

동국대논술

자연계열

목차

2026학년도 자연계열 (수학)	3
문제 1	3
문제 2	8
문제 3	12
2025학년도 자연계열 (수학)	18
문제 1	18
문제 2	21
문제 3	24
2024학년도 자연계열 (수학)	27
문제 1	27
문제 2	31
문제 3	34

2026학년도 자연계열 (수학)

문제 1

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] 직선 l 을 공유하는 두 반평면 α, β 로 이루어진 도형을 이면각이라 한다. 이때 직선 l 을 이면각의 변, 두 반평면 α, β 를 각각 이면각의 면이라고 한다. 이면각의 변 l 위의 한 점 O 를 지나고 직선 l 에 수직인 두 반직선 OA, OB 를 두 반평면 α, β 위에 각각 그을 때, $\angle AOB$ 의 크기는 점 O 의 위치에 관계없이 일정하고 이 각의 크기를 이면각의 크기라고 한다.

- 『고등학교 기하』

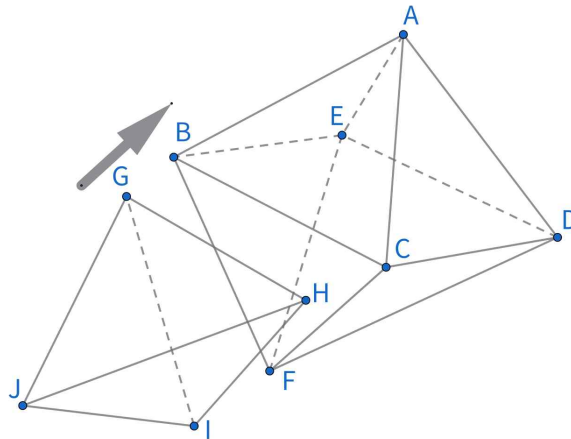
[나] 공간에서 직선 l 과 평면 α 위의 모든 직선이 수직일 때, 직선 l 과 평면 α 는 서로 수직이라고 하고, 기호로 $l \perp \alpha$ 와 같이 나타낸다. 이때 직선 l 을 평면 α 의 수선이라 하고, 직선 l 과 평면 α 가 만나는 점 O 를 수선의 발이라고 한다.

- 『고등학교 기하』

[다] 평면 α 와 한 점 O 에서 만나는 직선 l 이 있다. 이때 직선 l 이 평면 α 위의 점 O 를 지나는 서로 다른 두 직선 m, n 과 서로 수직이면 직선 l 이 평면 α 에 수직이다.

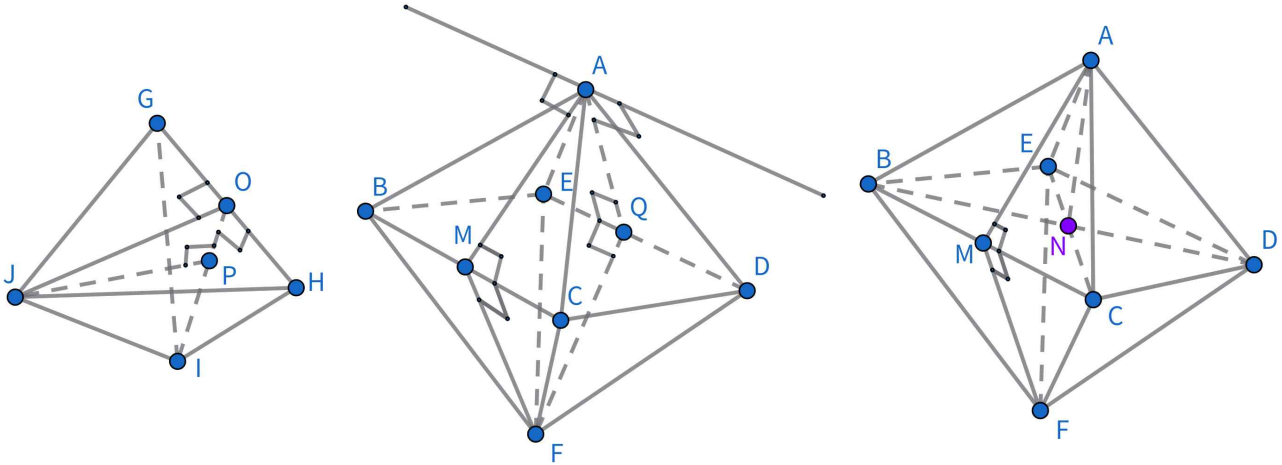
- 『고등학교 기하』

[문제1] 모든 변의 길이가 1인 다음 그림의 정팔면체와 정사면체에 대해서 다음 물음에 답하시오.



- (1) 정팔면체에서 평면 ABC와 평면 FBC가 이루는 이면각 중 둔각의 크기를 α 라고 할 때 $\cos \alpha$ 의 값을 구하시오.
- (2) 정팔면체에서 평면 ABC와 평면 AED가 이루는 이면각 중 예각의 크기를 β 라고 할 때 $\cos \beta$ 의 값을 구하시오.
- (3) 정사면체에서 평면 JGH와 평면 IGH가 이루는 이면각 중 예각의 크기를 γ 라고 할 때 $\cos \gamma$ 의 값을 구하시오.
- (4) 점 G와 점 B, 점 H와 점 C, 점 I와 점 F를 일치시켰을 때, 평면 ABC와 평면 JGH가 일치함을 이면각을 이용하여 보이시오.

■ 예시 답안



(1)

선분 BC의 중점을 M이라고 하면 선분 MA와 선분 BC가 수직이고, 선분 MF도 선분 BC에 수직이다. 따라서 평면 ABC와 평면 FBC가 이루는 이면각 중 하나는 $\angle AMF$ 와 같다. 한편, 점 A의 평면 BCDE에 내린 수선의 발 N은 정사각형 BCDE의 대각선의 교점이다. 삼각형 ANM은 직각삼각형이고 선분 MA의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 선분 MN의 길이는 $\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $\cos(\angle AMN) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\cos(\angle AMF) = \cos(2\angle AMN) = 2\cos^2(\angle AMN) - 1 = -\frac{1}{3}$$

이고, $\angle AMF$ 는 둔각이므로 $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ 이다.

(다른 풀이) 삼각형 ABC의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이고, 삼각형 NBC의 면적은 $\frac{1}{4}$ 이다. 삼각형 ABC를 평면 BCDE에 내린 정사영은 삼각형 NBC이므로, 평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 $\angle AMN$ 의 코사인은 두 삼각형의 면적의 비인 $\cos(\angle AMN) = \frac{(\triangle NBC \text{의 넓이})}{(\triangle ABC \text{의 넓이})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 와 같다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\cos(\angle AMF) = \cos(2\angle AMN) = 2\cos^2(\angle AMN) - 1 = -\frac{1}{3}$$

이고, $\angle AMF$ 는 둔각이므로 $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ 이다.

(2)

선분 ED의 중점을 Q라고 하자. 사각형 MAQF는 네 변의 길이가 같은 사각형으로 선분 MA와 선분 QF, 선분 QA와 선분 FM은 각각 평행하다. 선분 BC와 선분 ED도 평행인 선분이다. 점 A를 지나고 이 선분들과 평행인 직선을 l 이라 하면 직선 l 은 평면 ABC와 평면 AED의 교선이다. 교선 l 과 선분 AM이 이루는 각은 선분 ED와 선분 QF가 이루는 각과 같으므로 수직이다. 마찬가지로 교선 l 과 선분 AQ가 이루는 각도 수직이다. 따라서 두 평면의 이면각 중 하나는 $\angle MAQ$ 이다. $|MA| = |AQ| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|MQ| = 1$ 이므로, 삼각형 MAQ에서 코

사인법칙을 이용하면 $\cos(\angle MAQ) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$ 이다. $\angle MAQ$ 는 예각이므로 $\cos \beta = \frac{1}{3}$ 이다.

(3)

선분 GH의 중점을 O, 삼각형 IGH의 무게중심을 P라고 하자. 선분 OJ, 선분 OI는 각각 선분 GH에 수직이므로 평면 JGH와 평면 IGH의 이면각 중 하나는 $\angle JOI$, 즉 $\angle JOP$ 이다. 점 J의 삼각형 IGH에 내린 수선의 발이 점 P이므로

$$\cos(\angle JOP) = \frac{|PO|}{|JO|} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$

이다. 여기서, 무게중심의 성질에 의해 $|PO| = \frac{1}{3}|OI|$ 임을 사용하였다. $\angle JOP$ 는 예각이므로 $\cos \gamma = \frac{1}{3}$ 이다.

(다른 풀이) 삼각형 JGH의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이고, 삼각형 PGH의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{12}$ 이다. 삼각형 JGH를 평면 IGH에 내린 정사영은 삼각형 PGH이므로, $\cos(\angle JOP) = \frac{(\triangle PGH \text{의 넓이})}{(\triangle JGH \text{의 넓이})} = \frac{1}{3}$ 이다. $\angle JOP$ 는 예각이므로 $\cos \gamma = \frac{1}{3}$ 이다.

(4)

점 G와 점 B, 점 H와 점 C, 점 I와 점 F를 일치시키면, 선분 GH의 중점 O와 선분 BC의 중점 M도 일치한다. 평면 JGH와 평면 ABC의 이면각의 크기는 평면 JGH와 평면 IGH의 이면각 중 예각의 크기 γ 와 평면 FBC와 평면 ABC의 이면각 중 둔각의 크기 α 의 합 $\alpha + \gamma$ 와 같다. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{1}{3} = \cos \gamma$ 이고 $0 < \pi - \alpha, \gamma < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\alpha + \gamma = \pi$ 이다. 따라서 평면 ABC와 평면 JGH는 일치한다.

(다른 풀이) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos \gamma = \frac{1}{3}$ 과 $0 < \gamma < \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 로부터, 다음과 같이 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0$$

이고 $\frac{\pi}{2} < \alpha + \gamma < \frac{3\pi}{2}$ 이므로 $\alpha + \gamma = \pi$ 를 얻을 수 있다. 따라서 평면 ABC와 평면 JGH는 일치한다.

■ 채점 기준

[1단계] : (1)의 답을 구한다. : $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

선분 BC의 중점을 M이라고 하면 선분 MA와 선분 BC가 수직이고, 선분 MF도 선분 BC에 수직이다. 따라서 평면 ABC와 평면 FBC가 이루는 이면각 중 하나는 $\angle AMF$ 와 같다. 한편, 점 A의 평면 BCDE에 내린 수선의 발 N은 정사각형 BCDE의 대각선의 교점이다. 삼각형 ANM은 직각삼각형이고 선분 AM의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 선분 MN의 길이는 $\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $\cos(\angle AMN) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\cos(\angle AMF) = \cos(2\angle AMN) = 2\cos^2(\angle AMN) - 1 = -\frac{1}{3}$$

이고, $\angle AMF$ 는 둔각이므로 $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ 이다.

(다른 풀이) 삼각형 ABC의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이고, 삼각형 NBC의 면적은 $\frac{1}{4}$ 이다. 삼각형 ABC를 평면 BCDE에 내린 정사영은 삼각형 NBC이므로, 평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 $\angle AMN$ 의 코사인은 두 삼각형의 면적의 비인 $\cos(\angle AMN) = \frac{(\triangle NBC \text{의 넓이})}{(\triangle ABC \text{의 넓이})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 와 같다. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\cos(\angle AMF) = \cos(2\angle AMN) = 2\cos^2(\angle AMN) - 1 = -\frac{1}{3}$$

이고, $\angle AMF$ 는 둔각이므로 $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ 이다.

[2단계] : (2)의 답을 구한다. : $\cos \beta = \frac{1}{3}$

선분 ED의 중점을 Q라고 하자. 사각형 MAQF는 네 변의 길이가 같은 사각형으로 선분 MA와 선분 FQ, 선분 QA와 선분 FM은 각각 평행이다. 선분 BC와 선분 ED도 평행인 선분이다. 점 A를 지나고 이 선분들과 평행인 직선을 l 이라 하면 직선 l 은 평면 ABC와 평면 AED의 교선이다. 교선 l 과 선분 AM이 이루는 각은 선분 ED와 선분 QF가 이루는 각과 같으므로 수직이다. 마찬가지로 교선 l 과 선분 AQ가 이루는 각도 수직이다. 따라서 두 평면의 이면각 중 하나는 $\angle MAQ$ 이다. $|MA| = |AQ| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|MQ| = 1$ 이므로, 삼각형 MAQ에서 코

사인법칙을 이용하면 $\cos(\angle MAQ) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$ 이다. $\angle MAQ$ 는 예각이므로 $\cos \beta = \frac{1}{3}$ 이다.

[3단계] : (3)의 답을 구한다. : $\cos \gamma = \frac{1}{3}$

선분 GH의 중점을 O, 삼각형 IGH의 무게중심을 P라고 하자. 선분 OJ, 선분 OI는 각각 선분 GH에 수직이므로 평면 JGH와 평면 IGH의 이면각 중 하나는 $\angle JOI$, 즉 $\angle JOP$ 이다. 점 J의 삼각형 IGH에 내린 수선의 발이 점 P이므로

$$\cos(\angle JOP) = \frac{|PO|}{|JO|} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$$

이다. 여기서, 무게중심의 성질에 의해 $|PO| = \frac{1}{3}|IO|$ 임을 사용하였다. $\angle JOP$ 는 예각이므로 $\cos \gamma = \frac{1}{3}$ 이다.

(다른 풀이) 삼각형 JGH의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이고, 삼각형 PGH의 면적은 $\frac{\sqrt{3}}{12}$ 이다. 삼각형 JGH를 평면 IGH에 내린 정사영은 삼각형 PGH이므로, $\cos(\angle JOP) = \frac{(\triangle PGH \text{의 넓이})}{(\triangle JGH \text{의 넓이})} = \frac{1}{3}$ 이다. $\angle JOP$ 는 예각이므로 $\cos \gamma = \frac{1}{3}$ 이다.

[4단계] : (4)를 보인다. : $\alpha + \gamma = \pi$ 를 이용할 수 있다.

점 G와 점 B, 점 H와 점 C, 점 I와 점 F를 일치시키면, 선분 GH의 중점 O와 선분 BC의 중점 M도 일치한다. 평면 JGH와 평면 ABC의 이면각의 크기는 평면 JGH와 평면 IGH의 이면각 중 예각의 크기 γ 와 평면 FBC와 평면 ABC의 이면각 중 둔각의 크기 α 의 합 $\alpha + \gamma$ 와 같다. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{1}{3} = \cos \gamma$ 이고 $0 < \pi - \alpha, \gamma < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\alpha + \gamma = \pi$ 이다. 따라서 평면 ABC와 평면 JGH는 일치한다.

(다른 풀이) $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos \gamma = \frac{1}{3}$ 과 $0 < \gamma < \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 로부터, 다음과 같이 삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0$$

이고 $\frac{\pi}{2} < \alpha + \gamma < \frac{3\pi}{2}$ 이므로 $\alpha + \gamma = \pi$ 를 얻을 수 있다. 따라서 평면 ABC와 평면 JGH는 일치한다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지 모든 단계의 풀이 과정이 매끄러운 경우	S
	[1단계]부터 [4단계]까지 모든 단계를 작성하였으나 풀이 과정이 매끄럽지 않은 경우	A
중	[1단계]부터 [3단계]까지 모두 풀이 과정이 매끄러운 경우	B
	[1단계]부터 [3단계] 중에서 어느 두 단계만 풀이 과정이 매끄러운 경우	C
	[1단계]부터 [3단계] 중에서 어느 한 단계만 풀이 과정이 매끄러운 경우	D
하	[1단계]부터 [3단계] 중에서 어느 한 단계라도 부분적으로 풀이 과정을 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 풀이 과정이 매끄럽게 작성하지 못하거나 전혀 작성하지 않은 경우	F

문제 2

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] 첫째항이 a , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$a_n = a + (n-1)d,$$

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} \quad (\text{단, } n = 1, 2, 3, \dots)$$

- 『고등학교 수학I』

[나] 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \qquad \textcircled{2} \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (\text{단, } c \text{는 상수}) \qquad \textcircled{4} \sum_{k=1}^n c = cn \quad (\text{단, } c \text{는 상수})$$

- 『고등학교 수학I』

[다] 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M$ (L, M 은 실수)일 때

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = cL \quad (\text{단, } c \text{는 상수}) \qquad \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + M$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = L - M \qquad \textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = LM$$

$$\textcircled{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M} \quad (\text{단, } b_n \neq 0, M \neq 0)$$

- 『고등학교 미적분』

[문제2] 공차가 자연수인 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 다음 〈조건〉을 만족한다.

〈 조건 〉

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{n} = 2, \quad \sum_{n=1}^{10} (a_n - b_n) = 180$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) \text{는 } n = 7 \text{일 때만 최솟값을 갖는다.}$$

$$\textcircled{3} \sum_{n=1}^4 |b_n| = 88$$

- (1) 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 일반항을 각각 구하시오.
- (2) 수열 $\{c_n\}$ 이 $c_n = |a_n| - |b_n|$ 일 때, c_n 의 최솟값을 구하시오.
- (3) $S_n = \sum_{k=1}^n c_k$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2}$ 을 구하시오.

■ 예시 답안

(1)

수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 공차를 각각 p 와 q 라 하면, 조건 ①로부터

$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{n} = p - q, \quad 180 = \sum_{n=1}^{10} (a_n - b_n) = 10(a_1 - b_1) + 45(p - q)$$

이다. 따라서 $a_1 - b_1 = 9, p - q = 2$ 이다. 이로부터 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = a_1 + (n-1)p = b_1 + 9 + (n-1)(q+2) = b_n + 2n + 7 > b_n$$

이며 $a_n > b_n$ 을 만족한다.

조건 ②로부터 $a_n + b_n < 0$ ($n \leq 7$)과 $a_n + b_n > 0$ ($n \geq 8$)을 얻는다. 그러므로 $2b_n < a_n + b_n < 0$ ($n \leq 7$)이며 $b_n < 0$ ($n \leq 7$)이다.

이를 이용하여 조건 ③으로부터 $\sum_{n=1}^4 |b_n| = -\sum_{n=1}^4 b_n = -(4b_1 + 6q) = 88$, 즉 $2b_1 = -3q - 44$ 또는 $b_1 = -\frac{3}{2}q - 22$ 를 얻는다. 구해진 결과 $a_1 = b_1 + 9, p = q + 2, a_7 + b_7 < 0, a_8 + b_8 > 0$ 을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$0 > a_7 + b_7 = (a_1 + b_1) + 6(p + q) = 2b_1 + 9 + 6(2q + 2) = -3q - 35 + 12q + 12 = 9q - 23$$

$$0 < a_8 + b_8 = (a_1 + b_1) + 7(p + q) = 2b_1 + 9 + 7(2q + 2) = -3q - 35 + 14q + 14 = 11q - 21$$

따라서 $1 < \frac{21}{11} < q < \frac{23}{9} < 3$ 을 만족하는 자연수 공차 q 는 2이다. 공차 $q = 2$ 를 다음 결과에 대입하면

$$\begin{cases} p = q + 2, \\ b_1 = -\frac{3}{2}q - 22, \\ a_1 = b_1 + 9, \end{cases}$$

공차 $p = 4$, 첫째항 $b_1 = -25, a_1 = -16$ 이다.

그러므로 일반항 $a_n = a_1 + (n-1)p = 4n - 20, b_n = b_1 + (n-1)q = 2n - 27$ 이다.

(2)

(1)의 결과를 이용하면 수열 $\{c_n\}$ 의 일반항을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c_n = |a_n| - |b_n| = |4n - 20| - |2n - 27| = \begin{cases} -2n - 7, & (n \leq 5) \\ 6n - 47, & (6 \leq n \leq 13) \\ 2n + 7, & (n \geq 14) \end{cases}$$

그러므로 c_n 이 최소가 되는 항은 $n = 5$ 이며 최솟값은 $c_5 = -17$ 이다.

(3)

(2)의 결과로부터 $n \geq 14$ 에 대하여 S_n 은 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^{13} c_k + \sum_{k=14}^n c_k \\ &= \sum_{k=1}^{13} c_k + \sum_{k=14}^n (2k + 7) \\ &= \sum_{k=1}^{13} c_k + 2 \frac{n(n+1)}{2} + 7n - \sum_{k=1}^{13} (2k + 7) \end{aligned}$$

그러므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = 1$ 이다.

■ 채점 기준

[1단계] 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 자연수 공차를 각각 p 와 q 라 하면, 조건 ①로부터

$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{n} = p - q, \quad 180 = \sum_{n=1}^{10} (a_n - b_n) = 10(a_1 - b_1) + 45(p - q)$$

이다. 따라서 $a_1 - b_1 = 9, p - q = 2$ 이다. 이로부터 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n = a_1 + (n-1)p = b_1 + 9 + (n-1)(q+2) = b_n + 2n + 7 > b_n$$

이며 $a_n > b_n$ 을 만족한다.

[2단계] 조건 ②로부터 $a_n + b_n < 0$ ($n \leq 7$)과 $a_n + b_n > 0$ ($n \geq 8$)을 얻는다. 따라서 $2b_n < a_n + b_n < 0$ ($n \leq 7$)이며 $b_n < 0$ ($n \leq 7$)이다. 이를 이용하여 조건 ③으로부터 $\sum_{n=1}^4 |b_n| = -\sum_{n=1}^4 b_n = -(4b_1 + 6q) = 88$, 즉 $2b_1 =$

$$-3q - 44 \text{ 또는 } b_1 = -\frac{3}{2}q - 22 \text{를 얻는다.}$$

[3단계] 구해진 결과 $a_1 = b_1 + 9, p = q + 2, a_7 + b_7 < 0, a_8 + b_8 > 0$ 을 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$0 > a_7 + b_7 = (a_1 + b_1) + 6(p + q) = 2b_1 + 9 + 6(2q + 2) = -3q - 35 + 12q + 12 = 9q - 23$$

$$0 < a_8 + b_8 = (a_1 + b_1) + 7(p + q) = 2b_1 + 9 + 7(2q + 2) = -3q - 35 + 14q + 14 = 11q - 21$$

따라서 $1 < \frac{21}{11} < q < \frac{23}{9} < 3$ 을 만족하는 자연수 공차 q 는 2이다. 공차 $q = 2$ 를 다음 결과에 대입하면

$$\begin{cases} p = q + 2, \\ b_1 = -\frac{3}{2}q - 22, \\ a_1 = b_1 + 9, \end{cases}$$

공차 $p = 4$, 첫째항 $b_1 = -25, a_1 = -16$ 이다.

그러므로 일반항 $a_n = a_1 + (n-1)p = 4n - 20, b_n = b_1 + (n-1)q = 2n - 27$ 이다.

[4단계] (1)의 결과를 이용하면 수열 $\{c_n\}$ 의 일반항을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$c_n = |a_n| - |b_n| = |4n - 20| - |2n - 27| = \begin{cases} -2n - 7, & (n \leq 5) \\ 6n - 47, & (6 \leq n \leq 13) \\ 2n + 7, & (n \geq 14) \end{cases}$$

그러므로 c_n 이 최소가 되는 항은 $n = 5$ 이며 최솟값은 $c_5 = -17$ 이다.

[5단계] (2)의 결과로부터 $n \geq 14$ 에 대하여 S_n 은 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^{13} c_k + \sum_{k=14}^n c_k \\ &= \sum_{k=1}^{13} c_k + \sum_{k=14}^n (2k + 7) \\ &= \sum_{k=1}^{13} c_k + 2 \frac{n(n+1)}{2} + 7n - \sum_{k=1}^{13} (2k + 7) \end{aligned}$$

그러므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} = 1$ 이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계의 풀이 과정이 매끄럽고 모든 소문항의 답을 정확하게 얻은 경우	S
	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계를 작성하고 모든 소문항의 답을 얻은 경우	A
중	[1단계]부터 [5단계] 중 네 단계를 작성하고 3개의 소문항의 답을 얻은 경우	B
	[1단계]부터 [5단계] 중 세 단계를 작성하고 2개의 소문항의 답을 얻은 경우	C
	[1단계]부터 [5단계] 중 세 단계를 작성하고 1개의 소문항의 답을 얻은 경우	D
하	[1단계]부터 [5단계] 중에서 어느 한 단계만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 풀이 과정이 매끄럽게 작성하지 못하거나 전혀 작성하지 않은 경우	F

문제 3

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

이다.

- 『고등학교 수학II』

[나] 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에 대하여 $x = a$ 의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀌거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀔 때, 점 P 를 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점이라고 한다.

- 『고등학교 미적분』

[다] 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f''(a) = 0$ 이고 $x = a$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌면, 점 $(a, f(a))$ 는 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점이다.

- 『고등학교 미적분』

[문제3] 다음 〈조건〉을 만족하는 점 P 가 존재하는 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점에서 접선의 기울기의 최댓값 M 을 다음 순서에 따라 구하시오.

(단, $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 양수)

〈 조건 〉

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P 에서의 접선 l 이 점 P 가 아닌 곡선 위의 점 Q 에서 만나고, 점 Q 에서의 접선 m 이 직선 l 과 수직이다.

- (1) 곡선 $y = f(x)$ 를 x 축 및 y 축의 방향으로 적절히 평행이동하여 항의 개수가 최소가 되는 곡선 $y = g(x)$ 를 구하시오.
- (2) 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $P_0(t, g(t))$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오.
- (3) (2)에서 구한 접선과 곡선 $y = g(x)$ 가 만나는 점 $Q_0(≠ P_0)$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오.
- (4) M 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

[예시답안1]

(1)

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 먼저 곡선 $y = f(x)$ 를 적당히 x 축으로 평행이동하면 2차항을 소거할 수 있고 그 후 적당히 y 축으로 평행이동하면 상수항을 소거할 수 있다. 따라서 $y = g(x)$ 에서 삼차함수 $g(x)$ 의 항의 개수가 최소가 되도록 평행이동하면 $g(x) = ax^3 + bx$ ($a > 0$) 형태로 변형할 수 있다.

(1)'

위와 다른 풀이로, 먼저 곡선 $y = f(x)$ 가 주어진 조건을 만족해야 하기 때문에 변곡점에서의 접선의 기울기는 음수가 되어야 한다. 따라서 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점을 원점으로 평행이동시키면 적당한 양수 a 가 존재하여 $x = -\alpha, \alpha$ 에서 각각 x 축과 만나므로 $g(x) = ax(x - \alpha)(x + \alpha) = ax^3 - a\alpha^2x = ax^3 + bx$ ($a > 0$) 형태로 변형할 수 있다. (단, $b = -a\alpha^2$)

(2)

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $P_0(t, at^3 + bt)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면

$$y - at^3 - bt = (3at^2 + b)(x - t) \Leftrightarrow y = (3at^2 + b)x - 2at^3$$

이다.

(3)

(2)에서 구한 접선과 곡선 $y = g(x)$ 가 만나는 점 Q_0 의 x 좌표는

$$\begin{aligned} ax^3 + bx &= (3at^2 + b)x - 2at^3 \Leftrightarrow ax^3 - 3at^2x + 2at^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - t)^2(x + 2t) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = t, -2t \end{aligned}$$

를 만족하고, 여기서 $Q_0 \neq P_0$ 이므로 $t \neq 0$ 이며 Q_0 의 좌표는 $Q_0(-2t, -8at^3 - 2bt)$ 이다. 따라서 점 Q_0 에서의 접선의 방정식은

$$y + 8at^3 + 2bt = (12at^2 + b)(x + 2t) \Leftrightarrow y = (12at^2 + b)x + 16at^3$$

이다.

(4)

(2)와 (3)에서 구한 두 접선이 수직이므로

$$\begin{aligned} (3at^2 + b)(12at^2 + b) &= -1 \Leftrightarrow 36a^2t^4 + 15abt^2 + b^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 = \frac{-5b \pm \sqrt{9b^2 - 16}}{24a} \end{aligned}$$

을 만족하는 0이 아닌 실수 t 가 존재해야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} 9b^2 - 16 &\geq 0 \text{ 그리고 } (-5b + \sqrt{9b^2 - 16}) > 0 \text{ 또는 } -5b - \sqrt{9b^2 - 16} > 0 \\ &\Leftrightarrow 9b^2 - 16 \geq 0 \text{ 그리고 } b < 0 \\ &\Leftrightarrow b \leq -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

를 얻는다. 한편 구하고자 하는 최댓값 M 은 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점에서 접선의 기울기의 최댓값이다. 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점을 먼저 구해보면

$$g''(x) = 6ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

으로부터 원점이 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점임을 알 수 있다. 이제 원점에서 접선의 기울기는 $g'(0) = b \leq -\frac{4}{3}$ 이므로 최댓값 M 은 $-\frac{4}{3}$ 이다.

[참고사항] $y = x^3 - \frac{4}{3}x$ 일 때, 점 $P\left(\frac{\sqrt{10}}{6}, -\frac{19\sqrt{10}}{108}\right)$ 과 점 $Q\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}, \frac{2\sqrt{10}}{27}\right)$ 에서 두 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5\sqrt{10}}{54}$$

$$y = 2x + \frac{20\sqrt{10}}{27}$$

이며 수직이다.

[예시답안2]

(1)

먼저 곡선 $y = f(x)$ 가 주어진 조건을 만족해야 하기 때문에 변곡점에서 접선의 기울기는 음수가 되어야 한다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 가져야 한다. 극대 또는 극소가 되는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점을 원점으로 평행이동하면 $y = g(x)$, $g(x) = ax^3 + bx^2$ ($a > 0$)형태로 변형할 수 있다.

(2)

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $P_0(t, at^3 + bt^2)$ 에서 접선의 방정식을 구하면

$$y - at^3 - bt^2 = (3at^2 + 2bt)(x - t) \iff y = (3at^2 + 2bt)x - 2at^3 - bt^2$$

이다.

(3)

(2)에서 구한 접선과 곡선 $y = g(x)$ 가 만나는 점 Q_0 의 x 좌표는

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 &= (3at^2 + 2bt)x - 2at^3 - bt^2 \iff ax^3 + bx^2 - (3at^2 + 2bt)x + 2at^3 + bt^2 = 0 \\ &\iff (x - t)^2(ax + 2at + b) = 0 \\ &\iff x = t, -2t - \frac{b}{a} \end{aligned}$$

를 만족하고, 여기서 $Q_0 \neq P_0$ 이므로 $t \neq -\frac{b}{3a}$ 이며 Q_0 의 좌표는 $Q_0\left(-2t - \frac{b}{a}, -8at^3 - 8bt^2 - \frac{2b^2}{a}t\right)$ 이다.

따라서 점 Q_0 에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y + 8at^3 + 8bt^2 + \frac{2b^2}{a}t &= \left(12at^2 + 8bt + \frac{b^2}{a}\right)\left(x + 2t + \frac{b}{a}\right) \\ \iff y &= \left(12at^2 + 8bt + \frac{b^2}{a}\right)x + 16at^3 + 20bt^2 + \frac{8b^2}{a}t + \frac{b^3}{a^2} \end{aligned}$$

이다.

(4)

$g(x) = ax^3 + bx^2$ 를 미분한 $g'(x) = 3ax^2 + 2bx$, $g''(x) = 6ax + 2b$ 에서 변곡점의 x 좌표는 $-\frac{b}{3a}$ 이므로 변곡점

에서 기울기는 $g'\left(-\frac{b}{3a}\right) = -\frac{b^2}{3a}$ 이다. (2)와 (3)에서 구한 두 접선이 수직이므로

$$(3at^2 + 2bt) \left(12at^2 + 8bt + \frac{b^2}{a} \right) = -1 \iff b^3 t \left(3\frac{a}{b}t + 2 \right) \left(6\frac{a}{b}t + 1 \right) \left(2\frac{a}{b}t + 1 \right) = -a$$

에서 $s = \frac{a}{b}t$ 로 치환하여 $h(s) = \frac{b^4}{a}s(3s+2)(6s+1)(2s+1)$ 로 두면 위 식은 $h(s) = -a$ 이다.

$$h'(s) = \frac{2b^4}{a}(3s+1)(24s^2+16s+1) = 0 \iff s = -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{12}$$

이므로 $h(s)$ 의 최솟값은 $h\left(-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{12}\right) = -\frac{b^4}{16a}$ 이다. $h(s) = -a$ 를 만족하는 실수 s 가 존재하기 위한 필요

충분조건은

$$h\left(-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{12}\right) = -\frac{b^4}{16a} \leq -a \iff -\frac{b^4}{a^2} \leq -16 \iff -\frac{b^2}{a} \leq -4 \iff g'\left(-\frac{b}{3a}\right) = -\frac{b^2}{3a} \leq -\frac{4}{3}$$

이다. 그러므로 최댓값 M 은 $-\frac{4}{3}$ 이다.

[예시답안3]

곡선 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$)를 평행이동하지 않고 직접 M 의 값을 다음처럼 구할 수도 있다.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$ 로부터 변곡점의 x 좌표를 $-\frac{b}{3a}$ 로 구한다. 변곡점에서 접선의 기울

기는 $f'\left(-\frac{b}{3a}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{b^2}{a} - 3c\right)$ 이다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$ 에서 접선 l 의 방정식은

$$y - at^3 - bt^2 - ct - d = (3at^2 + 2bt + c)(x - t)$$

이고 접선 l 이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점 $Q(\neq P)$ 의 x 좌표는

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= (3at^2 + 2bt + c)x - 2at^3 - bt^2 + d \iff (x-t)^2(ax + 2at + b) = 0 \\ &\iff x = t, -2t - \frac{b}{a} \end{aligned}$$

를 만족한다. 여기서 $Q \neq P$ 이므로 $t \neq -\frac{b}{3a}$ 이며 따라서 점 Q 에서 접선 m 의 기울기는

$$f'\left(-2t - \frac{b}{a}\right) = 12at^2 + 8bt + \frac{b^2}{a} + c$$

이다. 두 직선 l, m 이 수직이므로

$$(3at^2 + 2bt + c) \left(12at^2 + 8bt + \frac{b^2}{a} + c \right) = -1$$

이다. $s = 3at^2 + 2bt$ 로 치환하여 $h(s) = 4s^2 + \left(\frac{b^2}{a} + 5c\right)s + c\left(\frac{b^2}{a} + c\right) + 1$ 이라 하면 위 식은 $h(s) = 0$ 이

된다. 방정식 $h(s) = 0$ 이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $D = \left(\frac{b^2}{a} + 5c\right)^2 - 16 \geq 0$, 즉

$$\frac{b^2}{a} - 3c \geq 4 \text{ 또는 } \frac{b^2}{a} - 3c \leq -4 \dots\dots\dots (*)$$

이어야 한다. 일단 $s = 3at^2 + 2bt$ 는 t 에 관한 이차방정식이므로 $s = 3at^2 + 2bt \geq -\frac{b^2}{3a}$ 인 범위에서 $h(s) = 0$

의 근이 존재해야 한다. $h\left(-\frac{b^2}{3a}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{b^2}{a} - 3c\right)^2 + 1 > 0$ 이므로 $y = h(s)$ 의 대칭축 $s = -\frac{\frac{b^2}{a} + 5c}{8}$ 이 $s = -\frac{b^2}{3a}$ 의 오른쪽에 위치해야 하므로

$$-\frac{\frac{b^2}{a} + 5c}{8} > -\frac{b^2}{3a} \iff \frac{b^2}{a} - 3c > 0$$

을 얻는다. 따라서 (*)에서 $\frac{b^2}{a} - 3c \geq 4$ 이 성립해야 한다. 그러므로 $f'\left(-\frac{b}{3a}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{b^2}{a} - 3c\right) \leq -\frac{4}{3}$ 이므

로 최댓값 M 은 $-\frac{4}{3}$ 이다.

■ 채점 기준

[예시답안1 기준]

(1) 곡선 $y = f(x)$ 를 평행이동하여 곡선 $y = g(x)$, $g(x) = ax^3 + bx$ 형태로 변형한다.

(2) 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $P_0(t, at^3 + bt)$ 에서의 접선의 방정식은 $y = (3at^2 + b)x - 2at^3$ 이다.

(3) (2)에서 구한 접선과 곡선 $y = g(x)$ 가 만나는 점 $Q_0(\neq P_0)$ 의 좌표를 구하면 $Q_0(-2t, -8at^3 - 2bt)$ 이고, 점 Q_0 에서의 접선의 방정식은 $y = (12at^2 + b)x + 16at^3$ 이다.

(4) (2)와 (3)에서 구한 두 접선이 수직이므로

$$(3at^2 + b)(12at^2 + b) = -1 \iff t^2 = \frac{-5b \pm \sqrt{9b^2 - 16}}{24a}$$

을 만족하는 0이 아닌 실수 t 가 존재해야 하는데, 이 조건으로부터 $b \leq -\frac{4}{3}$ 를 얻는다. 한편 구하고자 하는 최댓값 M 은 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점에서의 접선의 기울기의 최댓값이다. 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점인 원점에서의 접선의 기울기는 $g'(0) = b \leq -\frac{4}{3}$ 이므로 M 의 값은 $-\frac{4}{3}$ 이다.

	채점 기준	배점
상	(1)을 예시답안1, 2처럼 해결하고 (2), (3), (4)까지 모두 구한 경우 (※예시답안3으로 풀 경우 (1) 생략 가능)	S
	(1)을 예시답안1, 2처럼 해결하고 (2), (3), 그리고 (4)의 수직 조건까지만 구한 경우	A
중	(1)을 예시답안1, 2처럼 해결하고 (2), (3)까지만 구한 경우 또는 (1)을 예시답안1, 2처럼 간단히 변환하는 과정을 거치지 않고 (2), (3), 그리고 (4)의 수직 조건까지만 구한 경우	B
	(1)을 예시답안1, 2처럼 해결하고 (2)와 (3)의 교점의 좌표까지만 구한 경우 또는 (1)을 예시답안1, 2처럼 간단히 변환하는 과정을 거치지 않고 (2), (3)까지만 구한 경우	C
	(1)을 예시답안1, 2처럼 해결하고 (2)까지만 구한 경우 또는 (1)을 예시답안1, 2처럼 간단히 변환하는 과정을 거치지 않고 (2)와 (3)의 교점의 좌표까지만 구한 경우	D
하	(1)만 예시답안1, 2처럼 해결한 경우 또는 (1)을 예시답안처럼 간단히 변환하는 과정을 거치지 않고 (2)의 접선의 방정식까지만 구한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 풀이 과정이 매끄럽게 작성하지 못하거나 전혀 작성하지 않은 경우	F

<※채점시 주의사항>

1. 예시답안3처럼 (4) M 의 값까지 구한 경우 간단히 변환하는 과정인 (1)의 풀이가 없더라도 S를 부여한다.

2. (1)에서 $y = ax^3 + bx^2 + cx$, $y = ax^3 + bx^2 + c$, $y = ax^3 + bx + c$, 또는 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 로 변형하여 (2), (3), (4)를 해결하려고 시도한 풀이는 위 채점 기준에서 “(1)을 예시답안1, 2처럼 간단히 변환하는 과정을 거치지 않고”에 해당한다.

3. (1)에서 $y = ax^3$ 또는 $y = ax^3 + b$ 로 변형하여 (2), (3), (4)를 해결하려고 시도한 풀이는 잘못된 풀이이다. 왜냐하면 이 두 풀의 경우 문제에서 주어진 조건을 만족하지 못하기 때문이다. 이런 풀이의 경우 채점위원의 판단에 따라 최대 E까지만 부여하길 권장한다.

2025학년도 자연계열 (수학)

문제 1

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] x 가 모든 실수의 값을 가질 때, 이차함수 $y = a(x - p)^2 + q$ ($a \neq 0$)의 최댓값과 최솟값은 $a > 0$ 이면 $x = p$ 에서 최솟값 q 를 갖고, 최댓값은 없다.
 $a < 0$ 이면 $x = p$ 에서 최댓값 q 를 갖고, 최솟값은 없다.

- 『고등학교 수학』

[나] a, b, c 가 실수일 때, 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

- 『고등학교 수학』

[다] 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ 와 $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때,

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

- 『고등학교 기하』

[문제1] 좌표평면 위의 점 $P(0, 1)$ 가 주어져 있고 이차함수 $y = x^2 + \left(\frac{1}{3} - 2k\right)x + k$ 와 직선 $y = x$ 의 두 교점을 Q_1, Q_2 라고 하자. 점 P 와 점 Q_1 , 점 P 와 점 Q_2 를 지나는 직선을 각각 ℓ_1, ℓ_2 라고 하자. 두 직선 ℓ_1, ℓ_2 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, 제시문을 이용하여 다음을 구하시오. (단, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

- (1) $\cos \theta$ 를 실수 k 를 이용하여 나타내시오.
- (2) θ 가 최솟값을 가질 때의 실수 k 의 값과 그때의 θ 를 구하시오.
- (3) θ 가 최솟값을 가질 때의 점 Q_1, Q_2 의 좌표를 구하시오.

■ 예시 답안

(1)

이차함수 $y = x^2 + \left(\frac{1}{3} - 2k\right)x + k$ 과 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는 두 식을 연립한 방정식 $x^2 - 2\left(\frac{1}{3} + k\right)x + k = 0$ 의 해이다. 이 방정식의 판별식은 $\frac{D}{4} = \left(k + \frac{1}{3}\right)^2 - k = \left(k - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} > 0$ 이므로 두 실수해 α, β 를 가진다. 이 경우 두 교점은 점 $Q_1(\alpha, \alpha)$ 과 점 $Q_2(\beta, \beta)$ 이다. 벡터 $\vec{a} = \overrightarrow{PQ_1} = (\alpha, \alpha - 1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{PQ_2} = (\beta, \beta - 1)$ 라고 놓으면, 제시문 【다】에 의하여 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\alpha\beta + (\alpha - 1)(\beta - 1)}{\sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 1)^2} \sqrt{\beta^2 + (\beta - 1)^2}}$ 이다. 두 수 α, β 는 제시문 【나】에 의하여 $\alpha + \beta = 2k + \frac{2}{3}$, $\alpha\beta = k$ 이다. 따라서 $\cos \theta$ 의 값에 대한 위의 식을 정리하면

$$\cos \theta = \frac{\alpha\beta + (\alpha - 1)(\beta - 1)}{\sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 1)^2} \sqrt{\beta^2 + (\beta - 1)^2}} = \frac{2\alpha\beta - \alpha - \beta + 1}{\sqrt{4\alpha^2\beta^2 - 2(2\alpha\beta - \alpha - \beta + 1)(\alpha + \beta) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(6k - 1)^2 + 4}}$$

이다.

(2)

$\frac{1}{4\cos^2 \theta} = 9\left(k - \frac{1}{6}\right)^2 + 1$ 이므로 제시문 【가】에 의하여 $k = \frac{1}{6}$ 일 때, $\frac{1}{4\cos^2 \theta}$ 는 최솟값 1을 가진다. $\cos \theta > 0$ 이므로 $\cos \theta$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이고 θ 의 최솟값은 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

(3)

$k = \frac{1}{6}$ 일 때, 연립방정식 $x^2 - x + \frac{1}{6} = 0$ 을 풀면 $\alpha = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$, $\beta = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ (또는 $\alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$, $\beta = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$)으로 점 Q_1, Q_2 의 좌표는 $\left(\frac{3 + \sqrt{3}}{6}, \frac{3 + \sqrt{3}}{6}\right), \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \frac{3 - \sqrt{3}}{6}\right)$ 이다.

■ 채점 기준

[단계 1]

이차함수 $y = x^2 + \left(\frac{1}{3} - 2k\right)x + k$ 과 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는 두 식을 연립한 방정식 $x^2 - 2\left(\frac{1}{3} + k\right)x + k = 0$ 의 해이다. 이 방정식의 판별식은 $\frac{D}{4} = \left(k + \frac{1}{3}\right)^2 - k = \left(k - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} > 0$ 이므로 두 실수해 α, β 를 가진다. 이 경우 두 교점은 점 $Q_1(\alpha, \alpha)$ 과 점 $Q_2(\beta, \beta)$ 이다.

[단계 2]

벡터 $\vec{a} = \overrightarrow{PQ_1} = (\alpha, \alpha - 1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{PQ_2} = (\beta, \beta - 1)$ 라고 놓으면, 제시문 【다】에 의하여 다음을 얻는다.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\alpha\beta + (\alpha - 1)(\beta - 1)}{\sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 1)^2} \sqrt{\beta^2 + (\beta - 1)^2}}$$

[단계 3]

두 수 α, β 는 $x^2 - 2\left(\frac{1}{3} + k\right)x + k = 0$ 의 해이므로, 제시문 【나】에 의하여 $\alpha + \beta = 2k + \frac{2}{3}$, $\alpha\beta = k$ 이다. $\cos \theta$ 의 값에 대한 위의 식을 정리하면 다음을 얻는다.

$$\cos \theta = \frac{\alpha\beta + (\alpha - 1)(\beta - 1)}{\sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 1)^2} \sqrt{\beta^2 + (\beta - 1)^2}} = \frac{2\alpha\beta - \alpha - \beta + 1}{\sqrt{4\alpha^2\beta^2 - 2(2\alpha\beta - \alpha - \beta + 1)(\alpha + \beta) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(6k - 1)^2 + 4}}$$

이때 $\cos \theta > 0$ 이므로 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 임을 확인할 수 있다.

[단계 4]

$\frac{1}{4\cos^2\theta} = 9\left(k - \frac{1}{6}\right)^2 + 1$ 이므로 제시문 【가】에 의하여 $k = \frac{1}{6}$ 일 때, $\frac{1}{4\cos^2\theta}$ 는 최솟값 1을 가진다. $\cos\theta$ 는 양수 이므로 그때의 $\cos\theta$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이고 θ 의 최솟값은 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

[단계 5]

$k = \frac{1}{6}$ 일 때, 연립방정식 $x^2 - x + \frac{1}{6} = 0$ 을 풀면 $\alpha = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, \beta = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ (또는 $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \beta = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$) 으로 점 Q_1, Q_2 의 좌표는 $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right), \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$ 이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계의 논증이 매끄럽고 모든 소문항의 답을 정확하게 얻은 경우	S
	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계를 작성하고 모든 소문항의 답을 얻은 경우	A
중	[1단계]부터 [5단계] 중 네 단계를 작성하고 2개의 소문항의 답을 얻은 경우	B
	[1단계]부터 [5단계] 중 세 단계를 작성하고 1개의 소문항의 답을 얻은 경우	C
	[1단계]부터 [5단계] 중 두 단계를 작성한 경우	D
하	[1단계]부터 [5단계] 중에서 어느 한 단계만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

문제 2

제시문

[가] 한 번의 시행에서 사건 A 가 일어날 확률이 p 로 일정할 때, n 번의 독립시행에서 사건 A 가 일어나는 횟수를 X 라고 하자. 이때 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 $0, 1, 2, \dots, n$ 이고, X 의 확률질량함수는 다음과 같고, 이와 같은 분포를 이항분포 $B(n, p)$ 라 한다.

$$P(X = x) = {}_n C_x p^x q^{n-x} \quad (\text{단, } x = 0, 1, 2, \dots, n, \quad q = 1 - p)$$

- 『고등학교 확률과 통계』

[나] 실수 전체의 집합에서 정의된 연속확률변수 X 의 확률밀도함수가

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

일 때, X 의 확률분포를 정규분포라고 한다. 여기서 m 과 σ ($\sigma > 0$)는 각각 연속확률변수 X 의 평균과 표준편차를 나타내는 상수이고, e 는 값이 2.71828...인 무리수이다. 또한, $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 는 표준정규분포를 따른다.

- 『고등학교 확률과 통계』

[다] 확률변수 Z 가 표준정규분포를 따를 때 $P(0 \leq Z \leq z)$ 의 값을 소수점 이하 셋째 자리에서 반올림한 값은 다음과 같다.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$	z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.13	0.05	0.58	0.22
0.25	0.10	0.84	0.30
0.39	0.15	1.28	0.40
0.52	0.20	1.55	0.44

- 『고등학교 확률과 통계』

[문제2] 체질량지수(kg/m^2)는 체중을 키의 제곱으로 나눈 값으로 비만의 정도를 나타내는 지표이다. 체질량지수가 23 이상에서 25 미만이면 과체중, 25 이상이면 비만으로 판정한다. 어느 고등학교 학생들의 체질량지수는 정규분포를 따른다고 한다. 과체중 또는 비만일 확률은 $\frac{1}{2}$ 미만인 것으로 알려져 있다. 임의로 3명을 뽑았을 때 과체중이 1명일 확률이 0.75^3 이고, 임의로 3명을 뽑았을 때 비만이 1명일 확률은 $\frac{48}{125}$ 이라면 체질량지수가 23 초과 27 이하일 확률을 제시문을 이용하여 구하시오.

(지문 속 단어 ‘과체중’, ‘비만’을 문제 출제 의도와 같이 수정하였음. 실제 2025학년도 논술고사에서는 문제 오류로 인해 응시자 전원 정답 처리 한 문제임.)

■ 예시 답안

체질량지수 X 는 평균과 분산이 각각 m, σ^2 인 정규분포를 따른다. 과체중일 확률은 $p_1 = P(23 \leq X < 25)$ 이고 비만일 확률은 $p_2 = P(X \geq 25)$ 라 하자.

임의로 3명을 뽑았을 때 과체중인 사람의 수 Y_1 은 이항분포 $B(3, p_1)$ 를 따르고 1명만이 과체중일 확률은 $P(Y_1 = 1) = {}_3C_1 p_1 (1 - p_1)^2 = 3p_1 (1 - p_1)^2 = 0.75^3 = 3 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$ 이므로 p_1 은 $\frac{1}{4}, \frac{7 \pm \sqrt{13}}{8}$ 이 되는 것을 알 수 있다.

임의로 3명을 뽑았을 때 비만인 사람 수 Y_2 는 이항분포 $B(3, p_2)$ 를 따르고 1명만이 비만일 확률은 $P(Y_2 = 1) = {}_3C_1 p_2 (1 - p_2)^2 = 3p_2 (1 - p_2)^2 = \frac{48}{125} = 3 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$ 이므로 p_2 는 $\frac{1}{5}, \frac{9 \pm \sqrt{17}}{10}$ 이 되는 것을 알 수 있다.

p_1, p_2 는 모두 0과 1사이의 값이며, 과체중 또는 비만의 확률이 $\frac{1}{2}$ 미만이므로 $p_1 + p_2 < \frac{1}{2}$ 를 만족해야 한다. 따라서 $\frac{1}{4} = p_1 = P(23 \leq X < 25), \frac{1}{5} = p_2 = P(X \geq 25)$ 이 된다.

23 이상일 확률은 $P(X \geq 23) = P(23 \leq X < 25) + P(X \geq 25) = \frac{9}{20}$ 으로 $\frac{1}{2}$ 보다 작으므로 $\frac{9}{20} = \frac{1}{2} - P\left(0 \leq Z \leq \frac{23 - m}{\sigma}\right), \frac{1}{5} = \frac{1}{2} - P\left(0 \leq Z \leq \frac{25 - m}{\sigma}\right)$ 을 확인할 수 있다.

표준정규분포표를 이용하면 $\frac{25 - m}{\sigma} = 0.84, \frac{23 - m}{\sigma} = 0.13$ 이 되어 분산은 $\sigma^2 = \left(\frac{2}{0.71}\right)^2$ 이 된다.

체질량지수가 23 초과 27 이하일 확률은 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z 가 $\frac{23 - m}{\sigma} = 0.13$ 에서 $\frac{27 - m}{\sigma} = \frac{25 - m}{\sigma} + \frac{2}{\sigma} = 0.84 + 0.71 = 1.55$ 사이일 확률과 같으므로 다음과 같이 구한다.

$$P(23 < X \leq 27) = P(0.13 < Z \leq 1.55) = P(0 \leq Z \leq 1.55) - P(0 \leq Z \leq 0.13) = 0.44 - 0.05 = 0.39$$

■ 채점 기준

[1 단계]

체질량지수 X 의 분포는 정규분포이고, 과체중일 확률은 $p_1 = P(23 \leq X < 25)$, 비만일 확률은 $p_2 = P(X \geq 25)$ 로 한다.

[2 단계]

3명 중 과체중인 사람 수 Y_1 은 $B(3, p_1)$ 이므로 3명 중 1명의 확률이 0.75^3 이라는 조건에 의해 다음 식을 구할 수 있다.

$$P(Y_1 = 1) = {}_3C_1 p_1 (1 - p_1)^2 = 3p_1 (1 - p_1)^2 = 0.75^3 = 3 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

이 식을 만족하는 p_1 은 $\frac{1}{4}, \frac{7 \pm \sqrt{13}}{8}$ 이 됨을 알 수 있다.

[3 단계]

3명 중 비만인 사람 수 Y_2 는 $B(3, p_2)$ 이므로 3명 중 1명의 확률이 $\frac{48}{125}$ 이라는 조건에 의해 다음 식을 구할 수 있다.

$$P(Y_2 = 1) = {}_3C_1 p_2 (1 - p_2)^2 = 3p_2 (1 - p_2)^2 = \frac{48}{125} = 3 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

이 식을 만족하는 p_2 는 $\frac{1}{5}, \frac{9 \pm \sqrt{17}}{10}$ 이 됨을 알 수 있다.

[4 단계]

p_1, p_2 는 확률이므로 0에서 1사이의 값이고, 과체중 또는 비만의 확률이 $\frac{1}{2}$ 미만이므로 $p_1 + p_2 < \frac{1}{2}$ 를 만족해야 하므로 $p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{5}$ 이 된다.

[5 단계]

$\frac{1}{4} = p_1 = P(23 \leq X < 25), \frac{1}{5} = p_2 = P(X \geq 25)$ 로부터 $P(X \geq 23) = P(23 \leq X < 25) + P(X \geq 25) = \frac{9}{20}$ 를 확인할 수 있다. 따라서 $\frac{1}{5} = \frac{1}{2} - P\left(0 \leq Z \leq \frac{25-m}{\sigma}\right), \frac{9}{20} = \frac{1}{2} - P\left(0 \leq Z \leq \frac{23-m}{\sigma}\right)$ 이 되므로 표준정규분포표를 이용하여 $\frac{25-m}{\sigma} = 0.84, \frac{23-m}{\sigma} = 0.13$ 이 된다.

[6 단계]

27을 표준화하면 $\frac{27-m}{\sigma} = \frac{25-m}{\sigma} + \frac{2}{\sigma} = 0.84 + 0.71 = 1.55$ 가 되므로 체질량지수가 23초과 27이하일 확률 $P(23 < X \leq 27) = P(0.13 < Z \leq 1.55) = P(0 \leq Z \leq 1.55) - P(0 \leq Z \leq 0.13) = 0.44 - 0.05 = 0.39$ 가 된다.

하위문항	채점 기준	배점
	[1단계]부터 [6단계]까지 모든 단계를 논증이 매끄럽게 작성한 경우	S
	[1단계]부터 [6단계]까지 모두 작성하고 다섯 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	A
	[1단계]부터 [6단계] 중 다섯 단계를 작성하고 네 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	B
	[1단계]부터 [6단계] 중 네 단계를 작성하고 세 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	C
	[1단계]부터 [6단계] 중 세 단계를 작성하고 두 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	D
	[1단계]부터 [6단계] 중 두 단계를 작성하고 한 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

문제 3

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(x) \geq 0$ 일 때, 정적분

$$\int_a^b f(x)dx$$

는 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

- 『고등학교 수학 II』

[나] 함수 $y = x^r$ (r 은 실수)의 부정적분은

$$1) r \neq -1 \text{ 일 때, } \int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$$

$$2) r = -1 \text{ 일 때, } \int x^{-1} dx = \ln|x| + C$$

- 『고등학교 미적분』

[다] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x \quad \left(\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x \right)$$

- 『고등학교 미적분』

[문제3] 실수 α, β 는 $\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} = 20n, \alpha + \beta = 9n, \alpha > \beta > 0$ 을 만족한다. 두 곡선 $y = (x - \alpha)(x - \beta)$ 와 $y = \frac{3\alpha\beta(\alpha - \beta)}{5x}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n 이라 하자.

(단, n 은 자연수)

- (1) 두 곡선의 교점의 x 좌표를 n 을 이용하여 나타내시오.
- (2) 교점을 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이를 A_n 이라 할 때, A_n 을 구하시오.
- (3) S_n 을 구하시오.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^7} \sum_{k=1}^n S_k A_{2k}$ 를 구하시오.

■ 예시 답안

(1)

주어진 조건으로부터 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 81n^2 - 80n(\alpha - \beta)$ 이고 $(\alpha - \beta)^2 + 80n(\alpha - \beta) - 81n^2 = 0$ 을 만족한다. $\alpha - \beta > 0$ 이므로 만족하는 해는 $\alpha - \beta = n$ 이고 곡선은 $y = x^2 - 9nx + 20n^2$, $y = \frac{12n^3}{x}$ 이다.

두 곡선의 교점을 찾기 위하여 $x^2 - 9nx + 20n^2 = \frac{12n^3}{x}$ 라 두자. 식을 정리하면 $x^3 - 9nx^2 + 20n^2x = 12n^3$ 이 되고 인수분해 하면 $(x - n)(x - 2n)(x - 6n) = 0$ 이다. 따라서, $x = n$ 또는 $x = 2n$ 또는 $x = 6n$ 이다.

(2)

교점은 $(n, 12n^2)$, $(2n, 6n^2)$, $(6n, 2n^2)$ 이며 두 점 $(n, 12n^2)$, $(6n, 2n^2)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y = -2nx + 14n^2$ 이다. 점 $(2n, 6n^2)$ 에서 직선까지 거리는 $d = \frac{|2n(2n) + 1(6n^2) - 14n^2|}{\sqrt{(2n)^2 + 1^2}} = \frac{4n^2}{\sqrt{4n^2 + 1}}$, 두 점 $(n, 12n^2)$, $(6n, 2n^2)$ 사이의 거리는 $h = 5n\sqrt{1 + 4n^2}$ 이다. 그러므로 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이 $A_n = \frac{dh}{2} = 10n^3$ 이다.

(3)

위의 결과로부터, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S_n 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_n &= \int_n^{6n} \left| x^2 - 9nx + 20n^2 - \frac{12n^3}{x} \right| dx \\ &= \int_n^{2n} \left(x^2 - 9nx + 20n^2 - \frac{12n^3}{x} \right) dx - \int_{2n}^{6n} \left(x^2 - 9nx + 20n^2 - \frac{12n^3}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_n^{2n} - 9n \left[\frac{x^2}{2} \right]_n^{2n} + 20n^2 [x]_n^{2n} - 12n^3 [\ln|x|]_n^{2n} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{2n}^{6n} + 9n \left[\frac{x^2}{2} \right]_{2n}^{6n} - 20n^2 [x]_{2n}^{6n} + 12n^3 [\ln|x|]_{2n}^{6n} \\ &= \frac{7}{3}n^3 - \frac{27}{2}n^3 + 20n^3 - 12n^3 \ln 2 - \frac{208}{3}n^3 + 144n^3 - 80n^3 + 12n^3 \ln 3 \end{aligned}$$

식을 정리 하면 $S_n = \frac{7}{2}n^3 + 12n^3 \ln \frac{3}{2} = \left(\frac{7}{2} + 12 \ln \frac{3}{2} \right) n^3$ 이다.

(4)

제시문 【다】에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^7} \sum_{k=1}^n S_k A_{2k} &= 10 \left(\frac{7}{2} + 12 \ln \frac{3}{2} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^3 \left(\frac{2k}{2n} \right)^3 \frac{2^3}{n} \\ &= 80 \left(\frac{7}{2} + 12 \ln \frac{3}{2} \right) \int_0^1 x^6 dx = \frac{80}{7} \left(\frac{7}{2} + 12 \ln \frac{3}{2} \right) = 40 + \frac{960}{7} \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

이다.

■ 채점 기준

[1단계]

주어진 조건으로부터 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 81n^2 - 80n(\alpha - \beta)$ 이고 $(\alpha - \beta)^2 + 80n(\alpha - \beta) - 81n^2 = 0$ 을 만족한다. $\alpha - \beta > 0$ 이므로 만족하는 해는 $\alpha - \beta = n$ 이고 곡선은 $y = x^2 - 9nx + 20n^2$, $y = \frac{12n^3}{x}$ 이다.

[2단계]

두 곡선의 교점을 찾기 위하여 $x^2 - 9nx + 20n^2 = \frac{12n^3}{x}$ 라 두자. 식을 정리하면 $x^3 - 9nx^2 + 20n^2x = 12n^3$ 이 되고 인수분해 하면 $(x - n)(x - 2n)(x - 6n) = 0$ 이다.
따라서, $x = n$ 또는 $x = 2n$ 또는 $x = 6n$ 이다.

[3단계]

교점은 $(n, 12n^2)$, $(2n, 6n^2)$, $(6n, 2n^2)$ 이며 두 점 $(n, 12n^2)$, $(6n, 2n^2)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y = -2nx + 14n^2$ 이다. 점 $(2n, 6n^2)$ 에서 직선까지 거리는 $d = \frac{|2n(2n) + 1(6n^2) - 14n^2|}{\sqrt{(2n)^2 + 1^2}} = \frac{4n^2}{\sqrt{4n^2 + 1}}$, 두 점 $(n, 12n^2)$, $(6n, 2n^2)$ 사이의 거리는 $h = 5n\sqrt{1 + 4n^2}$ 이다. 그러므로 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $A_n = \frac{dh}{2} = 10n^3$ 이다.

[4단계]

위의 결과로부터, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S_n 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_n &= \int_n^{6n} \left| x^2 - 9nx + 20n^2 - \frac{12n^3}{x} \right| dx \\ &= \int_n^{2n} \left(x^2 - 9nx + 20n^2 - \frac{12n^3}{x} \right) dx - \int_{2n}^{6n} \left(x^2 - 9nx + 20n^2 - \frac{12n^3}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_n^{2n} - 9n \left[\frac{x^2}{2} \right]_n^{2n} + 20n^2 [x]_n^{2n} - 12n^3 [\ln|x|]_n^{2n} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{2n}^{6n} + 9n \left[\frac{x^2}{2} \right]_{2n}^{6n} - 20n^2 [x]_{2n}^{6n} + 12n^3 [\ln|x|]_{2n}^{6n} \\ &= \frac{7}{3}n^3 - \frac{27}{2}n^3 + 20n^3 - 12n^3 \ln 2 - \frac{208}{3}n^3 + 144n^3 - 80n^3 + 12n^3 \ln 3 \end{aligned}$$

식을 정리 하면 $S_n = \frac{7}{2}n^3 + 12n^3 \ln \frac{3}{2} = \left(\frac{7}{2} + 12 \ln \frac{3}{2} \right) n^3$ 이다.

[5단계]

제시문 【다】에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^7} \sum_{k=1}^n S_k A_{2k} &= 10 \left(\frac{7}{2} + 12 \ln \frac{3}{2} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^3 \left(\frac{2k}{2n} \right)^3 \frac{2^3}{n} \\ &= 80 \left(\frac{7}{2} + 12 \ln \frac{3}{2} \right) \int_0^1 x^6 dx = \frac{80}{7} \left(\frac{7}{2} + 12 \ln \frac{3}{2} \right) = 40 + \frac{960}{7} \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계의 논증이 매끄럽고 모든 소문항의 답을 정확하게 얻은 경우	S
	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계를 작성하고 모든 소문항의 답을 얻은 경우	A
중	[1단계]부터 [5단계] 중 네 단계를 작성하고 3개의 소문항의 답을 얻은 경우	B
	[1단계]부터 [5단계] 중 세 단계를 작성하고 2개의 소문항의 답을 얻은 경우	C
	[1단계]부터 [5단계] 중 세 단계를 작성하고 1개의 소문항의 답을 얻은 경우	D
하	[1단계]부터 [5단계] 중에서 어느 한 단계만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

2024학년도 자연계열 (수학)

문제 1

제시문

[가] 두 초점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 으로부터의 거리의 합이 $2a$ 인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > c > 0, b^2 = a^2 - c^2)$$

이다. 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

이다. 이때 타원의 초점, 꼭짓점은 각각 다음과 같다.

타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동 	타원의 방정식 $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$
$(c, 0), (-c, 0)$	초점의 좌표	$(c+m, n), (-c+m, n)$
$(a, 0), (-a, 0),$ $(0, b), (0, -b)$	꼭짓점의 좌표	$(a+m, n), (-a+m, n),$ $(m, b+n), (m, -b+n)$

- 『고등학교 기하』

[나] 초점이 $F(p, 0)$ 이고 준선이 $x = -p$ 인 포물선 $y^2 = 4px$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은 다음과 같다.

$$(y-n)^2 = 4p(x-m)$$

이때 포물선의 초점의 좌표는 $(p+m, n)$, 준선의 방정식은 $x = -p+m$ 이다.

- 『고등학교 기하』

[다] 두 초점 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ 으로부터의 거리의 차이가 $2a$ 인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $c > a >$

$0, b^2 = c^2 - a^2$)이다. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

이다. 이때 중심, 꼭짓점, 초점, 점근선은 각각 다음과 같다.

쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동 $\Rightarrow$	쌍곡선의 방정식 $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$
$(0, 0)$	중심의 좌표	(m, n)
$(a, 0), (-a, 0)$	꼭짓점의 좌표	$(a+m, n), (-a+m, n)$
$(c, 0), (-c, 0)$	초점의 좌표	$(c+m, n), (-c+m, n)$
$y = \pm \frac{b}{a}x$	점근선의 방정식	$y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m)$

- 『고등학교 기하』

[문제1] 다음 방정식에 대하여 물음에 답하시오. (단, k 는 실수이다.)

$$x^2 + y^2 = (kx + 1)^2$$

- (1) $k = 0$ 이면 주어진 방정식은 원의 방정식이다. 이 원의 중심과 반지름을 각각 구하시오.
- (2) $k = \frac{1}{2}$ 이면 주어진 방정식은 타원의 방정식이다. 이 타원의 초점의 좌표와 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.
- (3) $k = 1$ 이면 주어진 방정식은 포물선의 방정식이다. 이 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 각각 구하시오.
- (4) $k = 2$ 이면 주어진 방정식은 쌍곡선의 방정식이다. 이 쌍곡선의 초점의 좌표와 점근선의 방정식을 각각 구하시오.

■ 예시 답안

(1)

$k = 0$ 이면 주어진 방정식은 $x^2 + y^2 = 1$ 이므로 중심이 $(0, 0)$ 이고, 반지름이 1인 원이다.

(2)

$k = \frac{1}{2}$ 이면 주어진 방정식은 $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$ 이므로

$$\frac{3}{4}x^2 - x + y^2 = 1, \quad \frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{3}, \quad \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

이다. 따라서, $k = \frac{1}{2}$ 이면 주어진 방정식은 타원 $\frac{x^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$ 을 x 축의 양의 방향으로 $\frac{2}{3}$ 만큼 평행이동한 타원

의 방정식이 된다. 제시문 【가】에서 $a = \frac{4}{3}, b = \frac{2\sqrt{3}}{3}, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{2}{3}$ 이므로 초점의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}, 0\right), (0, 0)$

이고, 꼭짓점의 좌표는 $(2, 0), \left(-\frac{2}{3}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 이 된다.

(3)

$k = 1$ 이면 주어진 방정식은 $x^2 + y^2 = (x + 1)^2$ 이므로

$$y^2 = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

이다. 따라서, $k = 1$ 이면 주어진 방정식은 포물선 $y^2 = 2x$ 을 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 포물선이 된다. 제시문 【나】에서 $p = \frac{1}{2}$ 가 되므로 초점의 좌표는 $(0, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x = -1$ 이다.

(4)

$k = 2$ 이면 주어진 방정식은 $x^2 + y^2 = (2x + 1)^2$ 이므로

$$3x^2 + 4x - y^2 = -1, \quad 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}, \quad \frac{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

이다. 따라서, $k = 2$ 이면 주어진 방정식은 쌍곡선 $\frac{x^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$ 을 x 축의 방향으로 $-\frac{2}{3}$ 만큼 평행이동한 쌍곡

선이 된다. 제시문 【다】에서 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{\sqrt{3}}{3}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2}{3}$ 이므로, 초점의 좌표는 $(0, 0), \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ 이고

점근선의 방정식은 $y = \pm\sqrt{3}\left(x + \frac{2}{3}\right)$ 이다.

■ 채점 기준

(1단계) $k = 0$ 이면 주어진 방정식은 $x^2 + y^2 = 1$ 이므로 중심이 $(0, 0)$ 이고, 반지름이 1인 원이다.

(2단계) $k = \frac{1}{2}$ 이면 주어진 방정식은 $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$ 이므로

$$\frac{3}{4}x^2 - x + y^2 = 1, \quad \frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{3}, \quad \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

이다. 따라서, $k = \frac{1}{2}$ 이면 주어진 방정식은 타원 $\frac{x^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$ 을 x 축의 양의 방향으로 $\frac{2}{3}$ 만큼 평행이동한 타원
의 방정식이 된다. 제시문 【가】에서 $a = \frac{4}{3}, b = \frac{2\sqrt{3}}{3}, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{2}{3}$ 이므로 초점의 좌표는 $(\frac{4}{3}, 0), (0, 0)$
이고, 꼭짓점의 좌표는 $(2, 0), (-\frac{2}{3}, 0), (\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}), (\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ 이 된다.

(3단계) $k = 1$ 이면 주어진 방정식은 $x^2 + y^2 = (x + 1)^2$ 이므로

$$y^2 = 2x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

이다. 따라서, $k = 1$ 이면 주어진 방정식은 포물선 $y^2 = 2x$ 을 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 포물선이
된다. 제시문 【나】에서 $p = \frac{1}{2}$ 가 되므로 초점의 좌표는 $(0, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x = -1$ 이다.

(4단계) $k = 2$ 이면 주어진 방정식은 $x^2 + y^2 = (2x + 1)^2$ 이므로

$$3x^2 + 4x - y^2 = -1, 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{3}, \frac{\left(x + \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

이다. 따라서, $k = 2$ 이면 주어진 방정식은 쌍곡선 $\frac{x^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$ 을 x 축의 방향으로 $-\frac{2}{3}$ 만큼 평행이동한 쌍곡
선이 된다. 제시문 【다】에서 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{\sqrt{3}}{3}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2}{3}$ 이므로, 초점의 좌표는 $(0, 0), (-\frac{4}{3}, 0)$ 이고
점근선의 방정식은 $y = \pm\sqrt{3}\left(x + \frac{2}{3}\right)$ 이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지 모든 단계를 논증이 매끄럽게 작성한 경우	S
	[1단계]부터 [4단계]까지 모두 작성하고 세 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	A
중	[1단계]부터 [4단계]까지 모두 작성하고 두 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	B
	[1단계]부터 [4단계]중 세 단계를 작성하고 두 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	C
	[1단계]부터 [4단계]중 두 단계를 작성하고 한 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	D
하	[1단계]부터 [4단계] 중에서 어느 한 단계만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

문제 2

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] 코사인함수와 탄젠트함수의 덧셈정리는 각각 다음과 같다.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

- 『고등학교 미적분』

[나] 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때,

$$y = f^{-1}(x) \text{의 도함수는 } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

- 『고등학교 미적분』

[다] 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ 일 때 α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt$$

- 『고등학교 미적분』

[문제2] 함수 $f(x) = \sin x + 4x + 1$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 미분가능하다.

실수 t 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선을 l_1 , 곡선 $y = f^{-1}(x)$ 위의 점 $(f(t), t)$ 에서의 접선을 l_2 라 하고, l_1 과 l_2 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $g(t) = \tan \theta$ 라고 하자. 다음 물음에 답하시오.

- (1) $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값을 구하시오.
- (2) 함수 $g(t)$ 의 최솟값을 구하시오.
- (3) $\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x)) dx$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

(1)

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = \cos t + 4$ 이고, 이 접선과 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 α 라고 하면 $\tan \alpha = f'(t) = \cos t + 4$ 이다. 또한 역함수 미분법에 의해 곡선 $y = f^{-1}(x)$ 위의 점 $(f(t), t)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{f'(t)}$ 이고, 이 접선과 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 β 라고 하면 $\tan \beta = \frac{1}{f'(t)}$ 이다.

그러므로 $g(t) = \tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{(f'(t))^2 - 1}{2f'(t)}$ 이다. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ 이므로 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{15}{8}$ 이다.

(2)

$g(t) = \frac{(\cos t + 4)^2 - 1}{2(\cos t + 4)}$ 에서 $\cos t + 4 = s$ ($3 \leq s \leq 5$)로 치환하면 $g(t)$ 의 최솟값은 $h(s) = \frac{s^2 - 1}{2s}$ ($3 \leq s \leq 5$)의 최솟값과 같다. $h'(s) = \frac{1 + s^2}{2s^2} > 0$ 이므로 $h(s)$ 는 구간 $[3, 5]$ 에서 증가함수이고 $s = 3$ 일 때, 함수 $g(t)$ 의 최솟값은 $h(3) = \frac{4}{3}$ 이다.

(3)

$x = f(t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)와 제시문 【다】를 이용하면

$$\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x)) dx = \int_0^{2\pi} g(t) f'(t) dt$$

이다. 그런데 $g(t) = \frac{(f'(t))^2 - 1}{2f'(t)}$ 이고 $f'(t) = \cos t + 4$ 이므로

$$\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x)) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} ((\cos t + 4)^2 - 1) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 8 \cos t + 15) dt \quad \text{이고}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos t dt = [\sin t]_0^{2\pi} = 0 \text{이다.}$$

따라서 $\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 8 \cos t + 15) dt = \frac{31\pi}{2}$ 이다.

■ 채점 기준

[1단계] 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = \cos t + 4$ 이고, 이 접선과 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 α 라고 하면 $\tan \alpha = f'(t) = \cos t + 4$ 이다. 또한 역함수 미분법에 의해 곡선 $y = f^{-1}(x)$ 위의 점 $(f(t), t)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{f'(t)}$ 이고, 이 접선과 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 β 라고 하면 $\tan \beta = \frac{1}{f'(t)}$ 이다.

[2단계] 그러므로 $g(t) = \tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{(f'(t))^2 - 1}{2f'(t)}$ 이다.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \text{이므로 } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{15}{8} \text{이다.}$$

[3단계] $g(t) = \frac{(\cos t + 4)^2 - 1}{2(\cos t + 4)}$ 에서 $\cos t + 4 = s$ ($3 \leq s \leq 5$)로 치환하면 $g(t)$ 의 최솟값은 $h(s) = \frac{s^2 - 1}{2s}$ ($3 \leq s \leq 5$)의 최솟값과 같다. $h'(s) = \frac{1 + s^2}{2s^2} > 0$ 이므로 $h(s)$ 는 구간 $[3, 5]$ 에서 증가함수이다.

[4단계] $s = 3$ 일 때, 함수 $g(t)$ 의 최솟값은 $h(3) = \frac{4}{3}$ 이다.

[5단계] $x = f(t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)와 제시문 【다】를 이용하면

$$\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x)) dx = \int_0^{2\pi} g(t)f'(t) dt$$

[6단계] 그런데 $g(t) = \frac{(f'(t))^2 - 1}{2f'(t)}$ 이고 $f'(t) = \cos t + 4$ 이므로

$$\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x)) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} ((\cos t + 4)^2 - 1) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 8 \cos t + 15) dt \quad \text{이고}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos t dt = [\sin t]_0^{2\pi} = 0 \text{이다.}$$

따라서 $\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + 8 \cos t + 15) dt = \frac{31\pi}{2}$ 이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [6단계]까지 모든 단계의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	S
	[1단계]부터 [6단계]까지 5 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	A
중	[1단계]부터 [6단계]까지 4 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	B
	[1단계]부터 [6단계]까지 3 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	C
	[1단계]부터 [6단계]까지 2 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	D
하	[1단계]부터 [6단계]까지 1 단계만의 논증을 매끄럽게 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

문제 3

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가 $x = f(t)$, $y = g(t)$ 일 때, 점 P의 시각 t 에서의 속도는 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, 즉 $(f'(t), g'(t))$ 이고, 속도의 크기 또는 속력은 $\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$ 이다.

- 『고등학교 미적분』

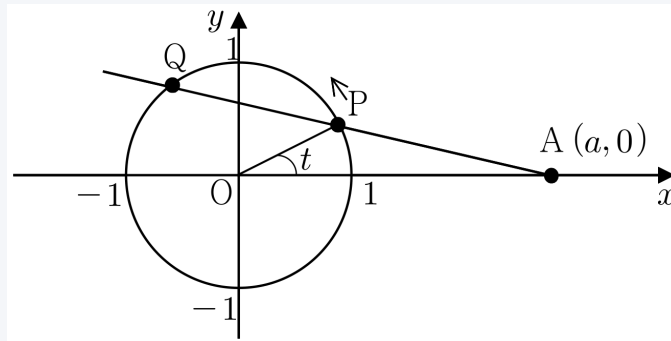
[나] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

- 『고등학교 수학 II』

[다] t 의 함수 s 가 방정식 $f(t, s) = 0$ 의 꼴로 주어졌을 때, 이를 s 의 t 에 대한 음함수 표현이라고 한다. 음함수 표현 $f(t, s) = 0$ 에서 s 를 t 의 함수로 보고, 양변의 각 항을 t 에 대하여 미분하여 $\frac{ds}{dt}$ 를 구할 수 있다.

- 『고등학교 미적분』

[문제3] 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 x 축 위의 점 $A(a, 0)$ 가 있다. (단, $2 \leq a \leq 3$) 점 P는 점 $(1, 0)$ 에서 출발하여, 시각 t 가 $0 \leq t < \frac{\pi}{3}$ 일 때 $\angle POA = t$ 를 만족하도록 원 위를 반시계방향으로 움직인다. 점 A와 P를 잇는 직선이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자.

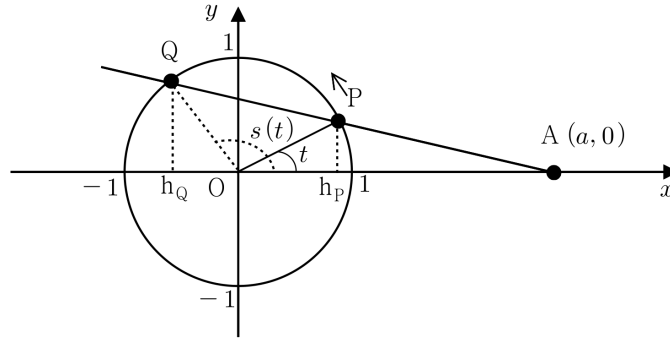


시각 $t = t_0$ 일 때, 점 Q의 위치는 $(0, 1)$ 이다. 다음 물음에 답하시오.

- (1) $t = t_0$ 일 때, 점 Q의 속력을 a 를 이용하여 나타내시오.
- (2) $t = t_0$ 일 때, 점 Q의 속력이 최대가 되도록 하는 a 의 값과 그 때의 점 Q의 속력을 구하시오.

■ 예시 답안

[문항(1) 풀이]



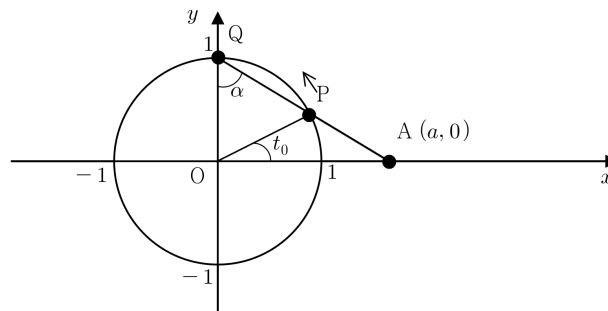
위 그림과 같이 시각 t 에 원점 O 와 점 Q 를 잇는 직선 OQ 와 x 축의 양의 방향이 이루는 각을 $s(t)$ 라 하자. Q 는 원 위를 움직이므로, Q 의 좌표는 $(\cos s(t), \sin s(t))$ 이고, 속력은 $\sqrt{(\sin^2 s(t) + \cos^2 s(t)) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \left|\frac{ds}{dt}\right|$ 이다. 점 Q, P 로부터 각각 x 축에 내린 수선의 발을 h_Q, h_P 라 하면, $\angle QAh_Q = \angle PAh_P$ 이므로, $\tan(\angle QAh_Q) = \tan(\angle PAh_P)$ 이고, 다음을 얻는다.

$$\frac{\sin s(t)}{a - \cos s(t)} = \frac{\sin t}{a - \cos t}.$$

이를 정리하면 $(a - \cos t) \sin s(t) - \sin t(a - \cos s(t)) = 0$ 이고, 음함수의 미분법에 의해

$$\sin t \sin s(t) + (a - \cos t) \cos s(t) \frac{ds}{dt} - \cos t(a - \cos s(t)) - \sin t \sin s(t) \frac{ds}{dt} = 0.$$

점 Q 가 점 $(0, 1)$ 을 지날 때, $s(t) = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin s(t) = 1, \cos s(t) = 0$ 이고, $t = t_0$ 이므로, 이를 위 식에 대입하고 정리하면 $t = t_0$ 에서 Q 의 속력은 $\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|1 - a \frac{\cos t_0}{\sin t_0}\right|$ 이다.



위 그림과 같이 점 Q 의 위치가 $(0, 1)$ 인 상황에서 $\angle AQO = \alpha$ 라 하면, $\tan \alpha = a$ 이다.

한편, 직선 OQ 와 직선 OP 의 길이가 같으므로 $\angle QPO = \alpha$ 이고, $t_0 + \frac{\pi}{2} = 2\alpha$ 가 성립한다.

따라서, $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(2\alpha - \frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(2\alpha)}{-\cos(2\alpha)} = -\tan 2\alpha = -\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2a}{a^2 - 1}$ 이고,

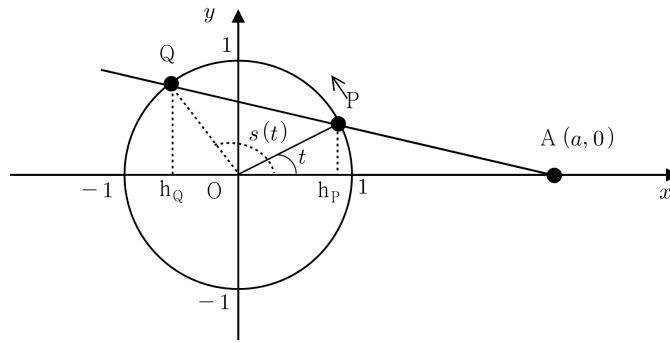
Q 의 속력은 $\left|1 - \frac{2a^2}{a^2 - 1}\right| = \left|-1 - \frac{2}{a^2 - 1}\right| = 1 + \frac{2}{a^2 - 1}$ ($a \geq 2$ 이므로)이다.

[문항(2) 풀이]

$1 + \frac{2}{a^2 - 1}$ 는 $2 \leq a \leq 3$ 에서 감소함수이므로, 점 Q 의 속력은 $a = 2$ 일 때 최대이고, 그 값은 $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ 이다.

■ 채점 기준

[1단계]



위 그림과 같이 시각 t 에 원점 O 와 점 Q 를 잇는 직선 OQ 와 x 축의 양의 방향이 이루는 각을 $s(t)$ 라 하자. Q 는 원 위를 움직이므로, Q 의 좌표는 $(\cos s(t), \sin s(t))$ 이고, 속력은 $\sqrt{(\sin^2 s(t) + \cos^2 s(t)) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \left|\frac{ds}{dt}\right|$ 이다. 점 Q, P 로부터 각각 x 축에 내린 수선의 발을 h_Q, h_P 라 하면, $\angle QAh_Q = \angle PAh_P$ 이므로, $\tan(\angle QAh_Q) = \tan(\angle PAh_P)$ 이고, 다음을 얻는다.

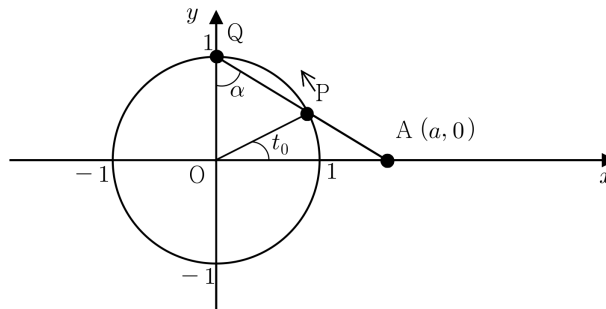
$$\frac{\sin s(t)}{a - \cos s(t)} = \frac{\sin t}{a - \cos t}.$$

[2단계] 이를 정리하면 $(a - \cos t) \sin s(t) - \sin t(a - \cos s(t)) = 0$ 이고, 음함수의 미분법에 의해

$$\sin t \sin s(t) + (a - \cos t) \cos s(t) \frac{ds}{dt} - \cos t(a - \cos s(t)) - \sin t \sin s(t) \frac{ds}{dt} = 0.$$

점 Q 가 점 $(0, 1)$ 을 지날 때, $s(t) = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin s(t) = 1, \cos s(t) = 0$ 이고, $t = t_0$ 이므로, 이를 위 식에 대입하고 정리하면 $t = t_0$ 에서 Q 의 속력은 $\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|1 - a \frac{\cos t_0}{\sin t_0}\right|$ 이다.

[3단계]



위 그림과 같이 점 Q 의 위치가 $(0, 1)$ 인 상황에서 $\angle AQO = \alpha$ 라 하면, $\tan \alpha = a$ 이다.

한편, 직선 OQ 와 직선 OP 의 길이가 같으므로 $\angle QPO = \alpha$ 이고, $t_0 + \frac{\pi}{2} = 2\alpha$ 가 성립한다.

따라서, $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2})}{\sin(2\alpha - \frac{\pi}{2})} = \frac{\sin(2\alpha)}{-\cos(2\alpha)} = -\tan 2\alpha = -\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2a}{a^2 - 1}$ 이고,

Q 의 속력은 $\left|1 - \frac{2a^2}{a^2 - 1}\right| = \left|1 - \frac{2}{a^2 - 1}\right| = 1 + \frac{2}{a^2 - 1}$ ($a \geq 2$ 이므로)이다.

[4단계] $1 + \frac{2}{a^2 - 1}$ 는 $2 \leq a \leq 3$ 에서 감소함수이므로, 점 Q 의 속력은 $a = 2$ 일 때 최대이고, 그 값은 $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ 이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지 모든 단계를 논증이 매끄럽게 작성한 경우	S
	모든 단계를 잘 작성하였으나 [3단계] 답에서 절대값 생략하거나 [4단계]에서 논증이 부족할 경우	A
중	[1단계]부터 [3단계]까지 논증이 매끄럽게 작성한 경우	B
	[1단계]부터 [2단계]까지 논증이 매끄럽게 작성한 경우	C
	[1단계]부터 [2단계]의 음함수 표현까지 올바르게 작성한 경우	D
하	[1단계]까지만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다