{26}{27}$ 이므로 $a \leq 4$ 이다. 조건 (1)에 의해 $a = 4$ 이다.

(ii) $b = 6$ 일 때

$\sqrt{\frac{2(b - 1)}{3}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$ 이다. $f(t) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가질 조건은 $f\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\right) < 0$ 이다.

(i)과 같이 풀면 $-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{10}{3}} < a < \frac{10}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}$ 을 얻는다.

$a^2 < \frac{1000}{27} = 37 + \frac{1}{27}$ 이므로 $a \leq 6$ 이다. 조건 (1)에 의해 $a = 4, 5, 6$ 이다.

(iii) $b = 7$ 일 때

$\sqrt{\frac{2(b - 1)}{3}} = 2$ 이다. $f(t) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가질 조건은 $f(2) \times f(-2) < 0$ 이다.

(i)과 같이 풀면 $-8 < a < 8$ 을 얻는다. 조건 (1)에 의해 $a = 4, 5, 6, 7$ 이다.

따라서 조건 (1), (2)를 모두 만족시키는 점 $A(a, b)$ 의 개수는 $1 + 3 + 4 = 8$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $f\left(\sqrt{\frac{2(b - 1)}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{\frac{2(b - 1)}{3}}\right) < 0$ 일 때 $f(t) = 0$이 서로 다른 세 실근을 가짐을 적음. B: $f'(t) = 0$을 풀어 $t = \pm\sqrt{\frac{2(b - 1)}{3}}$을 구함. C: P에서의 접선과 직선 AP의 수직 조건 $f(t) = t^3 - 2(b - 1)t - 2a = 0$을 구함. D: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	31점

2025학년도 자연계 (KU논술우수자)

문제 1

제시문

[가] 두 각 α, β 의 삼각함수를 이용하여 $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ 의 코사인함수를 나타내면 다음과 같고, 이를 코사인함수의 덧셈정리라고 한다.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

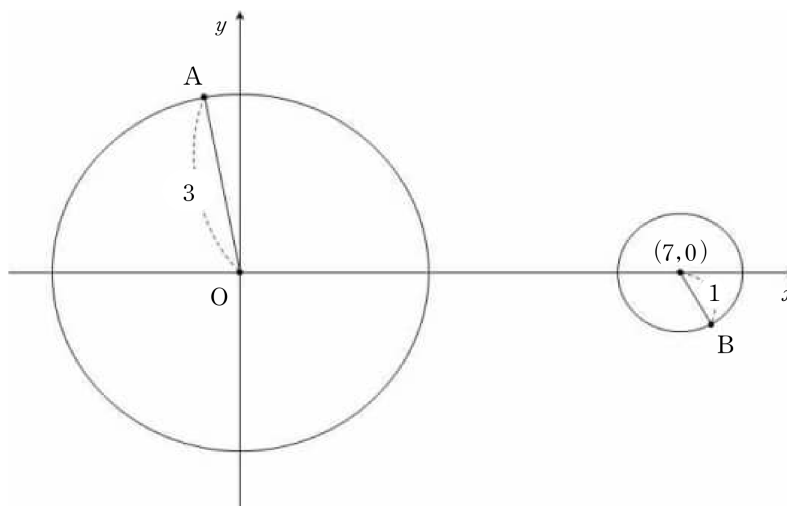
[나] 좌표평면 위에서 점 A는 중심이 원점 O이고 반지름이 3인 원 C를 따라 움직이고, 점 B는 중심이 $(7, 0)$ 이고 반지름이 1인 원을 따라 움직인다. 점 A의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 3 \cos t, y = 3 \sin t$$

이고, 점 B의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x = 7 + \cos 3t, y = \sin 3t$$

이다.



[문제 1] (20점)

(나)에서 $t = 0$ 부터 $t = 2\pi$ 까지 점 A와 B가 움직이는 동안 선분 AB와 원 C가 서로 다른 두 점에서 만나는 t 의 범위를 구하고 풀이과정을 쓰시오.

■ 예시 답안

(답) $\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$

(풀이) 문제의 조건을 만족시키기 위해서는 각 OAB가 예각이 되어야 하므로

$$\overline{AB}^2 + 3^2 > \overline{OB}^2$$

에 해당한다. 이 식에 좌표를 대입하여 쓰면

$$\{3 \cos t - (7 + \cos 3t)\}^2 + (3 \sin t - \sin 3t)^2 + 9 > (7 + \cos 3t)^2 + (\sin 3t)^2$$

이 식을 정리하면, $7 \cos t + \cos t \cos 3t + \sin t \sin 3t < 3$ 이고, 이 부등식의 좌변은 코사인함수의 덧셈정리에 의하여 $7 \cos t + \cos 2t$ 와 같으며,

$$\cos 2t = \cos(t+t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2 \cos^2 t - 1$$

이므로 $7 \cos t + \cos 2t = 2 \cos^2 t + 7 \cos t - 1$ 이다.

부등식 $2 \cos^2 t + 7 \cos t - 1 < 3$ 로부터 $(2 \cos t - 1)(\cos t + 4) < 0$ 을 얻는다.

따라서 $\cos t < \frac{1}{2}$ 이고, t 의 범위는 $\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$ 이다.

■ 채점 기준

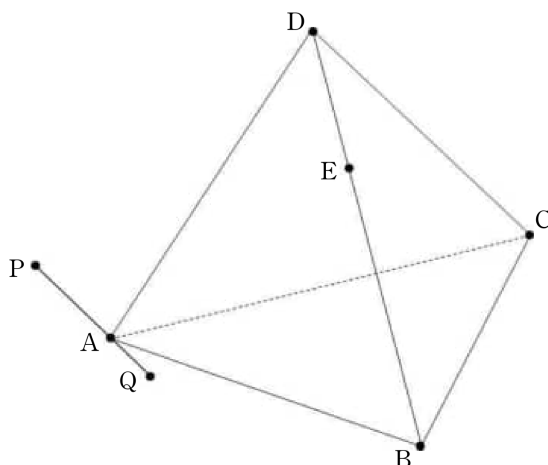
하위 문항	채점 기준	배점
1번	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $\cos t = u$라 두고 풀어 부등식 $u < \frac{1}{2}$ 또는 접하는 경우의 방정식 $u = \frac{1}{2}$을 얻음. B: 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 부등식 $2 \cos^2 t + 7 \cos t - 1 < 3$ 또는 방정식 $2 \cos^2 t + 7 \cos t - 1 = 3$을 얻음. C: 문제의 풀이를 위해 부등식 $\overline{AB}^2 + 3^2 > \overline{OB}^2$ 또는 방정식 $\overline{AB}^2 + 3^2 = \overline{OB}^2$을 t에 대한 식으로 적음. D: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	20점

문제 2

제시문

[가] 두 반평면 α, β 의 교선을 l 이라고 할 때, 두 반평면 α, β 로 이루어진 도형을 이면각이라고 한다. 또 직선 l 을 이면각의 변, 두 반평면 α, β 를 각각 이면각의 면이라고 한다. 직선 l 위의 한 점 O 를 지나고 l 에 수직인 두 반직선 OA, OB 를 두 반평면 α, β 위에 각각 그을 때, $\angle AOB$ 의 크기는 점 O 의 위치에 관계없이 일정하다. 이 각의 크기를 이면각의 크기라고 한다. 서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 이면각 중에서 그 크기가 크지 않은 쪽의 각을 두 평면이 이루는 각이라고 한다.

[나] 그림에서 사면체 $ABCD$ 는 한 모서리의 길이가 6인 정사면체이고, 점 E 는 모서리 BD 위에 있는 점으로 $DE = 2$ 이다. 일정한 길이를 가지는 선분 PQ 는 평면 ABC 위에 있으며 점 A 를 지난다.



[문제 2] (23점)

(나)에서 사면체 $DEPQ$ 의 부피가 최대일 때, 평면 EPQ 와 평면 ABC 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자. $\cos \theta$ 의 값을 구하고 풀이과정을 쓰시오.

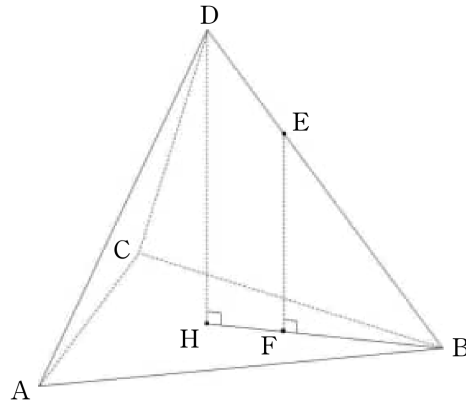
■ 예시 답안

(답) $\frac{\sqrt{15}}{5}$

(풀이) 삼각형 PDE의 넓이는 삼각형 PDB의 넓이의 $\frac{1}{3}$ 이므로

사면체 DEPQ의 부피는 사면체 BDPQ의 부피의 $\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 사면체 DEPQ의 부피가 최대이기 위해서는 사면체 BDPQ의 부피가 최대이어야 한다.



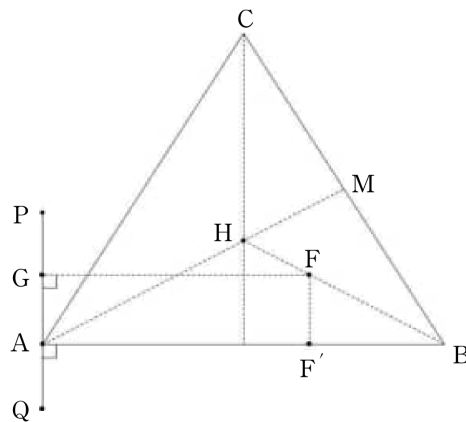
점 D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 H는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

사면체 BDPQ의 부피는 $\frac{1}{3} \times (\text{삼각형 BPQ의 넓이}) \times \overline{DH}$ 이므로

삼각형 BPQ의 넓이가 최대이어야 한다.

이때는 선분 PQ와 선분 AB가 수직일 때이다.



선분 PQ와 선분 AB가 수직이라고 하자. 점 E에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 F, 점 F에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 G라 하면,

삼수선의 정리에 의해 직선 EG와 직선 PQ는 수직으로 만난다.

직각삼각형 EFG에서 θ 는 각 EGF의 크기와 같으므로 $\cos \theta = \frac{\overline{FG}}{\overline{EG}}$ 이다.

$\overline{FG}$ 를 구하자. 점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 F'이라 하면 $\overline{FG} = \overline{AF'} = \overline{AB} - \overline{BF'} = 6 - 3 \times \frac{2}{3} = 4$ 이다.

$\overline{DH}$ 와 $\overline{EF}$ 를 구하자. 삼각형 AHD는 직각삼각형이고 $\overline{AD} = 6$ 이다. 선분 BC의 중점을 M이라고 하면 선분 AM은 점 H를 지나고 $\overline{AH} = \frac{2}{3} \times \overline{AM} = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $\overline{DH} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ 이고,

$\overline{EF} = \frac{2}{3} \times \overline{DH} = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ 이다.

$\overline{EG}$ 를 구하자. 직각삼각형 EFG에서 $\overline{EG} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{\frac{32}{3} + 16} = \sqrt{\frac{80}{3}} = \frac{4\sqrt{15}}{3}$.
 따라서 $\cos \theta = \frac{\overline{FG}}{\overline{EG}} = \frac{4}{\frac{4\sqrt{15}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2번	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 선분 PQ와 선분 AB가 수직일 때 최대임을 적고 $\overline{EG}$ 와 $\overline{FG}$ 를 구함 B+: 선분 PQ와 선분 AB가 수직일 때 최대임을 적고, $\overline{EG}$ 또는 $\overline{FG}$ 를 구함 B: 선분 PQ와 선분 AB가 수직일 때 최대임을 적음. C: $\overline{EG}$ 또는 $\overline{FG}$ 를 구함. D: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	23점

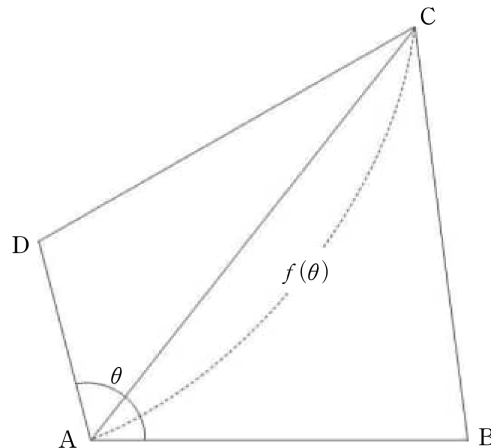
문제 3

제시문

[가] 미분가능한 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

[나] 그림에서 사각형 ABCD의 각 변의 길이가 각각 $\overline{AB} = \sqrt{3}$, $\overline{BC} = 2$, $\overline{CD} = 2$, $\overline{DA} = 1$ 이다. $\angle BAD$ 의 크기가 θ 일 때 대각선 AC의 길이는 θ 의 함수 $f(\theta)$ 이다.



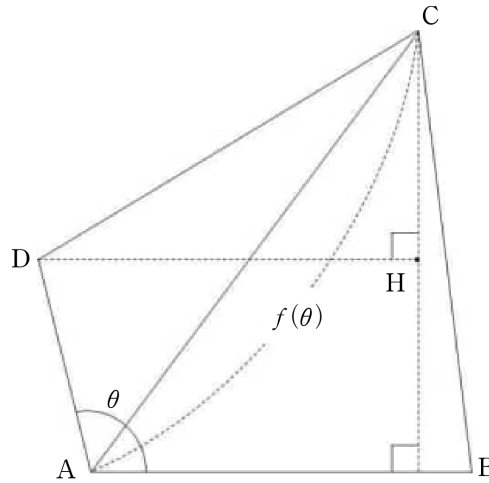
[문제 3] (27점)

(나)에서 미분계수 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 를 구하고 풀이과정을 쓰시오.

■ 예시 답안

(답) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{21}}{7}$

(풀이)



$\angle ABC$ 를 ϕ 라고 하자. 그림의 직각삼각형 CDH에서

$\overline{DH} = |\sqrt{3} - \cos \theta - 2 \cos \phi|$, $\overline{CH} = |2 \sin \phi - \sin \theta|$ 이므로

(1) $4 = (\sqrt{3} - \cos \theta - 2 \cos \phi)^2 + (2 \sin \phi - \sin \theta)^2$

ϕ 를 θ 의 함수로 보고 θ 에 대해 미분하면

(2) $0 = (\sqrt{3} - \cos \theta - 2 \cos \phi)(\sin \theta + 2\phi' \sin \phi) + (2 \sin \phi - \sin \theta)(2\phi' \cos \phi - \cos \theta)$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 이면 $\phi = \frac{\pi}{2}$, $f(\theta) = \sqrt{7}$ 이고 식 (2)는 $0 = \sqrt{3}\left(1 + 2\phi'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 이 된다.

따라서, $\phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

코사인법칙에 따라 $f(\theta)^2 = 4 + 3 - 4\sqrt{3} \cos \phi$.

이 식을 θ 에 대해 미분하면 $2f(\theta)f'(\theta) = 4\sqrt{3}\phi'(\theta) \sin \phi$.

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $f'(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{21}}{7}$.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3번	A+: 답과 풀이가 맞음. A: $\angle ABC$를 ϕ라고 하고 $\phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$을 구한 경우 B+: 식 (1)과 함께 (2)를 구한 경우 B: 식 (1)을 구한 경우 C: $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때 각 변의 길이와 각을 구한 경우 D: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	27점

문제 4

제시문

[가] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(x) \geq 0$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

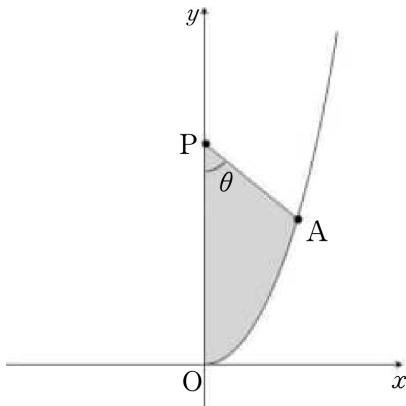
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

[나] [그림 1], [그림 2]와 같이 좌표평면 위에 곡선 $y = x^2$ ($x \geq 0$)과 점 $P(0, 10)$ 이 있다. 점 A와 B는 곡선 위에 있고 $\angle OPA = \theta$ 이다.

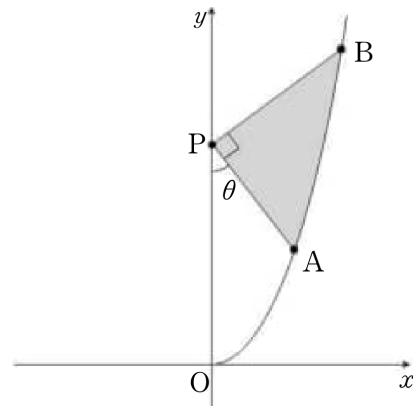
[그림 1]에서 곡선과 선분 OP, 선분 PA로 둘러싸인 도형의 넓이가 $f(\theta)$ 이다.
(단, O는 원점이고 $0 < \theta < \pi$ 이다.)

[그림 2]에서 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 이고 곡선과 선분 PA, 선분 PB로 둘러싸인 도형의 넓이가 $g(\theta)$ 이다.
 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 두 함수 $f(\theta)$ 와 $g(\theta)$ 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$g(\theta) = f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - f(\theta)$$



[그림 1]



[그림 2]

[문제 4] (30점)

- (1) (나)에서 점 A의 x 좌표가 t 일 때, $f'(\theta)$ 를 t 의 식으로 표현하시오.
- (2) (나)에서 $g'(\theta) = 0$ 일 때 점 A, B의 x 좌표를 각각 a, b 라 하자.
이때 $a^2 + b^2, ab, g(\theta)$ 의 값을 모두 구하고 풀이과정을 쓰시오.

■ 예시 답안

(답) (1) $f'(\theta) = \frac{(10-t^2)^2+t^2}{2}$ (2) $a^2+b^2=19, ab=9, g(\theta) = \frac{29}{3}$

(풀이)

(1)

A에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q라 하면

사다리꼴 OPAQ의 넓이 $\frac{t}{2}(10+t^2)$ 에서 x 축과 곡선 사이의 넓이를 뺀 값이

$f(\theta)$ 이다. 따라서

$$f(\theta) = \frac{t}{2}(10+t^2) - \int_0^t x^2 dx = \frac{1}{6}t^3 + 5t.$$

A에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

직각삼각형 APH에서 $\tan \theta = \frac{t}{10-t^2}$ 이다.

t 가 θ 의 함수이므로, 양변을 θ 에 대하여

미분하면 $\sec^2 \theta = \frac{10+t^2}{(10-t^2)^2} \frac{dt}{d\theta}$ 이다.

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \left(\frac{t}{10-t^2} \right)^2 = \frac{(10-t^2)^2+t^2}{(10-t^2)^2} \text{이므로}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{(10-t^2)^2+t^2}{10+t^2}, \quad f'(\theta) = \left(\frac{1}{2}t^2 + 5 \right) \frac{dt}{d\theta} = \frac{(10-t^2)^2+t^2}{2}.$$

(2)

$$f'(\theta) = \frac{(10-a^2)^2+a^2}{2} \text{이고 같은 방법으로 } f'\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{(10-b^2)^2+b^2}{2} \text{이다.}$$

$g'(\theta) = 0$ 일 때 $f'(\theta) = f'\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ 이므로 다음이 성립한다.

$$(*) \quad \frac{(10-b^2)^2+b^2}{2} = \frac{(10-a^2)^2+a^2}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} \{a^2 + (a^2 - 10)^2\} - \{b^2 + (b^2 - 10)^2\} &= a^2 - b^2 + (a^2 - 10)^2 - (b^2 - 10)^2 \\ &= (a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 20) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 19) = 0 \end{aligned}$$

$a^2 \neq b^2$ 이어야 하므로 $a^2 + b^2 = 19$ 를 얻는다.

또한 $\overline{AP}$ 와 $\overline{BP}$ 가 수직이므로

$$(**) \quad \frac{a^2-10}{a} \cdot \frac{b^2-10}{b} = -1 \text{이고 } (a^2-10)(b^2-10) + ab = 0.$$

$$\begin{aligned} (a^2-10)(b^2-10) + ab &= a^2b^2 - 10(a^2+b^2) + 100 + ab \\ &= (ab)^2 - 10 \cdot 19 + 100 + ab = (ab)^2 + ab - 90 = (ab-9)(ab+10) \end{aligned}$$

이로부터 $ab = 9$ 를 얻는다. $a^2 + b^2 = 19$ 와 $ab = 9$ 를

연립하여 풀면 $a+b = \sqrt{37}$ 이고,

$$a = \frac{\sqrt{37}-1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{37}+1}{2}.$$

이때 $b-a = 1$ 이고 $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ba + a^2) = 19 + 9 = 28$ 이다.

이때 $g(\theta)$ 의 값은

$$g(\theta) = \left(\frac{1}{6}b^3 + 5b \right) - \left(\frac{1}{6}a^3 + 5a \right) = \frac{1}{6}(b^3 - a^3) + 5(b-a) = \frac{28}{6} + 5 = \frac{29}{3}.$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4번	A+: 답과 풀이가 맞음. A: a와 b에 대한 관계식 (*)와 (**)를 모두 구함. B+: a와 b에 대한 관계식 (*)와 (**) 중 하나를 구함. C: 문제 (1)의 답이 맞음. ($f'(\theta) = \frac{dt}{d\theta} = \frac{(10-t^2)^2 + t^2}{2}$) D: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	30점

2024학년도 자연계 A · B (KU논술우수자)

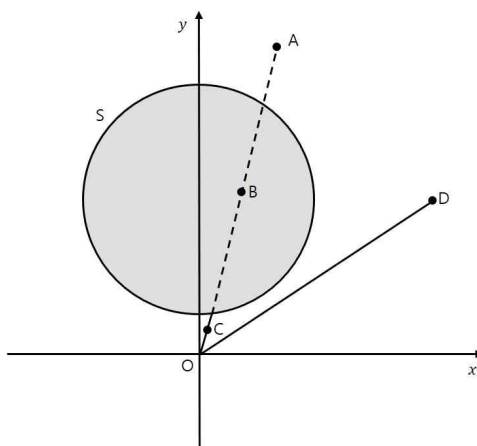
A형 · 문제 1

제시문

[가] $x = a$ 에서 $x = b$ 까지의 곡선 $y = f(x)$ 의 길이 l 은

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

[나] 그림에서 S 는 중심이 점 $\left(0, \frac{\sqrt{13}}{3}\right)$ 이고 반지름이 1인 원이다. 원점에서 바라볼 때 점 A, B는 원 S 에 가려져서 보이지 않고 점 C, D는 보인다.



[문제 1] (나)에서 원점에서 제 1사분면의 곡선 $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ 위에 있는 점들을 바라볼 때, 원 S 에 의해서 가려지지 않고 보이는 점들로 이루어진 곡선 $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ 의 부분의 길이를 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [15점]

■ 예시 답안

[문제 1번] 답 : $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$

[풀이]

원의 접선 $y = mx$ 에서 원의 중심 $\left(0, \frac{\sqrt{13}}{3}\right)$ 까지의 거리는 원의 반지름과 같으므로 $\frac{\left|\frac{\sqrt{13}}{3}\right|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$ 이고 제 1사분면에서 만나므로 $m = \frac{2}{3}$ 이다.

접선과 곡선의 교점은

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x} \text{로부터 } x^2 = 1 \text{ 또는 } 3 \text{이다.}$$

교점은 제 1사분면에 있으므로 2개이고, 두 교점의 x 좌표는 각각 1, $\sqrt{3}$ 이다.

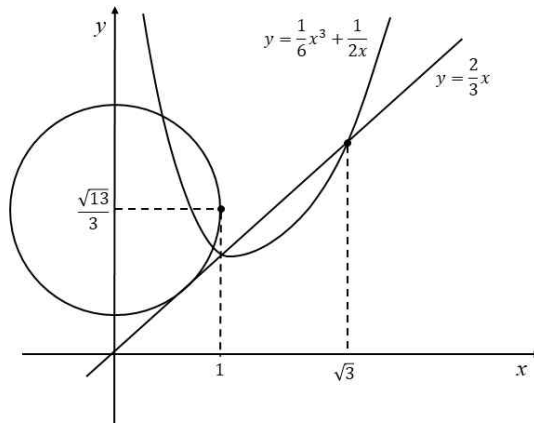
곡선 $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ 에서 $y' = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}$ 이다.

따라서 $x = 1$ 에서 극값을 갖고, $0 < x < 1$ 에서 $y' < 0$, $x > 1$ 에서 $y' > 0$ 이다.

따라서 제 1사분면에서 곡선 $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ 은 $0 < x < 1$ 에서 감소하고 $x > 1$ 에서 증가하며 $x = 1$ 에서 최솟값 $\frac{2}{3}$ 를 갖는다.

원 위의 점의 x 좌표의 최댓값은 1이고 $x = 1$ 일 때 원 위의 점의 좌표는 $\left(1, \frac{\sqrt{13}}{3}\right)$ 이다.

따라서 점 $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ 는 원 밖의 점이다.



따라서 $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ 일 때 곡선이 보인다. 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}\right)^2} dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2x}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: 곡선의 보이는 부분을 정확하게 구함. B: 접선과 곡선의 교점의 x좌표 $1, \sqrt{3}$를 구함. C: 접선의 기울기 $\frac{2}{3}$를 구함. D: 접선의 기울기를 틀리게 구함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	15

A형 · 문제 2

제시문

[가] n 개 중에서 서로 같은 것이 각각 p 개, q 개, ..., r 개씩 있을 때, n 개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p! \times q! \times \dots \times r!} \quad (\text{단, } p + q + \dots + r = n)$$

[나] [조건 1] 또는 [조건 2]를 만족하도록 문자 A 3개, B 4개, C 3개, D 2개로 이루어진 12개의 문자 A, A, A, B, B, B, B, C, C, C, D, D를 왼쪽부터 일렬로 나열하자.

[조건 1] 문자 D는 연속하여 나오지 않는다. 예를 들어, ABBCADABBCCD는 [조건 1]을 만족하고, ABBCADDABBCC는 [조건 1]을 만족하지 않는다.

[조건 2] 처음 나오는 문자 A가 처음 나오는 문자 B보다 먼저 나온다. 예를 들어, CDACBBBBBAACD는 [조건 2]를 만족하고, CDBAAABBBBCDC는 [조건 2]를 만족하지 않는다.

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. [20점]

- (1) (나)에서 [조건 1]을 만족하도록 나열하는 방법의 수를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.
- (2) (나)에서 [조건 2]를 만족하도록 나열하는 방법의 수를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

■ 예시 답안

[문제 2번] 답 : (1) 231,000, (2) 118,800

[풀이]

(1)

먼저 D가 연속하여 나타나는 경우의 수를 구한다. 이 경우 DD를 하나로 생각하면 D가 연속으로 나타나게 배열하는 방법의 수는 모두 $\frac{11!}{3! \times 4! \times 3! \times 1!}$ 이다.

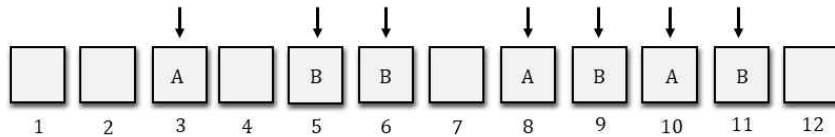
따라서 문자 D가 연속하여 나타나지 않는 경우의 수는

$$\frac{12!}{3! \times 4! \times 3! \times 2!} - \frac{11!}{3! \times 4! \times 3! \times 1!} = \frac{5 \times 11!}{3! \times 4! \times 3!} = 231,000$$

(2)

다음과 같이 1단계, 2단계, 3단계로 분석하여 각 단계별 경우의 수를 구한다.

(1단계) 먼저 12자리 중 문자 A와 B의 위치를 결정한다. A와 B가 총 7개이므로 12개의 자리에서 7자리를 택하는 방법의 수는 ${}_{12}C_7$ 이다.



(2단계) 선택된 7자리에 문자 A와 B를 배치하는 방법의 수를 구한다.

문자 A와 B의 위치가 결정되었을 때, 선택된 7자리 중 가장 왼쪽에 위치한 자리는 문자 A를 놓고 나머지 6자리에 2개의 문자 A와 4개의 문자 B를 배치하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2! \times 4!}$ 이다.

(3단계) 남은 자리 5개에 문자 C와 D를 배치한다. 문자 C가 3개, 문자 D가 2개이므로 $\frac{5!}{3! \times 2!}$ 가지의 경우가 있다.

따라서 1단계, 2단계, 3단계에 의해 [조건 2]를 만족하면서 A, B, C, D를 배열하는 방법의 수는

$${}_{12}C_7 \times \frac{6!}{2! \times 4!} \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 118,800$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2	A+: (1)과 (2)의 답과 풀이가 맞음. A: (1)과 (2)의 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: (1)의 답과 풀이가 맞고, (2)의 1단계를 맞게 구함. 또한 (2)의 2단계 또는 3단계를 맞게 구함. B: (1)의 답과 풀이가 맞고, (2)의 1단계를 맞게 구함. C: (1)의 답과 풀이가 맞음. D: (1)의 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	20

A형 · 문제 3

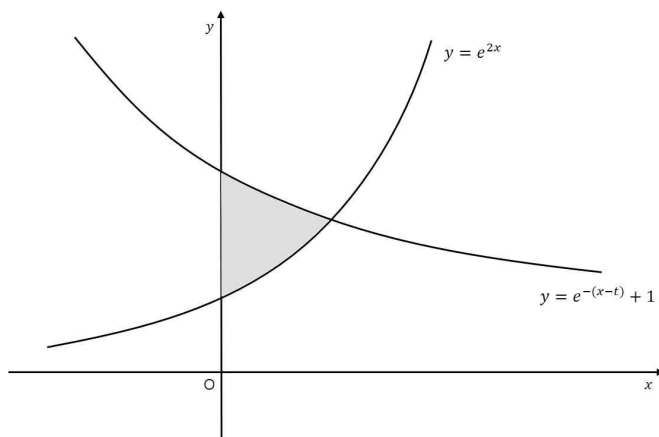
제시문

[가] 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 와 두 직선 $x = a$, $x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

이다.

[나] 그림에서 색칠된 도형은 두 곡선 $y = e^{2x}$, $y = e^{-(x-t)} + 1$ 과 y 축으로 둘러싸인 도형이고, $S(t)$ 는 이 도형의 넓이다. (t 는 양의 실수)

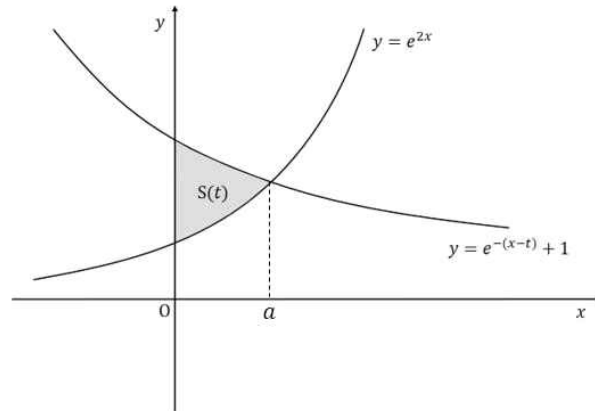


[문제 3] (나)에서 $t = \ln 6$ 에서의 미분계수 $S'(\ln 6)$ 를 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [30점]

■ 예시 답안

[문제 3번] 답 : 3

[풀이]



두 곡선의 교점의 x 좌표를 a 라 하자. 즉, $e^{2a} = e^{-(a-t)} + 1$ 이다.

그러면, $S(t) = \int_0^a (e^{-(x-t)} + 1 - e^{2x}) dx = -e^{-(a-t)} + a - \frac{1}{2}e^{2a} + e^t + \frac{1}{2}$ 이다.

t 에 대해 미분하면,

$$S'(t) = -e^{-(a-t)} \left(1 - \frac{da}{dt}\right) + \frac{da}{dt} - e^{2a} \frac{da}{dt} + e^t = (e^{-(a-t)} + 1 - e^{2a}) \frac{da}{dt} - e^{-(a-t)} + e^t$$

$e^{2a} = e^{-(a-t)} + 1$ 이므로, $S'(t) = -e^{-(a-t)} + e^t$ 이다.

$t = \ln 6$ 일 때 $e^{2a} = 6e^{-a} + 1$ 이고, 따라서 $e^{3a} - e^a - 6 = 0$ 이다.

$b = e^a$ 라 하면, $b^3 - b - 6 = 0$ 이다. 따라서 $(b-2)(b^2 + 2b + 3) = 0$ 이고, $b = 2$ 를 얻는다.

$e^a = b = 2$ 이므로, $t = \ln 6$ 일 때 $a = \ln 2$ 이다.

따라서 $S'(\ln 6) = -e^t e^{-a} + e^t = -6 \times \frac{1}{2} + 6 = 3$ 이다.

■ 채점 기준

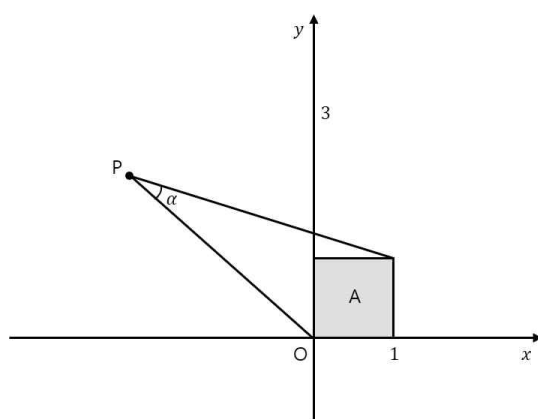
하위 문항	채점 기준	배점
3	A+: 정답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $S'(t) = -e^{-(a-t)} + e^t$와 $t = \ln 6$일 때 $a = \ln 2$임을 구함. B: $S'(t) = -e^{-(a-t)} + e^t$를 구함. $t = \ln 6$일 때 a의 값을 구하였으나 틀림. C: $S'(t) = -e^{-(a-t)} + e^t$를 구함. D: $S(t)$의 식을 맞게 구함. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	30

A형 · 문제 4

제시문

[가] 좌표평면 위에서 x 축의 양의 방향을 시초선으로 잡았을 때, 일반각 θ 를 나타내는 동경과 원점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 원의 교점을 $P(x, y)$ 라 하면 $\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x} (x \neq 0)$ 의 값은 r 의 값과 관계없이 θ 의 값에 따라 각각 하나로 정해진다. 이 함수를 차례로 θ 에 대한 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하고, 기호를 각각 $\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}, \tan \theta = \frac{y}{x} (x \neq 0)$ 로 정의하고, 이 함수들을 통틀어 θ 에 대한 삼각함수라 한다.

[나] 그림에서 도형 A는 네 점 $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ 이 꼭짓점인 정사각형이다. 점 P는 제 2사분면의 점으로 중심이 원점이고 반지름이 3인 원 위에 있다. α 는 점 P에서 A를 바라본 각의 크기이다.



[문제 4] (나)에서 $\cos \alpha$ 가 최소가 될 때의 점 P의 좌표와 $\cos \alpha$ 를 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [35점]

■ 예시 답안

[문제 4번] 답 : $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$, 점 P의 좌표: $\left(1 - \frac{\sqrt{14}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$

[풀이]

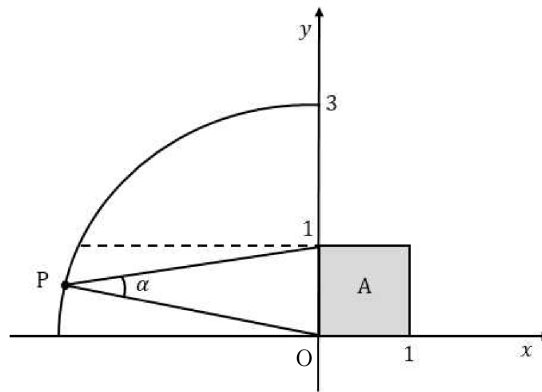
다음의 두 가지 경우로 나누어서 푼다.

(1) 점 P의 y좌표가 1보다 작거나 같을 때:

점 P에서 점 (0, 1)까지의 거리를 d 라 하자. (단, $d > 0$)

코사인법칙을 이용하면

$$\cos \alpha = \frac{9 + d^2 - 1}{6d} = \frac{4}{3d} + \frac{d}{6} \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

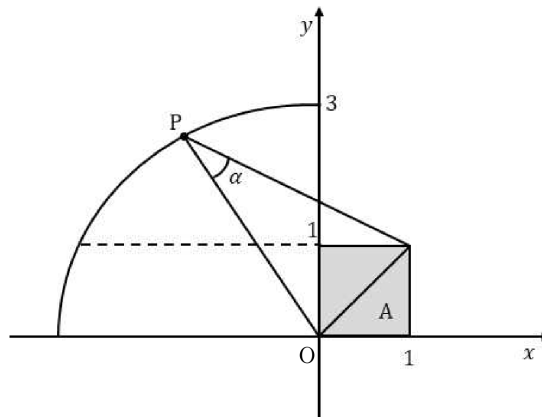


(2) 점 P의 y좌표가 1보다 클 때:

점 P에서 점 (1, 1)까지의 거리를 d 라 하자. (단, $d > 0$)

코사인법칙을 이용하면

$$\cos \alpha = \frac{9 + d^2 - 2}{6d} = \frac{7}{6d} + \frac{d}{6} \geq \frac{\sqrt{7}}{3}$$



(1), (2)에 의하여 $\cos \alpha$ 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{7}}{3}$ 이다.

등호는 $\frac{7}{6d} = \frac{d}{6}$ 일 때 성립하고, 이때 $d = \sqrt{7}$ 이다. 점 (1, 1)을 Q라 하고 $d = \sqrt{7}$ 일 때 각 POQ의 크기를 θ 라 하자.

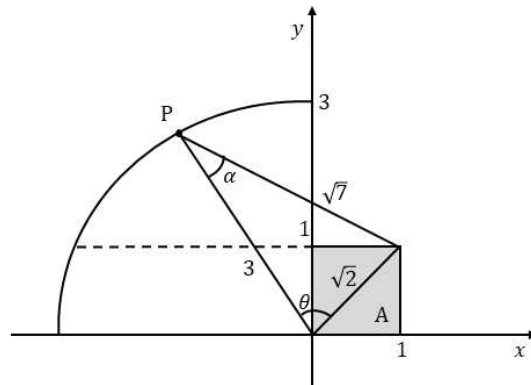
$\cos \theta = \frac{9 + 2 - 7}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 이고, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$ 이다.

점 P의 x좌표는

$$3 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 3\left(\cos \theta \cos \frac{\pi}{4} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2} \text{이다.}$$

점 P의 y 좌표는

$$3 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 3\left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2} \text{이다.}$$



■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4	A+: 답과 풀이가 모두 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $\cos \alpha$의 최솟값을 맞게 구함. B: (1) 또는 (2) 경우의 $\cos \alpha$의 최솟값을 맞게 구함. C: $\cos \alpha$를 코사인법칙을 이용하여 구함. D: 점 P의 y좌표에 따라 두 가지 경우로 나눔. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	35

B형 · 문제 1

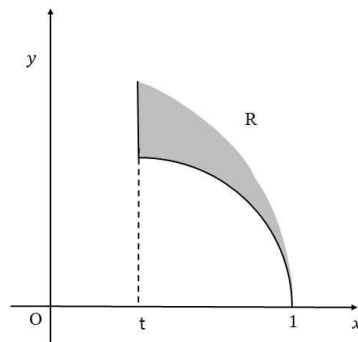
제시문

제시문 1

(가) 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 갖고 a 를 포함하는 어떤 열린구간에서 미분가능하면 $f'(a) = 0$ 이 성립한다.

(나) 그림에서 색칠된 도형 R는 제 1사분면에 있고 다음 곡선들로 둘러싸여 있다.

$$x = t, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad (x - t)^2 + y^2 = (1 - t)^2$$



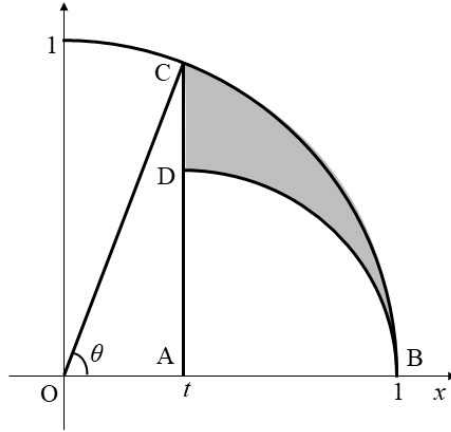
[문제 1] (나)에서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때의 도형 R의 넓이를 구하고, 도형 R의 넓이가 최대가 될 때의 t 의 값을 구하시오. 풀이 과정도 쓰시오. [15점]

■ 예시 답안

답 : $t = \frac{1}{2}$ 일 때의 R의 넓이는 $\frac{5\pi}{48} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ 이고,

R의 넓이가 최대가 될 때의 t 의 값은 $\frac{\pi^2 - 4}{\pi^2 + 4}$ 이다.

풀이



A($t, 0$), B(1, 0)이라 하고 $x = t$ 가 큰 원 및 작은 원과 만나는 점을 각각 C, D라 하자.
각 AOC의 크기를 θ 라 하자. 도형 R의 넓이를 $f(t)$ 라 하자.

R의 넓이를 적분으로 표현하면

$$f(t) = \int_t^1 \sqrt{1-x^2} dx - \frac{\pi}{4}(1-t)^2 = - \int_1^t \sqrt{1-x^2} dx - \frac{\pi}{4}(1-t)^2 \quad (1)$$

$x = \cos \theta$ 로 치환하여 적분을 풀어서 $f(t) = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} - \frac{\pi}{4}(1-t)^2$ 를 얻는다.

$t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} \frac{1}{4} = \frac{5\pi}{48} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 R의 넓이는 $\frac{5\pi}{48} - \frac{\sqrt{3}}{8}$ 이다.

(1)을 미분하여 $f'(t) = -\sqrt{1-t^2} + \frac{\pi}{2}(1-t)$.

$$f'(t) = 0 \text{으로부터 } \sqrt{1-t^2} = \frac{\pi}{2}(1-t)$$

양변을 제곱하여 얻은 $1+t = \frac{\pi^2}{4}(1-t)$ 을 풀면 $t = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2 + 4}$ 에서 극값을 가진다.

$0 \leq t \leq \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2 + 4}$ 일 때 $f'(t) \geq 0$ 이므로 $f(t)$ 는 증가

$\frac{\pi^2 - 4}{\pi^2 + 4} \leq t \leq 1$ 일 때 $f'(t) \leq 0$ 이므로 $f(t)$ 는 감소

그러므로 $t = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2 + 4}$ 에서 R의 넓이가 최대가 된다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: 극값 구함 B: $f(t)$ 와 미분을 맞게 구함 C: $f(t)$를 맞게 구함. D: $t = \frac{1}{2}$ 일 때 R을 구함. E: 풀이와 관계있는 의미 있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	15점

B형 · 문제 2

제시문

제시문 2

(가) n 개 중에서 서로 같은 것이 각각 p 개, q 개, ..., r 개씩 있을 때, n 개를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p! \times q! \times \dots \times r!} \quad (\text{단, } p + q + \dots + r = n)$$

(나) [조건 1] 또는 [조건 2]를 만족하도록 문자 A 3개, B 5개, C 3개로 이루어진 11개의 문자 A, A, A, B, B, B, B, B, C, C, C를 왼쪽부터 일렬로 나열하자.

[조건 1] 문자 C 바로 다음에는 항상 문자 B가 이웃하여 나온다.

예를 들어, ACBBCBCBABA는 [조건 1]을 만족하고, ACBBCBCABBA는 [조건 1]을 만족하지 않는다.

[조건 2] 문자 A 바로 다음에는 문자 B가 이웃하여 나오지 않는다.

예를 들어, BACBACBBCBA는 [조건 2]를 만족하고, BACBACABBCB는 [조건 2]를 만족하지 않는다.

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. [20점]

- (1) (나)에서 [조건 1]을 만족하도록 나열하는 방법의 수를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.
- (2) (나)에서 [조건 2]를 만족하도록 나열하는 방법의 수를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

■ 예시 답안

답 : (1) 560, (2) 1120

(1)

CB를 하나의 문자로 취급하면, A 3개, (CB) 3개, B 2개로 총 8개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{8!}{3!3!2!} = 560$ 이다.

(2)

1단계: A 3개와 C 3개를 일렬로 나열한 다음, 조건2를 만족하도록 B를 배치할 위치를 결정하면 된다.

먼저 $\boxed{A} \boxed{C} \boxed{A} \boxed{C} \boxed{C} \boxed{A}$ 처럼 A 3개와 C 3개를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $\frac{6!}{3!3!}$ 이다.

2단계:

이제, 아래와 같은 7개의 * 위치에 조건을 만족하도록 5개의 B의 위치를 결정해야 한다.

* $\boxed{A}$ * $\boxed{C}$ * $\boxed{A}$ * $\boxed{C}$ * $\boxed{C}$ * $\boxed{A}$ *

7개의 *가 표시된 자리 중, A 바로 다음 자리 3자리는 제외하고 남은 4개의 * 자리에 B 5개를 배치한다.

* $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ * $\boxed{A}$ $\boxed{C}$ * $\boxed{C}$ * $\boxed{A}$

첫 번째 * 자리에 들어가는 B의 개수를 x_1 ,

두 번째 * 자리에 들어가는 B의 개수를 x_2 ,

세 번째 * 자리에 들어가는 B의 개수를 x_3 ,

네 번째 * 자리에 들어가는 B의 개수를 x_4

라고 할 때 B의 개수가 5개이므로 다음 방정식을 만족한다.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

따라서 방정식의 음이 아닌 정수 해의 개수는 ${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5$ 이므로 조건을 만족하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{3!3!} \times {}_8C_5 = \frac{6!}{3!3!} \times \frac{8!}{3!5!} = 1120$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$와 같이 B의 위치에 대한 경우의 수를 중복조합으로 표현함. B: (1)의 답과 풀이가 맞고 1단계를 구함. C: (1)의 답과 풀이가 맞게 구함 D: (1)의 풀이가 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음 E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	20점

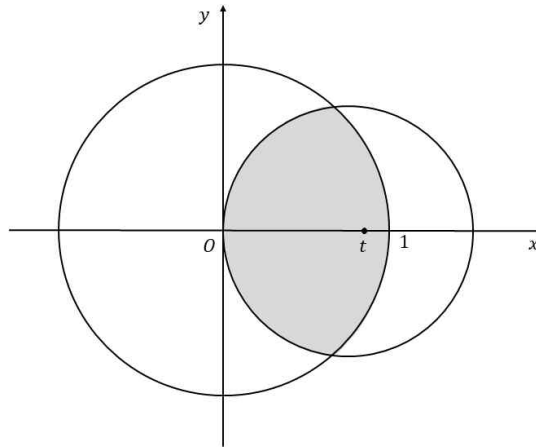
B형 · 문제 3

제시문

제시문 3

(가) 반지름의 길이가 r 이고 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$ 이다.

(나) 그림에서 한 원은 중심이 원점이고 반지름이 1이며, 다른 원은 중심이 점 $(t, 0)$ 이고 반지름이 t 이다. 두 원의 내부의 공통 부분의 넓이가 $S(t)$ 이다.

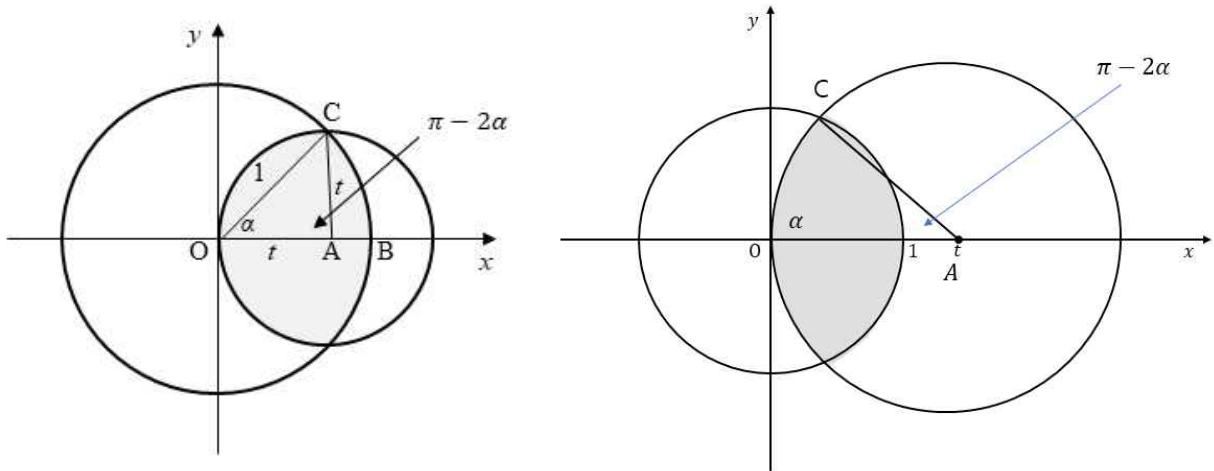


[문제 3] (나)에서 $t = 1$ 에서의 미분계수 $S'(1)$ 의 값을 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [30점]

■ 예시 답안

답 : $S'(1) = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$

풀이



$A(t, 0)$, $B(1, 0)$ 이라 하고 두 원의 교점을 C 라 하자.

$\angle AOC = \alpha$ 라 하면 $\angle OAC = \pi - 2\alpha$ 이다.

($0 < t \leq 1$ 일 때는 왼쪽 그림, $t \geq 1$ 일 때는 오른쪽 그림 참조)

중심이 O 이고 반지름이 1인 부채꼴 OBC 의 넓이를 S_1 이라 하고,

중심이 A 이고 반지름이 t 인 부채꼴 AOC 의 넓이를 S_2 라 하고,

삼각형 OAC 의 넓이를 S_3 라 하면,

$$\begin{aligned} S(t) &= 2(S_1 + S_2 - S_3) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}t^2(\pi - 2\alpha) - \frac{1}{2}t \sin \alpha\right) = \alpha + t^2(\pi - 2\alpha) - t \sin \alpha \end{aligned}$$

$$S'(t) = \frac{d\alpha}{dt} + 2t(\pi - 2\alpha) + t^2\left(-2\frac{d\alpha}{dt}\right) - \sin \alpha - t \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

삼각형 OAC 에서 코사인법칙을 적용하면 $\cos \alpha = \frac{1 + t^2 - 1}{2 \cdot 1 \cdot t} = \frac{1}{2t}$

양변을 미분하면 $-\sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{2t^2}$

$t = 1$ 일 때, 삼각형 OAC 는 정삼각형이므로 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} S'(1) &= \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) - 2\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $t = 1$일 때 $\frac{d\alpha}{dt}$가 맞음. B: $S'(t)$를 맞음. C: $S(t) = 2(S_1 + S_2 - S_3)$를 구함. D: $S(t)$를 구하는 식이 맞았으나 사소한 실수가 있음. E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	30점

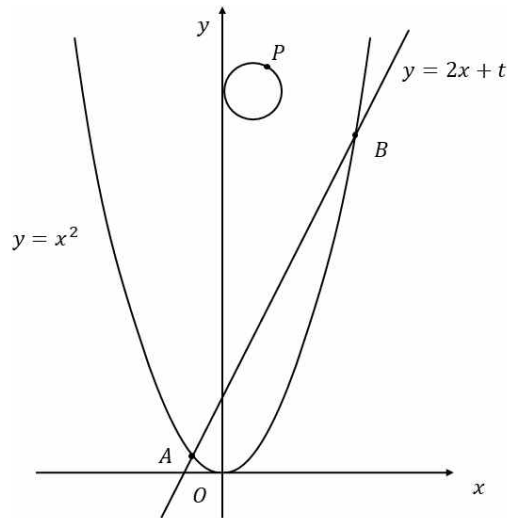
B형 · 문제 4

제시문

제시문 4

(가) 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(나) 그림에서 점 P는 중심이 점 $(1, 8)$ 이고 반지름이 1인 원 위에 있다. 점 A와 점 B는 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 2x + t$ 의 교점으로 점 A는 제 2사분면에 점 B는 제 1사분면에 있다. (t 는 양의 실수)



[문제 4] (나)에서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 될 때의 점 A의 좌표를 구하고 풀이 과정을 쓰시오. [35점]

■ 예시 답안

답 : $A\left(\frac{2-\sqrt{14}}{2}, \frac{9-2\sqrt{14}}{2}\right)$

풀이

좌표를 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $P(x, y)$ 라 하자.

a 와 b 는 $x^2 = 2x + t$ 즉 $x^2 - 2x - t = 0$ 의 근이므로 근과 계수의 관계에서 다음이 성립한다.

$$a + b = 2$$

$$ab = -t$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 4 + 2t = 2(t + 2)$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 4(t + 2)^2 - 2t^2 = 2t^2 + 16t + 16$$

이를 이용하여 $\overline{AP^2} + \overline{BP^2}$ 을 계산하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\overline{AP^2} + \overline{BP^2}$$

$$= (x - a)^2 + (y - a^2)^2 + (x - b)^2 + (y - b^2)^2$$

$$= 2x^2 - 2(a + b)x + (a^2 + b^2) + 2y^2 - 2(a^2 + b^2)y + (a^4 + b^4)$$

$$= 2x^2 - 4x + 2(t + 2) + 2y^2 - 4(t + 2)y + (2t^2 + 16t + 16)$$

$$= 2x^2 - 4x + 2 + 2y^2 - 4(t + 2)y + 2(t + 2)^2 + 2(t + 1) + (8t + 8)$$

$$= 2(x - 1)^2 + 2(y - t - 2)^2 + 10(t + 1)$$

$M(1, t + 2)$ 에 대하여 $\overline{MP^2} = (x - 1)^2 + (y - t - 2)^2$ 이므로

$$\overline{AP^2} + \overline{BP^2} = 2\overline{MP^2} + 10(t + 1).$$

또한 $\overline{MP}$ 는 M 에서 원 $(x - 1)^2 + (y - 8)^2 = 1$ 위의 점 P 에 이르는 거리이다.

그런데 점 $M(1, t + 2)$ 와 원의 중심이 모두 $x = 1$ 위에 있으므로

M 에 가장 가까운 원 위의 점은 $t + 2 \leq 8$ 일 때는 $P(1, 7)$ 이고,

$t + 2 \geq 8$ 일 때는 $P(1, 9)$ 이다.

$$\text{이때 } \overline{MP} = \begin{cases} 0 < t \leq 6 \text{ 일 때, } |(t + 2) - 7| = |t - 5| \\ t \geq 6 \text{ 일 때, } |(t + 2) - 9| = |t - 7| \end{cases}$$

$$\overline{AP^2} + \overline{BP^2} = 2\overline{MP^2} + 10(t + 1) \text{로부터}$$

$0 < t \leq 6$ 일 때,

$$\overline{AP^2} + \overline{BP^2} = 2(t - 5)^2 + 10(t + 1) = 2t^2 - 10t + 60 = 2\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + 60 - \frac{25}{2}$$

$t \geq 6$ 일 때,

$$\overline{AP^2} + \overline{BP^2} = 2(t - 7)^2 + 10(t + 1) = 2t^2 - 18t + 108 = 2\left(t - \frac{9}{2}\right)^2 + 108 - \frac{81}{2}$$

따라서 $t = \frac{5}{2}$ 일 때 $\overline{AP^2} + \overline{BP^2}$ 이 최소가 된다.

이때 A 의 좌표는 $x^2 - 2x - \frac{5}{2} = 0$ 으로부터 $x = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{2}$, $y = 2x + \frac{5}{2} = \frac{9 \pm 2\sqrt{14}}{2}$ 이다.

점 A 는 제 2사분면의 점이므로 $\left(\frac{2 - \sqrt{14}}{2}, \frac{9 - 2\sqrt{14}}{2}\right)$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4	A+: 답과 풀이가 맞음. A: 풀이가 모두 맞았으나 사소한 계산 실수가 있음. B+: $(1, 7)$ 또는 $(1, 9)$를 구하거나 $x = 1$ 위에 P가 있음을 구함 B: $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$를 맞게 구함 C: $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$를 구하였으나 사소한 실수가 있음. D: 근과 계수를 언급 E: 풀이와 관계있는 의미있는 시도를 함. F: 답안이 공란이거나 문제와 관련 없는 내용을 적음.	35점

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다