

광운대논술

자연계

목차

2026학년도 자연계열	3
1교시 · 문제 1	3
1교시 · 문제 2	8
2교시 · 문제 1	13
2교시 · 문제 2	18
 2025학년도 자연계열	 22
1교시 · 문제 1	22
1교시 · 문제 2	31
2교시 · 문제 1	36
2교시 · 문제 2	40
 2024학년도 자연계열	 44
1교시 · 문제 1	44
1교시 · 문제 2	49
2교시 · 문제 1	53
2교시 · 문제 2	56

2026학년도 자연계열

1교시 · 문제 1

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

1. 집합 A 가 유한집합일 때, 집합 A 의 원소의 개수를 기호로

$$n(A)$$

와 같이 나타낸다. 특히 $n(\emptyset) = 0$ 이다.

2. n 이 자연수일 때,

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n$$

3. 점 (a, b) 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, -b)$

4. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에서 $f'(a) = 0$ 이고, $x = a$ 의 좌우에서

① $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$ 이다.

② $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$ 이다.

[1] 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. [10점]

$$(가) \quad n(A) \times n(B) \neq 0$$

$$(나) \quad n(B) < n(U)$$

$$(다) \quad A \subset B$$

[2] 세 점 $A(-1, -1), B(1, -1), C(1, 3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 와 이 삼각형을 원점에 대하여 대칭이동한 삼각형 $A'B'C'$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 두 삼각형이 겹치는 영역의 넓이를 구하시오. [6점]

(2) 두 삼각형 중 한 삼각형을 고정하고 다른 삼각형을 x 축의 양의 방향 또는 음의 방향으로 평행이동할 때, 두 삼각형이 겹치는 영역의 넓이의 최댓값을 구하시오. [14점]

[3] 실수 k 에 대하여 $S(k) = \int_0^1 |x^3 + k| dx$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 함수 $S(k)$ 를 구하시오. [10점]

(2) 함수 $S(k)$ 가 최소가 되게 하는 k 의 값과 함수 $S(k)$ 의 최솟값을 구하시오. [10점]

■ 예시 답안

[1]

조건 (가)와 (나)에 의하여 부분집합 B 는 공집합과 전체집합을 포함하지 않는다.

$n(B) = k$ ($1 \leq k \leq 5$)일 때, 가능한 집합 B 의 개수는 ${}_6C_k$ 이고,

그 각각에 대하여 집합 A 의 개수는 조건 (가)와 (다)에 의하여 공집합을 제외한 $2^k - 1$

따라서 세 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$\begin{aligned} & {}_6C_1 \times (2^1 - 1) + {}_6C_2 \times (2^2 - 1) + \cdots + {}_6C_5 \times (2^5 - 1) \\ &= ({}_6C_1 \times 2^1 + {}_6C_2 \times 2^2 + \cdots + {}_6C_5 \times 2^5) - ({}_6C_1 + {}_6C_2 + \cdots + {}_6C_5) \end{aligned}$$

이항정리를 이용하면,

$$\begin{aligned} & {}_6C_1 \times 2^1 + {}_6C_2 \times 2^2 + \cdots + {}_6C_5 \times 2^5 \\ &= ({}_6C_0 \times 2^0 + {}_6C_1 \times 2^1 + {}_6C_2 \times 2^2 + \cdots + {}_6C_5 \times 2^5 + {}_6C_6 \times 2^6) - ({}_6C_0 \times 2^0 + {}_6C_6 \times 2^6) \\ &= (1 + 2)^6 - (1 + 64) = 664 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & {}_6C_1 + {}_6C_2 + \cdots + {}_6C_5 = ({}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_6C_2 + \cdots + {}_6C_5 + {}_6C_6) - ({}_6C_0 + {}_6C_6) \\ &= (1 + 1)^6 - (1 + 1) = 62 \end{aligned}$$

따라서 구하는 경우의 수는 $664 - 62 = 602$

(다른 풀이)

$n(B) = 1$ 인 집합 B 의 개수 ${}_6C_1 = 6$ $\rightarrow$ 집합 A 의 개수 $2^1 - 1 = 1$

$n(B) = 2$ 인 집합 B 의 개수 ${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ $\rightarrow$ 집합 A 의 개수 $2^2 - 1 = 3$

$n(B) = 3$ 인 집합 B 의 개수 ${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ $\rightarrow$ 집합 A 의 개수 $2^3 - 1 = 7$

$n(B) = 4$ 인 집합 B 의 개수 ${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$ $\rightarrow$ 집합 A 의 개수 $2^4 - 1 = 15$

$n(B) = 5$ 인 집합 B 의 개수 ${}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$ $\rightarrow$ 집합 A 의 개수 $2^5 - 1 = 31$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 1 + 15 \times 3 + 20 \times 7 + 15 \times 15 + 6 \times 31 = 602$$

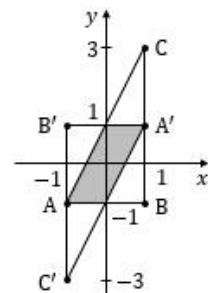
[2]

(1) 원점을 중심으로 대칭이동한 세 점은

$A'(1, 1)$, $B'(-1, 1)$, $C'(-1, -3)$

두 삼각형이 겹치는 영역의 넓이는

평행사변형의 넓이이므로 $1 \times 2 = 2$



(2) 삼각형 ABC 를 고정하고, 삼각형 $A'B'C'$ 을 x 축 방향으로 평행이동하여 영역의 넓이를 구한다. 점 A' 의 좌표를 $A'(a, 1)$ 이라 하면, 두 삼각형이 겹치는 경우는 $0 < a < 3$ 이므로

(i) $0 < a \leq 1$ 일 때

그림 (a)에서 평행사변형의 넓이 $S = a \times 2 \leq 2$

(ii) $1 < a \leq 2$ 일 때

그림 (b)에서 겹치는 영역의 넓이 S 는 점 A 와 점 A' 을 대각선 양 끝점으로 하는 평행사변형의 넓이에 서 양쪽 모서리 삼각형의 넓이를 뺀 것이므로

$$S = (a \times 2) - 2 \times \left\{ \frac{1}{2} \times (a-1) \times 2 \times (a-1) \right\} = -2a^2 + 6a - 2$$

$$S' = -4a + 6 = 0 \text{에서 } a = \frac{3}{2}$$

$$\text{이때, 최댓값은 } S\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \times \left(\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{5}{2}$$

$$(\text{참고, } S = -2a^2 + 6a - 2 = -2\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \text{에서 } a = \frac{3}{2} \text{일 때 최댓값은 } \frac{5}{2})$$

(iii) $2 < a < 3$ 일 때

그림 (c)에서 직사각형의 넓이 $S = (3-a) \times 2 \leq 2$

(참고, 삼각형 $A'B'C'$ 을 고정하고 삼각형 ABC 를 평행이동하여 같은 방법으로 구할 수 있다.)

(i), (ii), (iii)으로부터 두 삼각형이 겹치는 영역의 넓이의 최댓값은 $\frac{5}{2}$

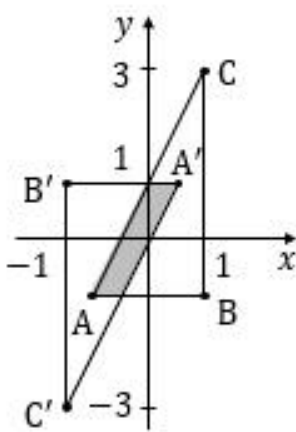


그림 (a)

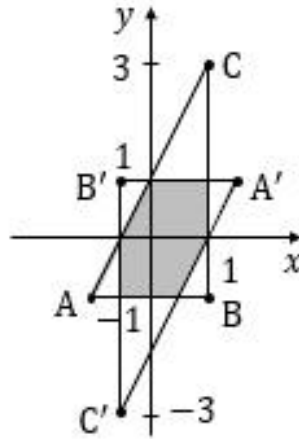


그림 (b)

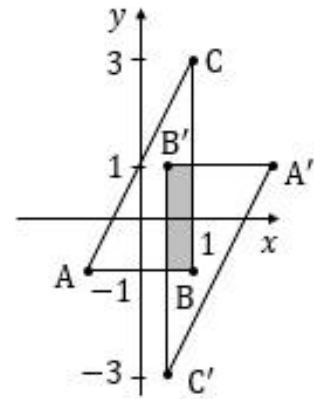


그림 (c)

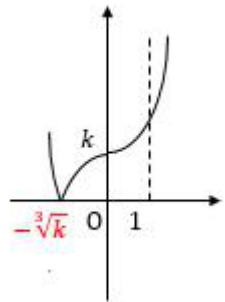
[3]

(1) $y = x^3 + k$ 의 x 절편은 $x = \sqrt[3]{-k} = -\sqrt[3]{k}$ 이므로

$x = -\sqrt[3]{k}$ 가 적분구간 $[0, 1]$ 에 속하는 경우와 속하지 않는 경우로 나누어 $S(k)$ 를 구한다.

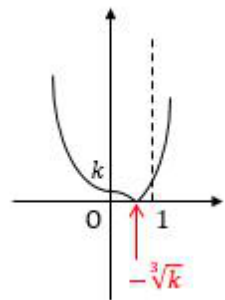
(i) $-\sqrt[3]{k} \leq 0$ 에서 $k \geq 0$ 일 때

$$S(k) = \int_0^1 (x^3 + k) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + kx \right]_0^1 = k + \frac{1}{4}$$



(ii) $0 < -\sqrt[3]{k} < 1$ 에서 $-1 < k < 0$ 일 때

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_0^{-\sqrt[3]{k}} (-x^3 - k) dx + \int_{-\sqrt[3]{k}}^1 (x^3 + k) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 - kx \right]_0^{-\sqrt[3]{k}} + \left[\frac{1}{4}x^4 + kx \right]_{-\sqrt[3]{k}}^1 \\ &= \frac{3}{2}k\sqrt[3]{k} + k + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

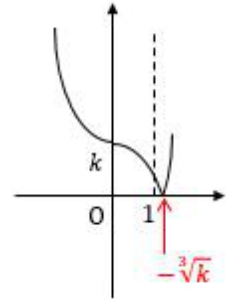


(iii) $-\sqrt[3]{k} \geq 1$ 에서 $k \leq -1$ 일 때

$$S(k) = \int_0^1 (-x^3 - k)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 - kx \right]_0^1 = -k - \frac{1}{4}$$

따라서

$$S(k) = \begin{cases} -k - \frac{1}{4} & (k \leq -1) \\ \frac{3}{2}k\sqrt[3]{k} + k + \frac{1}{4} & (-1 < k < 0) \\ k + \frac{1}{4} & (k \geq 0) \end{cases}$$



(2) 각 구간에서 $S(k)$ 의 최솟값을 구하면,

(i) $k \leq -1$ 일 때

$$S(k) = -k - \frac{1}{4} \geq \frac{3}{4}$$

(ii) $-1 < k < 0$ 일 때

$$S(k) = \frac{3}{2}k\sqrt[3]{k} + k + \frac{1}{4} \text{이므로 } S'(k) = 2\sqrt[3]{k} + 1 = 0 \text{에서 } k = -\frac{1}{8} \text{이고,}$$

$k = -\frac{1}{8}$ 의 좌우에서 $S'(k)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

$k = -\frac{1}{8}$ 에서 극소이고 최솟값은 $\frac{7}{32}$

(참고, $S''(k) = \frac{2}{3\sqrt[3]{k^2}}$ 에서 $S''\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{8}{3} > 0$ 이므로 극소)

(iii) $k \geq 0$ 일 때

$$S(k) = k + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$$

(i), (ii), (iii)으로부터 $k = -\frac{1}{8}$ 일 때 $S(k)$ 의 최솟값은 $\frac{7}{32}$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	집합 A (공집합 제외)와 집합 B (공집합과 전체집합 제외)의 조건을 구했으면	2
	두 집합의 포함관계를 이용하여 각각의 경우의 수를 구했으면 (이항정리를 이용하거나 직접 계산한 경우 모두 인정)	6
	조건에 해당하는 경우의 수 602를 구했으면	2
2-1	대칭이동한 세 점을 $A'(1, 1)$, $B'(-1, 1)$, $C'(-1, -3)$ 으로 구했으면	4
	겹치는 영역의 넓이 2를 구했으면	2
2-2	두 삼각형을 좌표평면으로 대응하고 평행이동에 따른 변수를 설정했으면	4
	구간에 따라 겹치는 영역을 설정한 변수의 함수로 표현하면 (평행이동에 따라 변하는 영역의 넓이를 함수로 표현하면 부분 점수 인정)	6
	겹치는 영역의 최댓값 $\frac{5}{2}$ 을 구했으면 (도함수 또는 완전제곱 형태 계산 모두 인정)	4
3-1	$y = x^3 + k$ 의 근 $x = -\sqrt[3]{k}$ 에 따라 함수 $S(k)$ 의 구간을 나누면	2
	각 구간의 적분을 계산하여 구간에 따른 함수 $S(k)$ 를 구하면	6
	전체 구간에 대한 함수 $S(k)$ 를 구하면	2
3-2	구간을 나눠 각 구간의 최솟값을 구하면	4
	$-1 < k < 0$ 일 때, 최솟값 $\frac{7}{32}$ 을 구하면	4
	함수 $S(k)$ 가 최소가 되는 $k = -\frac{1}{8}$ 과 최솟값 $\frac{7}{32}$ 을 구하면	2

1교시 · 문제 2

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

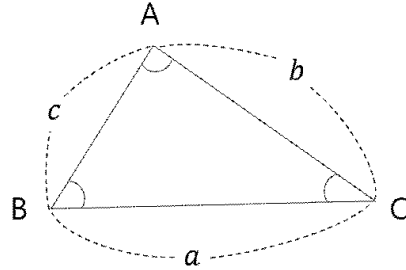
제시문

1. 삼각형 ABC에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (단, x 의 단위는 라디안)

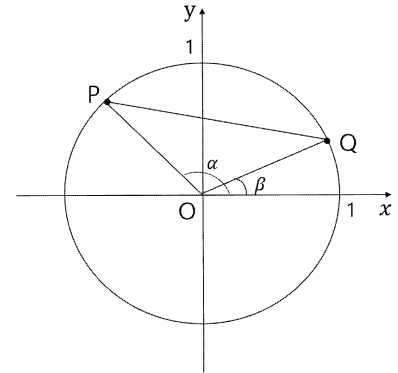
3. 좌표평면 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

[1] 오른쪽 그림과 같이 두 각 α, β 를 나타내는 동경이 단위원과 만나는 점을 각각 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $Q(\cos \beta, \sin \beta)$ 라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) 코사인함수의 덧셈정리 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 를 증명하시오. [8점]

(2) (1)의 식을 이용하여 $(\cos x)' = -\sin x$ 를 증명하시오. [8점]



[2] 실수 a 와 자연수 b 에 대하여 $z = (1 + i)^{2025} + a(i - 1)^{2026}$ 이 실수가 되게 하는 a 의 값을 구하고, 그때의 z 에 대하여 $\log_b z$ 가 자연수가 되게 하는 b 의 개수를 구하시오. [12점]

[3] 직선 $y = ax$ 와 원 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$ 는 원점과 원점이 아닌 점 P에서 만난다. 점 $Q\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, a 는 -7 과 1 이 아닌 실수)

(1) 삼각형 OPQ의 넓이를 $f(a)$ 라 할 때, 함수 $f(a)$ 를 구하시오. [10점]

(2) 함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내고 극값을 구하시오. [12점]

■ 예시 답안

[1]

(1) 삼각형 POQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2 \times \overline{OP} \times \overline{OQ} \times \cos(\angle POQ)$$

이고 $\overline{OP} = \overline{OQ} = 1$, $\angle POQ = \alpha - \beta$ 이므로

$$\overline{PQ}^2 = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

이다. 또, 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

이므로

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

이다. 이 식을 정리하면

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

가 성립한다. ①에 β 대신 $-\beta$ 를 대입하여 정리하면

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

(2)

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \cos x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

제시문에서 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ 이므로 다음을 얻는다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h^2} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{(\cos h + 1)} = 0$$

따라서

$$(\cos x)' = -\sin x$$

[2]

$$z = (1+i)^{2025} + a(i-1)^{2026} = (1+i)^{2025} + a(1-i)^{2026}$$

$1+i = \alpha$, $1-i = \beta$ 라고 하면 α, β 는 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 의 두 근이다.

$$x^4 = x^{2 \times 2} = (2x - 2)^2 = 2^2(x^2 - 2x + 1) = -2^2$$

$$x^8 = 2^4$$

이므로 다음을 얻는다.

(참고. $(1+i)^8 = (i-1)^8 = 2^4$ 을 직접 계산해도 됨.)

$$(1+i)^{2025} = \alpha^{8 \times 253 + 1} = 2^{1012} \alpha = 2^{1012}(1+i)$$

$$(1-i)^{2026} = \beta^{8 \times 253 + 2} = 2^{1012} \beta^2 = 2^{1012}(-2i)$$

이로부터

$$z = 2^{1012}(1+i-2ai)$$

z 가 실수가 되게 하는 a 는 $\frac{1}{2}$ 이며 그때 $z = 2^{1012} = 2^{2^2 \times 11 \times 23}$

$\log_b 2^{2^2 \times 11 \times 23} = p$ 라 놓으면

$$\log_b z = \log_b 2^{2^2 \times 11 \times 23} = p \iff b = 2^{\frac{2^2 \times 11 \times 23}{p}}$$

b 가 자연수이면서 p 도 자연수가 되려면 p 는 $2^2 \times 11 \times 23 (= 1012)$ 의 약수이면 된다.

b 의 개수는 $2^2 \times 11 \times 23 (= 1012)$ 의 약수의 개수와 같다.

(참고. 2^2 의 약수: 1, 2, 2^2 , 11의 약수: 1, 11, 23의 약수: 1, 23을 이용하여 약수의 개수를 구한다.)

$2^2 \times 11 \times 23 (= 1012)$ 의 약수의 개수는 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 개

따라서 b 의 개수는 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 개

[3]

(1) 삼각형 OPQ의 넓이 $= \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times (\text{점 Q와 직선 } y = ax \text{와의 거리}) \dots\dots ①$

$\overline{OP}$ 는 오른쪽 그림과 같이 점과 직선과의 거리 공식과 피타고라스 정리를 이용하여 구할 수 있다. 원의 중심 $(1, -1)$ 과 직선 $y = ax$ 와의 거리는 $\frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}}$ 이므로

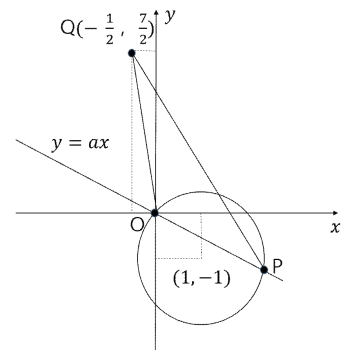
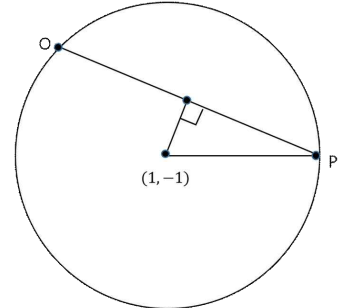
$$\overline{OP} = 2\sqrt{2 - \frac{(a+1)^2}{a^2+1}} = \frac{2|a-1|}{\sqrt{a^2+1}} \dots\dots ②$$

(참고. 직선 $y = ax$ 와 원 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 의 교점을 구하여 $\overline{OP}$ 의 거리를 구해도 됨)

점 $Q(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ 와 직선 $y = ax$ 와의 거리는 $\frac{|a+7|}{2\sqrt{a^2+1}} \dots\dots ③$

②와 ③을 ①에 대입하면 삼각형 OPQ의 넓이, 즉 $f(a)$ 를 얻는다.

$$f(a) = \frac{|(a-1)(a+7)|}{2(a^2+1)} \quad (\text{단, } a \neq 1, -7)$$



([3] (1)의 다른 풀이)

삼각형 OPQ의 넓이 $= \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times (\text{점 P와 직선 } y = -7x \text{와의 거리}) \dots\dots ④$

$$\overline{OQ} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \dots\dots ⑤$$

$y = ax$ 와 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 의 교점을 구하면 원점과 점 $P(\frac{-2(a-1)}{a^2+1}, \frac{-2a(a-1)}{a^2+1})$ 이다.

점 P와 직선 $y = -7x$ 와의 거리는 $\frac{2|(a-1)(a+7)|}{5\sqrt{2}(a^2+1)} \dots\dots ⑥$

⑤와 ⑥을 ④에 대입하면 $f(a) = \frac{|(a-1)(a+7)|}{2(a^2+1)}$ (단, $a \neq 1, -7$)

(2) $g(a) = \frac{(a-1)(a+7)}{2(a^2+1)}$ 라고 하자.

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{(2a+6)(a^2+1) - (a^2+6a-7)2a}{2(a^2+1)^2} = \frac{-(3a^2-8a-3)}{(a^2+1)^2} \\ &= \frac{-(3a+1)(a-3)}{(a^2+1)^2} \end{aligned}$$

$f(a) = |g(a)|$ 이므로

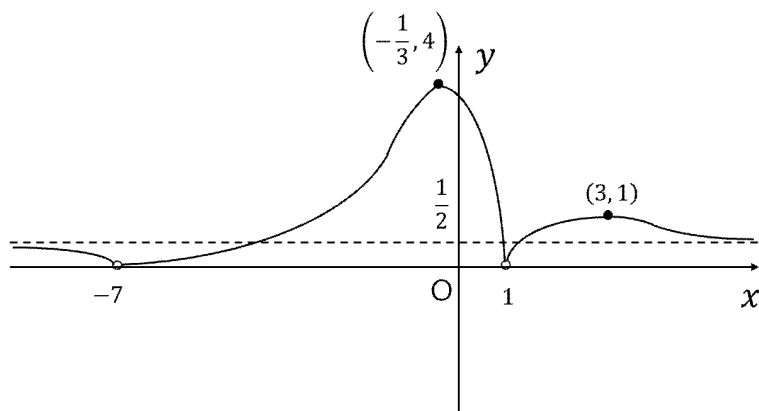
$a = -\frac{1}{3}$ 에서 $g(a)$ 는 극소이며 $f(a)$ 는 극대이고 극댓값은 4

$a = 3$ 에서 $g(a)$ 와 $f(a)$ 는 극대이고 극댓값은 1

함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 아래와 같다.

a	...	(-7)	...	$-\frac{1}{3}$	...	(1)	...	3	...
$f'(a)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$
$f(a)$	$\searrow$		$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$

(참고. $y = f(x)$ 의 그래프 개형은 아래와 같다.)



■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1 (8점)	코사인법칙에 의하여 $\overline{PQ}^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$ 을 보이면	2
	두 점 사이의 거리 공식에 의하여 $\overline{PQ}^2 = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$ 을 보이면	2
	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ 을 보이면	2
	β 대신 $-\beta$ 를 대입하여 정리하면 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ 을 보이면	2
[1](2) (8점)	$(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$ 을 보이면	2
	$(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$ 을 보이면	2
	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h^2} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{(\cos h + 1)} = 0$ 을 보이면	4

하위 문항	채점 기준	배점
[2] (12점)	$z = 2^{1012}(1 + i - 2ai)$ 을 구하면	4
	$a = \frac{1}{2}$ 을 구하고 $z = 2^{1012} = 2^{2^2 \times 11 \times 23}$ 을 보이면	4
	두 자연수의 관계 $b = 2^{\frac{2^2 \times 11 \times 23}{p}}$ 을 보이고 b 의 개수 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 개를 구하면	4
[3](1) (10점)	$\overline{OP} = \frac{2 a-1 }{\sqrt{a^2+1}}$ 혹은 $\overline{OQ} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 을 구하면	4
	$Q\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 와 직선 $y = ax$ 와의 거리 $\frac{ a+7 }{2\sqrt{a^2+1}}$ 을 구하면, 혹은 $P\left(\frac{-2(a-1)}{a^2+1}, \frac{-2a(a-1)}{a^2+1}\right)$ 와 직선 $y = -7x$ 와의 거리 $\frac{2 (a-1)(a+7) }{5\sqrt{2}(a^2+1)}$ 을 구하면	4
	$f(a) = \frac{ (a-1)(a+7) }{2(a^2+1)}$ (단, $a \neq 1, -7$)을 구하면	2
[3](2) (12점)	$f(a) = g(a) $ 라 놓고 $g'(a) = \frac{-(3a+1)(a-3)}{(a^2+1)^2}$ 을 구하면	4
	$a = -\frac{1}{3}$ 에서 $f(a)$ 의 극댓값은 4, $a = 3$ 에서 $f(a)$ 의 극댓값은 1	4
	함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면	4

2교시 · 문제 1

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

1. ① $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
 ② $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 ③ $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$
2. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프와 직선 $y = mx + n$ 의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $ax^2 + bx + c = mx + n$, 즉 $ax^2 + (b-m)x + c-n = 0$ 의 실근과 같다.
3. 모집단이 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 경우, 크기가 n 인 표본을 임의 추출하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 을 따른다.

- [1] $\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=2}^{10} k^2 + \sum_{k=3}^{10} k^2 + \dots + \sum_{k=9}^{10} k^2$ 의 값을 구하시오. [8점]
- [2] x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 + 2(k+1)x + k + 3$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.
 (1) 실수 k 값에 관계없이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 지나는 점의 좌표를 구하시오. [8점]
 (2) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 두 점 $A(-1, 1)$, $B(3, 5)$ 를 잇는 선분 AB 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k 값의 범위를 구하시오. [12점]
- [3] 평행한 두 직선 l 과 m 위에 각각 5개의 점과 7개의 점이 그림 (a)와 같이 놓여 있다. 직선 l 위의 점과 직선 m 위의 점을 연결하여 서로 다른 세 개의 선분을 그을 때, 선분이 교차하지 않는 경우의 수를 구하시오. (단, 선분의 시작점이나 끝점에서 두 선분이 만나는 경우는 교차하지 않는 것으로 본다. 예를 들어 그림 (b)는 교차하지 않는 경우이고 그림 (c)는 교차하는 경우이다.) [12점]



그림 (a)

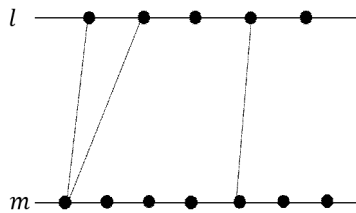


그림 (b)

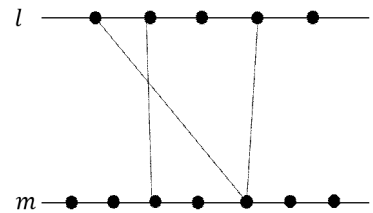


그림 (c)

- [4] K회사에서 생산하는 향수에 들어 있는 천연 성분의 무게는 평균 150mg, 표준편차 5mg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 향수 중에서 임의 추출한 100개의 향수에 들어 있는 천연 성분의 무게의 평균을 $\bar{X}$ 라 할 때, $P(\bar{X} \geq 300 - 5k) \leq 0.98$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최댓값을 구하시오. (단, $P(-2.05 \leq Z \leq 2.05) = 0.96$) [10점]

■ 예시 답안

[1]

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{10} k^2 &= \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{m-1} k^2 \\ \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=2}^{10} k^2 + \sum_{k=3}^{10} k^2 + \cdots + \sum_{k=9}^{10} k^2 &= \sum_{m=1}^9 \left(\sum_{k=m}^{10} k^2 \right) = \sum_{m=1}^9 \left(\sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{m-1} k^2 \right) \\ &= \sum_{m=1}^9 \left\{ \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} \right\} \\ &= \sum_{m=1}^9 \left\{ \frac{2310 - 2m^3 + 3m^2 - m}{6} \right\} = \frac{1}{6} \left\{ 2310 \times 9 - 2 \times \left(\frac{9 \times 10}{2} \right)^2 + 3 \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} - \frac{9 \times 10}{2} \right\} \\ &= 2925 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} &1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 + 10^2 \\ &\quad + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 + 10^2 \\ &\quad \quad + 3^2 + \cdots + 9^2 + 10^2 \\ &\quad \quad \quad \vdots \\ &\quad \quad \quad + 9^2 + 10^2 \end{aligned}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3 + 9 \times 10^2 = \sum_{k=1}^9 k^3 + 900 = \left(\frac{9 \times 10}{2} \right)^2 + 900 = 2925$$

[2]

(1) $y = f(x) = x^2 + 2(k+1)x + k + 3$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$(2x+1)k + x^2 + 2x + 3 - y = 0$$

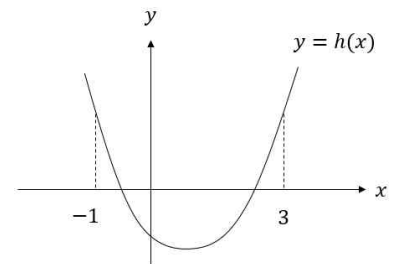
$$2x+1=0 \text{에서 } x = -\frac{1}{2}, \quad x^2 + 2x + 3 - y = 0 \text{에서 } y = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4} \right)$$

(2)

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $y = x + 2$ 이다.

$g(x) = x + 2$, $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하자. $f(x)$ 의 그래프가 선분 AB와 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차함수 $h(x) = x^2 + (2k+1)x + k+1$ 의 그래프의 개형이 오른쪽과 같아야 한다.



따라서

(i) $h(-1) \geq 0$ 에서 $-k+1 \geq 0 \therefore k \leq 1$

(ii) $h(3) \geq 0$ 에서 $7k+13 \geq 0 \therefore k \geq -\frac{13}{7}$

(iii) 이차방정식 $h(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$D > 0 \text{에서 } D = (2k+1)^2 - 4(k+1) = 4k^2 - 3 > 0 \therefore k > \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } k < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(iv) $h(x)$ 의 축의 방정식이 $x = -\frac{2k+1}{2}$ 이므로 $-1 < -\frac{2k+1}{2} < 3 \therefore -\frac{7}{2} < k < \frac{1}{2}$

(i), (ii), (iii), (iv)의 공통 범위를 구하면 $-\frac{13}{7} \leq k < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

[3]

(i) 직선 l 위에서 서로 다른 점 3개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 3개를 선택하는 경우

$${}_5C_3 \times {}_7C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 350$$

(ii) 직선 l 위에서 서로 다른 점 3개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 2개를 선택하는 경우

$${}_5C_3 \times {}_7C_2 \times 2 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} \times 2 = 420$$

(iii) 직선 l 위에서 서로 다른 점 3개, 직선 m 위에서 점 1개를 선택하는 경우

$${}_5C_3 \times {}_7C_1 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times 7 = 70$$

(iv) 직선 l 위에서 서로 다른 점 2개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 3개를 선택하는 경우

$${}_5C_2 \times {}_7C_3 \times 2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times 2 = 700$$

(v) 직선 l 위에서 서로 다른 점 2개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 2개를 선택하는 경우

$${}_5C_2 \times {}_7C_2 \times 2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} \times 2 = 420$$

(vi) 직선 l 위에서 점 1개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 3개를 선택하는 경우

$${}_5C_1 \times {}_7C_3 = 5 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 175$$

$$\therefore 350 + 420 + 70 + 700 + 420 + 175 = 2135$$

다른 풀이

선분이 교차하지 않는 모든 경우의 수는

$${}_5H_3 \times {}_7H_3 = {}_{5+3-1}C_3 \times {}_{7+3-1}C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 2940$$

이 경우 중 서로 다른 선분의 수가 3개가 아닌 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 l 위에서 서로 다른 점 2개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 2개를 선택하는 경우

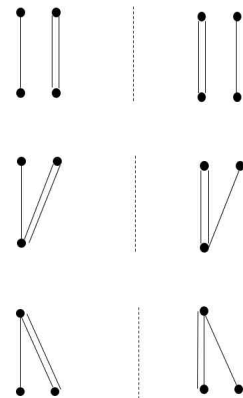
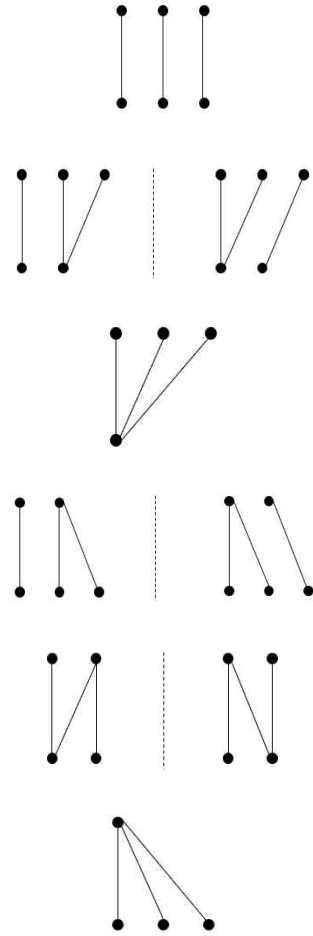
$${}_5C_2 \times {}_7C_2 \times 2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} \times 2 = 420$$

(ii) 직선 l 위에서 서로 다른 점 2개, 직선 m 위에서 점 1개를 선택하는 경우

$${}_5C_2 \times {}_7C_1 \times 2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 7 \times 2 = 140$$

(iii) 직선 l 위에서 점 1개, 직선 m 위에서 서로 다른 점 2개를 선택하는 경우

$${}_5C_1 \times {}_7C_2 \times 2 = 5 \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} \times 2 = 210$$



(iv) 직선 l 위에서 점 1개, 직선 m 위에서 점 1개를 선택하는 경우

$${}_5C_1 \times {}_7C_1 = 5 \times 7 = 35$$

$$\therefore 2940 - (420 + 140 + 210 + 35) = 2135$$

[4]

모집단이 정규분포 $N(150, 5^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(150, \frac{5^2}{100}\right)$, 즉 $N\left(150, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다. 이때 $\bar{X}$ 를 $Z = \frac{\bar{X} - 150}{1/2}$ 로 나타내면 Z 는 정규분포 $N(0, 1^2)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X} \geq 300 - 5k) \leq 0.98 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 300 - 5k) &= P(Z \geq 300 - 10k) = P(300 - 10k \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0) \\ &= P(300 - 10k \leq Z \leq 0) + 0.5 \leq 0.98 \end{aligned}$$

$$\therefore P(300 - 10k \leq Z \leq 0) \leq 0.48 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $P(-2.05 \leq Z \leq 2.05) = 0.96$ 이므로

$$P(-2.05 \leq Z \leq 2.05) = P(-2.05 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.05) = 2 \times P(-2.05 \leq Z \leq 0) = 0.96$$

$$\therefore P(-2.05 \leq Z \leq 0) = 0.48 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 300 - 10k \geq -2.05$$

$$10k \leq 302.05 \quad \therefore k \leq 30.205$$

자연수 k 의 최댓값은 30

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]	$\sum_{k=m}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{m-1} k^2$ 을 활용하거나 계산의 상당 부분을 올바르게 계산한 경우	3
	정답 2925를 얻으면	5
[2](1)	주어진 식을 k 에 대해 정리하여 $(2x+1)k + x^2 + 2x + 3 - y = 0$ 을 얻으면	3
	정답 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ 을 올바르게 구하면	5
2	$k \leq 1$ 과 $k \geq -\frac{13}{7}$ 을 얻으면	3
	$k > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $k < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 얻으면	3
	$-\frac{7}{2} < k < \frac{1}{2}$ 을 얻으면	3
	$-\frac{13}{7} \leq k < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 얻으면	3

하위 문항	채점 기준	배점
[3]	예시 답안과 같이 계산에 필요한 경우들을 올바르게 분류한 경우	4
	각 분류한 경우들에 대해 거의 대부분 올바르게 계산한 경우	4
	2135를 얻으면	4
[4]	표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(150, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다는 것을 제시하면	2
	식을 올바르게 변형하여 $300 - 10k \geq -2.05$	5
	자연수 k 의 최댓값 30을 얻으면	3

2교시 · 문제 2

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

1. 함수 $f(t)$ 가 실수 a 를 포함하는 구간에서 연속이면 이 구간에 속하는 임의의 x 에 대하여

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

2. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

3. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$f(x) \leq g(x) \text{ 이면 } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

- [1] 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오. (단, $a_1 = 2$)

$$a_n + b_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n, \quad a_nb_n = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left\{ (2 + \sqrt{3})^{2n} - (2 - \sqrt{3})^{2n} \right\}$$

- (1) a_n 과 b_n 을 구하시오. [10점]

- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n(a_n^2 - 3b_n^2)}{a_n}$ 의 값을 구하시오. [8점]

- [2] 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 방정식 $f(x) - 1 = 0$ 의 근을 구하시오.
(단, $0 \leq x < 2\pi$) [14점]

$$f(x) + \int_0^x f(t)dt = x - \cos x + \frac{3}{2}$$

- [3] 모든 실수 x 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(x) > 0$ 이고 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오.

$$(가) f(0) = 1$$

$$(나) f(x) \leq 2f'(x)$$

$$(다) \{f(x)\}^2 \leq \int_0^x \{f(t)\}^2 dt + 1$$

- (1) $\int_0^x 2f(t)f'(t)dt = \{f(x)\}^2 - 1$ 이 성립함을 보이시오. [6점]

- (2) 함수 $f(x)$ 를 구하시오. [12점]

■ 예시 답안

[1]

(1) 이차방정식의 근과 계수의 관계로부터 a_n 과 $b_n\sqrt{3}$ 은 다음 이차방정식의 두 근이다.

$$x^2 - (2 + \sqrt{3})^n x + \frac{1}{4} \left\{ (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right\} \left\{ (2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right\} = 0$$

이 식을 인수분해하면

$$\left\{ x - \frac{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n}{2} \right\} \left\{ x - \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2} \right\} = 0$$

$$a_1 = 2 \text{이므로 } a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n}{2}, b_n\sqrt{3} = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2}$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{1}{2} \left\{ (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right\}, b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left\{ (2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right\}$$

(2) (1)에서 $a_n - b_n\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^n$ 이므로

$$a_n^2 - 3b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{3})(a_n - b_n\sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n = 1$$

$$\left| \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right| < 1 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^n = 0$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n(a_n^2 - 3b_n^2)}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1 - \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^n}{1 + \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right)^n} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

[2]

$$\text{문제에서 } f(x) + \int_0^x f(t)dt = x - \cos x + \frac{3}{2} \quad \dots\dots ①$$

식 ①의 양변을 미분하면

$$f'(x) + f(x) = 1 + \sin x$$

이 식의 양변에 e^x 를 곱하면

$$e^x \{f'(x) + f(x)\} = e^x (1 + \sin x) \quad \dots\dots ②$$

$\{e^x f(x)\}' = e^x f'(x) + e^x f(x)$ 이므로 식 ②의 양변을 적분하면

$$e^x f(x) = \int (e^x + e^x \sin x)dx = e^x + \int e^x \sin x dx \quad \dots\dots ③$$

부분적분법에 의하여

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \right)$$

$$\text{이므로 } \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

$$\text{③에서 } e^x f(x) = e^x + \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \quad \dots\dots ④$$

식 ①의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $f(0) = \frac{1}{2}$ 이므로 $C = 0$

그러므로 ④에서 $e^x f(x) = e^x + \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$ 이고 $e^x > 0$ 이므로

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$$

방정식 $f(x) - 1 = 0$ 으로부터 $\sin x = \cos x$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 방정식의 근은 } x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

[3]

(1) $\frac{d}{dx}\{f(x)\}^2 = 2f(x)f'(x)$ 이므로

$$\int_0^x 2f(t)f'(t)dt = \int_0^x \frac{d}{dt}\{f(t)\}^2 dt = [\{f(t)\}^2]_0^x = \{f(x)\}^2 - \{f(0)\}^2 = \{f(x)\}^2 - 1$$

(2) (1)에서 $\int_0^x 2f(t)f'(t)dt = \{f(x)\}^2 - 1$

조건 (다)로부터 $\int_0^x 2f(t)f'(t)dt \leq \int_0^x \{f(t)\}^2 dt \dots\dots ①$

조건 (나)의 부등식의 양변에 $f(x)$ 를 곱하면 $f(x) > 0$ 이므로 $\{f(x)\}^2 \leq 2f(x)f'(x)$

양변을 적분하면 $\int_0^x \{f(t)\}^2 dt \leq \int_0^x 2f(t)f'(t)dt \dots\dots ②$

①, ②로부터 $\int_0^x \{f(t)\}^2 dt = \int_0^x 2f(t)f'(t)dt$

양변을 미분하면 정적분과 미분의 관계로부터 $\{f(x)\}^2 = 2f(x)f'(x)$

$f(x) > 0$ 이므로 $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}$ 이고, 양변을 적분하면 $\ln f(x) = \frac{1}{2}x + C$

조건 (가)로부터 $f(0) = 1$ 이므로 $C = 0$

따라서 $\ln f(x) = \frac{1}{2}x$ 이고 $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$x^2 - (2 + \sqrt{3})^n x + \frac{1}{4}\{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n\}\{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n\} = 0$ 의 두 근이 a_n 과 $b_n\sqrt{3}$ 이라는 것을 쓰면	4점
	인수분해하면 $\left\{x - \frac{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n}{2}\right\}\left\{x - \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2}\right\} = 0$	2점
	$a_n = \frac{1}{2}\{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n\}$, $b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n\}$ 을 구하면	4점
[1](2)	$a_n - b_n\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^n$ 과 $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ 을 구하면	4점
	$\left \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right < 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right)^n = 0$	2점
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n(a_n^2 - 3b_n^2)}{a_n} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 을 구하면	2점

하위 문항	채점 기준	배점
[2]	$f'(x) + f(x) = 1 + \sin x$ 를 구하면	2점
	적분하면 $e^x f(x) = \int (e^x + e^x \sin x) dx = e^x + \int e^x \sin x dx$	3점
	부분적분법으로 $e^x f(x) = e^x + \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$	3점
	$f(0) = \frac{1}{2}$ 과 $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$ 를 구하면	3점
	$\sin x = \cos x$ 와 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ 를 구하면	3점
[3](1)	$\frac{d}{dx}\{f(x)\}^2 = 2f(x)f'(x)$ 를 쓰면	2점
	$\int_0^x 2f(t)f'(t)dt = [\{f(t)\}^2]_0^x = \{f(x)\}^2 - 1$ 임을 보이면	4점
[3](2)	$\int_0^x 2f(t)f'(t)dt \leq \int_0^x \{f(t)\}^2 dt$ 임을 보이면	2점
	$\int_0^x \{f(t)\}^2 dt = \int_0^x 2f(t)f'(t)dt$ 임을 보이면	3점
	$\ln f(x) = \frac{1}{2}x + C$ 를 구하면	4점
	$f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ 를 구하면	3점

2025학년도 자연계열

1교시 · 문제 1

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

1. 점 $P(x_1, y_1)$ 와 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. 서로 다른 n 개에서 r 개를 선택하는 순열의 수는

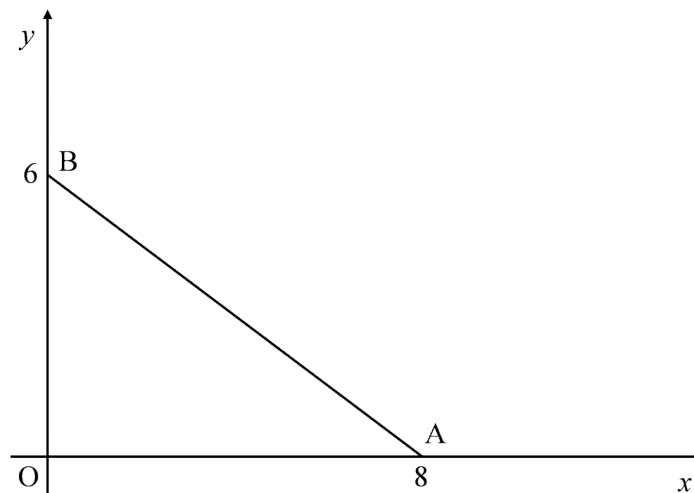
$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 < r \leq n)$$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 \quad (\text{단, } 0! = 1)$$

3. 서로 다른 n 개에서 r 개를 선택하는 조합의 수는

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 < r \leq n)$$

[1] 좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(8, 0)$, $B(0, 6)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB 가 있다.



- (1) 삼각형 OAB 의 외접원과 내접원의 방정식을 각각 구하시오. [10점]
 (2) 삼각형 OAB 의 외접원 위의 점과 내접원 위의 점 사이의 거리의 최솟값과 최댓값을 구하시오. [14점]

[2] 다음은 놀이동산 광운랜드를 방문한 7명 학생들의 광운랜드 도착순서, 학생명, 성별, 학년을 나타낸 표이다.

광운랜드 도착순서	학생명	성별	학년
1	박 옥의	여	1학년
2	정 복지	여	1학년
3	김 화도	남	3학년
4	최 문화	여	1학년
5	이 비마	여	2학년
6	조 한울	남	1학년
7	강 참빛	남	1학년

인솔교사는 모든 학생들에게 광운청룡열차의 1인용 좌석을 배정하고자 한다.

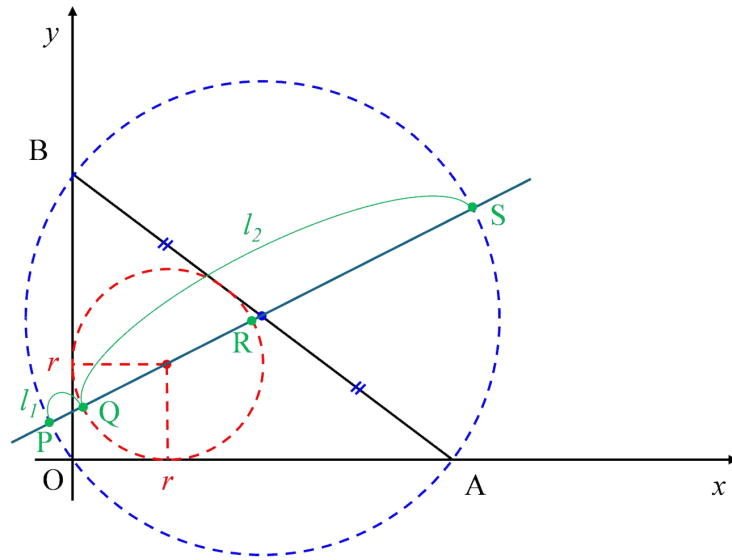
광운청룡열차 좌석표							
좌석번호	1	2	3	4	5	6	7
학 생 명							

- (1) 학생 7명의 좌석을 배정할 때, 광운랜드에 가장 빨리 도착한 3명을 1번, 2번, 3번 좌석에 도착순서에 상관없이 나누어 배정하는 경우의 수를 구하시오. [4점]
- (2) 학생 7명의 좌석을 배정할 때, 2학년 학생과 3학년 학생 사이에 1학년 여학생 2명과 1학년 남학생 2명만을 배정하는 경우의 수를 구하시오. [7점]
- (3) 학생 7명의 좌석을 배정할 때, 다음 조건을 모두 만족시키는 경우의 수를 구하시오. [15점]

- (가) 3학년 학생 바로 앞번호 좌석과 바로 뒷번호 좌석 중 하나에 1학년 여학생 1명, 나머지 하나에 1학년 남학생 1명을 배정한다.
- (나) 2학년 학생 바로 앞번호 좌석과 바로 뒷번호 좌석 중 하나에 1학년 여학생 1명, 나머지 하나에 1학년 남학생 1명을 배정한다.

■ 예시 답안

[1]



(1)

① 삼각형 OAB의 외접원은 세 점 $O(0,0)$, $A(8,0)$, $B(0,6)$ 을 지나고, 삼각형 OAB가 직각삼각형이기 때문에 선분 AB는 외접원의 지름이다. 따라서, 선분 AB의 중점의 좌표가 외접원의 중심(외심)의 좌표이다. 따라서, 외접원의 중심(외심)의 좌표는 $\left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (4,3)$ 이다. 외접원의 반지름은 선분 AB의 길이의 반이기 때문에, $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(8-0)^2 + (0-6)^2}}{2} = \frac{10}{2} = 5$ 이다.

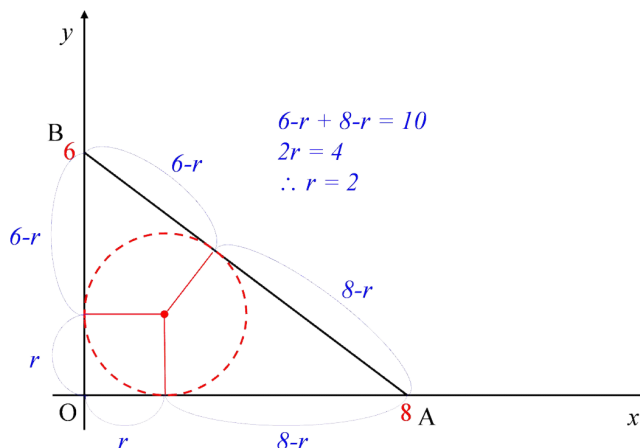
그러므로, 삼각형 OAB의 외접원의 방정식은 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$ 이다. 이를 전개하면, $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ 이다.

② 두 점 $A(8,0)$, $B(0,6)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y-0 = \frac{0-6}{8-0}(x-8)$ 이기 때문에, $y = -\frac{3}{4}x + 6$ 이다. 이를 정리하면, $3x + 4y = 24$ 또는 $3x + 4y - 24 = 0$ 이다.

직각삼각형 OAB의 내접원은 서로 수직인 x 축과 y 축에 동시에 접한다. 따라서, 내접원의 반지름을 r 이라고 하면, 내접원의 중심(내심)의 좌표는 (r, r) 이기 때문에 내접원의 방정식은 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이다.

내접원은 두 점 $A(8,0)$, $B(0,6)$ 을 지나는 직선에 접하기 때문에, 내접원의 중심(내심) (r, r) 에서 이 직선까지의 거리는 $\frac{|3r + 4r - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = r$ 이다. $|7r - 24| = 5r$ 이므로, 양변을 제곱하여 전개하면, $\{7r - 24\}^2 = 49r^2 - 336r + 576 = 25r^2$ 이다. 이를 정리하면, $24r^2 - 336r + 576 = 0$ 이기 때문에, $r^2 - 14r + 24 = (r-2)(r-12) = 0$ 이다. $r < 6$ 이기 때문에, $r = 2$ 이다.

(다른 풀이)



그러므로, 삼각형 OAB의 내접원의 방정식은 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$ 이다. 이를 전개하면, $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ 이다. ■

(2)

삼각형 OAB의 외심 (4, 3)와 내심 (2, 2)을 지나는 직선의 방정식을 구하면, $y - 2 = \frac{3-2}{4-2}(x-2)$ 이기 때문에, $y = \frac{1}{2}x + 1$ 이다. 삼각형 OAB의 외접원 위의 점과 내접원 위의 점 사이의 거리의 최솟값과 최댓값은 이 직선과 외접원 및 내접원이 만나는 교점 사이의 거리를 이용하여 찾을 수 있다.

이 직선과 삼각형 OAB의 외접원과 만나는 두 교점 P, S의 좌표를 구하면,

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 - 8x - 6\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 0$$

$$4x^2 + (x+2)^2 - 32x - 12(x+2) = 4x^2 + x^2 + 4x + 4 - 32x - 12x - 24 = 5x^2 - 40x - 20 = 5(x^2 - 8x - 4) = 0$$

$$x^2 - 8x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \times 1 \times (-4)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{80}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{5}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}(4 \pm 2\sqrt{5}) + 1 = 3 \pm \sqrt{5}$$

따라서, 두 교점의 좌표는 $P(4 - 2\sqrt{5}, 3 - \sqrt{5})$, $S(4 + 2\sqrt{5}, 3 + \sqrt{5})$ 이다.

이 직선과 삼각형 OAB의 내접원과 만나는 두 교점 Q, R의 좌표를 구하면,

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 - 4x - 4\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 4 = 0$$

$$4x^2 + (x+2)^2 - 16x - 8(x+2) + 16 = 4x^2 + x^2 + 4x + 4 - 16x - 8x - 16 + 16 = 5x^2 - 20x + 4 = 0$$

$$5x^2 - 20x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \times 5 \times 4}}{2 \times 5} = \frac{20 \pm \sqrt{320}}{10} = \frac{20 \pm 8\sqrt{5}}{10} = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{5}$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{5} + 1 = \frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5} + 1 = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{5}$$

따라서, 두 교점의 좌표는 $Q\left(\frac{10 - 4\sqrt{5}}{5}, \frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}\right)$, $R\left(\frac{10 + 4\sqrt{5}}{5}, \frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}\right)$ 이다.

그러므로,

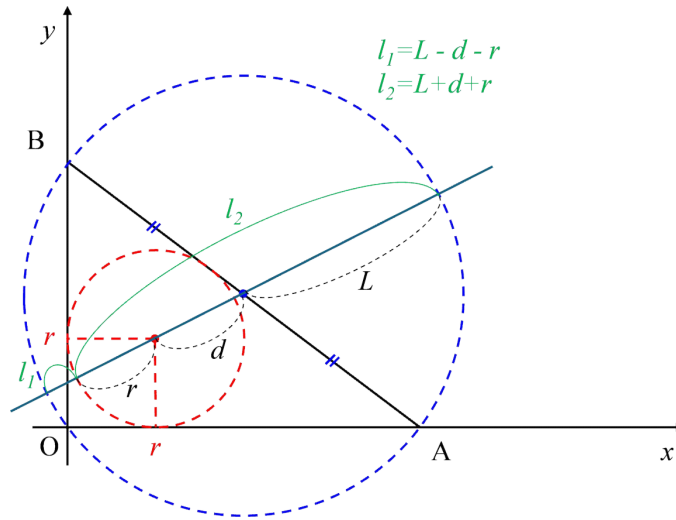
$$\text{최솟값 } l_1 = \overline{PQ} = \sqrt{\left(4 - 2\sqrt{5} - \frac{10 - 4\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(3 - \sqrt{5} - \frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}\right)^2},$$

$$= \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = 3 - \sqrt{5}$$

$$\text{최댓값 } l_2 = \overline{QS} = \sqrt{\left(4 + 2\sqrt{5} - \frac{10 - 4\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(3 + \sqrt{5} - \frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}\right)^2}.$$

$$= \sqrt{54 + 14\sqrt{5}} = \sqrt{(7 + \sqrt{5})^2} = 7 + \sqrt{5}$$

(다른 풀이)



$$\begin{aligned}
 L &= 5, \quad r = 2 \\
 d &= \sqrt{(4-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5} \\
 l_1 &= L - d - r = 5 - \sqrt{5} - 2 = 3 - \sqrt{5} \\
 l_2 &= L + d + r = 5 + \sqrt{5} + 2 = 7 + \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

[2]

(1)

좌석표에서 1번, 2번, 3번 좌석은 광운랜드 도착순서가 가장 빠른 3명의 학생에게 고정적으로 배정되어야 하기 때문에, (1번, 2번, 3번) 좌석을 제외하고 남은 4개의 좌석에 4등 이하의 도착순서를 가진 4명의 학생의 좌석을 배정한다. 4개의 좌석에 4명의 학생을 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 이다. 도착순서가 가장 빠른 박옥의, 정복지, 김화도 학생이 1번, 2번, 3번 좌석에서 자리를 바꾸는 것은 3개의 좌석에 3명의 학생을 배열하는 것과 같기 때문에, 경우의 수는 ${}_3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이다.

그러므로, 도착순서가 가장 빠른 3명을 1번, 2번, 3번 좌석에 도착순서에 상관없이 나누어 배정하는 경우의 수는 ${}_4P_4 \times {}_3P_3 = 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$ 이다. ■

(2)

2학년 학생과 3학년 학생 사이에 4명의 학생이 있는 경우는 각각 (2학년)□□□□(3학년)과 (3학년)□□□□(2학년) 배열이 있는 경우이고, 각 경우의 수는 동일하다.

① (2학년)□□□□(3학년)을 하나의 학생이라고 생각하고, 나머지 1명의 학생과 합쳐 총 $2(=1+1)$ 명의 학생을 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2! = 2$ 이다.

그런데, 1학년 여학생 3명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ 이고, 1학년 남학생 2명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$ 이다. 이렇게 선택된 1학년 여학생 2명과 남학생 2명을 □□□□에 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_4 = 4! = 24$ 이다.

따라서, 2학년 학생과 3학년 학생 사이에 1학년 여학생 2명과 1학년 남학생 2명만을 배정하는 경우의 수는 ${}_2P_2 \times {}_3C_2 \times {}_2C_2 \times {}_4P_4 = 2 \times 3 \times 1 \times 24 = 144$ 이다.

② (3학년)□□□□(2학년)인 경우도 같은 방법으로 구하면, 경우의 수는 144이다.

그러므로, 2학년 학생과 3학년 학생 사이에 1학년 여학생 2명과 1학년 남학생 2명만을 배정하는 경우의 수는 $288(=2 \times 144)$ 이다. ■

(3)

좌석표에 3학년 학생 바로 앞번호 좌석과 바로 뒷번호 좌석 중 하나에 1학년 여학생 1명, 나머지 하나에 1학년 남학생 1명을 배정하고, 2학년 학생 바로 앞번호 좌석과 바로 뒷번호 좌석 중 하나에 1학년 여학생 1명, 나머지 하나에 1학년 남학생 1명을 배정하는 경우는 다음의 8가지이다.

- ① (1여)(3)(1남) 및 (1여)(2)(1남)
- ② (1여)(3)(1남) 및 (1남)(2)(1여)
- ③ (1남)(3)(1여) 및 (1여)(2)(1남)
- ④ (1남)(3)(1여) 및 (1남)(2)(1여)
- ⑤ (1여)(3)(1남)(2)(1여)
- ⑥ (1여)(2)(1남)(3)(1여)
- ⑦ (1남)(3)(1여)(2)(1남)
- ⑧ (1남)(2)(1여)(3)(1남)

① (1여)(3)(1남) 및 (1여)(2)(1남)인 경우, (1여)(3)(1남)을 1명의 학생이라고 생각하고, (1여)(2)(1남)도 1명의 학생이라고 생각하고, 나머지 1명의 학생과 합쳐 총 $3(=1+1+1)$ 명의 학생을 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_3 = 3! = 6$ 이다.

그런데, 1학년 여학생 3명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ 이고, 선택된 2명을 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2! = 2$ 이다. 1학년 남학생 2명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$ 이고, 선택된 2명을 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2! = 2$ 이다.

따라서, (1여)(3)(1남) 및 (1여)(2)(1남)인 경우의 수는 ${}_3P_3 \times ({}_3C_2 \times {}_2P_2) \times ({}_2C_2 \times {}_2P_2) = 6 \times (3 \times 2) \times (1 \times 2) = 72$ 이다.

(다른 풀이)

그런데, 1학년 여학생 3명 중에서 2명을 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ 이고, 1학년 남학생 2명 중에서 2명을 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2! = 2$ 이다.

따라서, (1여)(3)(1남) 및 (1여)(2)(1남)인 경우의 수는 ${}_3P_3 \times {}_3P_2 \times {}_2P_2 = 6 \times 6 \times 2 = 72$ 이다.

② (1여)(3)(1남) 및 (1남)(2)(1여)의 경우도 같은 방법으로 구하면, 경우의 수는 72이다.

③ (1남)(3)(1여) 및 (1여)(2)(1남)의 경우도 같은 방법으로 구하면, 경우의 수는 72이다.

④ (1남)(3)(1여) 및 (1남)(2)(1여)의 경우도 같은 방법으로 구하면, 경우의 수는 72이다.

⑤ (1여)(3)(1남)(2)(1여)인 경우, (1여)(3)(1남)(2)(1여)를 1명의 학생이라고 생각하고, 나머지 2명의 학생과 합쳐 총 $3(=1+2)$ 명의 학생을 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_3 = 3! = 6$ 이다.

그런데, 1학년 여학생 3명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ 이고, 선택된 2명을 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2! = 2$ 이다. 1학년 남학생 2명 중에서 1명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2$ 이다.

따라서, (1여)(3)(1남)(2)(1여)인 경우의 수는 ${}_3P_3 \times ({}_3C_2 \times {}_2P_2) \times {}_2C_1 = 6 \times (3 \times 2) \times 2 = 72$ 이다.

(다른 풀이)

그런데, 1학년 여학생 3명 중에서 2명을 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ 이고, 1학년 남학생 2명 중에서 1명을 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_1 = \frac{2!}{(2-1)!} = 2$ 이다.

따라서, (1여)(3)(1남)(2)(1여)인 경우의 수는 ${}_3P_3 \times {}_3P_2 \times {}_2P_1 = 6 \times 6 \times 2 = 72$ 이다.

⑥ (1여)(2)(1남)(3)(1여)의 경우도 같은 방법으로 구하면, 경우의 수는 72이다.

⑦ (1남)(3)(1여)(2)(1남)인 경우, (1남)(3)(1여)(2)(1남)을 1명의 학생이라고 생각하고, 나머지 2명의 학생과 합쳐 총 $3(=1+2)$ 명의 학생을 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_3 = 3! = 6$ 이다.

그런데, 1학년 여학생 3명 중에서 1명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$ 이다. 1학년 남학생 2명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$ 이고, 선택된 2명을 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2! = 2$ 이다.

따라서, (1남)(3)(1여)(2)(1남)인 경우의 수는 ${}_3P_3 \times {}_3C_1 \times ({}_2C_2 \times {}_2P_2) = 6 \times 3 \times (1 \times 2) = 36$ 이다.

(다른 풀이)

그런데, 1학년 여학생 3명 중에서 1명을 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_1 = \frac{3!}{(3-1)!} = 3$ 이고, 1학년 남학생 2명 중에서 2명을 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2! = 2$ 이다.

따라서, (1남)(3)(1여)(2)(1남)인 경우의 수는 ${}_3P_3 \times {}_3P_1 \times {}_2P_2 = 6 \times 3 \times 2 = 36$ 이다.

⑧ (1남)(2)(1여)(3)(1남)의 경우도 같은 방법으로 구하면, 경우의 수는 36이다.

그러므로, 좌석표에 3학년 학생 바로 앞번호 좌석과 바로 뒷번호 좌석 중 하나에 1학년 여학생 1명, 나머지 하나에 1학년 남학생 1명이 배치되고, 2학년 학생 바로 앞번호 좌석과 바로 뒷번호 좌석 중 하나에 1학년 여학생 1명, 나머지 하나에 1학년 남학생 1명을 배정하는 경우의 수는 $504 (= 4 \times 72 + 2 \times 72 + 2 \times 36)$ 이다. ■

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1	삼각형 OAB가 직각삼각형이기 때문에 빗변인 선분 AB가 외접원의 지름임을 알면	1
	선분 AB의 중점의 좌표가 외접원의 중심(외심)의 좌표이기 때문에, 외접원의 중심(외심)의 좌표는 (4, 3)임을 구하면	1
	외접원의 반지름은 선분 AB의 길이의 반이기 때문에, 외접원의 반지름 5를 구하면	1
	외접원의 방정식을 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$ 또는 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ 로 표현하면	1
	두 점 A(8, 0), B(0, 6)을 지나는 직선의 방정식이 $3x + 4y = 24$ 또는 $3x + 4y - 24 = 0$ 임을 구하면	1
	내접원이 서로 수직인 x축과 y축에 동시에 접해서 내접원의 반지름을 r이라고 하면, 내접원의 중심(내심)의 좌표는 (r, r)임을 알면	1
	내접원의 방정식을 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 로 표현하면	1
	내접원의 중심(내심) (r, r)에서 두 점 A(8, 0), B(0, 6)을 지나는 직선까지의 거리를 이용하여 $\frac{ 3r + 4r - 24 }{\sqrt{3^2 + 4^2}} = r$ 로 표현하면	1
	방정식 $(r-2)(r-12) = 0$ 에서 $r < 6$ 이기 때문에 $r = 2$ 만이 근임을 구하면	1
[1](2)	외심 (4, 3)과 내심 (2, 2)을 지나는 직선의 방정식 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 을 구하면	2
	외접원 위의 점과 내접원 위의 점 사이의 거리의 최솟값과 최댓값은 이 직선과 외접원 및 내접원이 만나는 교점 사이의 거리를 이용하여 찾을 수 있음을 알면	2
	직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 과 외접원과 만나는 두 교점 P, S의 좌표를 구하면	4
	직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 과 내접원과 만나는 두 교점 Q, R의 좌표를 구하면	2
	두 원 위의 점 사이의 거리의 최솟값이 선분 PQ임을 알고, $l_1 = 3 - \sqrt{5}$ 를 구하면	2
	두 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값이 선분 QS임을 알고, $l_2 = 7 + \sqrt{5}$ 를 구하면	2

하위문항	채점 기준	배점
[2](1)	(1번, 2번, 3번) 좌석을 제외하고 남은 4개의 좌석에 4등 이하의 도착순서를 가진 4명의 학생의 좌석을 배정하는 경우의 수 ${}_4P_4 = 4! = 24$ 를 구하면	2
	도착순서가 가장 빠른 학생이 1번, 2번, 3번 좌석에서 자리를 바꾸는 경우의 수 ${}_3P_3 = 3! = 6$ 을 구하면	1
	앞에서 구한 두 결과를 곱하여 경우의 수 144를 구하면	1
2	2학년 학생과 3학년 학생 사이에 4명의 학생이 있는 경우는 각각 (2학년)□□□□(3학년)과 (3학년)□□□□(2학년) 배열이 있는 경우이고, 경우의 수가 동일함을 알면	1
	(2학년)□□□□(3학년)을 하나의 학생이라고 생각하고, 나머지 1명의 학생과 합쳐 총 2(=1+1)명의 학생을 배열하는 경우의 수 ${}_2P_2 = 2! = 2$ 를 구하면	1
	1학년 여학생 3명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수 ${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ 을 구하면	1
	1학년 남학생 2명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수 ${}_2C_2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$ 을 구하면	1
	선택된 1학년 여학생 2명과 남학생 2명을 □□□□에 배열하는 경우의 수 ${}_4P_4 = 4! = 24$ 를 구하면	1
	(2학년)□□□□(3학년)일 때, 2학년 학생과 3학년 학생 사이에 1학년 여학생 2명과 1학년 남학생 2명만을 배정하는 경우의 수 144를 구하면	1
	2학년 학생과 3학년 학생 사이에 1학년 여학생 2명과 1학년 남학생 2명만을 배정하는 경우의 수 288을 구하면	1
[2](3)	① (1여)(3)(1남) 및 (1여)(2)(1남) 경우에서, (1여)(3)(1남)을 1명의 학생이라고 생각하고, (1여)(2)(1남)도 1명의 학생이라고 생각하고, 나머지 1명의 학생과 합쳐 총 3(=1+1+1)명의 학생을 배열하는 경우의 수 ${}_3P_3 = 3! = 6$ 을 구하면	1
	1학년 여학생 3명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ 이고, 선택된 2명을 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2! = 2$ 임을 구하고, 1학년 남학생 2명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$ 이고, 선택된 2명을 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2! = 2$ 임을 구하면	2
	① 경우의 수 ${}_3P_3 \times ({}_3C_2 \times {}_2P_2) \times ({}_2C_2 \times {}_2P_2) = 72$ 를 구하면	1
	②, ③, ④인 경우에서 경우의 수가 ① 경우와 동일하게 각각 72임을 알면	1
	⑤ (1여)(3)(1남)(2)(1여)인 경우에서, (1여)(3)(1남)(2)(1여)를 1명의 학생이라고 생각하고, 나머지 2명의 학생과 합쳐 총 3(=1+2)명의 학생을 배열하는 경우의 수 ${}_3P_3 = 3! = 6$ 을 구하면	1
	1학년 여학생 3명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ 이고, 선택된 2명을 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2! = 2$ 임을 구하고, 1학년 남학생 2명 중에서 1명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2$ 임을 구하면	2
	⑤ 경우의 수 ${}_3P_3 \times ({}_3C_2 \times {}_2P_2) \times {}_2C_1 = 72$ 를 구하면	1
	⑥ 경우에서 경우의 수가 ⑤ 경우와 동일하게 72임을 알면	1

하위문항	채점 기준	배점
	⑦ (1남)(3)(1여)(2)(1남)인 경우에서, (1남)(3)(1여)(2)(1남)을 1명의 학생이라고 생각하고, 나머지 2명의 학생과 합쳐 총 3(=1+2)명의 학생을 배열하는 경우의 수 ${}_3P_3 = 3! = 6$ 을 구하면	1
	1학년 여학생 3명 중에서 1명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$ 이고, 1학년 남학생 2명 중에서 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$ 이고, 선택된 2명을 배열하는 경우의 수는 ${}_2P_2 = 2! = 2$ 임을 구하면	2
	⑦ 경우의 수 ${}_3P_3 \times {}_3C_1 \times ({}_2C_2 \times {}_2P_2) = 36$ 을 구하면	1
	⑧ 경우에서 경우의 수가 ⑦ 경우와 동일하게 36임을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 모든 경우의 수의 합 504를 구하면	1

1교시 · 문제 2

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

1. 다항식 A 를 다항식 $B(B \neq 0)$ 로 나누었을 때의 몫을 Q , 나머지를 R 라고 하면

$$A = BQ + R$$

가 성립한다. 여기서 R 는 상수이거나 R 의 차수는 B 의 차수보다 낮다.

2. 자연수의 거듭제곱의 합

$$\textcircled{1} 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\textcircled{2} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\textcircled{3} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

3. 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에 대하여

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 정의되고

(ii) 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하며

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이라고 한다.

4. 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능하다고 한다.

- [1] 인수분해를 이용하여 자연수 $2025 \cdot 2026 \cdot 2027 \cdot 2028 - 24$ 를 $(2025)^2 + 3 \cdot 2023 + 1$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. [6점]

- [2] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{1 \cdot (n^2 + 12)} + \frac{1+7}{(1+3)(n^2 + 22)} + \frac{1+7+19}{(1+3+5)(n^2 + 32)} + \cdots + \frac{1+7+\cdots+(3n^2-3n+1)}{(1+3+\cdots+(2n-1))(n^2+n^2)} \right\}$ 의

값을 구하시오. [8점]

- [3] 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 1) \\ 2-x & (x < 1) \end{cases}$ 와 $g(x) = x^2 - 2x + 2$ 에 대하여 두 곡선 $y = f^n(x)$ 와 $y = g^n(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{15}{17}$ 일 때의 자연수 n 을 구하시오. [14점]

(단, 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$, n 은 자연수)

- [4] $-2 < x < 2$ 에서 다음과 같이 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 2 & (-2 < x \leq -1) \\ -2x - 1 & (-1 < x < 0) \\ \sqrt{\frac{x}{2}} + 1 & (0 \leq x < 2) \end{cases}$$

- (1) $x = -1$ 에서 함수 $y = |f(x)|$ 의 연속성과 미분가능성을 조사하시오. [8점]

- (2) $\left| \lim_{x \rightarrow a-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow a+} f^{-1}(x) \right| = 1$ 을 만족시키는 실수 a 를 모두 구하시오. (단, $-2 < a < 2$) [14점]

■ 예시 답안

[1]

$x = 2025$ 라고 두면

$$\begin{aligned} 2025 \cdot 2026 \cdot 2027 \cdot 2028 - 24 &= x(x+1)(x+2)(x+3) - 24 = (x^2+3x)(x^2+3x+2) - 24 \\ &= (x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x) - 24 = (x^2+3x-4)(x^2+3x+6) \\ &= (x-1)(x+4)(x^2+3x+6) \\ (2025)^2 + 3 \cdot 2023 + 1 &= x^2 + 3(x-2) + 1 = x^2 + 3x - 5 \end{aligned}$$

이므로 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} 2025 \cdot 2026 \cdot 2027 \cdot 2028 - 24 &= (x-1)(x+4)(x^2+3x+6) \\ &= (x-1)(x+4)(x^2+3x-5+11) \\ &= (x-1)(x+4)(x^2+3x-5) + 11(x-1)(x+4) \\ &= (x-1)(x+4)(x^2+3x-5) + 11(x^2+3x-5+1) \\ &= \{(x-1)(x+4)+11\}(x^2+3x-5) + 11 \end{aligned}$$

따라서 $2025 \cdot 2026 \cdot 2027 \cdot 2028 - 24$ 를 $(2025)^2 + 3 \cdot 2023 + 1$ 로 나누었을 때의 나머지는 11이다.

[2]

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{1 \cdot (n^2+1)} + \frac{1+7}{(1+3)(n^2+2^2)} + \frac{1+7+19}{(1+3+5)(n^2+3^2)} + \cdots + \frac{1+7+\cdots+(3n^2-3n+1)}{(1+3+\cdots+(2n-1))(n^2+n^2)} \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1+7+\cdots+(3k^2-3k+1)}{(1+3+\cdots+(2k-1))(n^2+k^2)} \quad \text{-----} \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

①에서 분자와 분모의 일부를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 1+7+\cdots+(3k^2-3k+1) &= \sum_{p=1}^k (3p^2-3p+1) \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{2} - \frac{3k(k+1)}{2} + k \\ &= \frac{k}{2}(2k^2+3k+1-3k-3+2) = k^3 \\ 1+3+\cdots+(2k-1) &= \sum_{p=1}^k (2p-1) = k(k+1) - k = k^2 \end{aligned}$$

이로부터 ①식은 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\textcircled{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n^2+k^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2} \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

[3]

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) = x \geq 1$ 이므로 $(f \circ f)(x) = f(x) = x$

$x < 1$ 일 때, $f(x) = 2-x \geq 1$ 이므로 $(f \circ f)(x) = f(2-x) = 2-x$

$f^2(x) = f(f(x)) = f(x)$

(다른 설명)

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 1) \\ 2-x & (x < 1) \end{cases} = |x-1|+1 \text{이므로}$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = ||x-1|+1-1|+1 = |x-1|+1 = f(x)$$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $f^n(x) = f(x)$

$$g(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \text{이므로}$$

$$g^2(x) = g(g(x)) = \{(x-1)^2 + 1 - 1\}^2 + 1 = (x-1)^{2^2} + 1$$

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 다음을 얻는다.

$$g^n(x) = g(g^{(n-1)}(x)) = \{(x-1)^{2^{n-1}} + 1 - 1\}^2 + 1 = (x-1)^{2^n} + 1$$

두 함수 $f^n(x)$ 와 $g^n(x)$ 의 교점, 즉, $(x-1)^{2^n} = |x-1|$ 의 교점을 구하자.

(i) $x > 1$ 일 때, $(x-1)\{(x-1)^{2^n-1} - 1\} = 0$ 이므로 $x = 2$

(ii) $x < 1$ 일 때, $(x-1)\{(x-1)^{2^n-1} + 1\} = 0$ 이므로 $x = 0$

(iii) $x = 1$ 일 때, 좌변=우변=0이므로 교점이다.

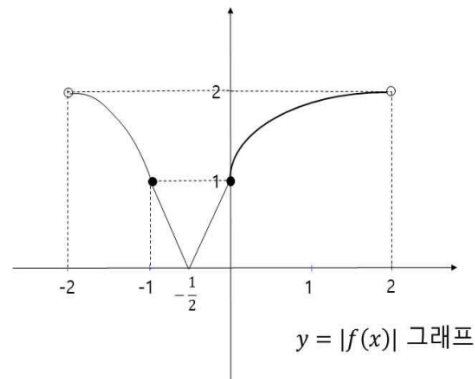
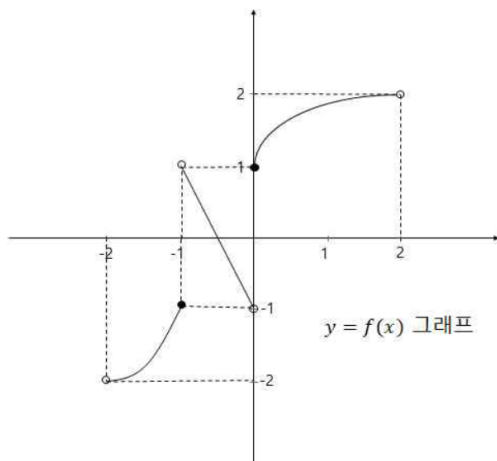
두 곡선 $y = f^n(x)$ 와 $y = g^n(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라고 하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 |f^n(x) - g^n(x)| dx = 2 \int_0^1 \{2 - x - (x-1)^{2^n} - 1\} dx \\ &= 2 \left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{(x-1)^{2^n+1}}{2^n+1} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{2^n+1} = \frac{15}{17} \end{aligned}$$

따라서 $n = 4$

[4]

(1)



$$|f(x)| = \begin{cases} 2 - (x+2)^2 & (-2 < x \leq -1) \\ |2x+1| & (-1 < x < 0) \\ \sqrt{\frac{x}{2}} + 1 & (0 \leq x < 2) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \{2 - (x+2)^2\} = 1, |f(-1)| = 1, \lim_{x \rightarrow -1+} |2x+1| = 1$$

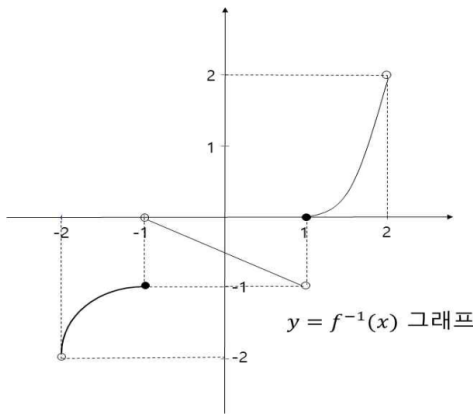
이므로 $x = -1$ 에서 $y = |f(x)|$ 은 연속이다.

$$(\text{좌미분계수}) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2 - (-1+h+2)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h^2 - 2h}{h} = -2$$

$$(\text{우미분계수}) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|2(-1+h)+1| - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1 - 2h - 1}{h} = -2$$

이므로 $y = |f(x)|$ 은 $x = -1$ 에서 미분가능하다.

(2)



$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} - 2 & (-2 < x \leq -1) \\ -\frac{1}{2}(x+1) & (-1 < x < 1) \\ 2(x-1)^2 & (1 \leq x < 2) \end{cases}$$

(i) $-2 < a < -1$ 일 때, $\left| \lim_{x \rightarrow a-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow a+} f^{-1}(x) \right| = |2(\sqrt{a+2} - 2)| = 1$

$\sqrt{a+2} = 2 \pm \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \frac{3}{2}$ 이므로 $a = \frac{17}{4}, \frac{1}{4}$ 이다. 그런데 두 값 모두 구간 $-2 < a < -1$ 에 포함되지 않는다.

(ii) $a = -1$ 일 때, $\left| \lim_{x \rightarrow a-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow a+} f^{-1}(x) \right| = |-1 + 0| = 1$

(iii) $-1 < a < 1$ 일 때, $\left| \lim_{x \rightarrow a-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow a+} f^{-1}(x) \right| = \left| -\frac{1}{2}(a+1) - \frac{1}{2}(a+1) \right| = 1$

$a+1 = \pm 1$ 이므로 $a = 0, -2$ 이다. 그런데 $a = 0$ 만 구간 $-1 < a < 1$ 에 포함된다.

(iv) $a = 1$ 일 때, $\left| \lim_{x \rightarrow a-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow a+} f^{-1}(x) \right| = |-1 + 0| = 1$

(v) $1 < a < 2$ 일 때, $\left| \lim_{x \rightarrow a-} f^{-1}(x) + \lim_{x \rightarrow a+} f^{-1}(x) \right| = |2(a-1)^2 + 2(a-1)^2| = 1$

$a-1 = \pm \frac{1}{2}$ 이므로 $a = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ 이다. 그런데 $a = \frac{3}{2}$ 만 구간 $1 < a < 2$ 에 포함된다.

(i), (ii), (iii), (iv), (v)로부터 $a = -1, 0, 1, \frac{3}{2}$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1] (6점)	$x = 2025$ 라고 두고 $2025 \cdot 2026 \cdot 2027 \cdot 2028 - 24 = (x-1)(x+4)(x^2+3x+6)$	2
	$(2025)^2 + 3 \cdot 2023 + 1 = x^2 + 3(x-2) + 1 = x^2 + 3x - 5$ 를 구하면	2
	$2025 \cdot 2026 \cdot 2027 \cdot 2028 - 24 = \{(x-1)(x+4) + 11\}(x^2 + 3x - 5) + 11$ 을 보이면	2
[2] (8점)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1+7+\dots+(3k^2-3k+1)}{(1+3+\dots+(2k-1))(n^2+k^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n^2+k^2)}$ --- ①을 보이면	3
	① = $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2} \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ 을 보이면	3
	$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\ln 2}{2}$ 을 보이면	2
[3] (14점)	모든 자연수 n 에 대하여 $f^n(x) = f(x)$ 을 보이면	4
	$g^n(x) = g(g^{(n-1)}(x)) = \{(x-1)^{2^{n-1}} + 1 - 1\}^2 + 1 = (x-1)^{2^n} + 1$	4
	두 함수 $f^n(x)$ 와 $g^n(x)$ 의 교점 $x = 0, 1, 2$ 를 구하면	3
	$2 \int_0^1 f^n(x) - g^n(x) dx = 1 - \frac{2}{2^n + 1} = \frac{15}{17}$ 로부터 $n = 4$ 를 구하면	3
[4](1) (8점)	함수값, 좌극한값과 우극한값을 각각 구하고 같음을 보이면	4
	좌미분계수와 우미분계수를 각각 구하고 같음을 보이면	4
[4](2) (14점)	함수 $f^{-1}(x)$ 을 찾으면	6
	각 구간별로 나누어 a 를 구하면	8

2교시 · 문제 1

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 일 때, 함수 f 를 일대일함수라고 한다.
- 확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때, 확률변수

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르고 다음이 성립한다.

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = 0.6826$$

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = 0.9544$$

$$P(-3 \leq Z \leq 3) = 0.9974$$

- [1] 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 로의 모든 일대일함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 모두 만족시킬 확률을 구하시오. [8점]

(가) $f(1) < f(2) < f(3)$ 이다.

(나) $f(1) + f(2) + f(3)$ 은 홀수이다.

- [2] 함수 $f(x) = x^2 + 2x \sin \theta + 2 \cos \theta$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $0 \leq \theta \leq \pi$)
- (1) 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 θ 에 대한 함수 $m(\theta)$ 라고 하자. 이때, 함수 $m(\theta)$ 의 최댓값을 구하시오. [8점]
- (2) 방정식 $f(x) = 0$ 이 실근을 갖게 하는 θ 의 최솟값을 α , 최댓값을 β 라고 할 때, $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$ 의 값을 구하시오. [10점]
- [3] 수직선 위의 점 P를 한 개의 주사위를 던져 6의 약수가 나올 때만 양의 방향으로 2만큼 이동시킨다. 한 개의 주사위를 연속으로 450번 던졌을 때, 점 P의 좌표가 580 이상 640 이하에 있을 확률을 구하시오. (단, 점 P의 처음 좌표는 0) [14점]
- [4] 원 $x^2 + y^2 = 2n$ 이 곡선 $y = \frac{n}{x}$ 과 만나는 점의 양의 x 좌표를 a_n , 곡선 $y = \sqrt{2nx}$ 와 만나는 점의 x 좌표를 b_n 이라고 하자. 이때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{(a_n)^2}$ 의 값을 구하시오. (단, n 은 자연수) [10점]

■ 예시 답안

[1]

집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에서 집합 $Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ 로의 함수 중 일대일함수는 집합 Y 에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

조건 (가)를 만족하는 함수는 집합 Y 에서 3개를 뽑아 크기순으로 하나씩 대응하는 경우

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

이 중 조건 (나)를 만족하려면 지역의 원소가 모두 홀수이거나 하나만 홀수이어야 한다.

(i) 모두 홀수인 경우 : (3, 5, 7)

(ii) 3만 선택된 경우 : (3, 4, 6)

(iii) 5만 선택된 경우 : (4, 5, 6)

(iv) 7만 선택된 경우 : (4, 6, 7)

따라서 조건을 만족하는 함수 f 의 확률 : $\frac{4}{60} = \frac{1}{15}$

[2]

$$(1) \quad f(x) = x^2 + 2x \sin \theta + \sin^2 \theta - \sin^2 \theta + 2 \cos \theta = (x + \sin \theta)^2 - \sin^2 \theta + 2 \cos \theta$$

$$= (x + \sin \theta)^2 - (1 - \cos^2 \theta) + 2 \cos \theta = (x + \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1$$

$$x = -\sin \theta \text{에서 최솟값 } m(\theta) = f(-\sin \theta) = \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1 = (\cos \theta + 1)^2 - 2$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{에서 } -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{이므로 } 0 \leq \cos \theta + 1 \leq 2 \text{이고 } 0 \leq (\cos \theta + 1)^2 \leq 4$$

$$\text{따라서 } m(\theta) = (\cos \theta + 1)^2 - 2 \text{의 최댓값은 } 2$$

$$(2) \quad \text{판별식 } D/4 = \sin^2 \theta - 2 \cos \theta = 1 - \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \geq 0$$

$$\cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1 \leq 0 \text{에서 } -1 - \sqrt{2} \leq \cos \theta \leq -1 + \sqrt{2} \text{이고}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{에서 } -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{이므로 } -1 \leq \cos \theta \leq -1 + \sqrt{2}$$

코사인 함수는 $0 \leq \theta \leq \pi$ 에서 감소함수이므로 α 에서 최댓값, β 에서 최솟값을 가진다.

$$\alpha \leq \theta \leq \beta \text{이므로 } \cos \alpha = -1 + \sqrt{2}, \cos \beta = -1$$

$$\cos \alpha = -1 + \sqrt{2} \text{에서 } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 2\sqrt{2} - 2$$

$$\cos \beta = -1 \text{에서 } \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 0$$

$$\text{따라서 } \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 2\sqrt{2} - 2$$

[3]

주사위를 n 번 던져 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 K 라고 하면

$$6 \text{의 약수의 눈이 나올 확률 } p = \frac{2}{3} \text{이므로 } q = 1 - p = \frac{1}{3}$$

확률변수 K 는 이항분포 $B(n, p) = B\left(n, \frac{2}{3}\right)$ 를 따르고

$$E(K) = np = \frac{2}{3}n, V(K) = \sigma^2 = npq = \frac{2}{9}n$$

주사위를 450번 던지는 경우 시행 횟수가 충분히 크므로

확률변수 K 는 근사적으로 정규분포 $N(np, npq) = N(300, 10^2)$ 을 따른다.

수직선 위 점 P 의 좌표를 확률변수 X 라고 하면 $X = 2K$ 이고

$$E(X) = E(2K) = 2E(K) = 2 \times \frac{2}{3} \times 450 = 600$$

$$V(X) = V(2K) = 2^2 V(K) = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 450 = 20^2$$

따라서 확률변수 X 는 정규분포 $N(600, 20^2)$ 을 따르고

확률변수 $Z = \frac{X - 600}{20}$ 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} P(580 \leq X \leq 640) &= P\left(\frac{580 - 600}{20} \leq \frac{X - 600}{20} \leq \frac{640 - 600}{20}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 2) = P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= \frac{1}{2} P(-1 \leq Z \leq 1) + \frac{1}{2} P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \end{aligned}$$

[4]

원 $x^2 + y^2 = 2n$ 과 곡선 $y = \frac{n}{x}$ 이 만나므로 $x^2 + \left(\frac{n}{x}\right)^2 = 2n$

$x^2 + \frac{n^2}{x^2} - 2n = 0$ 에서 $x^4 - 2nx^2 + n^2 = (x^2 - n)^2 = 0$ 이므로 $x = \pm\sqrt{n}$

따라서 만나는 점의 양의 x 좌표 $a_n = \sqrt{n}$

원 $x^2 + y^2 = 2n$ 과 곡선 $y = \sqrt{2nx}$ 가 만나므로

$x^2 + (\sqrt{2nx})^2 - 2n = x^2 + 2nx - 2n = 0$ 에서 $x = -n \pm \sqrt{n^2 + 2n}$

따라서 만나는 점의 x 좌표 $b_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$ ($\because$ 무리함수의 정의역 $x > 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{(a_n)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - n}{(\sqrt{n})^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{n(\sqrt{n^2 + 2n} + n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{n(\sqrt{n^2 + 2n} + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = 0 \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	일대일함수 개수 ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ 을 구했으면	2
	조건 (가)와 (나)를 만족하는 경우의 수 (3, 5, 7), (3, 4, 6), (4, 5, 6), (4, 6, 7)을 모두 구했으면	4
	조건을 만족하는 확률 $\frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ 을 구했으면	2
2-1	$f(x)$ 의 최솟값 $m(\theta) = \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 1$ 을 구했으면	4
	$m(\theta) = (\cos \theta + 1)^2 - 2$ 의 최댓값 2를 구했으면	4
2-2	판별식 $D/4 = \sin^2 \theta - 2 \cos \theta \geq 0$ 에서 $-1 - \sqrt{2} \leq \cos \theta \leq -1 + \sqrt{2}$ 를 구했으면	4
	조건 $0 \leq \theta \leq \pi$ 에서 $-1 \leq \cos \theta \leq -1 + \sqrt{2}$ 이고 $\cos \alpha = -1 + \sqrt{2}$, $\cos \beta = -1$ 을 구했으면	4
	$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 2\sqrt{2} - 2$ 를 구했으면	2
3	주사위를 던져 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 K 라고 하고 확률변수 K 가 이항분포 $B\left(n, \frac{2}{3}\right)$ 를 따른다고 했으면	4
	시행횟수가 충분히 크므로 확률변수 K 가 정규분포 $N(300, 10^2)$ 을 따른다고 했으면	1
	수직선 위 점 P 의 좌표를 확률변수 X 라고 하면 $X = 2K$ 이고 확률변수 X 는 정규분포 $N(600, 20^2)$ 을 따른다고 했으면	4
	확률변수 $Z = \frac{X - 600}{20}$ 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다고 했으면	1
	$P(580 \leq X \leq 640) = P(-1 \leq Z \leq 2) = 0.8185$ 를 구했으면	4
4	원 $x^2 + y^2 = 2n$ 과 곡선 $y = \frac{n}{x}$ 이 만나는 점의 양의 x 좌표 $a_n = \sqrt{n}$ 을 구했으면	3
	원 $x^2 + y^2 = 2n$ 과 곡선 $y = \sqrt{2nx}$ 가 만나는 점의 x 좌표 $b_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$ 을 구했으면	3
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{(a_n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - n}{n} = 0$ 을 구했으면	4

2교시 · 문제 2

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

1. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에서 $f'(a) = 0$ 이고, $x = a$ 의 좌우에서

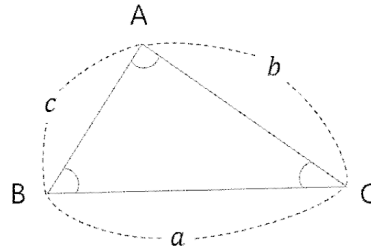
- ① $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$ 이다.
- ② $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$ 이다.

2. 삼각형 ABC에서

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

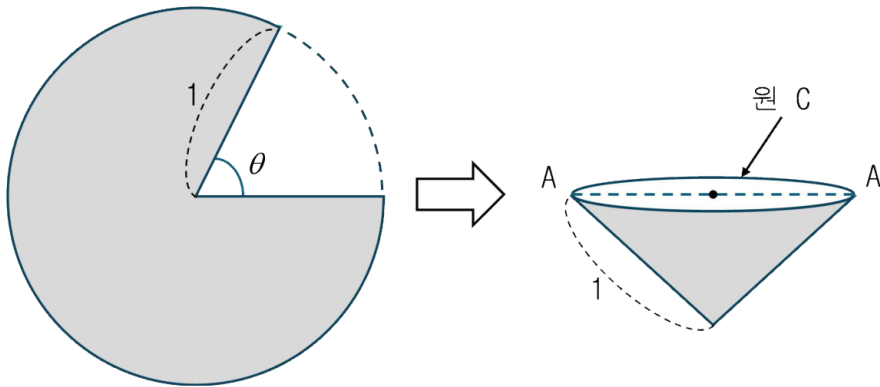
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (단, x 의 단위는 라디안)

- [1] 두 함수 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 24x$, $g(x) = -x^2 - 2x + k$ 가 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 를 만족시킬 때, 상수 k 의 최댓값을 구하시오. [10점]
- [2] 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 모양의 종이에서 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴을 잘라내고 남은 부분으로 (밀면이 없는) 원뿔을 만들려고 한다. 다음 물음에 답하시오.



- (1) 이 원뿔의 부피가 최대가 되기 위한 θ 의 값을 구하시오. [10점]
- (2) (1)에서 만든 원뿔에 대하여 원 C의 지름 AA'의 점 A에서 출발하여 원뿔의 옆면을 따라 점 A'에 이르는 최단 거리를 l 이라고 할 때, l^2 의 값을 구하시오. [10점]
- [3] 함수 $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 에 대하여 점 $P_1\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 을 지나고 y 축과 평행한 직선이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점을 Q_1 , 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 Q_1 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 P_2 라고 하자. 점 P_2 를 지나고 y 축과 평행한 직선이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점을 Q_2 , 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 Q_2 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 P_3 라고 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 점 P_n 의 x 좌표를 a_n 이라고 하자. 다음 물음에 답하시오. (단, n 은 자연수)
 - (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 일 때, α 의 값을 구하시오. (단, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$) [10점]
 - (2) (1)에서 구한 α 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha}\right)$ 의 값을 구하시오. (단, $a_n - \alpha \neq 0$) [10점]

■ 예시 답안

[1]

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 함수 $g(x)$ 의 최댓값보다 크거나 같아야 한다.

$$f'(x) = 12(x^3 - x^2 - x - 2) = 12(x-2)(x^2 + x + 1)$$

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{이므로 } f(x) \text{는 } x = 2 \text{일 때 극소이면서 최소이고 최솟값은 } f(2) = -56$$

$$g(x) = -(x+1)^2 + k + 1 \text{이므로 } g(x) \text{는 } x = -1 \text{일 때 최댓값 } k + 1 \text{을 가진다.}$$

$$\text{그러므로 } -56 \geq k + 1 \text{이고 } -57 \geq k$$

따라서 상수 k 의 최댓값은 -57

[2]

(1) 원뿔을 만들었을 때 원 C 의 반지름의 길이를 x , 원뿔의 높이를 h 라고 하면

$$\text{이 원뿔의 부피 } V(h) = \frac{1}{3}\pi x^2 h$$

피타고라스 정리로부터 $x^2 = 1 - h^2$ 이므로

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(h - h^3) \quad (0 < h < 1) \text{에서}$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(1 - 3h^2) = -\pi\left(h + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(h - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$V'(h) = 0 \text{에서 } h = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{일 때 } V \text{는 극대이고 또한 최대이다.}$$

$$x^2 = 1 - h^2 \quad (x > 0) \text{에서 } x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{또한 호의 길이 공식으로부터 } 2\pi x = 2\pi - \theta$$

$$\text{따라서 } \theta = 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

(다른 풀이)

$$\text{원 } C \text{의 둘레의 길이가 } 2\pi - \theta \text{이므로 } x = \frac{2\pi - \theta}{2\pi}$$

$$h = \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi - \theta}{2\pi}\right)^2} = \frac{\sqrt{4\pi\theta - \theta^2}}{2\pi}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 h = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2\pi - \theta}{2\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{4\pi\theta - \theta^2}}{2\pi} \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

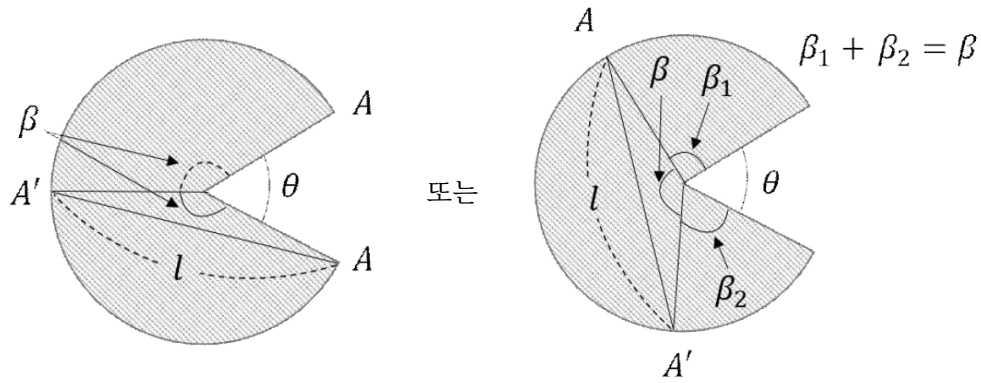
$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{24\pi^2} \left\{ -2(2\pi - \theta)\sqrt{4\pi\theta - \theta^2} + \frac{(2\pi - \theta)^2(4\pi - 2\theta)}{2\sqrt{4\pi\theta - \theta^2}} \right\}$$

$$= \frac{1}{24\pi^2} \frac{2\pi - \theta}{2\sqrt{4\pi\theta - \theta^2}} (6\theta^2 - 24\pi\theta + 8\pi^2)$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \text{로 놓고 근의 공식을 쓰면 } \theta = 2\pi\left(1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$0 < \theta < 2\pi \text{이므로 } \theta = 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

(2) 전개도에서 점 A 와 점 A' 이 원뿔의 지름이 되려면 다음 그림에서 $\beta = \beta_1 + \beta_2$ 이므로



$$\beta = \frac{2\pi - \theta}{2} = \frac{\sqrt{6}\pi}{3}$$

$$\text{코사인법칙에 의하여 } l^2 = \overline{AA'}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cos \frac{\sqrt{6}\pi}{3} = 2 \left(1 - \cos \frac{\sqrt{6}\pi}{3} \right)$$

[3]

(1)

$$y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ 이므로 } y' = \sec^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

점 P_n 의 x 좌표를 a_n 으로 놓으면 두 점 P_n, Q_n 의 좌표는 각각 $(a_n, 0), \left(a_n, \tan\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right)\right)$ 이다.

이때 점 Q_n 에서의 접선의 기울기는 $y' = \sec^2\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right)$ 이므로 점 Q_n 에서의 접선의 방정식은

$$y - \tan\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right) = \sec^2\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right)(x - a_n)$$

이 접선과 x 축과의 교점은 $\left(-\tan\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right) + a_n, 0\right)$ 이고 이 점이 $P_{n+1}(a_{n+1}, 0)$ 이므로

$$a_{n+1} = -\tan\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right) + a_n = -\sin\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right) + a_n = -\frac{1}{2} \sin 2\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right) + a_n$$

이 식의 양변에 극한을 취하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 이므로

$$\alpha = -\frac{1}{2} \sin 2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \alpha \text{ 이므로 } \sin 2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{이때 } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4} \text{ 이므로 } -\frac{\pi}{2} < 2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

(2) (1)에서 $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \sin 2\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right)$ 이므로 양변에서 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 를 뺀 후, $a_n - \alpha \neq 0$ 이므로 양변을 $a_n - \frac{\pi}{2}$

$$\text{로 나누면 } \frac{a_{n+1} - \frac{\pi}{2}}{a_n - \frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\sin 2\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right)}{a_n - \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{이 식의 양변에 극한을 취하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1} - \alpha}{a_n - \alpha} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 2\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right)}{2\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right)} = 0$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]	$f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 최솟값을 가지며 그 값은 -56 임을 보이면	3
	$g(x)$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값을 가지며 그 값이 $k + 1$ 임을 보이면	3
	상수 k 의 최댓값이 -57 임을 보이면	4
[2](1)	원뿔의 부피를 θ 에 대한 함수나 원뿔의 높이에 대한 함수로 표현하면	3
	부피의 도함수를 이용하여 극댓점을 찾으면	3
	$\theta = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 를 찾으면	4
2	전개도에서 점 A 와 점 A' 의 관계를 올바르게 표시하고 사잇각 $\frac{\sqrt{6}\pi}{3}$ 을 찾으면	5
	코사인법칙을 사용하여 $l^2 = 2 \left(1 - \cos \frac{\sqrt{6}\pi}{3}\right)$ 을 찾으면	5
[3](1)	Q_n 에서의 접선의 방정식을 찾고 x 축과의 교점을 찾으면	3
	a_{n+1} 과 a_n 의 관계식 $a_{n+1} = -\sin\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right) + a_n$ 을 찾으면	4
	$\alpha = \frac{\pi}{2}$ 를 찾으면	3
[3](2)	$\frac{a_{n+1} - \frac{\pi}{2}}{a_n - \frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{\sin 2\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right)}{a_n - \frac{\pi}{2}}$ 을 얻으면	5
	올바른 계산을 통하여 극한값 0 을 찾으면	5

2024학년도 자연계열

1교시 · 문제 1

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)일 때,

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha + \beta$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \beta$$

2. 유리함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$)의 그래프의 점근선은 두 직선 $x = p$, $y = q$ 이다.

3. 집합 A 의 원소가 유한개일 때, 집합 A 의 원소의 개수를 기호 $n(A)$ 로 나타낸다.

[1] 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$ 일 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)a_n$ 을 구하시오. [6점]

(2) 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항이 $b_n = -\frac{a_n}{2n+1}$ 일 때, 자연수 n 에 대하여 $b_n < b_{n+1}$ 임을 증명하시오. [8점]

[2] 함수 $f(x) = ax(x-2\pi)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오. (단, a 는 0이 아닌 실수)

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값은 1이다.

(1) $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $f(x) + |\cos x| = -\frac{x}{\pi}$ 의 실근이 없음을 증명하시오. [8점]

(2) 함수 $g(x) = \frac{x-p}{x+2p}$ 에 대하여 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값과 최솟값이 모두 존재하도록 하는 실수 p 의 범위를 구하시오. (단, p 는 0과 $-\frac{1}{2}$ 이 아닌 실수) [12점]

[3] 다음 두 집합 A, B 에 대하여 물음에 답하시오.

$A = \{a \mid a \text{는 } 4 \text{의 배수인 자연수}\}$

$B = \{b \mid b \text{는 } 7 \text{개의 숫자 } 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{을 중복 없이 사용하여 만든 일곱 자리 자연수}\}$

(1) $n(A \cap B)$ 를 구하시오. [8점]

(2) 집합 B 의 원소를 큰 수부터 차례로 $b_1, b_2, \dots, b_{n(B)}$ 라고 할 때, b_{1000} 의 값을 구하시오. [8점]

■ 예시 답안

[1] (1)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2n+1) \ln \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right) \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2n+1) \ln \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left\{ \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{2}} \right\}^2 \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{2}} \right\}^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right) \right\} = 2\end{aligned}$$

(2)

$b_n = -\frac{a_n}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1} \ln \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)$ 에서 자연수 n 을 실수 x 로 치환하여 함수 $f(x)$ 로 표현하면

$$f(x) = -\frac{1}{2x+1} \ln \left(1 + \frac{2}{2x-1} \right)$$

$$f'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} \ln \left(1 + \frac{2}{2x-1} \right) + \frac{1}{2x+1} \times \frac{\frac{4}{(2x-1)^2}}{1 + \frac{2}{2x-1}}$$

$x \geq 1$ 에서 $\frac{2}{(2x+1)^2} \ln \left(1 + \frac{2}{2x-1} \right) > 0$ 이고 $\frac{1}{2x+1} \times \frac{\frac{4}{(2x-1)^2}}{1 + \frac{2}{2x-1}} > 0$ 이므로 $f'(x) > 0$

$f(x)$ 는 $x \geq 1$ 에서 증가함수이므로 $f(x) < f(x+1)$ 이다.

따라서 $f(n) < f(n+1)$ 이므로 $b_n < b_{n+1}$ 이다.

(다른 풀이)

$$n \geq 1 \text{ 일 때, } b_n \neq 0 \text{ 이므로 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n+1}{2n+3} \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{2n+1} \right)}{\ln \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)}$$

$$\frac{2n+1}{2n+3} < 1 \text{ 이고 } \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{2n+1} \right)}{\ln \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)} < 1 \text{ 이므로 } \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$$

양변에 b_n 을 곱해주면 $b_n < 0$ 이므로 $b_n < b_{n+1}$

[2] (1)

$f(0) = f(2\pi) = 0$ 이고 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값이 1이므로

$f'(x) = 2ax - 2\pi a = 0$ 인 $x = \pi$ 에서 $f(x)$ 는 최댓값을 갖는다.

$$f(\pi) = -a\pi^2 = 1 \text{ 이므로 } a = -\frac{1}{\pi^2}$$

$$\text{따라서 주어진 방정식은 } -\frac{1}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{\pi}x + |\cos x| = -\frac{x}{\pi}$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 좌변 $f(x) + |\cos x| > 0$ 이고 우변 $-\frac{x}{\pi} \leq 0$ 이므로
실근은 존재하지 않는다.

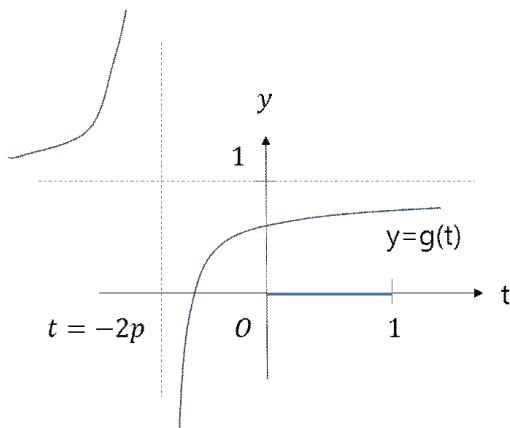
(2)

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $f(x) = t$ 로 치환하면 $0 \leq t \leq 1$ 이고 $(g \circ f)(x) = g(t)$

$g(t) = 1 - \frac{3p}{t+2p}$ 의 그래프의 점근선은 $y = 1$ 과 $t = -2p$ 이다.

(i) $-2p < 0$ 인 경우, $p > 0$

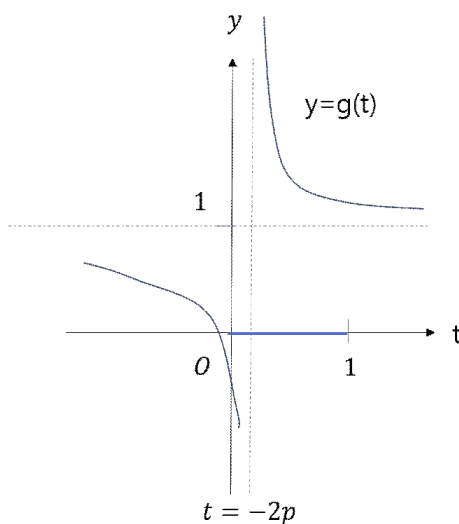
$-3p < 0$ 이므로 $g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$0 \leq t \leq 1$ 에서 $(g \circ f)(x) = g(t)$ 의 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다.

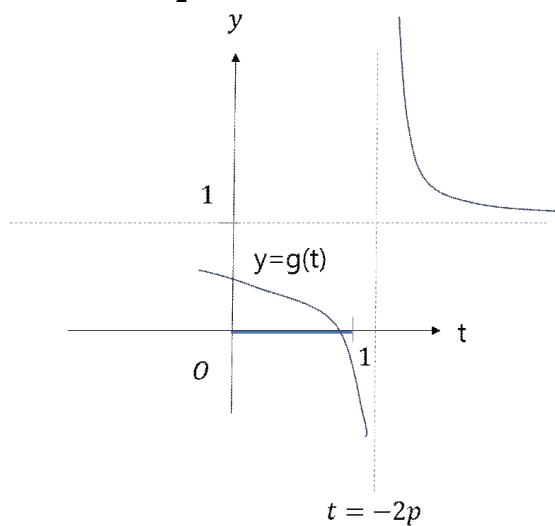
(ii) $0 < -2p < 1$ 인 경우, $-\frac{1}{2} < p < 0$

$-3p > 0$ 이므로



$0 \leq t \leq 1$ 에서 $(g \circ f)(x) = g(t)$ 의 최댓값과 최솟값이 모두 존재하지 않는다.

(iii) $1 < -2p$ 인 경우 $p < -\frac{1}{2}$ 이므로 $-3p > \frac{3}{2}$



$0 \leq t \leq 1$ 에서 $(g \circ f)(x) = g(t)$ 의 최댓값과 최솟값이 모두 존재한다.

(i), (ii), (iii)으로부터 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값과 최솟값이 모두 존재하는 p 의 범위는 $p < -\frac{1}{2}$ 또는 $p > 0$

[3] (1)

$A = \{4n \mid n = 1, 2, \dots\}$ 이므로 $A \cap B$ 의 원소는 B 의 원소 중에서 4의 배수인 자연수이다.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6으로 만든 일곱 자리 자연수가 4의 배수인 경우는 끝의 두 자리 수가 각각 04, 12, 16, 20, 24, 32, 36, 40, 52, 56, 60, 64일 때이다.

(i) 끝의 두 자리수가 0을 포함하는 경우(04, 20, 40, 60)

앞의 다섯 자리에는 나머지 다섯 개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로

$$5! \times 4 = 480$$

(ii) 끝의 두 자리수가 0을 포함하지 않는 경우(12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64)

백만 자리는 나머지 5개의 숫자 중에서 0을 제외한 네 가지가 올 수 있고,

십만, 만, 천, 백의 자리는 이미 사용한 숫자를 제외한 나머지 네 개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로

$$4 \times 4! \times 8 = 768$$

(i), (ii)로부터 $n(A \cap B) = 480 + 768 = 1248$

(2)

집합 B 의 원소를 큰 수부터 차례로 세어보면 다음과 같다.

6□□□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $6! = 720$

5□□□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $6! = 720$

따라서 b_{1000} 은 5로 시작하는 수이다.

56□□□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $5! = 120$

54□□□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $5! = 120$

여기까지 모두 960개이므로 b_{1000} 은 53으로 시작하는 수이다.

536□□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $4! = 24$

여기까지가 모두 984개이므로 b_{1000} 은 534로 시작하는 수이다.

5346□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $3! = 6$

5342□□□□ 형태의 자연수의 개수는 $3! = 6$

여기까지가 모두 996개이므로 b_{1000} 은 5341로 시작하는 수이다.

53416□□□ 형태의 자연수의 개수는 $2! = 2$

53412□□□ 형태의 자연수의 개수는 $2! = 2$

여기까지가 모두 1000개이므로 b_{1000} 은 53412□□□ 형태에서 나머지 0, 6으로 만들 수 있는 가장 작은 수이다.

따라서 $b_{1000} = 5341206$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2n+1) \ln \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2n+1) \ln \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right) \right\}$	2
	$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left\{ \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{2}} \right\}^2 \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)^2 \right]$	2
	$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{2}} \right\}^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)^2 \right\} = 2$	2
[1](2)	$f(x) = -\frac{1}{2x+1} \ln \left(1 + \frac{2}{2x-1} \right)$ 놓으면	2
	$f'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} \ln \left(1 + \frac{2}{2x-1} \right) + \frac{1}{2x+1} \times \frac{4}{1 + \frac{2}{2x-1}}$ 도함수를 계산하면	2
	$x \geq 1$ 에서 $f'(x) > 0$ 임을 근거를 제시하여 진술하면	2
	앞의 계산을 이용하여 논리적으로 $b_n < b_{n+1}$ 임을 결론 내리면	2
[2](1)	주어진 조건을 활용하여 a 의 값을 얻으면	2
	그래프를 그리거나 좌, 우변의 부호를 비교하여 해가 존재하지 않는 근거를 올바르게 제시하면	4
	앞의 근거를 기반으로 올바르게 결론을 도출하면	2
2	$g(t) = 1 - \frac{3p}{t+2p}$ 의 그래프의 점근선은 $y=1$ 과 $t=-2p$ 을 얻으면	3
	$-2p < 0$ 인 경우를 올바르게 다루면	3
	$0 < -2p < 1$ 인 경우를 올바르게 다루면	3
	$1 < -2p$ 인 경우를 올바르게 다루면	3
[3](1)	$A \cap B$ 의 원소의 성질에 대해 기술하면	2
	$5! \times 4 = 480$ 인 경우를 계산하면	2
	$4 \times 4! \times 8 = 768$ 인 경우를 계산하면	2
	$n(A \cap B) = 480 + 768 = 1248$ 을 얻으면	2
[3](2)	$6 \square \square \square \square \square$ 형태의 자연수의 개수는 $6! = 720$ 임을 계산하면	2
	올바른 계산을 통해 b_{1000} 은 53으로 시작하는 수임을 얻으면	2
	올바른 계산을 통해 b_{1000} 은 5341로 시작하는 수임을 얻으면	2
	올바른 계산을 통해 $b_{1000} = 5341206$ 을 얻으면	2

1교시 · 문제 2

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

1. 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 주어진 명제의 결론을 부정하여 가정 또는 이미 알려진 수학적 사실 등에 모순됨을 보여 원래의 명제가 참임을 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

2. 함수 $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때

① 그 구간의 모든 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다.

② 그 구간의 모든 x 에 대하여 $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다.

3. 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ 일 때, α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt$$

4. 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 도함수를 갖는 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

[1] 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$ 를 구하시오. [6점]

(가) $f(0) = 1$

(나) 모든 실수 x 에서 $f(3x) = f(x) + x^3$ 이다.

[2] 방정식 $8x^3 - 6x + 1 = 0$ 의 실근이 유리수가 아님을 증명하시오. [12점]

[3] 다음 물음에 답하시오.

(1) 정적분 $\int_0^1 \frac{1-x^8}{1+x^2} dx$ 를 구하시오. [6점]

(2) (1)에서 구한 값을 I 라고 할 때, 부등식 $\left| I - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{1}{9}$ 이 성립함을 증명하시오. [8점]

[4] 함수 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $n \geq 3$ 인 자연수 n 에 대하여 n^{n+1} 과 $(n+1)^n$ 의 크기를 비교하시오. [8점]

(2) 함수 $g(x) = \frac{f(x+1)}{x+1}$ 일 때, 곡선 $y = g(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 0$, $x = e^2 - 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [10점]

■ 예시 답안

[1]

$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($m \geq 3$)으로 놓으면 조건 (나)에 의하여

$$f(3x) - f(x) = (3^m - 1)a_m x^m + \cdots + (3^3 - 1)a_3 x^3 + \cdots + (3^1 - 1)a_1 x = x^3$$

항등식의 성질에 의하여 $(3^3 - 1)a_3 = 1$, $(3^k - 1)a_k = 0$ ($1 \leq k \leq m, k \neq 3$)이므로

$$a_3 = \frac{1}{26}, a_k = 0 \quad (1 \leq k \leq m, k \neq 3)$$

$$\text{그러므로 } f(x) = \frac{1}{26}x^3 + a_0$$

$$\text{조건 (가)로부터 } a_0 = f(0) = 1 \text{이므로 } f(x) = \frac{1}{26}x^3 + 1$$

(다른 풀이) $f(3x) - f(x) = x^3$ 에서 x 대신 $\frac{x}{3}, \frac{x}{3^2}, \frac{x}{3^3}, \dots, \frac{x}{3^n}$ 를 차례로 대입하면

$$f(x) - f\left(\frac{x}{3}\right) = \left(\frac{x}{3}\right)^3,$$

$$f\left(\frac{x}{3}\right) - f\left(\frac{x}{3^2}\right) = \left(\frac{x}{3^2}\right)^3,$$

$$f\left(\frac{x}{3^2}\right) - f\left(\frac{x}{3^3}\right) = \left(\frac{x}{3^3}\right)^3,$$

.....

$$f\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{3^n}\right) = \left(\frac{x}{3^n}\right)^3$$

위 식들의 좌변과 우변을 각각 더하면

$$f(x) - f\left(\frac{x}{3^n}\right) = \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3^2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{x}{3^n}\right)^3 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{3^k}\right)^3 = \sum_{k=1}^n \frac{x^3}{(3^3)^k}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^3}{(3^3)^k} + f\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

$$n \text{이 한없이 커지면 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^3}{(3^3)^k} + \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{3^n}\right) \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$t = \frac{x}{3^n}$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이고, $f(t)$ 는 $t = 0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{3^n}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\text{따라서 } \textcircled{7}, \textcircled{8} \text{과 조건 (가)로부터 } f(x) = \frac{\frac{x^3}{3^3}}{1 - \frac{1}{3^3}} + f(0) = \frac{1}{26}x^3 + 1$$

[2]

귀류법으로 방정식 $8x^3 - 6x + 1 = 0$ 의 실근 x 가 유리수가 아님을 증명하자.

x 가 유리수라고 가정하면, $x = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0, a, b$ 는 서로소인 정수)로 쓸 수 있다.

$$\text{방정식에 대입하여 정리하면 } b^3 = 2(3ab^2 - 4a^3) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

b 는 짝수이므로 정수 k 에 대하여 $b = 2k$ 이고, a 와 b 는 서로소이므로 a 는 홀수이다.

$$b = 2k \text{를 식 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a^3 = 3ak^2 - k^3 = k^2(3a - k) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

식 $\textcircled{2}$ 에서 k 가 홀수이면 $3a - k$ 는 짝수이고 k 가 짝수이면 k^2 이 짝수이므로 $k^2(3a - k)$ 는 짝수이다.

a^3 은 짝수이므로 a 도 짝수이며, 이것은 a 가 홀수임에 모순이다.

따라서 주어진 방정식의 실근은 유리수가 아니다.

[3] (1)

$1 - x^8 = (1 + x^2)(1 - x^2 + x^4 - x^6)$ 이므로

$$\int_0^1 \frac{1 - x^8}{1 + x^2} dx = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{76}{105}$$

(2)

정적분 $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$ 을 구하기 위하여 $x = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta$ 이고, $x = 0$ 일 때 $\theta = 0$, $x = 1$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{따라서 } \left| I - \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \right| = \left| \frac{76}{105} - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{9}$$

(다른 풀이)

$I - \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \frac{-x^8}{1 + x^2} dx$ 이고 $\frac{x^8}{1 + x^2} \leq x^8$ 이므로

$$\left| I - \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^8}{1 + x^2} dx \leq \int_0^1 x^8 dx = \left[\frac{x^9}{9} \right]_0^1 = \frac{1}{9}$$

[4] (1)

n^{n+1} 과 $(n+1)^n$ 의 자연로그를 $n(n+1)$ 로 각각 나누면 $\frac{\ln n}{n}$ 과 $\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 이다.

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 를 미분하면 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ 이므로 $f'(x) = 0$ 이면 $x = e$ 이다.

$x > e$ 이면 $f'(x) < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 감소함수이다.

따라서 $n \geq 3 > e$ 이면 $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 이고, $n^{\frac{1}{n}} > (n+1)^{\frac{1}{n+1}}$ 이므로 $n^{n+1} > (n+1)^n$

(2)

$g(x) = \frac{f(x+1)}{x+1} = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ 이므로 $x \geq 0$ 에서 $g(x) \geq 0$

도형의 넓이 S 는

$$S = \int_0^{e^2-1} |g(x)| dx = \int_0^{e^2-1} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$$

$t = \ln(x+1)$ 로 놓으면 $dt = \frac{1}{x+1} dx$ 이고 $x = 0$ 일 때 $t = 0$, $x = e^2 - 1$ 일 때 $t = 2$ 이므로

$$\int_0^{e^2-1} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx = \int_0^2 te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^2 - \int_0^2 (-e^{-t}) dt = [-te^{-t} - e^{-t}]_0^2 = 1 - \frac{3}{e^2}$$

따라서 도형의 넓이 S 는

$$S = 1 - \frac{3}{e^2}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1]	$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($m \geq 3$)으로 나타내면	1
	$a_3 = \frac{1}{26}$, $a_k = 0$ ($1 \leq k \leq m, k \neq 3$)을 얻으면	3
	$f(x) = \frac{1}{26}x^3 + 1$ 을 얻으면	2
[2]	귀류법을 이용하여 실근 x 가 유리수라고 가정하면	2
	$x = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0, a, b$ 는 서로소인 정수)로 놓고 b 는 짝수, a 는 홀수임을 얻으면	4
	$b = 2k$ 로 놓고 $a^3 = k^2(3a - k)$ 가 짝수임을 얻으면	4
	a 가 짝수이고 a 는 홀수임에 모순이라고 표현하면	2
[3](1)	$\frac{1-x^8}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6$ 을 얻으면	1
	$\int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1$ 을 얻으면	3
	정적분 $\int_0^1 \frac{1-x^8}{1+x^2} dx = \frac{76}{105}$ 을 얻으면	2
[3](2)	치환적분법으로 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta$ 를 얻으면	5
	정적분 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ 를 얻으면	1
	부등식 $\left I - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right \leq \frac{1}{9}$ 을 증명하면	2
[4](1)	$x > e$ 이면 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 는 감소함수임을 얻으면	5
	$n \geq 3 > e$ 이면 $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 을 얻으면	1
	$n^{n+1} > (n+1)^n$ 을 얻으면	2
[4](2)	도형의 넓이를 $\int_0^{e^2-1} g(x) dx = \int_0^{e^2-1} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx$ 로 표현하면	3
	치환적분법으로 $\int_0^{e^2-1} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx = \int_0^2 te^{-t} dt$ 를 얻으면	3
	부분적분법으로 $\int_0^2 te^{-t} dt = [-te^{-t} - e^{-t}]_0^2$ 를 얻으면	2
	도형의 넓이 $1 - \frac{3}{e^2}$ 을 얻으면	2

2교시 · 문제 1

[문제 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 로그함수 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)는
 - $a > 1$ 일 때 x 의 값이 커지면 y 의 값도 커진다.
 - $0 < a < 1$ 일 때 x 의 값이 커지면 y 의 값은 작아진다.
- 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 일 때, 함수 f 를 일대일함수라고 한다.
- 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$ (n 은 자연수)이다.

[1] 두 함수 $f(x) = \log_k x, g(x) = x + 1$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $k > 1$)

- 두 곡선 $y = f(x), y = f(x^2)$ 과 직선 $x = k^n$ 이 만나는 점을 각각 A_n, B_n 이라고 하고 선분 $A_n B_n$ 의 길이를 a_n 이라고 할 때, 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n^2}}$ 을 구하시오. (단, n 은 자연수) [8점]
- $m_1, m_2, \dots, m_{10}$ 은 1이 아닌 5^{10} 의 서로 다른 약수들이라고 할 때, t 에 대한 다음 방정식의 양의 실근의 개수를 구하시오. [12점]

$$f(m_1) + f(m_2) + \dots + f(m_{10}) = f(t^2 + 3t + 4)$$

- 함수 $g^{10}(x)$ 가 일대일함수임을 증명하시오. [10점]
- 합성함수 $(g^{10} \circ f)(x)$ 에 대하여 다음의 값을 구하시오. [10점]

$$(g^{10} \circ f)(k) + (g^{10} \circ f)(k^2) + \dots + (g^{10} \circ f)(k^{100})$$

[2] a 가 0이 아닌 실수일 때, 함수 $f(x) = \sin(ax - 1)$ 을 이용하여 다음 등식을 만족시키는 실수 t 가 열린구간 $(a, a + 1)$ 에 존재함을 증명하시오. [10점]

$$\sin(a^2 + a - 1) - \sin(a^2 - 1) = a \cos(at - 1)$$

■ 예시 답안

[1] (1)

$f(x) = \log_k x$ 이므로 $f(x^2) = \log_k x^2 = 2 \log_k x$ 이다.

따라서 $A_n = (k^n, n)$ 이고 $B_n = (k^n, 2n)$ 이다.

또한 $A_{n^2} = (k^{n^2}, n^2)$ 이고 $B_{n^2} = (k^{n^2}, 2n^2)$ 이므로 $a_n = n$ 이고 $a_{n^2} = n^2$ 이다.

그러므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 이다.

(2)

$f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_{10}) = \log_k m_1 + \log_k m_2 + \cdots + \log_k m_{10} = \log_k (m_1 m_2 \cdots m_{10})$

이고 $f(t^2 + 3t + 4) = \log_k (t^2 + 3t + 4)$ 이다.

따라서 $\log_k (m_1 m_2 \cdots m_{10}) = \log_k (t^2 + 3t + 4)$ 이므로 $m_1 m_2 \cdots m_{10} = t^2 + 3t + 4$ 이고

$t^2 + 3t + 4 - m_1 m_2 \cdots m_{10} = 0$ 이다.

그러므로 $t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(4 - m_1 m_2 \cdots m_{10})}}{2}$ 이다.

그런데 $m_1 m_2 \cdots m_{10} \geq 125$ 이므로 $9 - 4(4 - m_1 m_2 \cdots m_{10}) = -7 + 4m_1 m_2 \cdots m_{10} \geq 493$ 이다.

따라서 방정식 $t^2 + 3t + 4 - m_1 m_2 \cdots m_{10} = 0$ 의 판별식이 양수이고 $t = 0$ 일 때

$t^2 + 3t + 4 - m_1 m_2 \cdots m_{10} < 0$ 이므로 주어진 방정식의 양의 실근은 1개다.

(다른 풀이)

$9 - 4(4 - m_1 m_2 \cdots m_{10}) = -7 + 4m_1 m_2 \cdots m_{10} \geq 493$ 를 구하고 다음과 같이 양의 실근의 개수를 구할 수 있다.

$\sqrt{493} \geq 22$ 이므로 $t = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4(4 - m_1 m_2 \cdots m_{10})}}{2} \geq 9$, $t = \frac{-3 - \sqrt{9 - 4(4 - m_1 m_2 \cdots m_{10})}}{2} \leq 0$

따라서 주어진 방정식의 양의 실근은 1개다.

(3)

모든 실수 a 에 대하여

$g^{10}(a) = g^9(g(a)) = g^9(a + 1) = g^8((a + 1) + 1) = g^8(a + 2) = \cdots = a + 10$ 이다.

따라서 $g^{10}(a) = a + 10$ 이다.

$g^{10}(x)$ 는 일대일함수임을 증명하기 위해서 실수 a, b 에 대하여 $g^{10}(a) = g^{10}(b)$ 이라고 가정하자.

그러면 $a + 10 = b + 10$ 이므로 $a = b$ 이다.

따라서 $g^{10}(x)$ 는 일대일함수이다.

(4)

(3)에서 모든 실수 a 에 대하여 $g^{10}(a) = a + 10$ 이므로

$$\begin{aligned} (g^{10} \circ f)(k) + (g^{10} \circ f)(k^2) + \cdots + (g^{10} \circ f)(k^{100}) &= \{f(k) + 10\} + \{f(k^2) + 10\} + \cdots + \{f(k^{100}) + 10\} \\ &= (1 + 10) + (2 + 10) + \cdots + (100 + 10) \\ &= (1 + 2 + \cdots + 100) + 10 \times 100 = 6050 \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$(g^{10} \circ f)(k) + (g^{10} \circ f)(k^2) + \cdots + (g^{10} \circ f)(k^{100}) = 6050$$

[2]

$f(x)$ 는 닫힌구간 $[a, a + 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(a, a + 1)$ 에서 미분가능하다.

따라서 평균값정리에 의하여 $\frac{f(a + 1) - f(a)}{a + 1 - a} = f'(t)$ 를 만족시키는 실수 t 가 열린구간 $(a, a + 1)$ 에 존재한다. 그러므로 $f(a + 1) - f(a) = f'(t)$ 를 만족시키는 실수 t 가 열린구간 $(a, a + 1)$ 에 존재한다.

그런데

$$f(a+1) - f(a) = \sin(a^2 + a - 1) - \sin(a^2 - 1), \quad f'(t) = a \cos(at - 1)$$

이므로 등식 $\sin(a^2 + a - 1) - \sin(a^2 - 1) = a \cos(at - 1)$ 을 만족시키는 실수 t 가 열린구간 $(a, a+1)$ 에 존재한다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$A_n = (k^n, n)$ 과 $B_n = (k^n, 2n)$ 을 구했으면	2
	$A_{n^2} = (k^{n^2}, n^2)$ 과 $B_{n^2} = (k^{n^2}, 2n^2)$ 을 구했으면	2
	$a_n = n$ 과 $a_{n^2} = n^2$ 을 구했으면	2
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 을 구했으면	2
1-2	$f(m_1) + f(m_2) + \cdots + f(m_{10}) = \log_k(m_1 m_2 \cdots m_{10})$ 을 구했으면	2
	$m_1 m_2 \cdots m_{10} = t^2 + 3t + 4$ 또는 $t^2 + 3t + 4 - m_1 m_2 \cdots m_{10} = 0$ 을 구했으면	4
	$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(4 - m_1 m_2 \cdots m_{10})}}{2}$ 을 구했으면	2
	$9 - 4(4 - m_1 m_2 \cdots m_{10}) = -7 + 4m_1 m_2 \cdots m_{10} \geq 493$ 을 구했으면	2
	$t = 0$ 일 때 $t^2 + 3t + 4 - m_1 m_2 \cdots m_{10} < 0$ 이므로 주어진 방정식의 양의 실근은 1개라는 설명을 했으면	2
1-3	$g^{10}(a) = g^9(g(a)) = g^9(a+1) = g^8((a+1)+1) = g^8(a+2) = \cdots = a+10$ 과정을 통해서 $g^{10}(a) = a+10$ 을 구했으면 (위의 과정이 없이 $g^{10}(a) = a+10$ 을 구했으면 3점 감점)	5
	$g^{10}(a) = g^{10}(b)$ 이라고 가정하고 $a = b$ 임을 보이면 (또는, $a \neq b$ 이라고 가정하고 $g^{10}(a) \neq g^{10}(b)$ 임을 보이면)	5
1-4	$(g^{10} \circ f)(k) + (g^{10} \circ f)(k^2) + \cdots + (g^{10} \circ f)(k^{100})$ $= \{f(k) + 10\} + \{f(k^2) + 10\} + \cdots + \{f(k^{100}) + 10\}$ 을 구했으면	4
	$(g^{10} \circ f)(k) + (g^{10} \circ f)(k^2) + \cdots + (g^{10} \circ f)(k^{100})$ $= (1+10) + (2+10) + \cdots + (100+10)$ 을 구했으면	3
	$(g^{10} \circ f)(k) + (g^{10} \circ f)(k^2) + \cdots + (g^{10} \circ f)(k^{100}) = 6050$ 을 구했으면	3
2	“ $f(x)$ 는 구간 $[a, a+1]$ 에서 연속이고 구간 $(a, a+1)$ 에서 미분가능하다”를 설명했으면	3
	“ $f(a+1) - f(a) = f'(t)$ 를 만족시키는 실수 t 가 열린구간 $(a, a+1)$ 에 존재한다”를 설명했으면	3
	$f(a+1) - f(a) = \sin(a^2 + a - 1) - \sin(a^2 - 1)$ 을 구했으면	2
	$f'(t) = a \cos(at - 1)$ 을 구했으면	2

2교시 · 문제 2

[문제 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

1. 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

- ① $n = 1$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다.
- ② $n = k$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면 $n = k + 1$ 일 때도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

2. 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 가 미분가능할 때, 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

3. 미분가능한 함수 $f(x)$ 에서 $f'(a) = 0$ 이고, $x = a$ 의 좌우에서

- ① $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$ 이다.
- ② $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$ 이다.

4. 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ 일 때 α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) dt$$

[1] 극한값 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{x^2} (e^{2x} \cos \pi x - 1) \right\}$ 을 구하시오. [8점]

[2] 모평균이 p , 모표준편차가 q 인 모집단에서 크기가 n^2 인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\bar{X}$ 에 대하여 $E(4\bar{X} + 2) + V(n\bar{X} + 3) = 18$ 을 만족시키는 두 자연수 p, q 를 구하시오. [8점]

[3] 실수 x 에 대한 다음 등식에 대하여 물음에 답하시오.

$$x^n - 1 = (x - 1) \sum_{i=0}^{n-1} x^i$$

- (1) 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오. [8점]
- (2) 다항식 x^{2024} 을 다항식 $x^3 + x^2 + x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지를 구하시오. [10점]

[4] 함수 $f(x) = e^{\sin^2 x} - e^{\cos^2 x}$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- (1) $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 나타내는 표를 작성하고 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오. [8점]
- (2) 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sin 2x dx$ 를 구하시오. [8점]

■ 예시 답안

[1]

$f(x) = e^{2x} \cos \pi x$ 라고 하자.

$f(x)$ 는 모든 실수에서 미분가능한 함수이며 $f(0) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (e^{2x} \cos \pi x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \text{이다.}$$

또한 $f'(x) = 2e^{2x} \cos \pi x - \pi e^{2x} \sin \pi x$, $f'(0) = 2$ 이다.

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ln e \times f'(0) = 2$$

[2]

모평균이 p , 모표준편차가 q 이고 표본의 크기가 n^2 이므로

$$E(\bar{X}) = p, V(\bar{X}) = \frac{q^2}{n^2}$$

$E(4\bar{X} + 2) + V(n\bar{X} + 3) = 18$ 에서

$$E(4\bar{X} + 2) + V(n\bar{X} + 3) = 4E(\bar{X}) + 2 + n^2 V(\bar{X}) = 4p + 2 + q^2 = 18$$

$4p + q^2 = 16$ 을 만족하는 두 자연수는 $p = 3, q = 2$

[3] (1)

(i) $n = 1$ 일 때

(좌변) $= x - 1$, (우변) $= x - 1$ 이므로 등식이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 등식이 성립한다고 가정하자.

$n = k + 1$ 일 때

$$\begin{aligned} x^{k+1} - 1 &= x^{k+1} - x^k + x^k - 1 \\ &= x^k(x - 1) + (x - 1) \sum_{i=0}^{k-1} x^i \\ &= (x - 1) \left(x^k + \sum_{i=0}^{k-1} x^i \right) = (x - 1) \sum_{i=0}^k x^i \end{aligned}$$

따라서 $n = k + 1$ 일 때도 등식이 성립한다.

(i), (ii)로부터 모든 자연수 n 에 대하여 등식이 성립한다.

(2)

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$$

$x^4 = t$ 로 놓으면

$$x^{2024} - 1 = (x^4)^{506} - 1 = t^{506} - 1 = (t - 1)(t^{505} + t^{504} + \dots + t + 1) \text{이므로}$$

$$x^{2024} = (x^3 + x^2 + x + 1) \{ (x - 1)(x^{2020} + x^{2016} + \dots + x^4 + 1) \} + 1$$

따라서

x^{2024} 을 다항식 $x^3 + x^2 + x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

(다른 풀이)

$$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \text{로 놓으면}$$

$$\begin{aligned} x^{2024} - 1 &= (x-1)(x^{2023} + x^{2022} + \cdots + x + 1) \\ &= (x-1)\{x^{2020}p(x) + x^{2016}p(x) + \cdots + x^4p(x) + p(x)\} \\ &= p(x)(x-1)(x^{2020} + x^{2016} + \cdots + x^4 + 1) \end{aligned}$$

따라서 다음을 얻는다.

$$x^{2024} = p(x)Q(x) + 1$$

(다른 풀이)

$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ 로 놓으면

$$x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = (x-1)p(x)$$

$$\begin{aligned} x^{2024} &= (x^4)^{506} = \{(x-1)p(x) + 1\}^{506} \quad (\text{이항정리 적용}) \\ &= \sum_{k=1}^{506} {}^{506}C_k (x-1)^k \{p(x)\}^k + 1 \\ &= p(x)Q(x) + 1 \end{aligned}$$

[4] (1)

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} + 2 \cos x \sin x e^{\cos^2 x} = 2 \sin x \cos x (e^{\sin^2 x} + e^{\cos^2 x})$$

$f'(x) = 0$ 으로부터 $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 를 얻고 이를 이용하여 함수의 증가와 감소를 나타내는 표를 작성하면 아래와 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π	...	$\frac{3\pi}{2}$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	$1-e$	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$1-e$	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$1-e$

따라서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 1-e$ 이고 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e-1$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sin 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x e^{\cos^2 x} \, dx \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①식의 항 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} \, dx$ 에서

$\sin x = t$ 로 놓으면 $\cos x = \frac{dt}{dx}$ 이고, $x = 0$ 일 때 $t = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ 일 때 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2te^{t^2} \, dt$$

$t^2 = p$ 로 놓으면 $2t = \frac{dp}{dt}$ 이고, $t = 0$ 일 때 $p = 0$, $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 $p = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2te^{t^2} \, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} e^p \, dp = \sqrt{e} - 1 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

①식의 항 $-\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x e^{\cos^2 x} \, dx$ 에서

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-\sin x = \frac{dt}{dx}$ 이고, $x = 0$ 일 때 $t = 1$, $x = \frac{\pi}{4}$ 일 때 $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x e^{\cos^2 x} \, dx = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2te^{t^2} \, dt$$

$t^2 = p$ 로 놓으면 $2t = \frac{dp}{dt}$ 이고, $t = 1$ 일 때 $p = 1$, $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 $p = \frac{1}{2}$ 이므로

$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x e^{\cos^2 x} \, dx = \int_1^{\frac{1}{2}} 2te^{t^2} \, dt = \int_1^{\frac{1}{2}} e^p \, dp = \sqrt{e} - e \cdots \cdots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡으로부터

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sin 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x e^{\cos^2 x} \, dx = 2\sqrt{e} - 1 - e$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1] 8점	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$ 을 이용하면	3
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(e^{2x} \cos \pi x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$ 와 $f'(x) = 2e^{2x} \cos \pi x - \pi e^{2x} \sin \pi x$, $f'(0) = 2$ 을 얻으면	3
	극한값이 2임을 구하면	2
[2] 8점	$E(\bar{X}) = p$, $V(\bar{X}) = \frac{q^2}{n^2}$ 을 얻으면	3
	$E(4\bar{X} + 2) + V(n\bar{X} + 3) = 4E(\bar{X}) + 2 + n^2 V(\bar{X}) = 4p + 2 + q^2 = 18$ 을 얻으면	3
	두 자연수는 $p = 3$, $q = 2$ 를 구하면	2
[3](1) 8점	$n = 1$ 일 때 등식이 성립함을 보이면	2
	$n = k$ 일 때 등식이 성립한다고 가정하면	2
	$n = k + 1$ 일 때 등식이 성립함을 보이면	4
[3](2) 10점	$x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ 을 얻으면	3
	x^{2024} 혹은 $x^{2024} - 1$ 을 $x^3 + x^2 + x + 1$ 로 나눈 식을 얻으면	5
	x^{2024} 을 다항식 $x^3 + x^2 + x + 1$ 로 나누었을 때의 나머지 1을 얻으면	2
[4](1) 8점	$f'(x) = 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} + 2 \cos x \sin x e^{\cos^2 x} = 2 \sin x \cos x (e^{\sin^2 x} + e^{\cos^2 x})$ 을 얻으면	2
	함수의 증가와 감소를 나타내는 표를 작성하면	4
	최솟값 $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 1 - e$ 과 최댓값 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e - 1$ 을 구하면	2
[4](2) 8점	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2te^{t^2} \, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} e^p \, dp = \sqrt{e} - 1$ 을 얻으면	4
	$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cos x e^{\cos^2 x} \, dx = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2te^{t^2} \, dt = \int_1^{\frac{1}{2}} e^p \, dp = \sqrt{e} - e$ 을 얻으면	4

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다