

고려대논술

자연계

목차

2026학년도 자연계열	3
오전 · 문제 1	3
오전 · 문제 2	5
오전 · 문제 3	8
오전 · 문제 4	11
오후 · 문제 1	13
오후 · 문제 2	16
오후 · 문제 3	18
오후 · 문제 4	20
 2025학년도 자연계열	 22
오전 · 문제 1	22
오전 · 문제 2	25
오전 · 문제 3	27
오전 · 문제 4	29
오후 · 문제 1	31
오후 · 문제 2	33
오후 · 문제 3	35
오후 · 문제 4	37

2026학년도 자연계열

오전 · 문제 1

문제 1. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

제시문

모든 항이 양수인 두 수열 a_n 과 b_n 은 다음 조건을 만족한다.

(가) $y = x^2$ 과 $y = a_n x + 1$ 로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\frac{n}{6}$ 이다. (단, n 은 10보다 큰 자연수이다.)

(나) $y = x^2$ 과 $y = b_n x + 1$ 의 두 교점 사이의 거리는 n 이다. (단, n 은 10보다 큰 자연수이다.)

- 1-1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\sqrt[3]{n^2}}$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)
- 1-2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \times (a_{n+1}^2 - a_n^2)$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)
- 1-3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{n}$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

■ 예시 답안

1-1)

$y = x^2$ 과 $y = a_n x + 1$ 의 교점의 x 좌표를 α_n 과 β_n 이라고 하자. (단, $\alpha_n < \beta_n$)

α_n 과 β_n 은 이차방정식 $x^2 - a_n x - 1 = 0$ 의 두 근이므로, 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha_n + \beta_n = a_n$ 와 $\alpha_n \beta_n = -1$ 을 얻는다.

또한, (가)의 조건으로부터 $\int_{\alpha_n}^{\beta_n} (a_n x + 1 - x^2) dx = \frac{n}{6}$ 이므로,

$$\frac{a_n}{2}(\beta_n^2 - \alpha_n^2) + (\beta_n - \alpha_n) - \frac{1}{3}(\beta_n^3 - \alpha_n^3) = \frac{n}{6}$$

을 얻는다.

따라서, 인수분해를 하면,

$$\frac{a_n}{2}(\beta_n - \alpha_n)(\beta_n + \alpha_n) + (\beta_n - \alpha_n) - \frac{1}{3}(\beta_n - \alpha_n)(\beta_n^2 + \beta_n \alpha_n + \alpha_n^2) = \frac{n}{6}$$

또는 $\frac{1}{6}(\beta_n - \alpha_n)^3 = \frac{n}{6}$ 을 얻는다.

이제, $\alpha_n + \beta_n = a_n$ 과 $\alpha_n \beta_n = -1$ 을 적용하면, $\beta_n - \alpha_n = \sqrt{a_n^2 + 4}$ 임을 얻을 수 있고, $a_n^2 + 4 = \sqrt[3]{n^2}$ 가 된다. 이를 풀면 $a_n = (\sqrt[3]{n^2} - 4)^{1/2}$ 을 얻을 수 있고, $\frac{a_n^2}{\sqrt[3]{n^2}} = \frac{\sqrt[3]{n^2} - 4}{\sqrt[3]{n^2}}$ 이다. 따라서, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{\sqrt[3]{n^2}} = 1$ 이다.

1-2)

1-1)에서 구한 $a_n = (\sqrt[3]{n^2} - 4)^{1/2}$ 와

$b - a = (b^{1/3} - a^{1/3})(b^{2/3} + b^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3})$ 을 이용하면,

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^{4/3} + (n(n+1))^{2/3} + n^{4/3}}$$

이 된다.

따라서,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \times (a_{n+1}^2 - a_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}(2n+1)}{(n+1)^{4/3} + (n(n+1))^{2/3} + n^{4/3}} = \frac{2}{3}.$$

1-3)

$y = x^2$ 과 $y = b_n x + 1$ 의 교점의 x 좌표를 α_n 과 β_n 이라고 하자. (단, $\alpha_n < \beta_n$) 그러면, α_n 과 β_n 은 $x^2 - b_n x - 1 = 0$ 의 두 근이 되므로 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha_n + \beta_n = b_n$ 와 $\alpha_n \beta_n = -1$ 을 얻는다. 또한, (나)의 조건으로부터 $(\beta_n - \alpha_n)^2 + (\beta_n^2 - \alpha_n^2)^2 = n^2$ 이므로, 인수분해 공식을 활용하여 $(\beta_n - \alpha_n)^2 \{1 + (\beta_n + \alpha_n)^2\} = n^2$ 을 얻는다. 이제, $\alpha_n + \beta_n = b_n$ 과 $\alpha_n \beta_n = -1$ 을 대입하면, $(b_n^2 + 4)(b_n^2 + 1) = n^2$ 를 얻을 수 있다.

따라서, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{n} = 1$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
1-1	• 근과 계수와의 관계를 이용하여 a_n 을 구하고, 극한값을 계산하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
1-2	• 문항 1-1)에서 얻은 a_n 을 이용하여, $a_{n+1}^2 - a_n^2$ 을 구하고, 극한값을 계산하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
1-3	• 근과 계수와의 관계를 이용하여 b_n 을 구하고, 극한값을 계산하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함

오전 · 문제 2

문제 2. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

제시문

두 이차함수 $g(x) = -x^2 + ax + b$ 와 $h(x) = x^2 + cx + d$ 에 대하여, 함수

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}g(x) - 1 & (x \geq 0) \\ h(x) & (x < 0) \end{cases}$$

는 다음 조건을 만족한다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \int_{-1}^x f(t) dt + \frac{1}{6x} \right) = 0$

참고로, 양수 x 에 대하여 $4e^{\frac{x}{4}} \geq x$ 을 이용하면, $e^x \geq \left(\frac{x}{4}\right)^4$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ 이 된다.

2-1) 두 이차함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

2-2) 곡선 $y = f(x)$ 위의 서로 다른 세 점에서의 접선이 점 $(0, k)$ 를 지나는 k 값의 범위를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

2-3) $g(x) - h(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자 (단, $\beta > \alpha$). 함수 $F(x) = \int_x^{x+(\beta-\alpha)} |g(t) - h(t)| dt$ 가 $x = x_0$ 에서 최솟값을 가질 때, x_0 와 최솟값 $F(x_0)$ 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

■ 예시 답안

2-1)

두 이차함수 g 와 h 는 $g(x) = -x^2 + ax + b$ 와 $h(x) = x^2 + cx + d$ 이다.

먼저, 조건 (나)로부터

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{1}{x} \int_{-1}^x f(t) dt + \frac{1}{6x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \int_{-1}^x h(t) dt + \frac{1}{6x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-1}^x h(t) dt + \frac{1}{6}}{x} = 0$$

을 얻고, 이 극한의 수렴성으로부터 $0 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^x h(t) dt + \frac{1}{6} \right) = \int_{-1}^0 h(t) dt + \frac{1}{6}$ 을 얻는다. 이로부터, $\int_{-1}^0 h(t) dt = -\frac{1}{6}$ 그리고 $\frac{1}{3} - \frac{c}{2} + d + \frac{1}{6} = 0$ 이 된다.

또한, 미분계수의 정의에 의해

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \int_{-1}^x h(t) dt + \frac{1}{6x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\int_0^x h(t) dt + \int_{-1}^0 h(t) dt + \frac{1}{6}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x h(t) dt}{x} = h(0) = 0 \end{aligned}$$

을 얻는다. 이로부터, $d = 0$ 을 얻는다. 앞에서 구한 $\frac{1}{3} - \frac{c}{2} + d + \frac{1}{6} = 0$ 을 이용하면, $c = 1$ 이다. 따라서, $h(x) = x^2 + x$.

조건 (가)로부터 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이고, 이 조건에 의해 $0 = h(0) = g(0) - 1 = b - 1$ 이 되어야 하므로, $b = 1$.

또한, 조건 (가)로부터 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능이므로, $f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{f(t) - f(0)}{t}$.
 $\frac{d}{dx}(e^{-x}g(x)) = -e^{-x}g(x) + e^{-x}g'(x)$
 이므로

$$f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t) - f(0)}{t} = -g(0) + g'(0) = -b + a.$$

한편, $f'(0) = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{h(t) - h(0)}{t} = h'(0) = 1$ 을 얻는다.

따라서, $a - b = 1$ 이므로, $a = 2$ 이고, $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ 이다.

최종정답은 $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ 그리고 $h(x) = x^2 + x$ 이다.

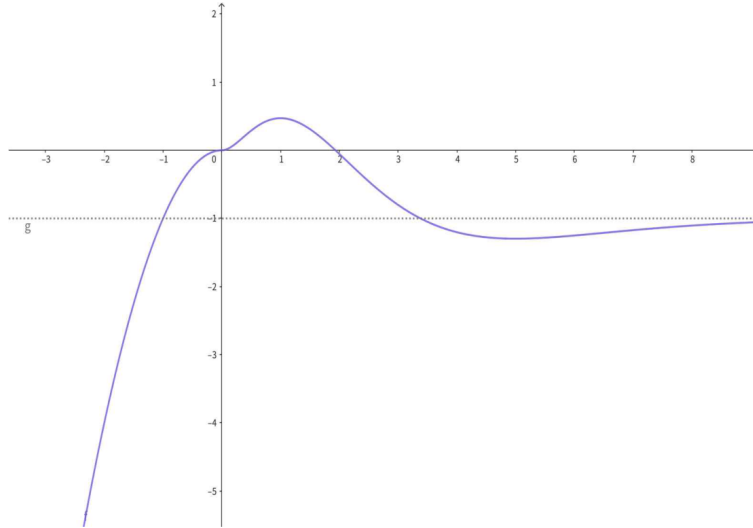
2-2)

곡선 $y = f(x)$ 의 한 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$y = f'(t)(x - t) + f(t)$ 이고, 이 직선이 $(0, k)$ 를 지나려면

$$k = -tf'(t) + f(t) = \begin{cases} e^{-t}(-t^3 + 3t^2 + t + 1) - 1 & t \geq 0 \\ -t^2 & t < 0 \end{cases}$$

을 만족해야 한다. 따라서, 직선 $y = k$ 와 곡선 $y = -xf'(x) + f(x)$ 이 세 점에서 만나는 k 의 범위를 구하면 된다. 곡선의 그래프는 다음과 같다.



극대와 극소를 구하기 위해 $x > 0$ 범위에서 미분을 해보면,

$e^{-x}(x^3 - 6x^2 + 5x) = e^{-x}x(x-1)(x-5)$ 이 나온다. 여기서 $x = 1$ 일 때 극대, $x = 5$ 에서 극소임을 알 수 있다. 여기서 x 가 무한대로 갈 때, $-xf'(x) + f(x)$ 는 -1 보다 작으면서 -1 로 수렴한다. 이때, 극솟값을 구하면, $-\frac{44}{e^5} - 1$ 가 나온다.

따라서, 구하는 k 값의 범위는 $-\frac{44}{e^5} - 1 < k < -1$ 이다.

2-3)

2-1)로부터, $h(x) - g(x) = 2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)$ 이므로, $\alpha = -\frac{1}{2}$ 와 $\beta = 1$ 을 얻는다. 다음으로, $G'(x) = |g(x) - h(x)| = 2|x - \alpha| |x - \beta|$ 가 되는 함수 G 를 생각해보면, 정적분의 정의에 의해

$$F(x) = \int_x^{x+\beta-\alpha} |g(t) - h(t)| dt = G(x + \beta - \alpha) - G(x)$$

이 된다. 따라서,

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(x + \beta - \alpha) - G'(x) = 2|x + \beta - 2\alpha| |x - \alpha| - 2|x - \alpha| |x - \beta| \\ &= 2|x - \alpha|(|x + \beta - 2\alpha| - |x - \beta|) \end{aligned}$$

추가로 $F'(x)$ 의 증감을 조사하면 $F(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 최솟값

$$F(\alpha) = 2 \int_{\alpha}^{\beta} |t - \alpha| |t - \beta| dt$$

를 갖고

$$F(\alpha) = 2 \int_{\alpha}^{\beta} |t - \alpha| |t - \beta| dt = 2 \int_{\alpha}^{\beta} (t - \alpha)(\beta - t) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^1 (-2t^2 + t + 1) dt = \frac{9}{8}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
2-1	• 주어진 조건으로부터 이차함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 의 계수를 구하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
2-2	• 주어진 함수의 접선의 방정식을 통하여 k 값의 범위를 구하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
2-3	• 정적분으로 주어진 함수의 미분을 통하여 함수의 최솟값을 구하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함

오전 · 문제 3

문제 3. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

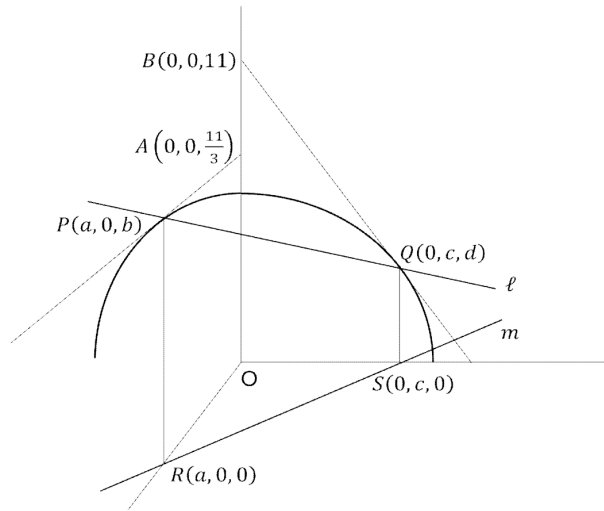
제시문

좌표공간에서 점 $A\left(0, 0, \frac{11}{3}\right)$ 을 지나는 직선이 구 $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 11$ 과 점 $P(a, 0, b)$ 에서 접하고, 점 $B(0, 0, 11)$ 을 지나는 직선이 구 S_1 과 점 $Q(0, c, d)$ 에서 접한다. 점 P 와 점 Q 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 각각 R 과 S 라 하자. 또한, 점 P 와 점 Q 를 지나는 직선을 ℓ 이라 하고, 점 R 과 점 S 를 지나는 직선을 m 이라 하자. (단, a 와 c 는 양수이다.)

3-1) 선분 RS 의 길이와 두 직선 ℓ 과 m 이 이루는 각을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

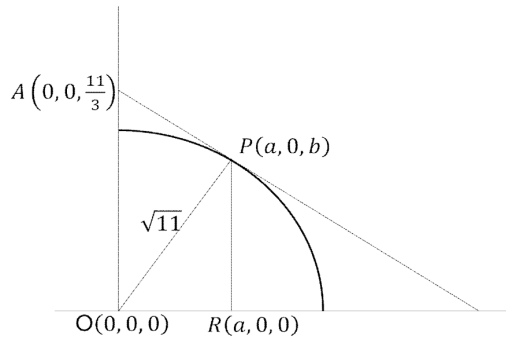
3-2) 구 $S_2 : (x - \sqrt{2})^2 + (y - 6)^2 + (z - \sqrt{10})^2 = 4$ 와 만나고 중심이 직선 m 위에 있는 구의 부피의 최솟값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

■ 예시 답안



3-1)

xz 평면에서 두 직각삼각형 $\triangle AOP$ 와 $\triangle OPR$ 은 닮음이므로
 $\frac{11}{3} : \sqrt{11} = \sqrt{11} : b$ 에서 $b = 3$. $a^2 + b^2 = 11$ 이므로 $a = \sqrt{2}$,
 따라서 $P(\sqrt{2}, 0, 3)$ 이고 $R(\sqrt{2}, 0, 0)$.



마찬가지로 yz 평면에서

$11 : \sqrt{11} = \sqrt{11} : d$ 이고 $d = 1$.

$c^2 + d^2 = 11$ 이므로 $c = \sqrt{10}$.

따라서 $Q(0, \sqrt{10}, 1)$ 이고 $S(0, \sqrt{10}, 0)$.

$\overline{RS}^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{10})^2 = 12$, $\overline{RS} = 2\sqrt{3}$ 이다.

$\overline{PQ}^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{10})^2 + 2^2 = 16$, $\overline{PQ} = 4$ 이고, 선분 PQ의 xy 평면 위로의 정사영이 선분 RS이다. 두 직선이 이루는 각을 θ 라 할 때,

$$\cos \theta = \frac{\overline{RS}}{\overline{PQ}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이므로 } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

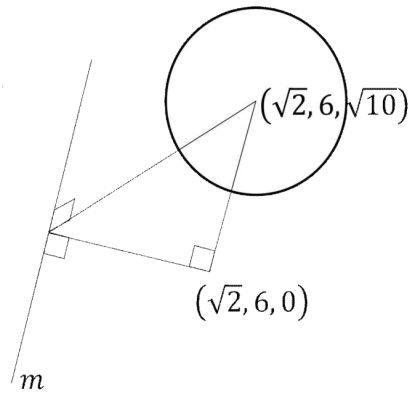
3-2)

직선 m 에서 S_2 까지의 거리가 최소가 되는 경우는 m 에 수직이고 S_2 의 중심을 지나는 직선이 S_2 와 만날 때 발생한다. xy 평면에서 m 의 방정식은 $\sqrt{5}x + y - \sqrt{10} = 0$. m 에서 $(\sqrt{2}, 6, 0)$ 까지의 거리는

$$\frac{|\sqrt{2}\sqrt{5} + 6 - \sqrt{10}|}{\sqrt{5+1}} = \sqrt{6}.$$

S_2 의 중심에서 m 까지의 거리는 삼수선의 정리에 의하여 $\sqrt{6+10} = 4$ 이므로 m 에서 S_2 까지의 최소거리는 $4 - 2 = 2$ 이다. 따라서 구의 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi.$$



■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
3-1	• 공간좌표와 정사영 등을 이용하여 선분의 길이와 두 직선이 이루는 각을 구하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
3-2	• 삼수선 정리 등을 이용하여 직선과 점 사이의 거리를 구하고, 구의 부피의 최솟값을 구하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함

오전 · 문제 4

문제 4. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

제시문

특수문자 32개, 0부터 9까지의 숫자 10개, 대문자 26개와 소문자 26개의 알파벳을 사용하여 다섯 자리 비밀번호를 만들고자 한다. 단, 비밀번호에서 문자나 숫자의 중복을 허용하며, 알파벳 대문자와 소문자는 서로 다른 글자로 취급한다.

- 4-1) 특수문자 한 개, 알파벳 대문자 한 개, 그리고 숫자와 알파벳 소문자 중에서 세 개를 사용해서 다섯 자리 비밀번호를 만들 수 있는 모든 경우의 수는 두 개의 자연수 n 과 k 에 대하여 $n \times k^3$ 꼴로 표현이 된다. 이때, $n - k$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (단, k 는 30보다 크고 40보다 작은 자연수이다.) (10점)
- 4-2) 숫자만을 사용해서 다섯 자리 비밀번호를 만들 때, 각 자리의 숫자의 합이 38이 되도록 만드는 모든 경우의 수를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

■ 예시 답안

4-1)

특수문자는 32개 그리고 특수문자가 들어갈 자리를 고르는 방법이 5가지 ($= 32 \times 5$), 알파벳 대문자는 26개 그리고 알파벳 대문자가 들어가는 방법은 4가지이고 ($= 26 \times 4$), 나머지 세 자리는 숫자와 알파벳 소문자를 중복을 허용하여 3자리에 넣는 방법의 수이다. ($= {}_{36}\Pi_3 = 36^3$) 따라서, 구하는 총 경우의 수는 위의 값을 곱해서 얻어지는 숫자 $32 \times 5 \times 26 \times 4 \times {}_{36}\Pi_3 = 16640 \times 36^3$ 이 된다. 즉, n 은 16640 그리고 k 는 36이 되어서 구하는 값 $n - k$ 는 16604가 된다.

4-2)

다섯 자리의 비밀번호의 각 자리를 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ 이라고 하자. 숫자는 0부터 9까지의 정수로 구성되어 있으므로, 각각의 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ 은 각각 0 이상 9 이하의 한 자리 정수가 된다. 또한, 문제에서 그 합은 38이라고 하였으므로, $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 38$ 이 된다.

추가로, $\alpha_1 = 9 - \alpha, \beta_1 = 9 - \beta, \gamma_1 = 9 - \gamma, \delta_1 = 9 - \delta, \epsilon_1 = 9 - \epsilon$ 이라고 놓으면, 한 자리 정수인 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \epsilon_1$ 는 $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 + \epsilon_1 = 45 - 38 = 7$ 을 만족한다. 따라서, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \epsilon_1$ 이 될 수 있는 총 경우의 수는 서로 다른 5개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로,

${}_5H_7 = {}_{11}C_7 = \frac{11!}{4!7!} = 11 \times 10 \times 3 = 330$ 이 된다. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ 가 될 수 있는 총 경우의 수는 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \epsilon_1$ 가 될 수 있는 총 경우의 수와 같으므로, 정답은 330이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
4-1	• 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
4-2	• 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함

오후 · 문제 1

문제 1. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

제시문

20 이상의 자연수 n 에 대하여, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 다음 조건을 만족한다.

(가) $0 < a < 1$

(나) 두 점 $(-1, 1)$ 과 $(0, 1)$ 을 지난다.

(다) 두 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 와 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이는 n 이다.

이때, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 꼭짓점의 y 좌표를 y_n 이라 하고, 두 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 와 $y = x^2$ 의 교점 중 $(-1, 1)$ 이 아닌 점을 (d_n, d_n^2) 이라 하자. 참고로, $d_n \geq \sqrt{2n}$ 이다.

1-1) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n^2}{n}$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-3) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n+1}(d_{n+1} - d_n)$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

■ 예시 답안

1-1)

포물선 $y = ax^2 + bx + c$ 가 $(0, 1)$ 을 지나므로 $c = 1$ 이고, $(-1, 1)$ 도 지나므로 $1 = a - b + 1$ 이어서 $a = b$ 이다. $y = x^2$ 과 $y = ax^2 + ax + 1$ 과의 교점은 $(-1, 1)$ 과 (d_n, d_n^2) 이므로, $ax^2 + ax + 1 = x^2$ 으로부터 $(a-1)x^2 + ax + 1 = 0$ 의 두 근은 -1 과 d_n 이다. 근과 계수와의 관계에 의해 $d_n = \frac{-1}{a-1}$ 이고 $a = \frac{d_n - 1}{d_n}$ 이다. 따라서,

$$y = ax^2 + ax + 1 = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a}{4}$$

의 꼭짓점은

$$\left(-\frac{1}{2}, 1 - \frac{a}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1 - \frac{d_n - 1}{4d_n}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3d_n + 1}{4d_n}\right)$$

이다.

또한, n 이 무한대로 갈 때, d_n 은 무한대로 발산하므로,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3d_n + 1}{4d_n} = \frac{3}{4}$$

이다.

1-2)

조건 (다)에서, $\int_{-1}^{d_n} (ax^2 + ax + 1 - x^2)dx = n$ 이므로

$$\left[\frac{(a-1)x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + x \right]_{-1}^{d_n} = n, \quad -\frac{d_n^3 + 1}{3d_n} + \frac{(d_n - 1)(d_n^2 - 1)}{2d_n} + d_n + 1 = n,$$

$d_n^3 + 3d_n^2 + (3 - 6n)d_n + 1 = 0$ 을 얻는다.

따라서, $d_n^3 + 3d_n^2 + (3 - 6n)d_n + 1 = 0$ 의 양변을 d_n^3 으로 나누어주면

$$1 + \frac{3}{d_n} + \frac{3 - 6n}{d_n^2} + \frac{1}{d_n^3} = 0$$

이므로, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n^2}{n} = 6$ 이다.

1-3)

$d_{n+1}^3 + 3d_{n+1}^2 + (3 - 6(n+1))d_{n+1} + 1 = 0$ 과 $d_n^3 + 3d_n^2 + (3 - 6n)d_n + 1 = 0$ 로부터

$$\begin{aligned} & (d_{n+1} - d_n)(d_n^2 + d_n d_{n+1} + d_{n+1}^2) + 3(d_{n+1} - d_n)(d_n + d_{n+1}) \\ & + (3 - 6n)(d_{n+1} - d_n) - 6d_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

을 얻는다.

따라서,

$$d_{n+1} - d_n = \frac{6d_{n+1}}{(d_n^2 + d_n d_{n+1} + d_{n+1}^2) + 3(d_n + d_{n+1}) + (3 - 6n)}$$

이므로,

$$d_{n+1}(d_{n+1} - d_n) = \frac{6d_{n+1}^2}{(d_n^2 + d_n d_{n+1} + d_{n+1}^2) + 3(d_n + d_{n+1}) + (3 - 6n)}$$

이 된다.

위의 식의 분자와 분모를 n 으로 나누고, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n^2}{n} = 6$ 을 이용하면,

$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n+1}(d_{n+1} - d_n) = 3$ 을 얻는다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
1-1	• 근과 계수와의 관계를 이용하여 꼭짓점의 y 좌표를 d_n 으로 표현하고 극한값을 계산하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
1-2	• 주어진 조건에 맞는 적분식을 활용하여 d_n 에 관한 삼차식을 유도하고 극한값을 계산하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
1-3	• 문항 1-2)에서 구한 d_n 에 관한 삼차식을 활용하여 $d_{n+1} - d_n$ 을 구하고 극한값을 계산하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함

오후 · 문제 2

문제 2. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

제시문

삼차함수 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 가 다음 조건을 만족한다.

(가) 모든 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이다.

(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x^2} = 0$

(다) 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2g(x)}{x} = 1$ 이다.

2-1) $f\left(\frac{d}{2}\right)$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

2-2) 함수 $f(x)$ 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

2-3) $\int_{-3}^3 x(f(x) + 1)g(x)dx$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

■ 예시 답안

주어진 삼차함수는 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 이고, 조건을 이용하여 계수를 구한다.

2-1)

조건 (다)로부터 $d = f(0) = 2g(0)$ 이고, $f\left(\frac{d}{2}\right) = g^{-1}\left(\frac{d}{2}\right) = 0$ 을 얻는다.

2-2)

조건 (나)에서 $2b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x^2} = 0$, $b = 0$ 를 얻는다.

2-1)로부터 $d = f(0) = 2g(0)$ 이다. 이때 조건 (가)로부터 $d = 0$ 임을 알 수 있다.

왜냐하면, $f\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{d}{8} \times (d^2 + 4c + 8) = 0$ 이고 $c = f'(0) > 0$ 이므로 $d = 0$ 이다.

추가로, 조건 (다)에 의해,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - 2(g(x) - g(0))}{x} = f'(0) - 2g'(0) \\ &= f'(0) - \frac{2}{f'(g(0))} = f'(0) - \frac{2}{f'(0)} = 1 \end{aligned}$$

을 얻는다. 이 식을 풀면 $f'(0) = 2$ 또는 $f'(0) = -1$ 이 된다. 이 중 조건 (가)에 의해 $f'(x) > 0$ 를 만족해야 하므로 $c = f'(0) = 2$ 이다.

따라서, $f(x) = x^3 + 2x$ 이다.

2-3)

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 각각, $f(x) = -f(-x)$ 와 $g(x) = -g(-x)$ 를 만족한다. 따라서, $f(x)g(x)$ 는 원점 대칭 함수이며 $\int_{-3}^3 f(x)g(x)dx = 0$ 이 되므로,

$\int_{-3}^3 x(f(x) + 1)g(x)dx = \int_{-3}^3 xg(x)dx$ 이 된다. 이어서 $g(x) = t$ 로 치환하면,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 xg(x)dx &= \int_{-1}^1 f(t)t f'(t)dt = \int_{-1}^1 t \frac{d}{dt} \left(\frac{f^2(t)}{2} \right) dt \\ &= \left[t \frac{f^2(t)}{2} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{f^2(t)}{2} dt = 9 - \int_{-1}^1 \frac{(t^3 + 2t)^2}{2} dt \\ &= 9 - \frac{239}{105} = \frac{706}{105} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
2-1	• 주어진 조건으로부터 $f(0)$ 와 $g(0)$ 사이의 관계를 알아내고, 역함수의 정의를 활용하여 함숫값을 구하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
2-2	• 주어진 조건으로부터 삼차함수의 계수를 구하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
2-3	• 원점 대칭 함수의 성질과 치환적분을 이용하여 적분값을 구하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함

오후 · 문제 3

문제 3. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

제시문

세 실수 a, b, c 와 세 점 $A(c, 0), B(-c, 0), O(0, 0)$ 에 대하여, $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}| = b$ 를 만족하는 점 P 의 집합이 나타내는 곡선 C 와 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + a$ 는 만나지 않는다. 곡선 C 위의 점 P 와 직선 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + a$ 사이의 거리가 최소일 때 점 P 의 x 좌표를 x_1 이라 하고, 거리가 최대일 때 x 좌표를 x_2 라 하자. (단, $b > 2c \geq 0$ 이다.)

3-1) $x_1 + x_2$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

3-2) $x_1 x_2 = -\frac{b^2}{12}$ 일 때, 곡선 C 의 길이를 ℓ 이라 하자. 이때, $\frac{\ell}{b}$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

■ 예시 답안

3-1)

$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}| = b$ 에서 점 P의 자취는 장축의 길이가 b 인 타원의 방정식이 된다.

이때 단축의 길이를 $2d$ 라고 하면, 구하는 방정식은 $\frac{4x^2}{b^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$.

타원의 방정식 $\frac{4x^2}{b^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$ 에서 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$\frac{4x_1x}{b^2} + \frac{y_1y}{d^2} = 1$ 이 된다. 주어진 직선의 기울기가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로, 접선의 방정식 중 기울기가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 인 경우를 생각

해보면, $y_1 = -\frac{4\sqrt{2}d^2x_1}{b^2}$ 을 얻는다. 이를 타원의 방정식에 대입하면 $x_1^2 = \frac{b^4}{4b^2 + 32d^2}$ 을 얻는다. 두 교점의 x

좌표인 x_1 과 x_2 는 이차방정식

$x^2 - \frac{b^4}{4b^2 + 32d^2} = 0$ 의 두 근이 되므로, 근과 계수와의 관계에 의해 0이다.

3-2)

두 교점의 x 좌표의 곱 x_1x_2 는 3-1)에서 구한 이차방정식

$x^2 - \frac{b^4}{4b^2 + 32d^2} = 0$ 의 두 해의 곱이 되므로, 근과 계수와의 관계에 의해 $-\frac{b^4}{4b^2 + 32d^2}$

이 된다. 문제에서 이 값이 $-\frac{b^2}{12}$ 으로 주어졌으므로, $d = \frac{b}{2}$ 를 얻는다.

따라서, 타원의 방정식은 원의 방정식 $x^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ 이 되고, 반지름은 $\frac{b}{2}$ 이므로, 해당 곡선의 길이 ℓ 는 원

의 둘레를 구하는 공식에 의해 $b\pi$ 가 된다. 따라서, $\frac{\ell}{b} = \pi$.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
3-1	• 벡터를 이용해서 표현된 식을 이해하고, 이차곡선과 직선과의 관계를 활용하여 두 교점의 x 좌표의 합을 구하는 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
3-2	• 주어진 조건을 이용하여, 장축과 단축의 길이가 같음을 이해하고, 그 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함

오후 · 문제 4

문제 4. 다음을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

제시문

1년 1월 1일부터 2025년 12월 31일까지의 날짜를 8개의 숫자를 이용하여 ①②③④⑤⑥⑦⑧의 형태로 나타내려 한다. 이때, ①②③④는 연도, ⑤⑥은 월, ⑦⑧은 일을 나타낸다. 예를 들어, 1년 1월 1일은 00010101로 나타낸다. 날짜 계산을 단순화하고자, 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12월은 31일, 2월은 28일, 그 외의 달은 30일까지 있다고 가정한다. 참고로, ①, ⑤, ⑦ 위치에 올 수 있는 숫자는 다음과 같다.

- ①에는 0, 1, 2
- ⑤에는 0, 1
- ⑦에는 0, 1, 2, 3

- 4-1) 1년 1월 1일부터 2025년 12월 31일까지의 날짜를 위와 같이 표현하자. 이때, 8개의 숫자가 모두 다른 경우, ①에 올 수 있는 숫자를 모두 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)
- 4-2) 1년 1월 1일부터 2025년 12월 31일까지의 날짜를 위와 같이 표현하자. 이때, 8개의 숫자가 모두 다른 날짜의 개수를 구하고, 8개의 숫자가 모두 다른 날짜 중에서 1년 1월 1일로부터 가장 가까운 날짜를 구하시오. (10점)

■ 예시 답안

4-1)

①이 0인 경우 : ⑤⑥은 12 ⑦은 3이므로 ⑧이 될 수 있는 수가 없다.

①이 2인 경우 : ②는 0이고 ③은 1이다.

따라서, ⑦은 3이므로 ⑧이 될 수 있는 수가 없다.

①이 1인 경우 : ⑤는 0이므로 ⑦은 2 혹은 3이다.

그런데, ⑦이 3이면 ⑧은 0 혹은 1이 되어야 하므로 조건에 맞지 않다.

따라서, ⑦은 2이다.

나머지 자리들, 즉 ②,③,④,⑥,⑧에는 이미 사용된 0, 1, 2 이외의 모든 숫자, 즉 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9가 모두 사용될 수 있다. 따라서, ①에 올 수 있는 값은 1이 유일하다.

4-2)

1②③④0⑥2⑧로부터, 1년 1월 1일로부터 가장 가까운 날은 1345년 06월 27일이다. ②,③,④,⑥,⑧ 다섯 개의 자리에 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중 서로 다른 숫자를 택해서 채우는 방법의 수이므로, 8개의 수가 모두 다른 날 짜는 $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$ 일이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
4-1	• 주어진 조건을 만족하는 경우를 판단하는 과정이 논리적이면 좋은 점수를 부여함
4-2	• 주어진 조건을 만족하는 경우의 수를 구하는 과정이 논리적이면 좋은 점수를 부여함

2025학년도 자연계열

오전 · 문제 1

문제 1. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (35점)

제시문

함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $[0, 1]$ 에서 연속이다.

(나) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

(다) 구간 $[0, 1]$ 에서 $f'(x) > 0$ 이고 $f(x) \leq x$ 이다.

(라) $\int_0^{\frac{1}{2}} x f'(x) dx = \frac{13}{192}$

(마) 구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x) = \int_0^x (1 - f(t)) dt + 3 \int_x^1 f(t) dt$$

이때, 함수 $g(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극값 $\frac{61}{48}$ 을 갖는다.

1-1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (5점)

1-2) $\int_0^1 \left| f(x) - \frac{1}{4} \right| dx$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (15점)

1-3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| f\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{k}{n} \right| f'\left(\frac{k}{n}\right)$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (15점)

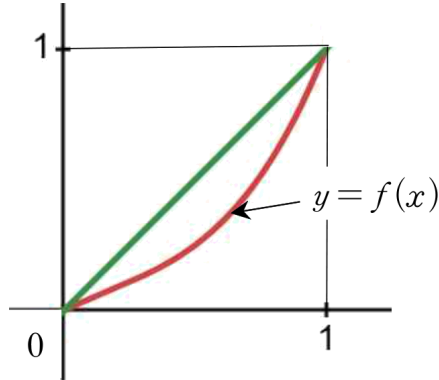
■ 예시 답안

1-1

조건 (마)에서 $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 4f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 으로부터 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ 를 얻는다.

1-2

조건 (가), (나), (다)로부터 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같은 꼴이다.



$A = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$, $B = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$ 라 놓으면, 조건 (라)로부터

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)dx = [xf(x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{13}{192} \text{ 를 얻고}$$

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{1}{8} - \frac{13}{192} = \frac{11}{192} \text{ 을 얻는다.}$$

조건 (마)에서

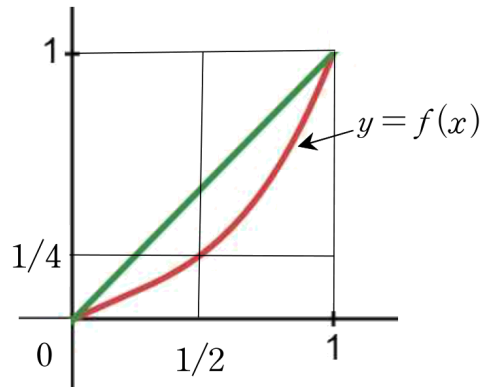
$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - f(t))dt + 3 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt = \frac{1}{2} - A + 3B = \frac{61}{48} \text{ 이다.}$$

따라서, $3B = \frac{61}{48} - \frac{1}{2} + A = \frac{159}{192}$ 에서 $B = \frac{53}{192}$ 이다.

다음 주어진 그림으로부터

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{11}{192}$$

$$B = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \frac{53}{192}$$



$$\int_0^1 \left| f(x) - \frac{1}{4} \right| dx = \left(\frac{1}{8} - A \right) + \left(B - \frac{1}{8} \right) = B - A = \frac{53}{192} - \frac{11}{192} = \frac{42}{192} = \frac{7}{32}$$

을 얻는다.

1-3

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| f\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{k}{n} \right| f'\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 |f(f(x)) - x| f'(x)dx$ 이고 $f(x) = t$ 로 치환하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| f\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{k}{n} \right| f'\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 |f(f(x)) - x| f'(x) dx = \int_0^1 |f(t) - f^{-1}(t)| dt$$

이다.

$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프와 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |f(t) - f^{-1}(t)| dt \\ &= 2 \int_0^1 (x - f(x)) dx = 1 - 2 \int_0^1 f(x) dx = 1 - 2 \left(\frac{64}{192} \right) = \frac{1}{3} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
1-1	조건 (마)에서 주어진 함수 $g(x)$가 $x = \frac{1}{2}$에서 극값을 갖는다는 사실로부터 $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$임을 파악하고, 이로부터 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하는 문제임. 그 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
1-2	- 다음의 세 가지 사실을 주어진 조건으로부터 파악할 수 있다. - 문항 1-1)로부터 구한 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, - 조건 (가), (나), (다)를 이용하여 $y = f(x)$의 그래프를 파악, - 조건 (라), (마)를 활용하여 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$ 및 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$의 값을 구함. - 위 세 가지 사실을 활용하여 $\int_0^1 \left f(x) - \frac{1}{4} \right dx$의 값을 구하는 문제임. - 그 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
1-3	- 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 활용하여 주어진 급수를 정적분으로 표현 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left f\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \frac{k}{n} \right f'\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(f(x)) - x f'(x) dx$ - 치환적분을 활용하여 $\int_0^1 f(f(x)) - x f'(x) dx = \int_0^1 f(x) - f^{-1}(x) dx$임을 파악 - 함수 $f^{-1}(x)$의 그래프가 $y = x$에 대하여 대칭임을 파악하여 위의 적분값을 구하는 문제임. 그 풀이 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함

오전 · 문제 2**문제 2. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (25점)****제시문**

두 번 미분가능한 세 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여, $f(x) + f(-x) = 0$ 이다.

(나) $f'(-1) = f'(1) = 0$

(다) 구간 $(-1, 1)$ 에서, $f''(x) = g'(x)$ 이다.

(라) $g(1) = \pi$, $h(1) = 2\pi$, $h(-1) = 1$

(마) $\int_{-1}^1 f'(x)h'(x)dx = \pi$

2-1) 구간 $(-1, 1)$ 에서, $g(x) = g(-x)$ 임을 설명하시오. (10점)

2-2) $\int_0^1 g(x)(h'(x) + h'(-x))dx$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (15점)

■ 예시 답안

2-1

조건 (다)를 이용하면, 어떤 상수 C 에 대하여, $g(x) = f'(x) + C$ 가 된다.

조건 (가)로부터, $f'(x) = f'(-x)$.

따라서, $g(-x) = f'(-x) + C = f'(x) + C = g(x)$

2-2

2-1)에 의해 $g(x) = g(-x)$ 이다. 이 사실을 이용하면

$$\int_0^1 g(x)h'(-x)dx = \int_{-1}^0 g(-x)h'(x)dx = \int_{-1}^0 g(x)h'(x)dx$$

따라서,

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x)(h'(x) + h'(-x))dx &= \int_0^1 g(x)h'(x)dx + \int_0^1 g(x)h'(-x)dx \\ &= \int_0^1 g(x)h'(x)dx + \int_{-1}^0 g(x)h'(x)dx = \int_{-1}^1 g(x)h'(x)dx \end{aligned}$$

부분적분과 조건 (라)와 (다)를 이용하면

$$\int_{-1}^1 g(x)h'(x)dx = [g(x)h(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 g'(x)h(x)dx = \pi(2\pi - 1) - \int_{-1}^1 f''(x)h(x)dx$$

그리고 조건 (나), (마)와 부분적분을 이용하면

$$\int_{-1}^1 f''(x)h(x)dx = -\pi$$

따라서,

$$\int_0^1 g(x)(h'(x) + h'(-x))dx = 2\pi^2$$

■ 채점 기준

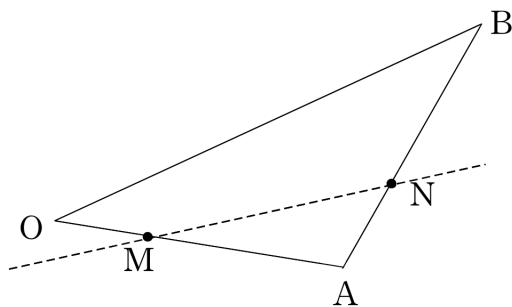
하위 문항	채점 기준
2-1	• 미분과 부분적분의 관계를 이용하여 $g(x) = f'(x) + C$ 를 파악하고 제시된 $f(x)$ 의 조건을 활용하여 함수 $g(x)$ 의 성질을 제대로 파악하면 좋은 점수를 부여함
2-2	• 앞선 문제를 활용해 주어진 적분값을 구간 $(-1, 1)$ 의 적분값으로 잘 표현하고 부정적분을 잘 활용할 수 있으면 좋은 점수를 부여함

오전 · 문제 3

문제 3. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

제시문

아래 그림과 같이 $\overline{OA} = 2$, $\overline{OB} = 3$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ 를 만족시키는 삼각형 OAB 에 대하여, 선분 OA 를 1 : 2로 내분하는 점을 M , 선분 AB 를 1 : 2로 내분하는 점을 N 이라 하자.



3-1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 라 할 때, $\overrightarrow{MN}$ 을 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타내고, 선분 MN 의 길이를 구하고 그 이유를 설명하시오. (10점)

3-2) 선분 OB 를 2 : 1로 내분하는 점을 B' 이라 하고, 점 B' 에서 직선 MN 에 내린 수선의 발을 H 라고 하자. 이때, 선분 MH 의 길이를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

■ 예시 답안

3-1

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \left(\frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}\right) = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \text{ 이고}$$

$$|\overrightarrow{MN}|^2 = \left|\frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}\right|^2 = \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{1}{9}\left(2^2 + 3^2 + 2 \times 2 \times 3 \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{19}{9}$$

이다. 따라서, $|\overrightarrow{MN}| = \frac{\sqrt{19}}{3}$

3-2

두 벡터 $\overrightarrow{MB'} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ 와 $\overrightarrow{MN} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$ 사이의 각을 α 라 하면,

$\overrightarrow{MB'} \cdot \overrightarrow{MN} = |\overrightarrow{MB'}| |\overrightarrow{MN}| \cos \alpha$ 로부터

$$|\overrightarrow{MB'}| \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{MB'} \cdot \overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{-|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}}{\frac{\sqrt{19}}{3}} = \frac{17}{3\sqrt{19}} = \frac{17\sqrt{19}}{57}$$

선분 MH의 길이는 $|\overrightarrow{MB'}| \cos \alpha$ 이므로, 정답은 $\frac{17\sqrt{19}}{57}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
3-1	• 벡터의 성질을 활용하여 주어진 벡터 $\overrightarrow{MN}$을 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$로 표현하고, 벡터의 내적을 활용하여 $\overrightarrow{MN}$을 구하는 문제임. 벡터를 사용하지 않고 기하학적인 사실들로부터 $\overrightarrow{MN}$ 값을 구할 수도 있음. 답을 구하는 과정이 논리적이고 정확하면 좋은 점수를 부여함
3-2	• $\overrightarrow{MB'}$을 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$로 표현하고 벡터의 내적의 정의를 활용하여 선분 MH의 값을 구하는 문제임. 벡터를 사용하지 않고 기하학적인 사실들로부터 답을 구할 수도 있음. 답을 구하는 과정이 논리적이고 정확하면 좋은 점수를 부여함

오전 · 문제 4

문제 4. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

제시문

실수 x 와 y 에 대하여, $x \wedge y = \begin{cases} x & (x \leq y) \\ y & (x > y) \end{cases}$ 라고 하자.

표본공간 S 의 두 사건 A, B 에 대하여 $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ 이다.

대한대학과 민국대학이 이틀에 걸쳐, 첫째 날은 야구 경기와 농구 경기를 하고, 둘째 날은 럭비 경기와 축구 경기를 한다. 대한대학이 야구 경기에서 이기는 사건과 농구 경기에서 이기는 사건은 서로 독립이다. 그리고 모든 경기에서 무승부는 없다.

첫째 날, 대한대학이 야구 경기에서 이길 확률을 x , 그리고 대한대학이 농구 경기에서 이길 확률을 y 라고 하자.

둘째 날, 대한대학이 첫째 날 두 경기 중 한 경기 이상 이긴 경우, 럭비 경기에서 이길 확률은 x , 축구 경기에서 이길 확률은 y 이다. 그리고 대한대학이 첫째 날 두 경기 모두 진 경우, 사기가 떨어져서, 럭비 경기와 축구 경기에서 이길 확률은 각각 $x \wedge y$ 가 된다.

4-1) 대한대학이 럭비 경기에서 이길 확률을 x 와 y 를 이용해서 표현하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

4-2) $x = \frac{1}{3}$ 이고, $x \leq y$ 일 때, 대한대학이 럭비 경기에서 이길 확률이 대한대학이 축구 경기에서 질 확률보다 작거나 같도록 하는 y 의 값의 범위를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

■ 예시 답안

4-1

대한대학이 첫째 날 한 경기 이상을 이기는 사건을 A 라고 하고, 둘째 날 대한대학이 럭비 경기에서 이기는 사건을 B_1 그리고 축구 경기에서 이기는 사건을 B_2 라 하자. 주어진 조건에 의해 $P(B_1 | A) = x$, $P(B_1 | A^c) = x \wedge y$, $P(B_2 | A) = y$, $P(B_2 | A^c) = x \wedge y$

사건 A 가 일어나는 경우는 야구 승, 농구 승, 혹은 야구 승, 농구 패, 혹은 야구 패, 농구 승이고 각각이 독립
이므로 $P(A) = xy + x(1-y) + (1-x)y = x + y - xy$

따라서, 확률의 곱셈정리에 의해

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(B_1 \cap A) + P(B_1 \cap A^c) = P(A)P(B_1 | A) + P(A^c)P(B_1 | A^c) \\ &= x(x + y - xy) + (x \wedge y)(1 - x - y + xy) \end{aligned}$$

4-2

위와 마찬가지로

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2 \cap A) + P(B_2 \cap A^c) = P(A)P(B_2 | A) + P(A^c)P(B_2 | A^c) \\ &= y(x + y - xy) + (x \wedge y)(1 - x - y + xy) \end{aligned}$$

$x = \frac{1}{3}$ 이고 $x \leq y$ 이므로

$$P(B_1) = x(x + y - xy) + (x \wedge y)(1 - x - y + xy) = \frac{1}{3}$$

$$P(B_2) = y(x + y - xy) + (x \wedge y)(1 - x - y + xy) = \frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{9}y + \frac{2}{9}$$

$P(B_1) \leq 1 - P(B_2)$ 을 만족시키기 위해서는 $\frac{1}{3} \leq 1 - \left(\frac{2}{3}y^2 + \frac{1}{9}y + \frac{2}{9}\right)$.

즉, $6y^2 + y - 4 \leq 0$ 이다. 이 부등식과 $y \geq x = \frac{1}{3}$ 을 동시에 만족시키는 y 의 범위는 $\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{-1 + \sqrt{97}}{12}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
4-1	• 확률의 덧셈정리, 사건의 독립, 조건부확률 및 확률의 곱셈정리를 활용해 사건의 확률을 제대로 구하면 좋은 점수를 부여함
4-2	• 두 사건이 일어날 확률을 제대로 구하고 그 합이 주어진 조건을 만족하기 위한 변수 y 의 범위를 제대로 구하면 좋은 점수를 부여함

오후 · 문제 1

문제 1. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

제시문

아래로 볼록인 곡선 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$)는 매개변수 t 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = \cos^3 t, y(t) = 2 \sin^3 t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

실수 a ($0 < a < 1$)에 대하여 점 $A(a, 0)$ 를 지나고 이 곡선에 접하는 직선이 단 하나 존재한다. (단, 곡선의 두 끝점은 접점이 아니다.) 이 접선을 ℓ_a 라 하자.

- 1-1)** $a = \frac{1}{2}$ 일 때, 접선 ℓ_a 의 방정식을 구하고 그 이유를 설명하시오. (10점)
- 1-2)** 접선 ℓ_a 가 x 축과 이루는 예각의 크기를 $g(a)$ 라 할 때, $a^3 \tan(g(a))$ 의 최댓값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)
- 1-3)** 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 ℓ_a , 그리고 직선 $y = 0$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1(a)$ 라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 ℓ_a , 그리고 직선 $x = 0$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2(a)$ 라 하자. 이때, $S_1(a) + S_2(a)$ 가 최소가 되는 a 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

■ 예시 답안

1-1

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ 를 만족시키는 실수 t 에 대해서 $(x(t), y(t))$ 를 지나는 접선의 방정식은 $y = -2 \tan t(x - \cos^3 t) + 2 \sin^3 t$ 이 된다. $y = 0$ 을 대입하면 x 절편은 $\cos t$ 가 되고, 점 $(\frac{1}{2}, 0)$ 를 지나므로, $\cos t = \frac{1}{2}$ 이 된다. 따라서, $t = \frac{\pi}{3}$ 이다.

따라서, 구하는 접선의 방정식은 $y = -2\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ 이다.

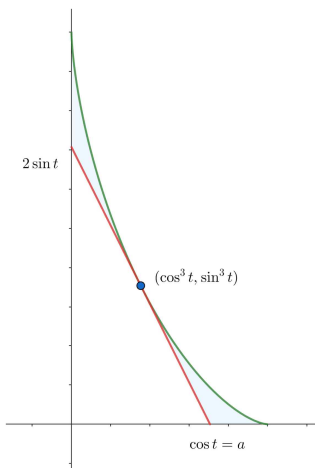
1-2

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ 를 만족시키는 실수 t 에 대해서, $(x(t), y(t))$ 를 지나는 접선의 방정식은 $y = -2 \tan t(x - \cos^3 t) + 2 \sin^3 t$ 이므로, 이 접선의 x 절편과 y 절편은 각각 $\cos t$ 와 $2 \sin t$ 이 된다. 또한, 이 직선은 점 $(a, 0)$ 을 지나므로 $a = \cos t$ 가 된다. 이 접선과 x 축이 이루는 예각의 크기가 $g(a)$ 이므로, $2 \tan t = \tan g(a)$ 가 된다. 또한, $\cos t = a$ 와 $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - a^2}$ 임을 이용하면, $\frac{2\sqrt{1-a^2}}{a} = \tan(g(a))$ 을 얻는다. 따라서, $a^3 \tan(g(a)) = 2a^2 \sqrt{1-a^2}$ 이 되고, 이 함수의 구간 $(0, 1)$ 에서의 최댓값은 $a = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때, $\frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ 이 된다.

1-3

구간 $(0, 1)$ 에 있는 임의의 실수 a 에 대하여, $\cos t = a$ 가 되는 t 가 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 존재한다. 또한, 제시문에 의하여 주어진 그래프는 아래로 볼록이다.

그러므로, $S_1(a) + S_2(a)$ 의 값은 아래 그림의 색칠한 부분의 넓이가 된다.



따라서, $S_1(a) + S_2(a)$ 의 최솟값을 구하기 위해서는 위의 그림의 삼각형의 면적이 최대가 되는 a 를 구하면 된다.

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \sin t \cos t$ 이고 삼각함수의 덧셈정리에 의해

$$\frac{1}{2} \times 2 \sin t \cos t = \frac{1}{2} (\sin t \cos t + \cos t \sin t) = \frac{1}{2} \sin(t + t) = \frac{1}{2} \sin 2t \text{ 이므로,}$$

$t = \frac{\pi}{4}$ 일 때 최댓값을 가진다. 따라서, $S_1(a) + S_2(a)$ 값이 최소가 되게 하는 a 의 값은, $\cos t = a$ 의 관계식에 의해 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 가 된다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
1-1	• 매개변수로 나타낸 함수 및 삼각함수의 도함수를 활용하여, 접선의 기울기를 구하면 좋은 점수를 부여함
1-2	• 접선의 x 절편과 y 절편을 구하고, 이를 이용하여 접점과 예각 $g(a)$ 의 관계를 구한다. 이 관계와 도함수를 활용하여 주어진 함수 $a^3 \tan(g(a))$ 의 최댓값을 구하면 좋은 점수를 부여함
1-3	• 매개변수 t 와 a 사이에 관계를 이해하고, $S_1(a) + S_2(a)$ 의 값이 최소가 되는 경우가 원점과 접선의 x 절편과 y 절편으로 이루어진 삼각형의 넓이가 최대가 되는 경우임을 이해하여 문제를 해결하면 높은 점수를 부여함

오후 · 문제 2

문제 2. 다음 글을 읽고 물음에 답하십시오. (30점)

제시문

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y = f(x)$ 는 $x = \frac{2}{3}$ 에서 변곡점을 갖는다.

(나) 다음과 같이 정의된 함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

$$g(x) = \begin{cases} xf'(x) + f(x) & (x \geq 0) \\ (1-x)e^{-x} + \cos x & (x < 0) \end{cases}$$

(다) 곡선 $y = f(x)$ 위의 서로 다른 세 점에서 점 $(0, k)$ 를 지나는 접선을 그을 수 있는 k 값의 범위는 $2 < k < \frac{62}{27}$ 이다.

2-1) $f(x)$ 를 구하고, 그 이유를 설명하십시오. (20점)

2-2) $F(x) = \int_0^x |f(t)| dt$ 라 할 때, $\int_0^2 f(x)e^{F(x)} dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 설명하십시오. (10점)

■ 예시 답안

2-1

삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 라고 하자. ($a > 0$)

조건 (가)로부터 $f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6a \times \frac{2}{3} + 2b = 0$ 이고, $b = -2a$ 를 얻는다.

조건 (나)로부터 $g(x) = \begin{cases} xf'(x) + f(x) & (x \geq 0) \\ (1-x)e^{-x} + \cos x & (x < 0) \end{cases}$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능하기 위해서는 $x = 0$ 에서 연속이어야 하므로 $f(0) = 2$ 를 얻는다.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$ 가 존재하기 위해서는 $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(h) - g(0)}{h}$ 와 $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(h) - g(0)}{h}$ 값이 같아야 한다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{hf'(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2f'(0),$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(1-h)e^{-h} + \cos(h) - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{e^{-h} - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{he^{-h}}{h} = -2 \end{aligned}$$

에서 $f'(0) = -1$ 을 얻는다.

따라서, 위에서 얻어진 조건 $b = -2a$, $f(0) = 2$, $f'(0) = -1$ 로부터 $f(x) = ax^3 - 2ax^2 - x + 2$ 가 된다.

곡선 $y = f(x)$ 의 한 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = f'(t)(x - t) + f(t)$ 가 되고, 이 접선이 $(0, k)$ 를 지난다는 조건을 활용하면 $k = -2at^3 + 2at^2 + 2$ 를 얻는다.

조건 (다)로부터 $\frac{k-2}{a} = -2t^3 + 2t^2$ 을 만족시키는 서로 다른 t 가 세 개 존재하여야 한다.

서로 다른 t 가 세 개 존재하는 k 의 범위는 $0 < \frac{k-2}{a} < \frac{8}{27}$ 이 되고, 조건 (다)의 k 의 범위는 $0 < k - 2 < \frac{8}{27}$ 이므로, $a = 1$ 을 얻는다.

따라서, $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ 를 얻는다.

2-2

$F'(x) = |f(x)|$ 이고 $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ -f(x) & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)e^{F(x)} dx &= \int_0^1 f(x)e^{F(x)} dx + \int_1^2 f(x)e^{F(x)} dx \\ &= \int_0^1 F'(x)e^{F(x)} dx - \int_1^2 F'(x)e^{F(x)} dx \\ &= [e^{F(x)}]_0^1 - [e^{F(x)}]_1^2 = e^{F(1)} - e^{F(0)} - (e^{F(2)} - e^{F(1)}) = 2e^{F(1)} - e^{F(0)} - e^{F(2)} \end{aligned}$$

이때 $F(0) = 0$, $F(1) = \int_0^1 f(t)dt = \frac{13}{12}$, $F(2) = \int_0^1 f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt = \frac{3}{2}$ 이므로

$$2e^{F(1)} - e^{F(0)} - e^{F(2)} = 2e^{\frac{13}{12}} - 1 - e^{\frac{3}{2}} \text{ 이다. } \therefore \int_0^2 f(x)e^{F(x)} dx = 2e^{\frac{13}{12}} - e^{\frac{3}{2}} - 1$$

■ 채점 기준

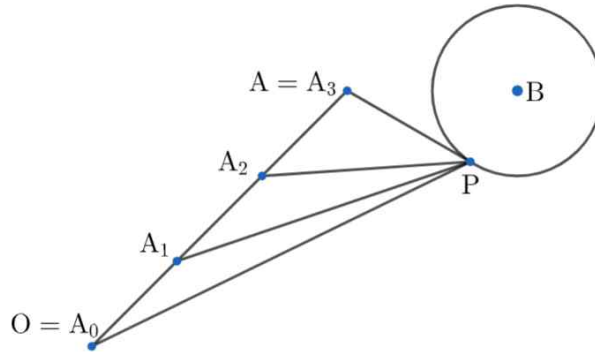
하위 문항	채점 기준
2-1	• 주어진 조건들과 미분 및 극한의 성질을 이용하여, 주어진 3차 다항식의 계수들의 관계를 유추하고, 조건 (다)를 이용하여 최고차항의 계수를 올바르게 결정하면, 높은 점수를 부여함
2-2	• 삼차함수의 그래프의 개형을 통하여 주어진 정적분의 구간을 나누고, 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 올바르게 구하면 높은 점수를 부여함

오후 · 문제 3

문제 3. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (20점)

제시문

아래 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 $O(0,0)$, $A(3,3)$ 와 중심이 $B(5,3)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원 C 가 있다. 점 $O = A_0$, A_1 , A_2 , $A_3 = A$ 는 선분 OA 를 $\overline{A_0A_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$ 이 되도록 삼등분하며, 점 P 는 원 C 위를 움직인다.



3-1) $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}|^2$ 의 최솟값과 이때 점 P 의 좌표를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

3-2) $|\overrightarrow{A_1P} + 4\overrightarrow{A_2P} + \overrightarrow{A_3P}|^2$ 의 최솟값은 $a + b\sqrt{10}$ 이다. (단, a 와 b 는 정수)

이때, 순서쌍 (a, b) 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

■ 예시 답안

3-1

P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (8, 6)$ 과 $\overrightarrow{BP} = (x - 5, y - 3)$ 사이의 각을 θ 라 하면

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}|^2 &= |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 + 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{BP} \\ &= |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 + 2|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{BP}| \cos \theta \end{aligned}$$

이다. 따라서 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}|^2$ 의 최솟값은 $\cos \theta = -1$ 일 때

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 - 2|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{BP}| = 101 - 20 = 81 \text{ 이다.}$$

$\cos \theta = -1$ 이므로 $\overrightarrow{BP} = -k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ ($k > 0$)이고, $(x, y) = (5, 3) - k(8, 6)$ 가 원 $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 1$ 위에 있으므로 $k = \frac{1}{10}$ 을 얻고 P의 좌표 (x, y) 는

$$(x, y) = (5, 3) - k(8, 6) = (5, 3) - \frac{1}{10}(8, 6) = \left(\frac{21}{5}, \frac{12}{5}\right) \text{ 이다.}$$

3-2

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1P} + 4\overrightarrow{A_2P} + \overrightarrow{A_3P} &= (\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BP}) + 4(\overrightarrow{A_2B} + \overrightarrow{BP}) + (\overrightarrow{A_3B} + \overrightarrow{BP}) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}\right) + 4\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}\right) + \left(-\frac{3}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}\right) \\ &= -\frac{12}{3}\overrightarrow{OA} + 6\overrightarrow{OB} + 6\overrightarrow{BP} = -4\overrightarrow{OA} + 6\overrightarrow{OB} + 6\overrightarrow{BP} = -2(2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{BP}) \text{ 이고} \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{A_1P} + 4\overrightarrow{A_2P} + \overrightarrow{A_3P}|^2 = 4|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{BP}|^2 \text{ 이고}$$

$$|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{BP}|^2 = |2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}|^2 + |3\overrightarrow{BP}|^2 - 6|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{BP}| \cos \theta$$

여기서 θ 는 두 벡터 $2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$ 와 $\overrightarrow{BP}$ 가 이루는 각이다.

따라서, 구하는 최솟값은 $\cos \theta = 1$ 일 때,

$$4(|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}|^2 + |3\overrightarrow{BP}|^2 - 6|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{BP}|) \text{ 이 된다.}$$

여기서, $2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} = 2(3, 3) - 3(5, 3) = (-9, -3)$ 이므로,

이 벡터의 크기는 $|2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}| = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}$ 이 된다.

반면에, $|\overrightarrow{BP}| = 1$ 이므로, 위의 식에 다 대입하면, 구하는 값은 $396 - 72\sqrt{10}$

따라서, $(a, b) = (396, -72)$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
3-1	• 벡터의 연산을 활용하여 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}$ 임을 이해하고, 이와 내적을 활용하여 $ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} ^2$ 의 최솟값을 구하고, 이때 P의 위치를 구하면 높은 점수를 부여함
3-2	• 벡터의 연산을 활용하여 $\overrightarrow{A_1P} + 4\overrightarrow{A_2P} + \overrightarrow{A_3P} = -2(2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{BP})$ 임을 이해하고, 이와 내적을 활용하여 $ 2(2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{BP}) ^2$ 의 최솟값을 구하면 높은 점수를 부여함

오후 · 문제 4**문제 4. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (20점)****제시문**

파란색 공이 n 개, 노란색 공이 $2n - 1$ 개, 진홍색 공이 $2n + 2$ 개 있을 때, $2n$ 개의 공을 택하는 경우의 수를 a_n 이라고 하자. (단, n 은 자연수이고, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.)

- 4-1)** a_2 를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (5점)
- 4-2)** a_n 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)
- 4-3)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 8n + 15}$ 을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (5점)

■ 예시 답안

4-1

$n = 2$ 이므로 파란색 공이 2개, 노란색 공이 3개, 진홍색 공이 6개 있을 때, 4개의 공을 택하는 경우의 수를 구해야 한다.

파란색 공, 노란색 공, 진홍색 공들 중에서 4개를 택해야 하므로 전체 경우의 수는 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$ 이다.

이때 파란색 공을 3개 이상 택하는 경우와 노란색 공을 4개 택하는 경우는 일어날 수 없다. 파란색 공을 3개 이상 택하는 경우의 수는 ${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$ 이고, 노란색 공을 4개 택하는 경우의 수는 1이다. 이때 파란색 공을 3개 이상 택하는 경우와 노란색 공을 4개 택하는 경우는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는 $15 - 3 - 1 = 11$ 이다.

혹은 다음 문제인 4-2)에서 구하는 일반항 a_n 에 $n = 2$ 을 대입해서 구하면, $a_2 = 11$ 이다.

4-2

파란색 공, 노란색 공, 진홍색 공들 중에 $2n$ 개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_3H_{2n}$

다만, 파란색 공의 개수는 n 개이고 노란색 공의 개수는 $2n - 1$ 이므로, 파란색 공이 $n + 1$ 개 이상 뽑히는 경우와 노란색 공이 $2n$ 개 뽑히는 경우는 일어날 수 없다.

파란색 공이 $n + 1$ 개 이상 뽑히는 경우의 수는 ${}_3H_{2n-(n+1)} = {}_3H_{n-1}$ 이고 노란색 공이 $2n$ 개 뽑히는 경우의 수는 ${}_3H_{2n-2n} = {}_3H_0 = 1$ 이므로,

일반항 $a_n = {}_3H_{2n} - {}_3H_{n-1} - 1$ 이 된다.

따라서, 중복조합의 수를 구하는 공식에 의해

$$\begin{aligned} a_n &= {}_3H_{2n} - {}_3H_{n-1} - 1 = {}_{2n+2}C_{2n} - {}_{n+1}C_{n-1} - 1 \\ &= (n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}(n+1)n - 1 = 2n^2 + 3n + 1 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1 \\ &= \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n = \frac{1}{2}(3n^2 + 5n) \end{aligned}$$

4-3

$$a_n + 8n + 15 = \frac{1}{2}(3n^2 + 5n + 16n + 30) = \frac{3}{2}(n^2 + 7n + 10) = \frac{3}{2}(n+2)(n+5)$$

$$\frac{1}{a_n + 8n + 15} = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+5} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + 8n + 15} = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{9} \times \frac{20 + 15 + 12}{60} = \frac{94}{540} = \frac{47}{270}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
4-1	• 적절한 분류를 통하여 모든 경우를 정확하게 나누어서 세거나 4-2의 일반항 공식을 활용하면 높은 점수를 부여함
4-2	• a_n 을 두 가지 중복조합의 수의 차이를 이용하여 구하면, 높은 점수를 부여함
4-3	• a_n 과 부분분수의 합을 이용하여, 급수를 계산하면 높은 점수를 부여함

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다