

단국대논술

자연계

목차

2026학년도 자연계열	3
오전 · 문제 1	3
오전 · 문제 2	5
오후 · 문제 1	8
오후 · 문제 2	10
 2025학년도 자연계열	 13
오전 · 문제 1	13
오전 · 문제 2	15
오후 · 문제 1	18
오후 · 문제 2	21
 2024학년도 자연계열	 23
오전 · 문제 1	23
오전 · 문제 2	26
오후 · 문제 1	29
오후 · 문제 2	32

2026학년도 자연계열

오전 · 문제 1

〔문제1〕 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

제시문

〔가〕 두 집합 X, Y 에서 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일대응이면, Y 의 각 원소 y 에 대응하는 X 의 원소 x 는 오직 하나 존재한다. 이때 Y 의 각 원소 y 에 $y = f(x)$ 인 X 의 원소 x 를 대응시키면 Y 를 정의역, X 를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 함수를 f 의 역함수라고 한다.

〔나〕 미분가능한 함수 $g(t)$ 에 대하여 $x = g(t)$ 로 놓으면

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

〔다〕 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능하고, $f'(x), g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

〔라〕 삼각형의 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분을 중선이라 하고, 세 중선의 교점을 삼각형의 무게중심이라고 한다. 삼각형의 무게중심은 세 중선을 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 내분한다.

실수 a 에 대하여 함수

$$f(x) = \int_0^x (t-a)e^t dt$$

의 극솟값을 $g(a)$ 라 하자. 구간 $x \geq 0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라 하자.

〔논제 1〕 $f(x)$ 가 극솟값 $m = 3 - e^a$ 을 가질 때, 상수 a 의 값을 구하시오. (15점)

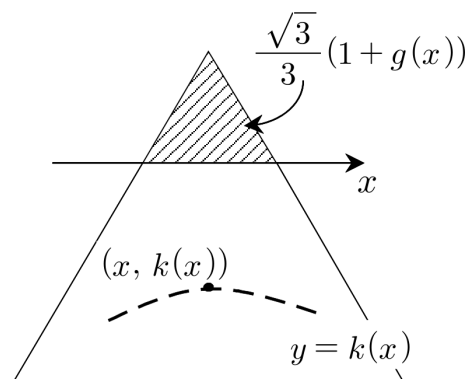
〔논제 2〕 $F(x) = \int_0^x te^t dt$ 에 대하여, $\int_0^m F'(h(x))dx$ 의 값을 구하시오. (20점)
(단, m 은 〔논제 1〕에서 구한 a 값을 대입한 m 이다.)

〔논제 3〕 $-1 \leq x \leq 1$ 일 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 $k(x)$ 와 $k(x)$ 의 최댓값을 구하시오. (20점)

한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 T 의 무게중심이 $(x, k(x))$ 일 때, 정삼각형 T 의 x 축 위쪽에 위치하는 부분의 넓이가

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(1+g(x))$$

이다. (단, 정삼각형 T 의 한 변은 x 축에 평행하고, x 축 위쪽에 위치하는 꼭짓점은 하나이다.)



■ 예시 답안

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

〔논제 1〕

$f'(x) = e^x(x-a)$ 이므로, $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극솟값을 갖는다. 따라서

$$f(x) = \int_0^x te^t dt - a \int_0^x e^t dt = (x-1-a)e^x + 1+a$$

에서 $f(a) = 1+a-e^a = g(a)$ 이고, 극솟값 $1+a-e^a = 3-e^a$ 이므로 $a=2$ 이다.

〔논제 2〕

$F'(x) = xe^x$ 이고, [논제 1]에 의하여 $g(x) = 1+x-e^x$, $g(2) = 3-e^2 = m$ 이다.

정적분 $\int_0^m F'(h(x))dx$ 의 값을 구하기 위해서 $x=g(u)$ 로 치환하면, $h(x)=u$ 이고,

$\frac{dx}{du} = g'(u) = (1-e^u)$ 이다. 또한 $x=0$ 일 때 $u=h(0)=0$ 이고, $x=m$ 일 때 $u=h(m)=2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^m F'(h(x))dx &= \int_0^2 F'(u)g'(u)du = \int_0^2 ue^u(1-e^u)du \\ &= \left[u\left(e^u - \frac{1}{2}e^{2u}\right) \right]_0^2 - \int_0^2 \left(e^u - \frac{1}{2}e^{2u}\right)du \\ &= \frac{3}{4} + e^2 - \frac{3}{4}e^4 \end{aligned}$$

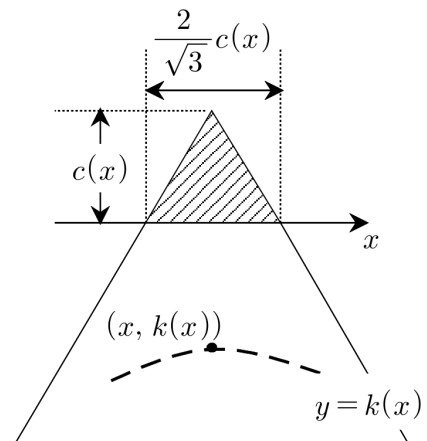
〔논제 3〕

정삼각형 T 의 높이는 3이고, 무게중심에서 꼭짓점까지의 거리는 2이다. 따라서 정삼각형 T 의 위쪽 꼭짓점의 좌표를 $(x, c(x))$ 라 하면, $c(x) = k(x) + 2$ 이다. 정삼각형 T 의 x 축 위쪽에 위치하는 부분의 넓이 $A(x)$ 는 높이가 $c(x)$ 인 정삼각형의 넓이이므로

$$A(x) = \frac{c(x)^2}{\sqrt{3}} = \frac{\{k(x)+2\}^2}{\sqrt{3}}$$

이다. 한편 $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1+g(x)) = \frac{\sqrt{3}}{3}(2+x-e^x)$ 이므로

$$\frac{\{k(x)+2\}^2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(2+x-e^x)$$



정삼각형 T 의 위쪽 꼭짓점이 x 축 위에 있으므로 $c(x) = k(x) + 2 \geq 0$

$k(x) + 2 = \sqrt{2+x-e^x}$, $k(x) = -2 + \sqrt{2+x-e^x}$ ($-1 \leq x \leq 1$)

$k'(x) = \frac{1-e^x}{2\sqrt{2+x-e^x}} = 0$ 으로부터 $k(x)$ 의 최댓값은 $x=0$ 에서 -1 이다.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

오전 · 문제 2

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하십시오. (45점)

제시문

[가] 함수 $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x 에 대하여

- $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.
- $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

[나] 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여

$$x_1 \neq x_2 \text{이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$

가 성립할 때, 이 함수 f 를 일대일함수라고 한다.[다] 함수 $f(x)$ 에서 $x = a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여

$f(x) \leq f(a)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대, 그 때의 함수값 $f(a)$ 를 극댓값이라고 하고,
 $f(x) \geq f(a)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소, 그 때의 함수값 $f(a)$ 를 극솟값이라고 하며,
 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

함수 $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 에 대하여 다음 물음에 답하십시오.[문제 1] 다음 조건을 만족시키는 실수 a 의 값의 범위를 구하십시오. (20점)

$b < a < c$ 인 어떤 음수 b 와 어떤 양수 c 에 대하여
 닫힌구간 $[b, c]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 일대일함수이다.

[문제 2] 함수 $A(x) = \int_0^1 |f(t) - x| dt$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 c 와 양수 k 의 값을 구하십시오. (25점)

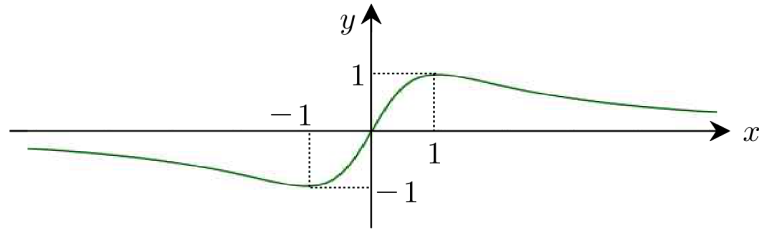
- (1) $A(x)$ 는 $x = c$ 에서 극값을 갖는다.
- (2) $A(k) = \ln 2$

■ 예시 답안

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

【문제 1】

함수 $f(x)$ 는 구간 $(-1, 1)$ 에서 $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} > 0$ 이므로 증가하고, 또한 구간 $(-\infty, -1)$ 와 $(1, \infty)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 감소한다. 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



닫힌구간 $[b, c]$ 에서 함수 $f(x)$ 가 일대일함수이기 위해서는 구간 $[b, c]$ 가 다음의 세 가지 경우 중 하나를 만족하여야 한다.

(경우 1) $[b, c] \subset (-\infty, -1]$

(경우 2) $[b, c] \subset [1, \infty)$

(경우 3) $[b, c] \subset [-1, 1]$

(경우 1)은 $c \leq -1$ 이므로 c 가 양의 실수임에 위배된다.

(경우 2)에서 $b \geq 1$ 이므로, b 가 음의 실수임에 위배된다.

(경우 3)에서 $a \in (-1, 1)$ 이면, 조건을 만족하는 음의 실수 b 와 양의 실수 c 가 존재한다. 만일

$a = -1$ 이면 $b < -1$ 이어야 하므로, $a \neq -1$ 이다. 마찬가지로 이유로 $a \neq 1$ 이다.

따라서 a 의 범위는 $(-1, 1)$ 이다.

【문제 2】

(i) $A(x)$ 구하기

실수 x 의 구간을 $x < 0$, $0 \leq x < 1$, $x \geq 1$ 인 경우로 나누어 각각의 경우에서 조건을 만족시키는 $A(x)$ 를 구한다.

(경우 1) $x < 0$: $0 \leq f(t) \leq 1$ 이므로

$$A(x) = \int_0^1 |f(t) - x| dt = \int_0^1 (f(t) - x) dt = \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} dt - x = \ln 2 - x$$

(경우 2) $0 \leq x < 1$: 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(t)$ 는 일대일함수이므로 역함수 $g(t)$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^1 |f(t) - x| dt = \int_0^{g(x)} (x - f(t)) dt + \int_{g(x)}^1 (f(t) - x) dt \\ &= \ln 2 - 2 \ln(1 + [g(x)]^2) - x + 2xg(x) \end{aligned}$$

(경우 3) $x \geq 1$: (경우 1)과 동일한 방법으로 $A(x) = x - \ln 2$

그러므로

$$A(x) = \begin{cases} \ln 2 - x & (x < 0) \\ \ln 2 - 2 \ln(1 + [g(x)]^2) - x + 2xg(x) & (0 \leq x < 1) \\ x - \ln 2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

(ii) c 구하기

$x < 0$ 일 때 $A'(x) = -1$ 이고, $x \geq 1$ 일 때 $A'(x) = 1$ 이다.

$0 \leq x < 1$ 일 때, $\frac{2g(x)}{1 + [g(x)]^2} = f(g(x)) = x$ 이므로

$$A'(x) = -2 \frac{2g(x)}{1 + [g(x)]^2} [g(x)]' - 1 + 2g(x) + 2x[g(x)]' = 2g(x) - 1$$

$A'(x) = 0$ 에서 $g(x) = \frac{1}{2}$ 이므로 $x = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ 이다. $f'(x) > 0$ 이므로 $g'(x) > 0$ 이고,

$A''(x) = 2g'(x) > 0$ 이므로 $A(x)$ 는 $x = \frac{4}{5}$ 에서 극솟값을 갖는다. 따라서 $c = \frac{4}{5}$ 이다.

[참고] $A'(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{A(x) - A(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{A(x) - A(0)}{x} = -1$ 이고, 마찬가지로 방법으로 $A'(1) = 1$ 이다.

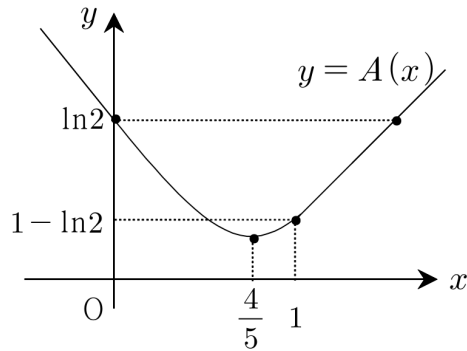
(iii) $A(k) = \ln 2$ 인 k 구하기 ($k > 0$)

$A(x)$ 는 아래로 볼록하고 $A(0) = \ln 2$, $A(1) = 1 - \ln 2$ 이다.

• $0 < x \leq 1$ 에서 $A(x) = \ln 2$ 를 만족하는 x 는 존재하지 않는다.

• $x > 1$ 에서 $A(x) = x - \ln 2 = \ln 2$ 인 $x = 2 \ln 2$ 이다.

따라서 $k = 2 \ln 2$ 이다.



■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

오후 · 문제 1

[문제1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하십시오. (55점)

제시문

[가] 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

[나] 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

[다] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

닫힌구간 $[0, 10\pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \cos x - \sin x$ 에 대하여 $g(x) = f(x)e^{-x}$ 라 하자.

[논제 1] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_1^{x+1} e^{-(at)^2} f(at)dt = 0$ 을 만족시키는 양수 a 의 최솟값을 구하십시오. (15점)

[논제 2] 닫힌구간 $[0, 10\pi]$ 에서 정의된 두 함수 $g(x) = f(x)e^{-x}$ 와 $h(x) = be^{-x}$ 는 다음 조건을 만족시킨다. (단, b 는 양수)

두 곡선 $y = g(x)$ 와 $y = h(x)$ 가 만나고, 만나는 모든 점에서
곡선 $y = g(x)$ 에 접하는 직선과 곡선 $y = h(x)$ 에 접하는 직선이 일치한다.

두 곡선 $y = g(x)$ 와 $y = h(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때 두 번째 수를 p_2 라 하자.
 $b + p_2$ 의 값을 구하십시오. (20점)

[논제 3] 방정식 $g(x) = 0$ 을 만족시키는 양수 x 를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때 k 번째 수를 x_k 라 하자.
 $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ 에서 곡선 $y = g(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A_k 라 하자. $A_1 + \frac{A_6}{A_3}$ 의 값을 구하십시오.
(20점)

■ 예시 답안

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

【논제 1】

$k(t) = e^{-(at)^2} f(at)$, $K(x) = \int_1^x k(t)dt$ 라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_1^{x+1} e^{-(at)^2} f(at)dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{K(x+1) - K(1)}{x} = K'(1) = k(1) = e^{-a^2} f(a) = 0$$

따라서 $\cos a = \sin a$ 로부터 a 의 최솟값은 $\frac{\pi}{4}$

【논제 2】

교점의 x 좌표를 p 라 하면, $g(p) = h(p)$ 로부터

$$\cos p - \sin p = b \quad \dots\dots (1)$$

또한 $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x))$, $h'(x) = -be^{-x}$ 이고, $g'(p) = h'(p)$ 이므로

$$2 \cos p = b \quad \dots\dots (2)$$

(1)과 (2)에 의해 $\cos p = -\sin p$ 에서 $\tan p = -1$ 이다. b 는 양의 실수이므로 $p_2 = \frac{15\pi}{4}$

(2)에 의해 $b = \sqrt{2}$ 이므로

$$b + p_2 = \sqrt{2} + \frac{15\pi}{4}$$

【논제 3】

방정식 $g(x) = 0$ 을 만족시키는 양수 x 를 작은 수부터 7개 구하면

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi, \frac{\pi}{4} + 2\pi, \frac{\pi}{4} + 3\pi, \frac{\pi}{4} + 4\pi, \frac{\pi}{4} + 5\pi, \frac{\pi}{4} + 6\pi$$

이다. 도형의 넓이 A_1 은 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ 에서 $g(x) \leq 0$ 이므로 부분적분법에 의하여

$$A_1 = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos x - \sin x)e^{-x} dx = -[e^{-x} \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (e^{-\frac{5\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}})$$

이고, 또한

$$A_3 = - \int_{\frac{\pi}{4}+2\pi}^{\frac{5\pi}{4}+2\pi} (\cos x - \sin x)e^{-x} dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos(x+2\pi) - \sin(x+2\pi))e^{-(x+2\pi)} dx = A_1 e^{-2\pi}$$

도형의 넓이 A_6 은 $\frac{21\pi}{4} \leq x \leq \frac{25\pi}{4}$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} A_6 &= \int_{\frac{\pi}{4}+5\pi}^{\frac{5\pi}{4}+5\pi} (\cos x - \sin x)e^{-x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos(x+5\pi) - \sin(x+5\pi))e^{-(x+5\pi)} dx \\ &= -e^{-5\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos x - \sin x)e^{-x} dx = A_1 e^{-5\pi} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $A_1 + \frac{A_6}{A_3} = \frac{\sqrt{2}}{2} (e^{-\frac{5\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}}) + e^{-3\pi}$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

오후 · 문제 2

[문제2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

제시문

[가] 함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

[나] 미분가능한 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

[다] 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(t)$ 가 $f(g(t)) = t$ 를 만족하면, $g(t)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = t$ 의 교점의 x 좌표 중 하나이다. 만일 $\lim_{t \rightarrow t_0+} g(t)$, $\lim_{t \rightarrow t_0-} g(t)$, $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t)$ 가 존재하면 이 값들도 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = t_0$ 의 교점의 x 좌표 중 하나이다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

[문제 1] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(t)$ 가 모든 실수 t 에 대하여

$$f(g(t)) = t$$

이고 다음 조건을 만족시킨다.

$$(1) f(3) = 0, g(0) = -2, g(6) = 1$$

(2) 함수 $g(t)$ 는 $t = 6$ 에서만 불연속이다.

$\lim_{t \rightarrow 6-} g(t)$ 와 $\lim_{t \rightarrow 6+} g(t)$ 의 값을 구하시오. (20점)

[문제 2] 함수 $f(x)$ 가 $x = 0, x = 2$ 에서 극값을 가질 때, 함수 $f(x)$ 와 실수 전체 집합에서 연속인 함수 $h(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다. (단, n 은 자연수)

$$(1) \text{ 모든 } t \geq 0 \text{에 대하여 } f(h(t)) = t + n$$

(2) 실수 전체 집합에서 정의되고 다음을 만족시키는 함수 $k(t)$ 는 연속이 아니다.

$$\text{“모든 } t \geq 0 \text{에 대하여 } f(k(t)) = t + n - 1\text{”}$$

$$(3) f(1) = f(h(n))$$

$h'(n)$ 의 값을 구하시오. (25점)

■ 예시 답안

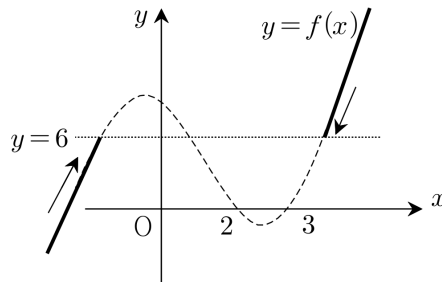
예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

【문제 1】

$g(0) = -2$ 이므로 $f(-2) = 0$ 이다. 또한, $f(3) = 0$ 이므로 $f(x) = (x+2)(x-3)(x-a)$ 이다. $g(6) = 1$ 에 의해 $f(1) = 6$ 이므로, $a = 2$ 이다.

조건 (2)에 의하여 $g(t)$ 는 $t < 6$ 에서 연속이고, 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형과 〈제시문〉 (다)에 의하여 $\lim_{t \rightarrow 6-} g(t)$ 은 $f(x) = 6$ 을 만족시키는 x 의 값 중 가장 작은 값이다. 또한 $g(t)$ 는 $t > 6$ 에서 연속이므로 $\lim_{t \rightarrow 6+} g(t)$ 은 $f(x) = 6$ 을 만족시키는 x 의 값 중 가장 큰 값이다.

방정식 $f(x) = (x+2)(x-3)(x-2) = 6$ 에서 $(x-1)(x^2 - 2x - 6) = 0$. $x = 1 - \sqrt{7}, 1, 1 + \sqrt{7}$ 이므로 $\lim_{t \rightarrow 6-} g(t) = 1 - \sqrt{7}$, $\lim_{t \rightarrow 6+} g(t) = 1 + \sqrt{7}$

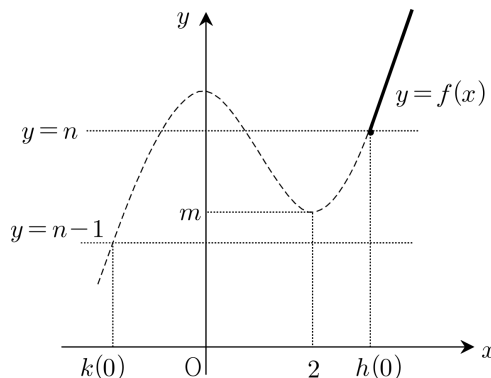


【문제 2】

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극솟값 m 을 갖는다고 하자. $t = 0$ 일 때, $h(0)$ 은 〈제시문〉 (다)에 의하여 $y = f(x)$ 와 직선 $y = n$ 의 교점의 x 좌표 중 하나이다. $h(t)$ 가 $t \geq 0$ 에서 연속이기 위해서는 $h(0)$ 가 $x \geq 2$ 인 구간에 위치해야 하고, $h(t)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = t + n$ 이 만나는 점의 x 좌표 중 가장 큰 값이다. 그러므로 $h(t)$ 가 $t \geq 0$ 에서 연속이기 위해서는 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극솟값을 가지므로 $h(0)$ 가 $x \geq 2$ 인 구간에 위치해야 하고, 그림과 같이 $t \geq 0$ 에서 $h(t)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = t + n$ 이 만나는 점의 x 좌표 중 가장 큰 값이다. 그러므로 $f(x)$ 의 극솟값을 m 이라 하면 $m \leq n$ 이다. 한편, $m \leq n - 1$ 이면 같은 이유로 모든 $t \geq 0$ 에 대하여 $f(k(t)) = t + n - 1$ 을 만족하는 연속함수 $k(t)$ 가 존재하므로 $m > n - 1$ 이다. 따라서

$$n - 1 < m \leq n$$

이다.



$f'(x) = 3x^2 - 6x$ 이므로 $f(x) = x^3 - 3x^2 + c$ 이다. 따라서 $m = f(2) = c - 4$ 이고 $n - 1 < c - 4 \leq n$.

$$f(h(n)) = 2n = f(1) = c - 2$$

로부터 $c = 2n + 2$ 에서 $n + 3 < 2n + 2 \leq n + 4$ 이고, 즉 $1 < n \leq 2$. 따라서 $n = 2$ 이고 $c = 6$ 이다.

$f(h(t)) = t + 2$ 로부터 $[f(h(t))]' = f'(h(t))h'(t) = 1$ 이므로

$$h'(2) = \frac{1}{f'(h(2))} \quad \cdots \cdots (\star)$$

또한 $h(2)$ 은 $f(x) = 4$ 를 만족하는 x 중 가장 큰 값이므로 $4 = f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ 에서 $h(2) = 1 + \sqrt{3}$. 따라서 (★)로부터 $h'(2) = \frac{1}{f'(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{3(1 + \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{6}$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

2025학년도 자연계열

오전 · 문제 1

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하십시오. (55점)

제시문

[가] 임의의 세 실수 a, b, c 를 포함하는 구간에서 함수 $f(x)$ 가 연속일 때

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

[나] 두 직선 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ 에 대하여 두 직선이 서로 수직이면 $mm' = -1$ 이다.

[다] 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

최고차항의 계수가 양수 a 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $g(x) = \int_1^x f(t)dt$ 는 $x = -2, 0, 2$ 에서 극값을 갖는다.

[문제 1] $\int_0^2 f(t)dt = -2 - g(0)$ 일 때, $g(-2)$ 의 값을 구하십시오. (15점)

[문제 2] 두 직선 ℓ 과 m 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (1) 직선 ℓ 은 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $A(1, f(1))$ 에서의 접선이다.
 (2) 직선 ℓ 과 m 은 점 $A(1, f(1))$ 에서 만나고 서로 수직이다.

직선 m 의 x 절편이 13일 때, a 의 값을 구하십시오. (20점)

[문제 3] 좌표평면 위의 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (1) 점 P 는 x 축 위에 있다. (단, 점 P 의 x 좌표는 양수)
 (2) 곡선 $y = f(x)$ 의 접선 중 점 P 를 지나는 접선은 두 직선 ℓ', m' 뿐이다.

직선 ℓ' 과 m' 이 서로 수직일 때, a 의 값을 구하십시오. (20점)

■ 예시 답안

※ 예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

【논제 1】

삼차함수 $f(x) = ax(x^2 - 4)$ 가 원점에 대칭이므로

$$-2 - g(0) = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^{-2} f(t)dt = \int_1^{-2} f(t)dt - \int_1^0 f(t)dt = g(-2) - g(0)$$

따라서 $g(-2) = -2$ 이다.

【논제 2】

$f(x) = ax(x^2 - 4) = ax^3 - 4ax$ 이므로 $f'(x) = 3ax^2 - 4a$ 이고 $f'(1) = -a$ 이다.

따라서 직선 m 은 점 A를 지나고 직선 ℓ 에 수직이므로 직선 m 의 방정식은 $y = \frac{1}{a}(x - 1) - 3a$ 이다. 직선 m 이 점 $(13, 0)$ 을 지나고 a 가 양수이므로 $a = 2$ 이다.

【논제 3】

곡선 $y = f(x)$ 위의 각 점에서 접선을 그어서 x 절편을 살펴보면, 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점이 x 축 위에 있으므로, 주어진 조건 (2)를 만족시키는 점 P는 오로지 $P(2, 0)$ 뿐이고 이 경우 두 접선 중 하나는 점 P에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접한다.

곡선 $y = f(x)$ 와 점 P에서 접하는 직선을 ℓ' 이라 하고, 점 P를 지나고 곡선 $y = f(x)$ 와 점 P가 아닌 점 $B(b, f(b))$ 에서 접하는 직선을 m' 이라 하자. 직선 m' 의 방정식은

$$y = f'(b)(x - b) + f(b) = (3ab^2 - 4a)(x - b) + ab^3 - 4ab$$

이고, 직선 m' 은 점 $P(2, 0)$ 을 지나므로

$$6ab^2 - 2ab^3 - 8a = 0$$

이다.

$$(b + 1)(b - 2)^2 = 0$$

에서 $b = -1, b = 2$. $b \neq 2$ 이므로 $b = -1$. 즉, 점 $B(-1, f(-1))$ 에서 직선 m' 과 곡선 $y = f(x)$ 는 접한다. 두 접선 ℓ', m' 은 서로 수직이므로

$$-1 = f'(-1)f'(2) = (3a - 4a)(12a - 4a)$$

이고 a 가 양수이므로 $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이다.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

오전 · 문제 2

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

제시문

[가] $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (단, C 는 적분상수)[나] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 에 대하여 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ 일 때 도함수 $g'(t)$ 가 α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt$$

[다] 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f'(a) = 0$ 이고 $x = a$ 의 좌우에서

- $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$
- $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$

 $f(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ 라 하자.
[문제 1] $0 < a < \frac{\pi}{2}$ 에 대하여

$$\int_0^a \frac{2 \sin x + 1}{2 \cos x + \sin x \cos x} dx = 1$$

일 때, $f(a)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수) (20점)[문제 2] 다음 조건을 만족시키는 실수 k 의 값과 범위를 모두 구하시오. (25점)

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ 에서
곡선 $y = |3f(x) - k|$ 와 직선 $y = 1$ 이 만나는 점의 개수는 2이다.

■ 예시 답안

※ 예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

〔논제 1〕

치환적분법에 의하여

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^a \frac{2 \sin x + 1}{2 \cos x + \sin x \cos x} dx = \int_0^a \frac{2 \sin x + 1}{(2 + \sin x)^2} \times \frac{2 + \sin x}{\cos x} dx = - \int_0^a \frac{f'(x)}{f(x)} dx \\ &= [-\ln|f(x)|]_0^a = \ln \frac{|f(0)|}{|f(a)|} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $f(a) = \frac{1}{2e}$ 이다.

(별해1)

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^a \frac{2 \sin x + 1}{2 \cos x + \sin x \cos x} dx = \int_0^a \frac{\sin x(2 + \sin x) + 1 - \sin^2 x}{2 \cos x + \sin x \cos x} dx = \int_0^a \tan x dx + \int_0^a \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx \\ &= \ln \frac{1}{2f(a)} \end{aligned}$$

(별해2) $1 = \int_0^a \frac{2 \sin x + 1}{2 \cos x + \sin x \cos x} dx = \int_0^a \frac{(2 \sin x + 1) \cos x}{\cos^2 x(2 + \sin x)} dx$ 에서 $\sin x = t$ 로 치환하면

$$\ln \frac{1}{2f(a)} = 1 \text{이다.}$$

〔논제 2〕

구간 $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 구하자.

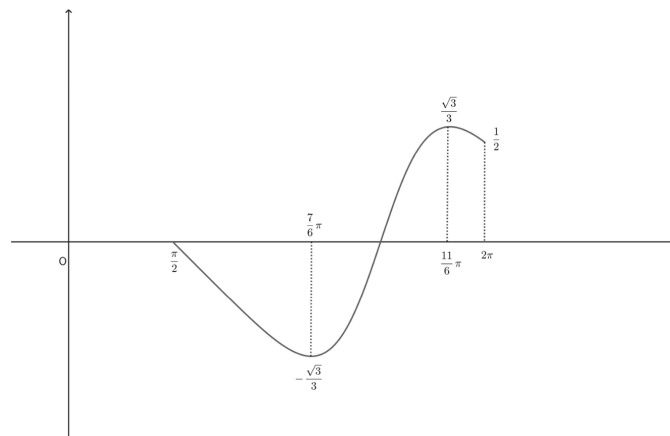
$$f'(x) = \frac{-(2 + \sin x) \sin x - \cos^2 x}{(2 + \sin x)^2} = -\frac{2 \sin x + 1}{(2 + \sin x)^2} = 0$$

으로부터 $x = \frac{7}{6}\pi$ 일 때 극솟값 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 을 갖고, $x = \frac{11}{6}\pi$ 일 때 극댓값 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 을 갖는다. 또한

• $f'(x) > 0$ 인 경우 : $2 \sin x + 1 < 0$, 즉 $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$ 에서 $f(x)$ 는 증가

• $f'(x) < 0$ 인 경우 : $2 \sin x + 1 > 0$, 즉 $\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi < x \leq 2\pi$ 에서 $f(x)$ 는 감소

한다. 이를 이용하여 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



곡선 $y = f(x)$ 의 개형

$|3f(x) - k| = 1$ 은 $f(x) = \frac{k-1}{3}$, $f(x) = \frac{k+1}{3}$ 이므로 곡선 $y = |3f(x) - k|$ 와 직선 $y = 1$ 의 교점의 개수가 2인 경우는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{k-1}{3}$ 의 교점과 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{k+1}{3}$ 의 교점의 합이 2인 경우와 같다.

두 직선 $y = \frac{k-1}{3}$ 와 $y = \frac{k+1}{3}$ 의 거리 d 가 $\frac{2}{3}$ 이고 $d = \frac{2}{3} > \frac{\sqrt{3}}{3}$, $d = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ 임에 주목하여 두 직선 $y = \frac{k-1}{3}$ 와 $y = \frac{k+1}{3}$ 을 동시에 움직이면서 교점의 개수의 합이 2인 경우를 살펴보면 구하는 k 의 값의 범위는

(i) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{k+1}{3} \leq 0$ 인 경우 : $-1 - \sqrt{3} < k \leq -1$

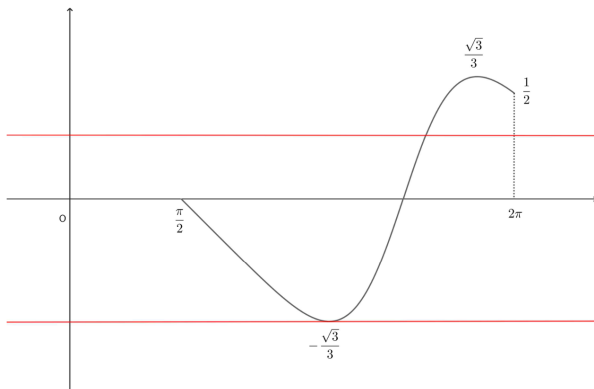
(ii) $\frac{k-1}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 경우 : $k = 1 - \sqrt{3}$

(iii) $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} < \frac{k-1}{3} \leq 0$ 인 경우 : $-1 + \sqrt{3} < k \leq 1$

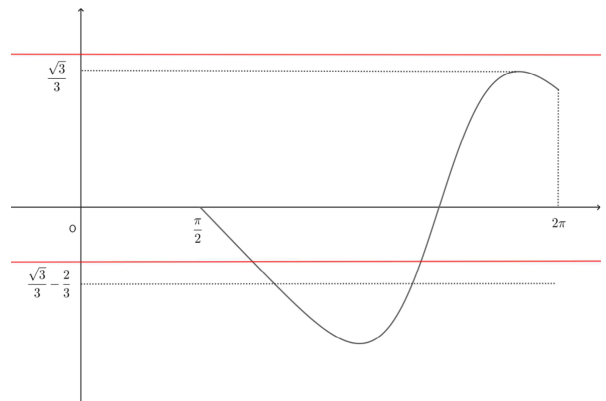
(iv) $\frac{1}{2} \leq \frac{k-1}{3} < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 경우 : $\frac{5}{2} \leq k < 1 + \sqrt{3}$

이다. 요약하면

$$-1 - \sqrt{3} < k \leq -1, \quad 1 - \sqrt{3}, \quad -1 + \sqrt{3} < k \leq 1, \quad \frac{5}{2} \leq k < 1 + \sqrt{3}$$



경우 (ii)의 예



경우 (iii)의 예

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

오후 · 문제 1

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

제시문

[가] 함수 $f(x)$ 가 임의의 세 실수 a, b, c 를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

[나] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 에 대하여 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ 일 때 도함수 $g'(t)$ 가 α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

[다] 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능하고 $f'(x), g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

[라] 함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.

(iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이 아닐 때, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 불연속이라고 한다.

실수 t 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = x^2 + |x - t|$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 하자. 사차함수 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 $h(1) = 0$, $h(-1) \neq g(0)$ 이다.

[문제 1] $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ 일 때, $g(t)$ 를 구하시오. (15점)

[문제 2] $\int_{-1}^1 [\ln(|g'(t)| + 1)]^2 dt$ 의 값을 구하시오. (20점)

[문제 3] 실수 k 에 대하여, x 축에 평행한 직선 $y = k$ 와 곡선 $y = h(x)$ 의 교점의 개수를 $n(k)$ 라 하자. 함수 $n(k)$ 가 $k = 0$ 과 $k = 1$ 에서만 불연속일 때, $h(4)$ 의 값을 구하시오. (20점)

■ 예시 답안

※ 예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

〔논제 1〕

$-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ 이므로

• $x \geq t$ 이면 $f(x) = x^2 + x - t = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - t$ 는 $x = t$ 에서 최솟값 $f(t) = t^2$ 을 갖는다.

• $x \leq t$ 이면 $f(x) = x^2 - x + t = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + t$ 는 $x = t$ 에서 최솟값 $f(t) = t^2$ 을 갖는다.

그러므로 두 경우 모두 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(t) = t^2$ 이다. 따라서 $g(t) = t^2$ 이다.

〔논제 2〕

〔논제 1〕과 마찬가지로 방법으로 $t \geq \frac{1}{2}$ 일 때,

• $x \geq t$ 이면 $f(x) = x^2 + x - t = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - t$ 의 최솟값은 $f(t) = t^2$,

• $x \leq t$ 이면 $f(x) = x^2 - x + t = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + t$ 의 최솟값은 $f\left(\frac{1}{2}\right) = t - \frac{1}{4}$

$t^2 \geq t - \frac{1}{4}$ 이므로 $f(x)$ 의 최솟값은 $t - \frac{1}{4}$ 이다. 따라서 $g(t) = t - \frac{1}{4}$ 이다.

$t \leq -\frac{1}{2}$ 일 때, $-t \geq \frac{1}{2}$ 이므로 $f(x)$ 의 최솟값은 $-t - \frac{1}{4}$ 이다. 따라서 $g(t) = -t - \frac{1}{4}$ 이다. 정리하면

$$g(t) = \begin{cases} -t - \frac{1}{4} & \left(t \leq -\frac{1}{2}\right) \\ t^2 & \left(-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\right) \\ t - \frac{1}{4} & \left(t \geq \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad \text{이고} \quad g'(t) = \begin{cases} -1 & \left(t \leq -\frac{1}{2}\right) \\ 2t & \left(-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(t \geq \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

함수 $g'(t)$ 는 원점에 대칭이므로

$$\int_{-1}^1 \{\ln(|g'(t)| + 1)\}^2 dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \{\ln(2t + 1)\}^2 dt + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (\ln 2)^2 dt$$

이다. 치환적분법과 부분적분법(2회)을 활용하면

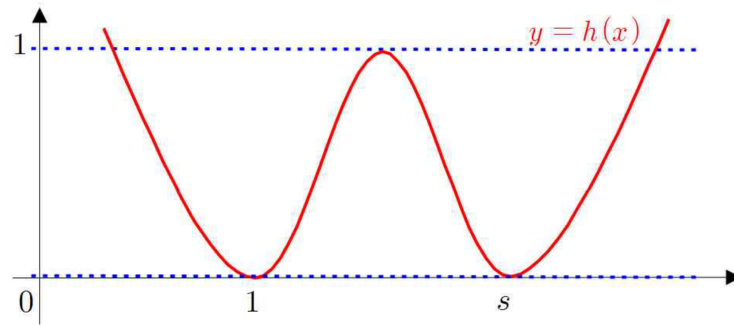
$$2 \int_0^{\frac{1}{2}} \{\ln(2t + 1)\}^2 dt = \int_1^2 (\ln u)^2 du = 2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$$

이므로

$$\int_{-1}^1 \{\ln(|g'(t)| + 1)\}^2 dt = 3(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$$

〔논제 3〕

함수 $h(x)$ 가 $x = x_0$ 에서 극값을 가지면 함수 $n(k)$ 는 $k = h(x_0)$ 에서 불연속이다. 사차함수의 그래프의 개형과 주어진 조건에 의하여 $h(x)$ 의 극값은 3개이고, 세 극값 중 극솟값이 동일하다. (아래 그림)



$n(k)$ 가 특히, $k = 0$ 에서 불연속이고 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$h(x) = (x-1)^2(x-s)^2$$

의 꼴이고 (s 는 상수), $h(x)$ 는 $x = \frac{s+1}{2}$ 에서 극댓값을 갖는다. 또한 $n(k)$ 가 $k = 1$ 에서 불연속이므로 $h(x)$ 는 $x = \frac{s+1}{2}$ 에서 극댓값 1을 갖는다. 따라서

$$h\left(\frac{s+1}{2}\right) = \left(\frac{s-1}{2}\right)^4 = 1$$

에서 $s = 3$ 또는 $s = -1$ 이다. $h(-1) \neq g(0) = 0$ 이므로 $h(x) = (x-1)^2(x-3)^2$ 이고 $h(4) = 9$ 이다.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

오후 · 문제 2

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하십시오. (45점)

제시문

[가] 함수 $y = f(x)$ 의 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여

$$f(x+p) = f(x)$$

를 만족시키는 0이 아닌 상수 p 가 존재할 때, 함수 $y = f(x)$ 를 주기함수라 하고 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라고 한다.

[나] 함수 $f(x)$ 가 a, b 를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분은

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

자연수 n 에 대하여, $2(n-1) \leq x < 2n$ 일 때

$$f(x) = \sin(n\pi x)$$

라 하자.

[문제 1] $\int_0^t f(x)dx = \frac{1}{6\pi}$ 을 만족시키는 실수 t 의 최댓값을 구하십시오. (단, $0 \leq t \leq 6$) (20점)

[문제 2] 다음 조건을 만족시키는 실수 m 의 값의 범위를 구하십시오. (25점)

$$0 \leq k \leq m \text{이고 } \int_0^k f(x)dx = 0 \text{인 실수 } k \text{의 개수가 18이다.}$$

■ 예시 답안

※ 예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

〔문제 1〕

먼저 닫힌구간 $[4, 6]$ 에서 주어진 조건을 만족하는 t 를 찾아보자.

$$\int_0^4 f(x)dx = 0 \text{ 이므로 } \frac{1}{6\pi} = \int_0^t f(x)dx = \int_4^t \sin(3\pi x)dx = \left[-\frac{1}{3\pi} \cos(3\pi x) \right]_4^t$$

즉, 닫힌구간 $[4, 6]$ 에서 $\cos 3\pi t = \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 t 의 값은

$$\frac{37}{9}, \frac{41}{9}, \frac{43}{9}, \frac{47}{9}, \frac{49}{9}, \frac{53}{9}$$

이다. 그러므로 닫힌구간 $[0, 6]$ 에서 주어진 조건을 만족시키는 t 의 최댓값은 $\frac{53}{9}$ 이다.

〔문제 2〕

$0 \leq k < 2$ 이고 $\int_0^k f(x)dx = \int_0^k \sin(\pi x)dx = 0$ 인 k 의 개수는 1,

$2 \leq k < 4$ 이고 $\int_0^k f(x)dx = \int_2^k \sin(2\pi x)dx = 0$ 인 k 의 개수는 2,

$4 \leq k < 6$ 이고 $\int_0^k f(x)dx = \int_4^k \sin(3\pi x)dx = 0$ 인 k 의 개수는 3,

$6 \leq k < 8$ 이고 $\int_0^k f(x)dx = \int_6^k \sin(4\pi x)dx = 0$ 인 k 의 개수는 4,

$8 \leq k < 10$ 이고 $\int_0^k f(x)dx = \int_8^k \sin(5\pi x)dx = 0$ 인 k 의 개수는 5

이므로 구간 $0 \leq k < 10$ 에서 $\int_0^k f(x)dx = 0$ 인 실수 k 의 개수는 15이다. 따라서 $10 \leq k \leq m$ 일 때

$$\int_0^k f(x)dx = \int_{10}^k f(x)dx = 0$$

을 만족시키는 k 의 개수가 3이어야 한다.

$$0 = \int_{10}^k f(x)dx = \int_{10}^k \sin 6\pi x dx = -\frac{1}{6\pi} [\cos 6\pi x]_{10}^k$$

이므로 $10 \leq k < 12$ 일 때 $\cos 6\pi k = 1$ 을 만족시키는 k 의 값을 모두 구하면

$$10, 10 + \frac{1}{3}, 10 + \frac{2}{3}, 11, 11 + \frac{1}{3}, 11 + \frac{2}{3}$$

이다. 따라서 구간 $10 \leq k \leq m$ 인 k 가 3개뿐이기 위한 m 의 값의 범위는 $\frac{32}{3} \leq m < 11$ 이다.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

2024학년도 자연계열

오전 · 문제 1

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하십시오. (55점)

제시문

(가) 함수 $y = f(x)$ 에서 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 $y = f(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능하다고 한다.

(나) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속, $f(x) \geq 0$ 이고, $f(a) = f(b) = 0$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

(다) 함수 $f(x)$ 에서 $x = a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(x) \leq f(a)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대, 그 때의 함수값 $f(a)$ 를 극댓값이라고 하고, $f(x) \geq f(a)$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소, 그 때의 함수값 $f(a)$ 를 극솟값이라고 하며, 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = ||\tan x| - 1|$$

이라 하고, 삼차함수 $p(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (1) 함수 $g(x) = f(x)p(x)$ 는 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 미분가능하다.
- (2) 함수 $h(x) = |\tan x + p(x)|$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

[문제 1] 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하십시오. (15점)

[문제 2] 삼차함수 $p(x)$ 를 구하십시오. (20점)

[문제 3] 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 다음 조건을 만족시키는 상수 a 의 개수를 구하십시오. (20점)

함수 $h(x)$ 는 $x = a$ 에서 극값을 갖는다.

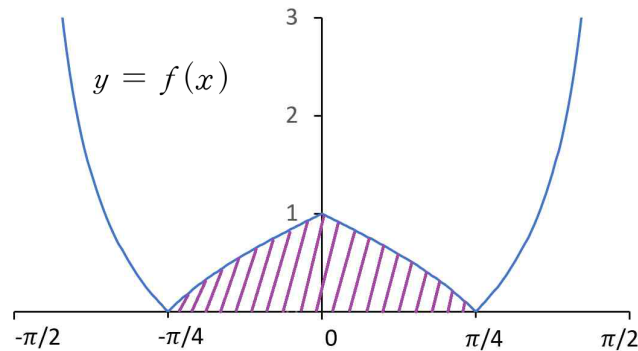
■ 예시 답안

[문제 1]

$$f(x) = ||\tan x| - 1| = \begin{cases} \tan x - 1 & \left(\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \\ -\tan x + 1 & \left(0 \leq x < \frac{\pi}{4}\right) \\ \tan x + 1 & \left(-\frac{\pi}{4} \leq x < 0\right) \\ -\tan x - 1 & \left(-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

이고, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$. 따라서 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{2} - \ln 2$$



[문제 2]

함수 $g(x) = f(x)p(x)$ 는 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $x \neq \frac{\pi}{4}, 0, -\frac{\pi}{4}$ 일 때 미분가능하고 도함수는

$$g'(x) = f'(x)p(x) + f(x)p'(x)$$

이다. 한편, $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{4}, 0, -\frac{\pi}{4}$ 에서 미분가능하지 않다. 따라서 조건 (1)로부터

$$p\left(\frac{\pi}{4}\right) = p(0) = p\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

이어야 하므로, 적당한 상수 $a (a \neq 0)$ 에 대하여

$$p(x) = ax\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a\left(x^3 - \frac{\pi^2}{16}x\right) \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

이다.

$h(0) = 0, h(x) \geq 0$ 으로부터

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{h(t) - h(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{h(t)}{t} \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{h(t) - h(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{h(t)}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{h(t)}{t} \leq 0$$

이므로 $h(x)$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능하려면 $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{h(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{h(t)}{t} = 0$ 이다. 또한,

$$-h(t) \leq \tan t + p(t) \leq h(t)$$

이므로

$$0 = -\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{h(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t + p(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{h(t)}{t} = 0$$

따라서 $a = \frac{16}{\pi^2}, p(x) = \frac{16}{\pi^2}x^3 - x$ 이다.

[문제 3]

$\tan x + p(x)$ 는 미분가능하고, $\tan x + p(x)$ 의 도함수는

$$\sec^2 x + p'(x) = \sec^2 x + \frac{48}{\pi^2}x^2 - 1 = \tan^2 x + \frac{48}{\pi^2}x^2 \geq 0$$

이므로 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 함수 $\tan x + p(x)$ 는 증가한다.

또한, $h(0) = 0$ 이므로 함수 $h(x) = \left| \tan x + \frac{16}{\pi^2}x^3 - x \right|$ 는 $x < 0$ 일 때 감소하고 $x > 0$ 일 때 증가한다. 따라서 극값을 갖는 x 의 개수는 1개이다.

■ 채점 기준

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

[논제 1 평가기준]

- 구하는 넓이는 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ 임을 제시 : 5점

- $\tan x$ 의 적분을 제시 : 5점

- 정답을 제시 : 5점

[논제 2 평가기준]

- 함수 $f(x)$ 가 $x = -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$ 에서 미분가능하지 않음을 제시 : 6점

- 삼차함수 $p(x) = ax\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 를 제시 : 9점

- 정답을 제시 : 5점

[논제 3 평가기준]

- 함수 $\tan x + p(x)$ 가 증가함을 제시 : 10점

- 함수 $h(x)$ 가 $x = 0$ 에서만 극값을 가짐을 제시 : 10점

오전 · 문제 2

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

제시문

(가) 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능할 때,

- (a, b) 에서 $f'(x) > 0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 증가,
- (a, b) 에서 $f'(x) < 0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 $[a, b]$ 에서 감소한다.

(나) 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서

- $f''(x) > 0$ 이면 곡선 $y = f(x)$ 는 그 구간에서 아래로 볼록
- $f''(x) < 0$ 이면 곡선 $y = f(x)$ 는 그 구간에서 위로 볼록하다.

(다) 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 합성함수 $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 에 대해서 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재할 때 $g(x) = (f^{-1} \circ h)(x)$ 이다.(라) 미분가능한 함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 를 포함하는 열린구간에서 연속이고, 함수 $f(x)$ 가 $g(a)$ 와 $g(b)$ 를 양 끝으로 하는 열린구간에서 연속일 때

$$\int_a^b (f \circ g)(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt \quad \dots\dots\dots (*)$$

$$\alpha(x) = \int_a^x (f \circ g)(t)g'(t)dt, \beta(x) = \int_{g(a)}^x f(t)dt \text{ 라 할 때, 식 } (*) \text{ 은}$$

$$\alpha(b) = (\beta \circ g)(b)$$

와 같다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ 에 대하여

$$\alpha(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}dt$$

이고, $-1 < x < 1$ 일 때

$$\beta(x) = \int_c^x \frac{2}{1-t^2}dt, \quad c = \sqrt{f(0)} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

[문제 1] 좌표평면 위의 세 점 $A(-k, 0), B(k, 0), C(k, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 세 변과 곡선 $y = f(x)$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 상수 k 의 범위를 구하시오. (단, $k > 0$) (20점)[문제 2] 제시문 (라)를 참조하여, $(\beta^{-1} \circ \alpha)(\ln 2)$ 의 값을 구하시오. (25점)

■ 예시 답안

[문제 1]

함수 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ 의 그래프의 개형을 생각해 보자. $f(x)$ 는 연속함수이고 미분가능하며

$$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$$

이므로 $f(x)$ 는 증가함수이고, 구간 $[-k, k]$ 에서

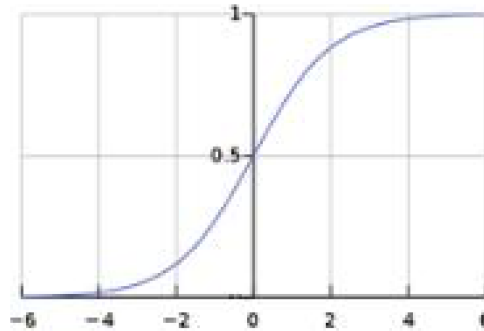
$$\text{최솟값 } f(-k) = \frac{1}{e^k + 1}, \quad \text{최댓값 } f(k) = 1 - \frac{1}{e^k + 1}$$

을 갖고 $f(0) = \frac{1}{2}$ 이다. 또한

$x < 0$ 일 때 $f'(x)$ 가 증가하고 $x > 0$ 일 때 $f'(x)$ 가 감소

한다. 제시문 (나)에 의하여 $f(x)$ 의 증가와 감소에 관한 표와 그래프는 아래와 같다.

x	$-k$	...	0	...	k
$f'(x)$		+	$1/4$	+	
$f''(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$1/(e^k + 1)$	$\nearrow$	$1/2$	$\nearrow$	$1 - 1/(e^k + 1)$



변 AB와 곡선 $y = f(x)$ 는 만나지 않고, 변 BC와 곡선 $y = f(x)$ 는 한 점에서 만나므로 변 AC와 곡선 $y = f(x)$ 는 세 점에서 만나야 한다. 즉, 점 $A(-k, 0)$ 과 점 $C(k, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식 $y = \frac{1}{2k}x + \frac{1}{2}$ 과 곡선 $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ 은 $-k \leq x \leq k$ 의 범위에서 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

직선 $y = \frac{1}{2k}x + \frac{1}{2}$ 이 곡선 $y = f(x)$ 와 점 $(0, \frac{1}{2})$ 에서 접할 때

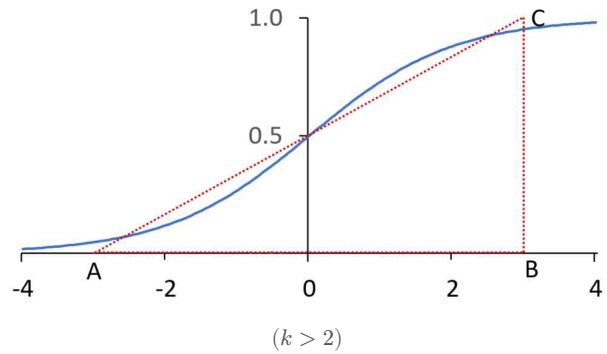
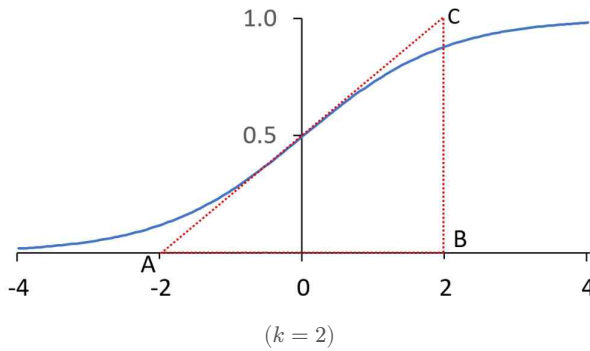
$$(\text{직선의 기울기}) = \frac{1}{2k} = f'(0) = \frac{1}{4}$$

이다. 따라서, $f(x)$ 의 그래프의 개형에 의하여, 곡선 $y = f(x)$ 가 직선 $y = \frac{1}{2k}x + \frac{1}{2}$ 과 서로 다른 세 점에서 만나려면 (직선의 기울기) $= \frac{1}{2k} < \frac{1}{4}$, 즉 $k > 2$ 이어야 한다. 또한

$$f(-k) = \frac{1}{e^k + 1} > 0, \quad f(k) = 1 - \frac{1}{e^k + 1} < 1$$

이므로 세 교점의 x 좌표는 모두 $-k \leq x \leq k$ 의 범위에 있다.

결국 삼각형 ABC와 곡선 $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ 이 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 양의 실수 k 의 범위는 $k > 2$ 이다.



[논제 2]

$g(x) = (\beta^{-1} \circ \alpha)(x)$ 라 하면 $\alpha(x) = (\beta \circ g)(x)$ 이므로 제시문 (라)에 의해서

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{f(t)} dt = \int_{g(0)}^{g(\ln 2)} \frac{2}{1-t^2} dt$$

$$g(0) = \sqrt{f(0)} = \sqrt{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

을 만족시키는 치환 $u = g(t)$ 를 구하면 된다. ①을 만족시키기 위해서 $u = \sqrt{f(t)}$ 로 치환해 보자. $u^2 = f(t)$ 이므로

$$2u \frac{du}{dt} = f'(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = \left(\frac{e^{2t}}{(1+e^t)^2} \cdot \frac{1}{e^t} \right) = u^4 \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) = u^2(1-u^2)$$

이다. 따라서

$$\int_0^x \sqrt{f(t)} dt = \int_c^{g(x)} \frac{2}{1-u^2} du$$

가 성립한다. 그러므로 $(\beta^{-1} \circ \alpha)(\ln 2) = \sqrt{f(\ln 2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

- ※ 1. 치환한 후 피적분함수 $\frac{2}{1-u^2}$ 가 나오지 않는 경우 치환을 반복하여 $\frac{2}{1-u^2}$ 를 구할 수 있다.
 2. 함수 $\alpha(x)$ 와 $\beta(x)$ 를 구해서 정답을 제시해도 된다.

■ 채점 기준

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

[논제 1 평가기준]

- $f(x)$ 가 증가함수임을 제시 : 3점
- 곡선 $y = f(x)$ 가 $x < 0$ 일 때 아래로 볼록, $x > 0$ 일 때 위로 볼록임을 제시 : 3점
- 곡선 $y = f(x)$ 가 변 AB와 만나지 않음을 제시 : 2점
- 곡선 $y = f(x)$ 가 변 BC와 한 점에서 만남을 제시 : 2점
- 곡선 $y = f(x)$ 가 변 AC와 세 점에서 만나는 조건을 찾아 정답을 제시 : 10점

[논제 2 평가기준]

- $u = \sqrt{f(t)}$ 로 치환한 형태를 제시 : 10점
- $\frac{du}{dt} = \frac{u(1-u^2)}{2}$ 임을 제시 : 5점
- $\int_0^x \sqrt{f(t)} dt = \int_c^{g(x)} \frac{2}{1-u^2} du$ 꼴을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 5점

오후 · 문제 1

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (55점)

제시문

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \quad C \text{ 는 적분상수}$$

(나) 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f'(a) = 0$ 이고 $x = a$ 의 좌우에서

- $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극댓값
- $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극솟값을 갖는다.

(다) 미분가능한 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(x) = t$ 로 놓으면

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

(라) 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를

$$f(x) = \int_1^x \frac{2t}{t^2 + 3} dt, \quad g(x) = ax + \frac{8}{x^2 + 3}$$

라 하자. (단, a 는 상수)

[논제 1] 곡선 $y = f(x)$ 가 x 축과 만나는 두 점과 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\ln \frac{4}{3}$ 가 되는 상수 t 의 값을 모두 구하시오. (15점)

[논제 2] 다음 조건을 만족시키는 실수 a 의 범위를 구하시오. (20점)

함수 $g(x) = ax + \frac{8}{x^2 + 3}$ 는 $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$)에서만 극값을 갖고, $g(\alpha) > g(\beta)$ 이다.

[논제 3] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $h(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (1) $h(0) + g''(0) = f(-1)$
- (2) $h(1) + g(1) = g'(-1)$
- (3) $\int_0^1 \frac{h'(x)}{x^2 + 3} dx = -1$

정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x h(\cos x)}{(3 + \cos^2 x)^2} dx$ 의 값을 구하시오. (20점)

■ 예시 답안

[문제 1]

먼저 $f(x) = \int_1^x \frac{2t}{t^2+3} dt = \ln(x^2+3) - \ln 4 = \ln \frac{x^2+3}{4}$ 이다.

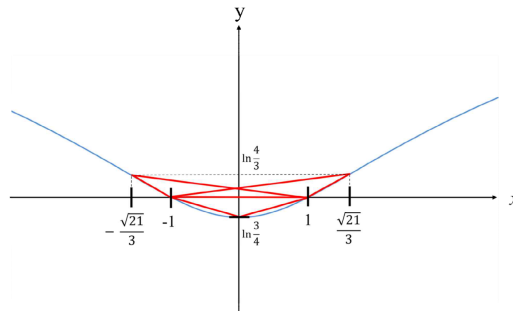
곡선 $y = f(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $-1, 1$ 이므로 삼각형 밑변의 길이는 2이고 높이는 $\left| \ln \frac{t^2+3}{4} \right|$ 이다. 따라서

$$(\text{삼각형 넓이}) = \left| \ln \frac{t^2+3}{4} \right| = \ln \frac{4}{3}$$

에서

$$t = 0, \frac{\sqrt{21}}{3}, -\frac{\sqrt{21}}{3}$$

이다.



[문제 2]

먼저 $g(x)$ 의 극값이 두 개이므로 $\alpha < \beta$ 일 때, “ $g(\alpha) > g(\beta)$ ”은

“함수 $g(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극댓값을 갖고, $x = \beta$ 에서 극솟값을 갖는다”

와 필요충분조건이다. 함수 $g'(x) = a - \frac{16x}{(x^2+3)^2}$ 의 그래프의 개형을 그리자.

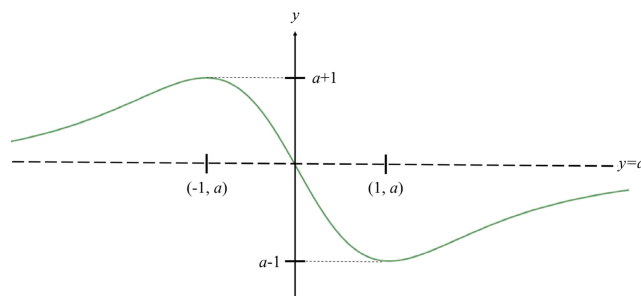
$$g''(x) = -\frac{16(x^2+3)^2 - 64x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4} = \frac{48(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

이므로 $g'(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 $a+1$, $x = 1$ 에서 극솟값 $a-1$ 을 갖는다.

한편 $g'(0) = a$ 이고

$$\begin{cases} g'(x) < a & (x > 0) \\ g'(x) > a & (x < 0) \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g'(x) = a$$

이므로 함수 $g'(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



($y = g'(x)$ 의 그래프)

그러므로 함수 $g(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극대이고 $x = \beta$ ($\alpha < \beta$)에서 극소를 갖기 위해서는 제시문 (나)에 의해서 x 축이 직선 $y = a-1$ 과 $y = a$ 사이에 놓여 있어야 한다. 따라서 $a-1 < 0 < a$.

즉 $0 < a < 1$ 이다.

(별해) $g'(x) = \frac{a(x^2+3)^2 - 16x}{(x^2+3)^2}$ 가 $x = \alpha, \beta$ 에서 극값을 가질 필요충분조건은 $G(x) = a(x^2+3)^2 - 16x$ 가 $x = \alpha, \beta$ 에서 극값을 갖는 것이다. 따라서 $G(x)$ 가 극대, 극소가 되는 $x = \alpha, \beta$ 를 파악해도 된다.

[문제 3]

$g'(x) = a - \frac{16x}{(x^2+3)^2}$ 이고 $g''(x) = -\frac{16}{(x^2+3)^2} + \frac{64x^2}{(x^2+3)^3}$ 이므로

$$f(-1) = 0, \quad g(1) = a + 2, \quad g'(-1) = a + 1, \quad g''(0) = -\frac{16}{9}$$

이다. 조건 (1)과 (2)에 의하여

$$h(0) = \frac{16}{9}, \quad h(1) = g'(-1) - g(1) = -1$$

이다. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ 이므로 $\cos x = u$ 라 하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x h(\cos x)}{(3 + \cos^2 x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x h(\cos x)}{(3 + \cos^2 x)^2} dx = \int_0^1 \frac{2u h(u)}{(u^2 + 3)^2} du$$

이다. 여기서 $k(u) = \frac{1}{u^2+3}$ 이라고 하면 $k'(u) = -\frac{2u}{(u^2+3)^2}$ 이므로

부분적분법을 이용하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2u h(u)}{(u^2+3)^2} du &= - \int_0^1 k'(u) h(u) du \\ &= -[k(u)h(u)]_0^1 + \int_0^1 k(u)h'(u) du \\ &= -k(1)h(1) + k(0)h(0) + \int_0^1 \frac{h'(u)}{u^2+3} du \\ &= -\frac{1}{4}h(1) + \frac{1}{3}h(0) + \int_0^1 \frac{h'(u)}{u^2+3} du = -\frac{17}{108} \end{aligned}$$

이다.

■ 채점 기준

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

[문제 1 평가기준]

- $f(x) = \ln(x^2+3) - \ln 4$ 임을 제시 : 6점
- 정답을 제시 : 9점 (각 3점씩)

[문제 2 평가기준]

- $g'(x) = a - \frac{16x}{(x^2+3)^2}$ 를 제시 : 3점
- 두 개의 극값을 갖는 a 의 범위를 제시 : 7점
- 정답을 제시 : 10점

[문제 3 평가기준]

- $h(0) = \frac{16}{9}, h(1) = -1$ 를 제시 : 5점
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x h(\cos x)}{(3 + \cos^2 x)^2} dx = \int_0^1 \frac{2u h(u)}{(u^2 + 3)^2} du$ 임을 제시 : 5점
- 정답을 제시 : 10점

오후 · 문제 2

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 질문에 답하시오. (45점)

제시문

(가) 연속인 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f''(a) = 0$ 이고, $x = a$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$ 는 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점이다.

(나) 극한값 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ 가 존재하면 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능하다고 하고 $x = a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(다) 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f'(a) = 0$ 이고 $x = a$ 의 좌우에서

- $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고, 극댓값은 $f(a)$
- $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고, 극솟값은 $f(a)$ 이다.

(라) 두 함수 $y = f(u)$ 와 $u = g(x)$ 가 미분가능할 때 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는

$$y' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

(마) 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 갖고 a 를 포함하는 어떤 열린구간에서 미분가능하면

$$f'(a) = 0$$

[문제 1] 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x)e^x$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 $f(1)$ 의 최댓값을 구하시오. (20점)

- (1) 곡선 $y = g(x)$ 는 두 개의 변곡점 $(-5, g(-5)), (1, g(1))$ 을 갖는다.
- (2) 모든 $x > 0$ 에 대하여 $g'(x) \leq 2$ 이다.

[문제 2] 최고차항의 계수가 양수 a 인 삼차함수 $h(x)$ 에 대하여 함수 $k(x)$ 를

$$k(x) = h(x)e^{h(x)} - 2 \int_0^x e^{h(t)} h'(t) dt$$

라 하자. $h(x)$ 와 $k(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, a 의 값을 구하시오. (25점)

- (1) 함수 $k(x)$ 는 $x = r, 0, 2$ 에서만 극값을 갖는다. (단, $r \neq 0, 2$)
- (2) $h(r) = 3$
- (3) $h(2) \leq 1$

■ 예시 답안

[문제 1]

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)라 하면 $g''(x) = \{ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c\}e^x$ 이다.

조건 (1)에서 $g''(1) = g''(-5) = 0$ 이므로 근과 계수와의 관계로부터

$$\frac{4a + b}{a} = 4, \quad \frac{2a + 2b + c}{a} = -5$$

이므로, $b = 0$ 이고 $c = -7a$ 이다. 따라서

$$f(x) = a(x^2 - 7), \quad g(x) = a(x^2 - 7)e^x$$

또한 $x = -5, 1$ 의 좌우에서 $g''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 조건 (1)을 만족시킨다.

조건 (2)에서 $x > 0$ 일 때, $g'(x) \leq 2$ 이므로

$$g'(x) = a(x^2 + 2x - 7)e^x \leq 2$$

이다. 따라서 $x > 0$ 일 때,

$$(x^2 + 2x - 7)e^x \geq \frac{2}{a}$$

이다. 한편 $m(x) = (x^2 + 2x - 7)e^x$ 라 하자. $m'(x) = (x + 5)(x - 1)e^x$ 에서 방정식 $m'(x) = 0$ 의 해는 $x = 1$ 또는 $x = -5$ 이다. $x > 0$ 일 때, 함수 $m(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$m'(x)$		-	0	+
$m(x)$		$\searrow$	$-4e$	$\nearrow$

위 표로부터 $x > 0$ 일 때 $m(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최솟값 $m(1) = -4e$ 을 가진다. 따라서 $\frac{2}{a} \leq -4e$ 이고 a 는 음수이므로

$$-\frac{1}{2e} \leq a < 0 \quad \text{----- ①}$$

$f(x) = a(x^2 - 7)$ 이므로

$$f(1) = -6a \quad \text{----- ②}$$

①과 ②에서

$$f(1) = -6a \leq \frac{3}{e}$$

이다. 따라서 $f(1)$ 의 최댓값은 $a = -\frac{1}{2e}$ 일 때 $\frac{3}{e}$ 이다.

[문제 2]

$k'(x) = h'(x)\{h(x) - 1\}e^{h(x)}$ 이고 $k'(x) = 0$ 에서

$$h'(x) = 0 \text{ 이거나 } h(x) = 1$$

이다. $h'(x) = 0$ 이 중근을 갖거나 근을 갖지 않는 경우, $h(x) = 1$ 은 하나의 근을 갖는다. 이것은 조건 (1)에 모순이다. 따라서 방정식 $h'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 근을 갖는다.

방정식 $h'(x) = 0$ 의 두 근이

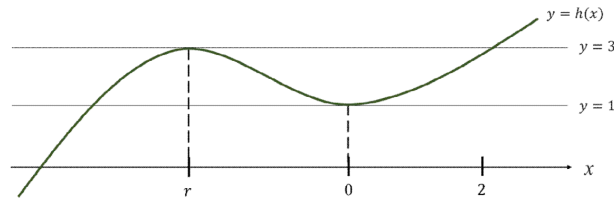
0, 2인 경우, 0, r 인 경우, 2, r 인 경우

로 나누어 생각하자.

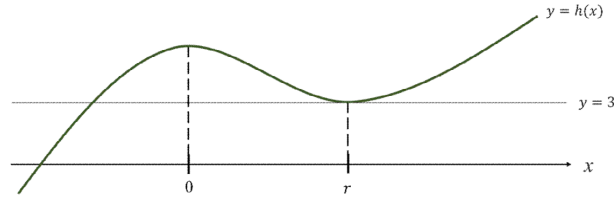
(i) 두 근이 0, 2인 경우: $h(r) = 1$ 이므로 조건 (2)에 모순이다.

(ii) 두 근이 0, r 인 경우: $r < 0$ 인 경우와 $r > 0$ 인 경우로 나누어 생각하자.

• $r < 0$ 일 때, 조건 (1)에 의하여 $h(0) = 1$ 이므로 조건 (3)에 모순이다.

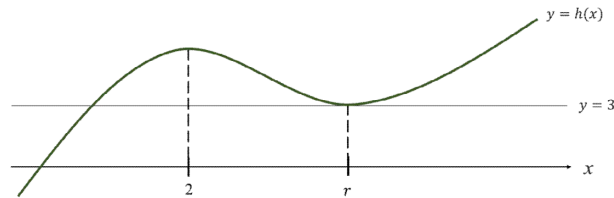


- $r > 0$ 일 때, 조건 (3)에 모순이다.

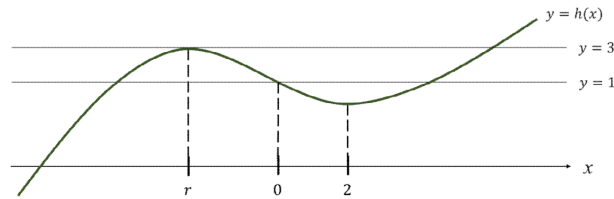


따라서 두 근은 2와 r 이다. (이때 $h(0) = 1$) 이 경우도 $0, r, 2$ 의 크기 비교를 위해, $r < 0$ 인 경우와 $0 < r < 2$, $r > 2$ 인 경우로 나누어 생각하자.

- $2 < r$ 일 때, $1 \geq h(2) > h(r) = 3$ 이므로 모순이다.



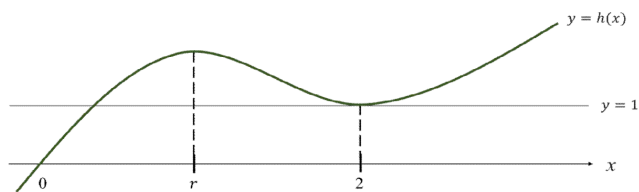
- $r < 0$ 일 때, $h(0) = 1$ 이고 $h(2)$ 는 극솟값이고 $h(x) = 1$ 의 해가 3개이므로 조건 (1)에 모순이다.



그러므로

$$0 < r < 2$$

이고, $h(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.



$h(x) - 1 = 0$ 의 근은 $x = 0, 2$ (중근)이므로

$$h(x) - 1 = ax(x - 2)^2 \quad \text{----- ③}$$

이다.

$$h'(x) = a(x - 2)(3x - 2)$$

이므로 $r = \frac{2}{3}$ 이다. $h\left(\frac{2}{3}\right) = 3$ 이므로 ③으로부터 $a = \frac{27}{16}$ 이다.

■ 채점 기준

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

[논제 1 평가기준]

- $f(x) = a(x^2 - 7)$ 임을 제시: 5점
- $-\frac{1}{2e} \leq a$ 을 제시: 10점
- 정답을 제시: 5점

[논제 2 평가기준]

- $k'(x) = h'(x)\{h(x) - 1\}e^{h(x)}$ 을 제시: 3점
- $0 < r < 2$ 임을 제시: 10점
- $h(x) = ax(x - 2)^2 + 1$ 을 제시: 5점
- $r = \frac{2}{3}$ 을 제시: 5점
- 정답을 제시: 2점

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다