서강대논술

자연계

목차

2026학년도 자연계열 3
1차 · 문제 1 3
1차 · 문제 2 7
2차 · 문제 1 11
2차 · 문제 2 15

2025학년도 자연계열 19
1차 · 문제 1 19
1차 · 문제 2 22
2차 · 문제 1 25
2차 · 문제 2 28

2024학년도 자연계열 32
1차 · 문제 1 32
1차 · 문제 2 35
2차 · 문제 1 38
2차 · 문제 2 42

2026학년도 자연계열

1차 · 문제 1

제시문

[가] 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[나] 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 $\Delta x \to 0$일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다. 이때 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수라고 하고, 이것을 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.

[다] 무리수 e의 정의

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

[라] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀌거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀔 때, 이 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라고 한다.

[문제] 제시문 [가]~[라]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 두 정수 a와 b에 대하여 직선 $ax+2y+5b=0$이 원 $x^2+y^2=25$와 만나도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

(단, $-100 \le a \le 100$, $-100 \le b \le 100$)

【1-2】 함수 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (x\le 0) \\ \dfrac{1-\sqrt{1+3x^2}}{x} & (0<x<1) \\ cx+d & (x\ge 1) \end{cases}$ 이 모든 실수 x에서 미분가능할 때, 상수 a, b, c, d의 값을 구하시오.

【1-3】 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_0^x tf(x-t)dt=x^2e^{-x^2}$을 만족시킬 때, $f(0)\times\displaystyle\int_{-2}^{3}f(x)dx$의 값을 구하시오.

【1-4】 곡선 $y=kx^3+x^2-x\ln x\ (x>0)$의 변곡점의 개수를 실수 k의 값에 따라 조사하시오.

■ 예시 답안

【1-1】

원 $x^2+y^2=25$의 중심 $(0,0)$과 직선 $ax+2y+5b=0$ 사이의 거리는 제시문 [가]에 의하여 $\frac{5|b|}{\sqrt{a^2+4}}$이다.

직선 $ax+2y+5b=0$이 원 $x^2+y^2=25$와 만나려면 $\frac{5|b|}{\sqrt{a^2+4}} \le 5$이어야 하므로

$$|b| \le \sqrt{a^2+4}$$

$\sqrt{a^2+4} < |a|+1$이면 $|b| \le \sqrt{a^2+4} < |a|+1$이므로 $|b| \le |a|$이다.

$\sqrt{a^2+4} < |a|+1$이려면 $a^2+4 < a^2+2|a|+1$이므로 $|a| > \frac{3}{2}$이어야 한다. 따라서 $|a| \ge 2$이면 $|b| \le |a|$이다.

(i) $a=0$이면, $|b| \le 2$이므로 가능한 b는 $b=-2,-1,0,1,2$이다.

(ii) $|a|=1$이면, $|b| \le \sqrt{5}$이므로 가능한 b는 $b=-2,-1,0,1,2$이다.

(iii) $2 \le |a| \le 100$이면, $|b| \le |a|$이므로 가능한 b는 $b=-|a|,-|a|+1,...,0,...,|a|-1,|a|$이다.

(i)~(iii)에 의하여, 직선 $ax+2y+5b=0$이 원 $x^2+y^2=25$와 만나도록 하는 순서쌍 (a,b)의 개수는

$$5+2\times 5+2\sum_{k=2}^{100}(2k+1) = 9+2\sum_{k=1}^{100}(2k+1) = 9+4\times\frac{100\times 101}{2}+200 = 20409$$

【1-2】

(i) $x=0$일 때, $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 연속이다. 따라서 $f(0)=\lim_{x\to 0+} f(x)$이다.

$f(0)=b$이고

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{1+3x^2}}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{-3x^2}{x\left(1+\sqrt{1+3x^2}\right)} = 0$$

이므로 $b=0$이다.

또한, $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이다.

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\frac{ax}{x} = a$이고

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{1+3x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0+}\frac{-3x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1+3x^2}\right)} = -\frac{3}{2}$$

이므로 $a=-\frac{3}{2}$이다.

(ii) $x=1$일 때, $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 연속이다. 따라서 $f(1)=\lim_{x\to 1-} f(x)$이다.

$f(1)=c+d$이고

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}\frac{1-\sqrt{1+3x^2}}{x} = -1$$

이므로 $c+d=f(1)=-1$이다.

또한, $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이다.

$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}\frac{(cx+d)-(c+d)}{x-1} = c$이고

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x+1-\sqrt{1+3x^2}}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1-}\frac{(x+1)^2-(1+3x^2)}{x(x-1)\left(x+1+\sqrt{1+3x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{-2x^2+2x}{x(x-1)\left(x+1+\sqrt{1+3x^2}\right)}=\lim_{x\to 1-}\frac{-2}{x+1+\sqrt{1+3x^2}}=-\frac{1}{2}$$

이므로 $c=-\frac{1}{2}$이고, $c+d=-1$에서 $d=-\frac{1}{2}$이다.
그러므로 $a=-\frac{3}{2}$, $b=0$, $c=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{1}{2}$이다.

【1-3】

$s=x-t$로 놓으면 $\frac{ds}{dt}=-1$이고, $t=0$일 때 $s=x$, $t=x$일 때 $s=0$이다. 그러므로

$$\int_0^x tf(x-t)dt=-\int_x^0(x-s)f(s)ds=\int_0^x(x-s)f(s)ds=x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)ds$$

이므로

$$x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)ds=x^2e^{-x^2}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(s)ds+xf(x)-xf(x)=2xe^{-x^2}-2x^3e^{-x^2}$$

이므로

$$\int_0^x f(s)ds=(2x-2x^3)e^{-x^2}$$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=(4x^4-10x^2+2)e^{-x^2}$$

이다. 따라서 $f(0)=2$이다.

한편,

$$\int_{-2}^3 f(x)dx=\int_{-2}^0 f(s)ds+\int_0^3 f(s)ds=-\int_0^{-2} f(s)ds+\int_0^3 f(s)ds$$

이고 $\int_0^x f(s)ds=(2x-2x^3)e^{-x^2}$ 이므로

$$-\int_0^{-2} f(s)ds+\int_0^3 f(s)ds=-12e^{-4}-48e^{-9}$$

그러므로

$$f(0)\times\int_{-2}^3 f(x)dx=-24e^{-4}-96e^{-9}=-\frac{24e^5+96}{e^9}$$

【1-4】

$f(x)=kx^3+x^2-x\ln x$라고 하면

$$f'(x)=3kx^2+2x-\ln x-1$$

$$f''(x)=6kx+2-\frac{1}{x}=\frac{6kx^2+2x-1}{x}$$

곡선 $y=f(x)\,(x>0)$의 변곡점의 개수를 구하기 위하여 방정식 $f''(x)=0$, 즉, $6kx^2+2x-1=0$의 0보다 큰 해를 조사하자.

(i) $k=0$일 때

방정식 $6kx^2+2x-1=0$은 오직 하나의 해 $x=\frac{1}{2}$을 갖는다. $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$이고 $f''(x)$의 부호가 $x=\frac{1}{2}$의 좌우에서 바뀌므로 주어진 곡선은 한 개의 변곡점을 갖는다.

(ii) $k\neq 0$일 때

이차방정식 $6kx^2+2x-1=0$의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=1+6k$이다.

① $D<0$, 즉 $k<-\frac{1}{6}$이면 방정식 $6kx^2+2x-1=0$은 실근을 갖지 않는다. 따라서 모든 $x>0$에서 $f''(x)<0$이 되어 주어진 곡선은 변곡점을 갖지 않는다.

② $D=0$, 즉 $k=-\frac{1}{6}$이면 방정식 $6kx^2+2x-1=0$은 중근 $x=1$을 갖는다. 따라서 모든 $x>0$에서 $f''(x)=-\frac{(x-1)^2}{x}\leq 0$이 되어 주어진 곡선은 변곡점을 갖지 않는다.

③ $D>0$, 즉 $-\frac{1}{6}<k<0$ 또는 $k>0$이면 방정식 $6kx^2+2x-1=0$은 서로 다른 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$를 갖는다. 근과 계수의 관계에 의하여, $\alpha+\beta=-\frac{2}{6k}$이고 $\alpha\beta=-\frac{1}{6k}$이다.

㉠ $-\frac{1}{6}<k<0$이면 α와 β는 모두 0보다 큰 실근이다. $f''(x)=\frac{6k(x-\alpha)(x-\beta)}{x}$의 부호가 $x=\alpha$, $x=\beta$의 좌우에서 바뀌므로, 주어진 곡선은 두 개의 변곡점을 갖는다.

㉡ $k>0$이면 β만 0보다 큰 실근이다. $f''(x)=\frac{6k(x-\alpha)(x-\beta)}{x}$의 부호가 $x=\beta$의 좌우에서 바뀌므로, 주어진 곡선은 한 개의 변곡점을 갖는다.

따라서 변곡점의 개수는 $k\leq -\frac{1}{6}$일 때 0, $k\geq 0$일 때 1, $-\frac{1}{6}<k<0$일 때 2이다.

■ 채점 기준

■ 문항 【1-1】은 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름보다 작으면 원과 직선이 만난다는 것을 이해하고, 제시문 [가]를 활용하여 부등식을 세울 수 있는지를 평가한다. 또한, 순서쌍의 개수를 계산함에 있어서 등차수열을 사용할 수 있는 경우와 그렇지 않은 경우를 구분하고, 등차수열의 합을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

■ 문항 【1-2】는 제시문 [나]의 내용을 활용하여 함수가 연속이기 위한 조건과 미분가능하기 위한 조건에 관한 등식을 세우고 그 식을 풀어 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

■ 문항 【1-3】은 치환적분법을 활용하여 변수를 치환하고 정적분과 미분과의 관계를 활용하여 등식을 세운 다음, 제시문 [다]와 지수함수의 미분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가한다.

■ 문항 【1-4】는 제시문 [라]와 로그함수의 미분법을 활용하여 이계도함수를 계산하고, 이계도함수의 판별식을 기준으로 경우를 나눈 다음, 각각의 경우에 대하여 이계도함수의 해를 계산하고 이를 이용하여 변곡점의 개수를 구할 수 있는지 평가한다.

1차 · 문제 2

제시문

[가] 임의의 θ에 대하여

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta \qquad \cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

[나] 함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여

(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되고

(ⅱ) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하며

(ⅲ) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

[다] 삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

[문제] $0<t<\pi$일 때, 점 $\mathrm{P}(2\cos t, 2\sin t)$에 대하여 점 P와 점 $(-1,0)$을 지나는 직선과 점 P와 점 $(-2,0)$을 지나는 직선이 이루는 예각의 크기를 $\theta(t)$라고 하자. 열린구간 $(0,\pi)$에서 정의된 함수 $f(t)=\tan\theta(t)$에 대하여 제시문 [가]~[다]를 참고하여 문항 【2-1】 ~ 【2-4】에 답하시오. (단, $\theta(t)$의 단위는 라디안)

【2-1】 함수 $f(t)$가 $t=\dfrac{2\pi}{3}$에서 연속임을 보이시오.

【2-2】 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 일 때, $\displaystyle\int_{2\alpha}^{\frac{2\pi}{3}} f(t)dt$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$

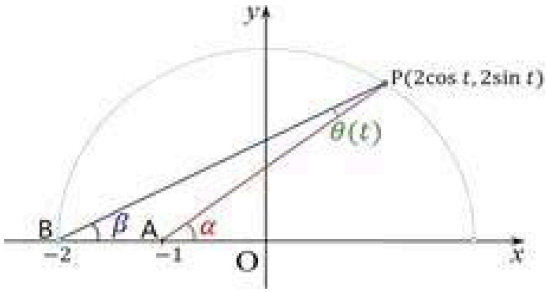
【2-3】 열린구간 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\{f(2x)\}^3}$ 에 대하여 $\lim_{x\to 0+}\dfrac{g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x^n}$가 수렴하는 자연수 n을 모두 구하고, 수렴하는 모든 n에 대하여 그 극한값을 구하시오.

【2-4】 곡선 $y=f(x)\left(0<x<\dfrac{2\pi}{3}\right)$와 직선 $y=\dfrac{1}{3}x+k$의 교점의 개수를 실수 k의 값에 따라 조사하시오.

■ 예시 답안

【2-1】

점 P와 점 $(-1,0)$을 지나는 직선을 l_1, 점 P와 점 $(-2,0)$을 지나는 직선을 l_2라고 하자. 오른쪽 그림과 같이 두 직선이 x축과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면 $\theta(t)=\alpha-\beta$이다.



(i) $t\neq\dfrac{2\pi}{3}$일 때

직선 l_1의 기울기는 $\tan\alpha=\dfrac{2\sin t}{2\cos t+1}$, 직선 l_2의 기울기는 $\tan\beta=\dfrac{2\sin t}{2\cos t+2}$이다. 제시문 [다]에 의해

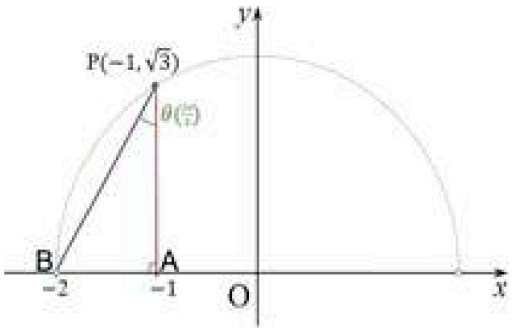
$$f(t)=\tan\theta(t)=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{2\sin t}{2\cos t+1}-\dfrac{\sin t}{\cos t+1}}{1+\dfrac{2\sin t}{2\cos t+1}\times\dfrac{\sin t}{\cos t+1}}$$

$$=\frac{\sin t}{(2\cos t+1)(\cos t+1)+2\sin^2 t}$$

$$=\frac{\sin t}{3(1+\cos t)}$$

(ii) $t=\dfrac{2\pi}{3}$일 때

두 점 $(-1,0)$, $(-2,0)$을 각각 A, B라고 하자. 오른쪽 그림과 같이 삼각형 APB는 직각삼각형이므로



$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\tan\theta\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 (i)과 (ii)에 의해

$$\lim_{t\to\frac{2\pi}{3}}f(t)=\lim_{t\to\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin t}{3(1+\cos t)}=\frac{\sqrt{3}}{3}=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

이므로 제시문 [나]에 의해 함수 $f(t)$는 $t=\dfrac{2\pi}{3}$에서 연속이다.

【2-2】

문항 【2-1】의 풀이로부터 $f(t)=\dfrac{\sin t}{3(1+\cos t)}$이다. $\displaystyle\int_{2\alpha}^{\frac{2\pi}{3}}f(t)dt$에서 $1+\cos t=s$라 놓으면 $\dfrac{ds}{dt}=-\sin t$이고, $t=2\alpha$일 때 $s=1+\cos 2\alpha$, $t=\dfrac{2\pi}{3}$일 때 $s=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\int_{2\alpha}^{\frac{2\pi}{3}} f(t)dt = -\frac{1}{3}\int_{1+\cos 2\alpha}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{s}ds$$

제시문 [다]에 의해 $1+\cos 2\alpha = 1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2-2\sin^2\alpha = \frac{7}{4}$이므로

$$\int_{2\alpha}^{\frac{2\pi}{3}} f(t)dt = -\frac{1}{3}[\ln s]_{1+\cos 2\alpha}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}$$

【2-3】

문항 【2-1】의 풀이로부터 $f(t) = \dfrac{\sin t}{3(1+\cos t)}$이므로

$g(x) = \dfrac{\sin x}{3(1+\cos x)} \times \dfrac{3^3(1+\cos 2x)^3}{\sin^3 2x}$이다. 제시문 [다]에 의해 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$이고

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$이므로

$$g(x) = 9 \times \frac{\sin x}{(1+\cos x)} \times \frac{8\cos^6 x}{8\sin^3 x\cos^3 x} = \frac{9\cos^3 x}{(1+\cos x)\sin^2 x}$$

제시문 [가]에 의해

$$g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{9\sin^3 x}{(1+\sin x)\cos^2 x}$$

이고

$$\frac{g(\frac{\pi}{2}-x)}{x^n} = \frac{9}{(1+\sin x)\cos^2 x} \times \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \times x^{3-n}$$

$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{9}{(1+\sin x)\cos^2 x} = 9$, $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$이므로, $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{g(\frac{\pi}{2}-x)}{x^n}$이 수렴할 필요충분조건은 $\lim\limits_{x\to 0+} x^{3-n}$이 수렴하는 것이다.

(i) $n = 1, 2$일 때, $\lim\limits_{x\to 0+} x^{3-n} = 0$이므로 주어진 극한은 수렴하고 그 극한값은 0이다.

(ii) $n = 3$일 때, $\lim\limits_{x\to 0+} x^{3-3} = 1$이므로 주어진 극한은 수렴하고 그 극한값은 9이다.

(iii) $n > 3$일 때, $\lim\limits_{x\to 0+} x^{3-n} = \infty$이므로 주어진 극한은 발산한다.

【2-4】

$h(x) = f(x) - \dfrac{x}{3}$라 하자. 그러면 곡선 $y = f(x)\left(0 < x < \dfrac{2\pi}{3}\right)$와 직선 $y = \dfrac{1}{3}x + k$의 교점의 개수는 곡선 $y = h(x)\left(0 < x < \dfrac{2\pi}{3}\right)$와 직선 $y = k$의 교점의 개수와 같다. 함수 $h(x)$의 도함수는

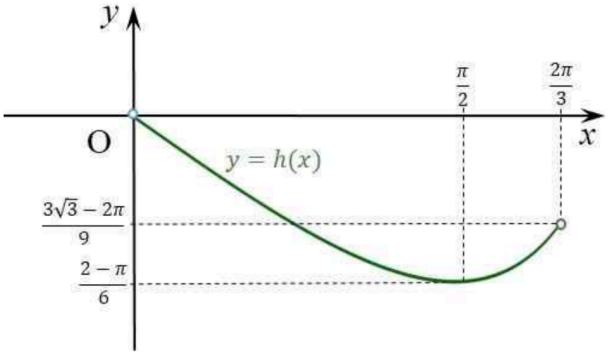
$$h'(x) = \frac{1}{3}\frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} - \frac{1}{3} = -\frac{\cos x}{3(1+\cos x)}$$

$x = \dfrac{\pi}{2}$에서 $h'(x) = 0$이고, 열린구간 $\left(0, \dfrac{2\pi}{3}\right)$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	⋯	$\frac{\pi}{2}$	⋯	$\frac{2\pi}{3}$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$\frac{2-\pi}{6}$	↗	

또한, $\lim\limits_{x\to 0+} h(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}-} h(x) = \dfrac{3\sqrt{3}-2\pi}{9}$이고, $3\sqrt{3} < 3\times 2 = 6$, $2\pi > 6$이므로 $\dfrac{2-\pi}{6} < \dfrac{3\sqrt{3}-2\pi}{9} < 0$이다.

따라서 함수 $h(x)$의 그래프의 개형을 그리면 오른쪽 그림과 같다.



그러므로 실수 k에 대하여 곡선 $y=h(x)\left(0<x<\frac{2\pi}{3}\right)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수는 다음과 같다.

(i) $\frac{2-\pi}{6}<k<\frac{3\sqrt{3}-2\pi}{9}$이면 교점의 개수는 2개

(ii) $k=\frac{2-\pi}{6}$이거나 $\frac{3\sqrt{3}-2\pi}{9}\le k<0$이면 교점의 개수는 1개

(iii) $k<\frac{2-\pi}{6}$이거나 $k\ge 0$이면 교점의 개수는 0개

■ 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 함수의 극한과 연속, 삼각함수의 덧셈정리, 치환적분법, 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형 그리기 등을 제대로 이해하고 이를 다양한 상황에 활용할 수 있는지 평가한다.

- 문항 【2-1】은 두 직선이 이루는 예각에서의 탄젠트함수의 값을 구하고, 이렇게 얻어진 함수가 $t=\frac{2\pi}{3}$에서 연속인지를 묻는 문제이다. 두 직선이 이루는 예각에서의 탄젠트함수의 값을 구하는 문제와 주어진 함수가 어떤 점에서 연속인지 아닌지 조사하는 문제는 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.
- 문항 【2-2】는 치환적분법을 활용하여 정적분을 구할 수 있는지 평가하는 문항이다. 정적분의 계산과정에서 삼각함수의 덧셈정리가 이용된다. 삼각함수의 덧셈정리와 치환적분법은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 쉽게 해결할 것으로 판단된다.
- 문항 【2-3】은 주어진 함수를 $\frac{\sin x}{x}$를 포함하는 간단한 형태로 변형할 수 있는지 평가하는 문항이다. 계산과정에서 삼각함수의 덧셈정리가 필요하다. 삼각함수의 덧셈정리와 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 쉽게 해결할 것으로 판단된다.
- 문항 【2-4】에서는 주어진 문제를 $f(x)-\frac{1}{3}x=k$꼴로 변형한 후, 도함수를 활용하여 함수 $y=f(x)-\frac{1}{3}x$의 그래프의 개형을 그리고, 이를 방정식과 부등식에 적용할 수 있는지 평가한다. 계산과정에서 등장하는 함수의 몫의 미분법, 극대와 극소, 함수의 좌극한과 우극한은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

2차 · 문제 1

제시문

[가] 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

[나] 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n, 즉

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 급수의 제n항까지의 부분합이라고 한다. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=S$$

일 때, 이 급수는 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 이 급수의 합이라고 하고,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

와 같이 나타낸다. 한편, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 이 급수는 발산한다고 한다.

[문제] 제시문 [가]와 [나]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

【1-1】 두 정수 a와 b에 대하여 방정식 $2ax^3-3bx^2+b^2=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

(단, $0\le a\le 100$, $0\le b\le 100$, $a+b>0$)

【1-2】 자연수 n에 대하여 $a_n=\int_0^1 x^8(1-x^3)^n dx$라고 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

【1-3】 1보다 큰 자연수 n에 대하여 곡선 $y=cx^n\ (x\ge 0)$ 위의 점 (a, ca^n)에서의 접선을 l_n이라고 하자. 곡선 $y=cx^n\ (x\ge 0)$과 접선 l_n 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A_n이라 하고 접선 l_n과 x축 및 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 B_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2A_n}{B_n}$의 값을 구하시오.

(단, a와 c는 0보다 큰 상수)

【1-4】 $t>0$일 때, 곡선 $y=kx^3$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, kt^3)$에서의 접선을 l이라고 하자. 접선 l이 곡선 $y=kx^3$과 만나는 점 중에서 P가 아닌 점을 A, 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 B, 접선 l이 y축과 만나는 점을 C라고 하자. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 둘레의 길이를 $L(t)$라고 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{L(t)}{t}$의 값을 구하시오. (단, k는 0보다 큰 상수)

■ 예시 답안

【1-1】

$f(x)=2ax^3-3bx^2+b^2$이라고 하자.

방정식 $2ax^3-3bx^2+b^2=0$이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 다음 세 조건을 만족해야 한다.

① 삼차방정식이어야 한다.

② $f(x)$가 극대와 극소를 둘 다 가져야 한다.

③ $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 부호가 달라야 한다.

(i) ①에 의하여 $a\neq 0$이어야 하므로 $a>0$이다.

(ii) $f'(x)=6ax^2-6bx=6x(ax-b)$이므로 $x=0$, $x=\dfrac{b}{a}$에서 $f'(x)=0$이다. 따라서 ②에 의하여 $b\neq 0$이어야 하므로 $b>0$이다.

(iii) $f(0)=b^2>0$이므로 ③에 의하여 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)<0$이어야 한다.

$$f\left(\frac{b}{a}\right)=2a\left(\frac{b}{a}\right)^3-3b\left(\frac{b}{a}\right)^2+b^2=-\frac{b^3}{a^2}+b^2<0$$

이므로 $b>a^2$이다. 또한, $b\leq 100$이므로 $a\leq 9$이다.

따라서 $k\leq 9$인 자연수 k에 대하여 $a=k$이면 $a^2<b\leq 100$을 만족하는 b의 개수는 $100-k^2$이다.

그러므로 구하는 순서쌍 (a,b)의 개수는 $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}(100-k^2)$이다. 등식 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 을 이용하면

$$\sum_{k=1}^{9}(100-k^2)=100\times 9-\frac{9\times 10\times 19}{6}=615$$

【1-2】

$1-x^3=t$로 놓으면 $-3x^2\dfrac{dx}{dt}=1$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$a_n=\int_0^1 x^8(1-x^3)^n dx=-\frac{1}{3}\int_1^0(1-t)^2t^n dt=\frac{1}{3}\int_0^1(1-2t+t^2)t^n dt$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1(t^n-2t^{n+1}+t^{n+2})dt=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}-\frac{2}{n+2}t^{n+2}+\frac{1}{n+3}t^{n+3}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)$$

제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{2}{k+2}+\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}-\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+2)}+\frac{1}{3(n+3)}$$

이므로

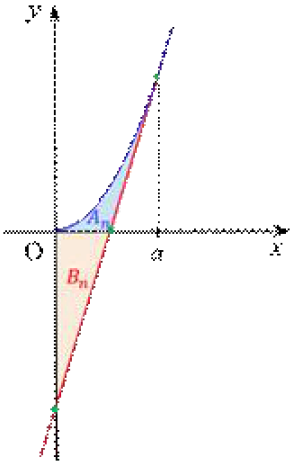
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+2)}+\frac{1}{3(n+3)}\right\}=\frac{1}{18}$$

따라서 제시문 [나]에 의하여 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하고 그 합은 $\dfrac{1}{18}$이다.

【1-3】

$f(x)=cx^n$이라고 하면 $f'(x)=cnx^{n-1}$이다. 제시문 [가]에 의하여 점 (a, ca^n)에서의 접선 l_n의 방정식은 $y-ca^n=cna^{n-1}(x-a)$이므로 $y=cna^{n-1}x-c(n-1)a^n$이다.

따라서 y절편은 $-c(n-1)a^n$, x절편은 $\dfrac{n-1}{n}a$이므로



$$A_n=\int_0^a cx^n dx-\frac{1}{2}\left(a-\frac{n-1}{n}a\right)\times ca^n$$

$$=\left[\frac{c}{n+1}x^{n+1}\right]_0^a-\frac{c}{2n}a^{n+1}$$

$$=\frac{c}{n+1}a^{n+1}-\frac{c}{2n}a^{n+1}$$

$$=\frac{c(n-1)}{2n(n+1)}a^{n+1}$$

$$B_n=\frac{1}{2}c(n-1)a^n\times\frac{n-1}{n}a=\frac{c(n-1)^2}{2n}a^{n+1}$$

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2A_n}{B_n}=\lim_{n\to\infty}n^2\times\frac{c(n-1)}{2n(n+1)}a^{n+1}\times\frac{2n}{c(n-1)^2a^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}=1$$

【1-4】

문항 【1-3】의 풀이로부터 접선 l의 방정식은

$$y=3kt^2x-2kt^3$$

이고 점 C의 좌표는 $(0,-2kt^3)$이다. 접선 l이 곡선 $y=kx^3$과 만나는 점의 x좌표를 구하면

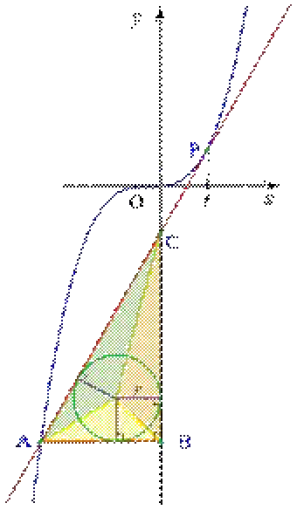
$$kx^3=3kt^2x-2kt^3$$

$$x^3-3t^2x+2t^3=0$$

$$(x-t)^2(x+2t)=0$$

이므로 $x=t$, $x=-2t$이다. 따라서 점 A의 좌표는 $(-2t,-8kt^3)$이고, 점 B의 좌표는 $(0,-8kt^3)$이 되어

$$\overline{\mathrm{AB}}=2t,\quad \overline{\mathrm{BC}}=6kt^3,\quad \overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(2t)^2+(6kt^3)^2}=2t\sqrt{1+9k^2t^4}$$



삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름을 r이라고 하면, 삼각형 ABC의 넓이로부터

$$\frac{1}{2}\times\left(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}\right)\times r=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}$$

이므로

$$r=\frac{2t\times 6kt^3}{2t+6kt^3+2t\sqrt{1+9k^2t^4}}=\frac{6kt^3}{1+3kt^2+\sqrt{1+9k^2t^4}}$$

$L(t)=2\pi r$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{12\pi kt^2}{1+3kt^2+\sqrt{1+9k^2t^4}}=\lim_{t\to\infty}\frac{12\pi k}{\frac{1}{t^2}+3k+\sqrt{\frac{1}{t^4}+9k^2}}=\frac{12\pi k}{3k+\sqrt{9k^2}}=2\pi$$

■ 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 미적분학의 기본적인 내용을 바탕으로 함수의 극한, 미분, 적분, 수열의 극한, 급수의 합 등을 제대로 이해하고 이를 다양한 상황에 활용할 수 있는지 평가한다.

- 문항 【1-1】은 함수의 그래프와 방정식의 실근과의 관계를 이해하고 미분을 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는지, 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지, 수열의 합을 구할 수 있는지 평가한다.
- 문항 【1-2】는 치환적분을 이용하여 주어진 정적분을 쉽게 계산할 수 있는 다항함수의 정적분으로 나타낼 수 있는지, 급수의 수렴, 발산을 판정할 수 있는지, 급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.
- 문항 【1-3】은 다항함수의 접선의 방정식을 구할 수 있는지, 정적분을 이용하여 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지, 수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.
- 문항 【1-4】는 삼차함수의 그래프로 주어진 곡선과 접선의 교점을 삼차방정식을 풀어서 찾아낼 수 있는지, 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.

2차 · 문제 2

제시문

[가] 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

[나] 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

① $f(x) \le g(x)$이고 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$와 $\lim_{x \to a} g(x)$가 존재하면

$$\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$$

② $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$이면

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$

[다] 함수 $f(x)$가 $x = a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(a) \ge f(x)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 극대라고 하며 이때의 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라고 한다. 또, 함수 $f(x)$가 $x = a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(a) \le f(x)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 극소라고 하며 이때의 함숫값 $f(a)$를 극솟값이라고 한다.

[라] 무리수 e의 정의

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

[문제]

【2-1】 함수 $f(x) = \begin{cases} ax + b & (x \le 0) \\ x\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x} + e^x & (x > 0) \end{cases}$ 이 $x = 0$에서 미분가능할 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

【2-2】 함수 $g(x) = (1 - kx)^2(1 - x^2)$이 $x = \alpha$, $x = \beta$에서 극댓값을 갖는다. $\alpha\beta = -\dfrac{2}{3}$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, $0 < k < 1$, $\alpha \ne \beta$)

【2-3】 $0 \le x \le 1$일 때, 점 $\mathrm{P}\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right)$과 두 점 $\mathrm{A}\left(a, \sqrt{1 - a^2}\right)$, $\mathrm{B}\left(a, -\sqrt{1 - a^2}\right)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PB}}$를 $p(x)$라고 하자. $\displaystyle\int_0^1 p(x)dx = \frac{1}{2}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, $0 < a < 1$)

【2-4】 $-1 \le x \le 1$일 때, 점 $\mathrm{Q}\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right)$과 두 점 $\mathrm{C}\left(b, \sqrt{1 - b^2}\right)$, $\mathrm{D}\left(b, -\sqrt{1 - b^2}\right)$에 대하여 $\overline{\mathrm{QD}}^4 - \overline{\mathrm{QC}}^4$을 $q(x)$라고 하자. 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $q(x)$의 최댓값 M이 $\dfrac{M^2}{(1 - b^2)\left(3 + \sqrt{1 + 8b^2}\right)^2} = 15$를 만족시킬 때, 상수 b의 값을 구하시오. (단, $0 < b < 1$)

■ 예시 답안

【2-1】

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다. 따라서

$$f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\left(x\sqrt{x}\cos\frac{1}{x}+e^x\right)$$

$x>0$에 대하여 $-x\sqrt{x}\le x\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x}\le x\sqrt{x}$ 이고 $\lim\limits_{x\to 0+}x\sqrt{x}=0$ 이므로, 제시문 [나]를 이용하면

$\lim\limits_{x\to 0+}x\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x}=0$이다. 또한, $\lim\limits_{x\to 0+}e^x=1$이므로 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}x\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0+}e^x=1$이다.

$f(0)=b$이므로 $b=1$이다.

한편, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$이다.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{ax}{x}=a$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x\sqrt{x}\cos\frac{1}{x}+e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\left(\sqrt{x}\cos\frac{1}{x}+\frac{e^x-1}{x}\right)$$

$x>0$에 대하여 $-\sqrt{x}\le\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x}\le\sqrt{x}$이고 $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$이므로, 제시문 [나]를 이용하면

$\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x}=0$이다. 또한, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$이므로 $a=\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}\cos\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$이다.

【2-2】

$g'(x)=-2k(1-kx)(1-x^2)-2x(1-kx)^2$이므로 이를 인수분해하면

$$g'(x)=2(1-kx)(2kx^2-x-k)=-4k^2\left(x-\frac{1}{k}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{1+8k^2}}{4k}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{1+8k^2}}{4k}\right)$$

따라서 방정식 $g'(x)=0$은 실근 $x=\dfrac{1}{k}$, $x=\dfrac{1+\sqrt{1+8k^2}}{4k}$, $x=\dfrac{1-\sqrt{1+8k^2}}{4k}$ 을 갖는다. $0<k<1$이므로 $k>0$, $1+\sqrt{1+8k^2}<4$를 이용하면

$$\frac{1-\sqrt{1+8k^2}}{4k}<\frac{1+\sqrt{1+8k^2}}{4k}<\frac{1}{k}$$

임을 알 수 있다. $x=\dfrac{1-\sqrt{1+8k^2}}{4k}$, $x=\dfrac{1}{k}$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{1-\sqrt{1+8k^2}}{4k}$, $x=\dfrac{1}{k}$에서 극댓값을 갖는다. $\alpha\beta=-\dfrac{2}{3}$이므로

$$\frac{1-\sqrt{1+8k^2}}{4k^2}=-\frac{2}{3}$$

$$3\sqrt{1+8k^2}=8k^2+3$$

$$9(1+8k^2)=(8k^2+3)^2$$

$$k^2(8k^2-3)=0$$

$0<k<1$이므로 $k=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$이다.

【2-3】

제시문 [가]를 이용하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2$와 $\overline{\mathrm{PB}}^2$를 구하면

$$\overline{\mathrm{PA}}^2=(x-a)^2+\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-a^2}\right)^2=2-2ax-2\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}$$

$$\overline{\mathrm{PB}}^2=(x-a)^2+\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-a^2}\right)^2=2-2ax+2\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-x^2}$$

이므로

$$\{p(x)\}^2 = \overline{\mathrm{PA}}^2 \times \overline{\mathrm{PB}}^2 = 4\left(1-ax-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-a^2}\right)\left(1-ax+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-a^2}\right)$$

$$= 4\{(1-ax)^2-(1-x^2)(1-a^2)\}$$

$$= 4(x^2-2ax+a^2)$$

$$= 4(x-a)^2$$

따라서 $p(x) = 2|x-a|$이다. $0 < a < 1$이므로

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 p(x)dx = 2\int_0^a (-x+a)dx + 2\int_a^1 (x-a)dx = 2a^2-2a+1$$

이 되어 $(2a-1)^2 = 0$이다. 그러므로 $a = \frac{1}{2}$이다.

【2-4】

문항 【2-3】의 풀이에서 $\overline{\mathrm{PA}}^2$과 $\overline{\mathrm{PB}}^2$를 구한 식을 이용하면

$$q(x) = \left(\overline{\mathrm{QD}}^2+\overline{\mathrm{QC}}^2\right)\left(\overline{\mathrm{QD}}^2-\overline{\mathrm{QC}}^2\right) = 16(1-bx)\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-x^2}$$

이다. $1-bx \geq 0$과 문항 【2-2】에서 $k = b$일 때의 함수 $g(x) = (1-bx)^2(1-x^2)$을 이용하면

$$q(x) = 16\sqrt{1-b^2}\sqrt{(1-bx)^2(1-x^2)} = 16\sqrt{1-b^2}\sqrt{g(x)}$$

이다. 따라서 닫힌구간 $[-1,1]$에서 함수 $g(x)$가 최대일 때 함수 $q(x)$도 최대가 된다.

문항 【2-2】의 풀이로부터 함수 $g(x)$는 $x = \frac{1-\sqrt{1+8b^2}}{4b}$, $x = \frac{1}{b}$에서 극댓값을 갖는다. $0 < b < 1$이므로 $\frac{1}{b} > 1$이고

$$-1 = \frac{1-\sqrt{(1+4b)^2}}{4b} < \frac{1-\sqrt{1+8b^2}}{4b}$$

이다. 따라서 닫힌구간 $[-1,1]$에서 함수 $g(x)$는 $x = \frac{1-\sqrt{1+8b^2}}{4b}$에서만 극댓값을 가지고 $g(-1) = g(1) = 0$이므로, 함수 $g(x)$는 $x = \frac{1-\sqrt{1+8b^2}}{4b}$에서 최댓값을 가지고, $q(x)$도 $x = \frac{1-\sqrt{1+8b^2}}{4b}$에서 최댓값 M을 갖는다.

$$M^2 = 256(1-b^2)\left(1-\frac{1-\sqrt{1+8b^2}}{4}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1-\sqrt{1+8b^2}}{4b}\right)^2\right\}$$

$$= 16(1-b^2)\left(3+\sqrt{1+8b^2}\right)^2\left\{1-\left(\frac{1-\sqrt{1+8b^2}}{4b}\right)^2\right\}$$

이고 $\frac{M^2}{(1-b^2)\left(3+\sqrt{1+8b^2}\right)^2} = 15$이므로 $1-\left(\frac{1-\sqrt{1+8b^2}}{4b}\right)^2 = \frac{15}{16}$이다. 따라서

$$\frac{1-\sqrt{1+8b^2}}{4b} = -\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{1+8b^2} = b+1$$

$$1+8b^2 = (b+1)^2$$

$$b(7b-2) = 0$$

이므로 $b = \frac{2}{7}$이다.

■ 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 미적분학의 기본적인 내용을 바탕으로 함수의 연속 및 미분계수의 뜻을 알고 미분가능성과 연속성의 관계를 활용할 수 있는지, 지수함수의 극한값을 구할 수 있는지, 도함수를 활용하여 주어진 함수의 극대, 극소를 판정할 수 있는지, 사차방정식을 풀 수 있는지, 두 점 사이의 거리를 활용할 수 있는지, 도함수를 활용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는지를 평가한다. 제시문에는 문제를 풀면서 사용할 수 있도록 관련된 교과서 내용을 서술하였으며, 제시문과 이전에 해결한 문항을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있도록 구성하였다.

- 문항 【2-1】은 함수의 연속 및 미분계수의 뜻을 알고 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하여 주어진 함수가 $x=0$에서 미분가능하기 위한 상수 a, b를 찾을 수 있는지 평가하는 문항이다. 특히 제시문 [나]의 함수의 극한 성질과 제시문 [라]의 무리수 e의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.
- 문항 【2-2】는 제시문 [다]를 바탕으로 함수의 극댓값의 뜻을 알고 도함수를 활용하여 주어진 함수 $g(x)$가 극댓값을 가지는 x를 찾고, 사차방정식을 풀어서 상수 k의 값을 구할 수 있는지 평가한다.
- 문항 【2-3】은 제시문 [가]의 두 점 사이의 거리를 이용하여 주어진 함수 $p(x)$를 찾고 다항함수의 정적분을 구할 수 있는지 평가한다.
- 문항 【2-4】는 문항 【2-3】의 해결 과정을 바탕으로 주어진 함수 $q(x)$를 문항 【2-2】의 함수 $g(x)$를 이용하여 나타내고, 도함수를 활용하여 닫힌구간에서 함수 $q(x)$의 최댓값을 가지는 x를 찾고, 사차방정식을 풀어서 상수 b의 값을 구할 수 있는지 평가한다.

2025학년도 자연계열

1차 · 문제 1

제시문

[가] 평면 위의 서로 다른 두 점 F, F'으로부터의 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 쌍곡선이라고 하며, 두 점 F, F'을 쌍곡선의 초점이라고 한다.

[나] 두 초점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2)$$

[다] 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

제시문 [가]~[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(5,0)$과 $\mathrm{B}(-5,0)$에 대하여 같은 평면 위의 점 C와 점 P는 다음 조건을 동시에 만족시킨다.

(i) $\overline{\mathrm{AC}}=6$
(ii) 점 P는 선분 AC 위에 있다.
(iii) $\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CP}}=8$

【1-1】 점 P가 그리는 도형이 쌍곡선의 일부가 됨을 보이고, 이 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

【1-2】 문항 【1-1】에서 구한 쌍곡선 위의 점 Q에서의 접선이 y축과 만나는 점을 R이라고 하자. $\overline{\mathrm{QR}}$이 최소가 되는 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}^2$의 값을 구하시오. (단, 점 Q는 제2사분면 위에 있고 O는 원점이다.)

【1-3】 점 C와 점 P가 일치할 때, 선분 BC가 y축과 만나는 점을 D라고 하자. $\angle \mathrm{COD}=\alpha$라고 할 때, $\cos\alpha$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$)

【1-4】 삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{A}=\theta$일 때, 삼각형 BCP의 넓이를 $f(\theta)$라고 하자. $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$를 만족시키는 β에 대하여 $f'(\beta)$의 값을 구하시오. (단, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$이고, 점 C는 선분 AB 위에 있지 않으며 점 P와 일치하지 않는다.)

■ 예시 답안

【1-1】

세 조건에 의하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{CP}}=6$ 이고 $\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CP}}=8$ 이므로 $\overline{\mathrm{BP}}-\overline{\mathrm{AP}}=2$ 이다. 따라서 점 P는 점 A와 점 B로부터의 거리의 차가 2인 쌍곡선 위에 있다. 점 $\mathrm{A}(5,0)$과 점 $\mathrm{B}(-5,0)$은 쌍곡선의 두 초점이고, 거리의 차는 2이므로 제시문 [나]에 의해 쌍곡선의 방정식은

$$x^2-\frac{y^2}{24}=1$$

【1-2】

제 2사분면에 있는 쌍곡선 위의 한 점 $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x_2x-\frac{y_2y}{24}=1$$

점 R의 좌표는 $\left(0,-\frac{24}{y_2}\right)$이고, $x_2^2-\frac{y_2^2}{24}=1$을 이용하면

$$\overline{\mathrm{QR}}^2=x_2^2+\left(y_2+\frac{24}{y_2}\right)^2=49+\frac{25}{24}y_2^2+\frac{24^2}{y_2^2}$$

산술평균과 기하평균을 이용하여 절대부등식을 적용하면,

$$\overline{\mathrm{QR}}^2=49+\frac{25}{24}y_2^2+\frac{24^2}{y_2^2}\geq 49+2\sqrt{\frac{25}{24}y_2^2\times\frac{24^2}{y_2^2}}=49+20\sqrt{6}$$

이고, $\frac{25}{24}y_2^2=\frac{24^2}{y_2^2}$일 때 $\overline{\mathrm{QR}}^2$이 최소이고 $\overline{\mathrm{QR}}$도 최소이다. $\frac{25}{24}y_2^2=\frac{24^2}{y_2^2}$을 풀면,

$y_2^2=\frac{48\sqrt{6}}{5}$이고 $x_2^2=1+\frac{y_2^2}{24}=1+\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 이므로, 구하는 $\overline{\mathrm{OQ}}^2$의 값은

$$\overline{\mathrm{OQ}}^2=x_2^2+y_2^2=1+10\sqrt{6}$$

【1-3】

점 C와 점 P가 일치하면, 삼각형 ABC 는 $\overline{\mathrm{AB}}=10$, $\overline{\mathrm{BC}}=8$, $\overline{\mathrm{CA}}=6$ 이고 $\angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. 원점 O가 빗변 AB 의 중점이므로 세 점 A, B, C는 중심이 원점 O이고 선분 AB가 지름인 원 위에 있다. 직각삼각형 ABC 에서 $\angle\mathrm{B}=\theta$ 라 하면 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 이다. 또한 $\angle\mathrm{DOC}=\alpha$ 이므로 $\angle\mathrm{BOC}=\frac{\pi}{2}+\alpha$ 이다. 선분 OC는 원의 반지름이므로 $\overline{\mathrm{OC}}=5$ 이다. 삼각형 BOC에 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{OC}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

이므로

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\overline{\mathrm{BC}}\times\frac{\sin\theta}{\overline{\mathrm{OC}}}=\frac{24}{25}$$

【1-4】

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{AP}}=x$ 라 하면 $\overline{\mathrm{BP}}=x+2$ 이다. 삼각형 ABP 에서 코사인법칙을 적용하면

$$(x+2)^2=x^2+10^2-20x\cos\theta$$

이므로

$$x=\frac{24}{5\cos\theta+1}$$

따라서, 삼각형 BCP의 넓이 $f(\theta)$는

$$\begin{aligned} f(\theta) &= (\text{삼각형 ABC의 넓이}) - (\text{삼각형 ABP의 넓이}) \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin\theta - \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{24}{5\cos\theta + 1} \times \sin\theta \\ &= 30\sin\theta - \frac{120\sin\theta}{5\cos\theta + 1} \end{aligned}$$

$f(\theta)$의 도함수를 구하면,

$$f'(\theta) = 30\cos\theta - 120\frac{\cos\theta + 5}{(5\cos\theta + 1)^2}$$

$\cos\beta = \frac{4}{5}$이므로

$$f'(\beta) = -\frac{96}{25}$$

■ 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루는 기하의 기본 개념을 바탕으로, 도형의 방정식, 삼각함수, 그리고 함수의 도함수를 이해하고 이를 다양한 상황에 적용할 수 있는지를 평가한다. 특히, 쌍곡선의 정의, 두 점 사이의 거리, 접선의 방정식, 사인법칙과 코사인법칙을 좌표평면 위의 쌍곡선과 삼각형에 활용할 수 있는지를 중점적으로 다룬다. 또한, 함수의 미분을 활용하여 함수의 최솟값을 구하는 능력을 평가한다. 제시문에는 문제 해결에 필요한 관련 교과서 내용을 포함하였으며, 이를 통해 주어진 문제를 해결할 수 있도록 구성하였다. 이전에 해결한 문항과 제시문을 활용하여 문제를 풀 수 있는 구조로 구성하였다. 구체적인 채점 기준은 다음과 같다.

- ■ 문항 【1-1】은 제시문 [가]와 [나]에서 주어진 쌍곡선의 정의를 이용하여, 제시된 조건을 만족시키는 쌍곡선의 방정식을 이끌어 낼 수 있는지 평가한다.
- ■ 문항 【1-2】는 제시문 [다]를 이용하여 쌍곡선 위의 한 점에서 접선의 방정식을 구하고, 접점과 접선이 y축과 만나는 점의 거리를 식으로 나타낸 후, 거리가 최솟값을 가질 때 조건을 구할 수 있는지 평가한다.
- ■ 문항 【1-3】은 좌표평면 위의 삼각형의 세 각의 크기와 세 변의 길이를 이용하여 삼각함수의 사인법칙, 코사인법칙을 활용하여 $\cos\alpha$를 구할 수 있는지 평가한다.
- ■ 문항 【1-4】는 제시문 [가]와 [나]에서 주어진 쌍곡선의 정의를 이용하여 삼각형의 넓이를 θ에 관한 함수로 나타낸 후, 함수의 도함수를 계산할 수 있는지 평가한다.

1차 · 문제 2

제시문

[가] x의 값의 범위가 $\alpha \le x \le \beta$일 때, 이차함수 $f(x) = a(x-p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

① 꼭짓점의 x좌표 p가 x의 값의 범위 $\alpha \le x \le \beta$ 에 속하면 $f(\alpha), f(\beta), f(p)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② 꼭짓점의 x좌표 p가 x의 값의 범위에 속하지 않으면 $f(\alpha), f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

[나] 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값이 L이면 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값은 모두 L과 같다. 또 그 역도 성립한다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = L$$

[다] 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하며 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다. 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x에서 연속이면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다.

[라] 함수 $f(x)$에서 극한값

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

제시문 [가]~[라]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

양의 실수 t에 대하여 함수 $g(\theta) = \sqrt{(4\cos\theta - 3t)^2 + 4t^2\sin^2\theta}\ (0 \le \theta < 2\pi)$ 의 최솟값을 $f(t)$라고 하자.

【2-1】 $f(1)$**의 값을 구하시오.**

【2-2】 $0 < t < 1$**일 때,** $f(t)$**를 구하시오.**

【2-3】 $t > 1$**일 때,** $f(t)$**를 구하시오.**

【2-4】 **함수** $f(t)$**의** $t=1$**에서의 연속성과 미분가능성을 조사하시오.**

■ 예시 답안

$x=\cos\theta\ (0\le\theta<2\pi)$, $h(x)=\{g(\theta)\}^2$이라 하면, $-1\le x\le 1$이고

$$h(x)=(4x-3t)^2+4t^2(1-x^2)=4(4-t^2)x^2-24tx+13t^2$$

이므로 구간 $[-1,1]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값의 양의 제곱근이 $f(t)$가 된다. 제시문 [가]를 이용하여, 아래 【2-1】, 【2-2】, 【2-3】의 예시답안에서 $t=1$, $0<t<1$, $t>1$인 경우에 대하여 $f(t)$를 각각 구한다.

【2-1】

$t=1$이라고 하면,

$$h(x)=12x^2-24x+13=12(x-1)^2+1$$

이므로 함수 $h(x)$는 꼭짓점의 x좌표가 1이고 최고차항의 계수가 양인 이차함수이다. 따라서 구간 $[-1,1]$에서 함수 $h(x)$는 최솟값 $h(1)=1$을 가진다. 그러므로

$$f(1)=\sqrt{1}=1$$

【2-2】

$0<t<1$이라고 하자. 그러면 $4-t^2>0$이고

$$h(x)=4(4-t^2)\left(x-\frac{3t}{4-t^2}\right)^2+\frac{t^2(16-13t^2)}{4-t^2}$$

이므로 함수 $h(x)$는 꼭짓점의 x좌표가 $\dfrac{3t}{4-t^2}$이고 최고차항의 계수가 양인 이차함수이다.

또한 $t^2+3t-4=(t-1)(t+4)<0$이므로 $0<\dfrac{3t}{4-t^2}<1$이다. 따라서 구간 $[-1,1]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은

$$h\left(\frac{3t}{4-t^2}\right)=\frac{t^2(16-13t^2)}{4-t^2}$$

따라서

$$f(t)=\frac{t\sqrt{16-13t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$$

【2-3】

$t>1$이라고 하자. 이때 $t^2+3t-4=(t-1)(t+4)>0$이다.

(i) $t=2$인 경우: $h(x)=-48x+52$이므로 함수 $h(x)$는 기울기가 -48인 일차함수이다. 따라서 구간 $[-1,1]$에서의 함수 $h(x)$는 최솟값 $h(1)=4$를 가진다. 따라서

$$f(2)=\sqrt{4}=2$$

(ii) $1<t<2$인 경우:

$$h(x)=4(4-t^2)\left(x-\frac{3t}{4-t^2}\right)^2+\frac{t^2(16-13t^2)}{4-t^2}$$

이므로 함수 $h(x)$는 꼭짓점의 x좌표가 $\dfrac{3t}{4-t^2}$이고 최고차항의 계수가 양인 이차함수이다. $\dfrac{3t}{4-t^2}>1$이므로 구간 $[-1,1]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(1)=(4-3t)^2$이다. 따라서

$$f(t)=\sqrt{(4-3t)^2}=|4-3t|$$

(iii) $t>2$인 경우: 함수 $h(x)$는 꼭짓점의 x좌표가 $\dfrac{3t}{4-t^2}$이고 최고차항의 계수가 음인 이차함수이다. $\dfrac{3t}{4-t^2}<0$이므로 구간 $[-1,1]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(1)=(4-3t)^2$이다. 그러므로

$$f(t)=\sqrt{(4-3t)^2}=|4-3t|$$

(i), (ii), (iii)을 종합하면,

$$t>1 \text{ 일 때, } \quad f(t)=|4-3t|$$

【2-4】

문항 【2-1】~【2-3】의 예시답안으로부터

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t\sqrt{16-13t^2}}{\sqrt{4-t^2}} & (0<t<1)\\ 4-3t & \left(1\le t<\dfrac{4}{3}\right)\end{cases}$$

(i) $t=1$에서의 연속성을 조사하면,

$$\lim_{t\to1-}f(t)=\lim_{t\to1-}\frac{t\sqrt{16-13t^2}}{\sqrt{4-t^2}}=1,\quad \lim_{t\to1+}f(t)=\lim_{t\to1+}(4-3t)=1,\quad f(1)=1$$

이므로 제시문 [나]와 [다]에 의해, 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 연속이다.

(ii) 함수 $f(t)$의 $t=1$에서의 미분가능성을 조사한다. 우선

$$\lim_{t\to1+}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=\lim_{t\to1+}\frac{(4-3t)-1}{t-1}=-3$$

또한, $0<t<1$일 때

$$\begin{aligned}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}&=\frac{1}{t-1}\left(\frac{t\sqrt{16-13t^2}}{\sqrt{4-t^2}}-1\right)=\frac{t\sqrt{16-13t^2}-\sqrt{4-t^2}}{(t-1)\sqrt{4-t^2}}\\&=\frac{t^2(16-13t^2)-(4-t^2)}{(t-1)\sqrt{4-t^2}\left(t\sqrt{16-13t^2}+\sqrt{4-t^2}\right)}\\&=\frac{(4-13t^2)(t+1)}{\sqrt{4-t^2}\left(t\sqrt{16-13t^2}+\sqrt{4-t^2}\right)}\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{t\to1-}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=\lim_{t\to1-}\frac{(4-13t^2)(t+1)}{\sqrt{4-t^2}\left(t\sqrt{16-13t^2}+\sqrt{4-t^2}\right)}=-3$$

따라서 제시문 [나]와 [라]에 의하여, 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 미분가능하다.

■ 채점 기준

고등학교 필수 교육과정에 포함된 삼각함수와 이차함수의 최대·최소 문제, 그리고 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 기본 개념을 이해하고 있는지를 평가한다. 특히, 삼각함수의 최대·최소 문제를 간단한 치환을 통해 이차함수의 구간 내 최대·최소 문제로 변환하고, 가장 쉬운 경우에서 점차 난이도가 높은 경우로 확장하며 문제를 해결하는 사고력을 평가한다. 마지막 문항에서는, 이차함수의 최대·최소 문제를 해결한 결과를 바탕으로 함수의 연속성과 미분가능성에 대해 고등학교 교육과정의 기본 개념을 정확히 이해하고 있는지를 확인한다. 구체적인 채점 기준은 다음과 같다.

- ■ 문항 【2-1】은 주어진 삼각함수의 최대·최소 문제를 간단한 치환을 통하여 이차함수의 최대·최소 문제로 바꿀 수 있는지를 평가하는 문항이다. 또한 가장 쉬운 경우에 대한 문제를 해결하기 위하여 제시문 [가]의 내용을 올바르게 활용하는지를 평가한다.
- ■ 문항 【2-2】에서도 삼각함수의 최대·최소 문제를 치환을 통하여 이차함수의 최대·최소 문제로 바꿀 수 있는지 평가한다. 문항 【2-1】보다는 조금 더 일반적인 상황에서도 제시문 [가]를 활용하여 구간에서의 이차함수의 최솟값을 올바르게 구할 수 있는지 평가한다.
- ■ 문항 【2-3】은 구간에서의 이차함수의 최솟값을 구하기 위하여 꼭짓점의 x좌표에 따라 이차함수의 그래프가 어떻게 변하는지 정확하게 이해하고 있는지 평가하는 문항이다. 역시 제시문 [가]를 활용하여 꼭짓점의 x좌표에 따른 구간에서의 이차함수의 최솟값을 올바르게 구할 수 있는지 평가한다.
- ■ 문항 【2-4】는 문항 【2-1】~【2-3】의 결과로 주어지는 함수에 대하여 함수의 연속성과 미분가능성의 개념을 정확하게 이해하고 있는지 평가하는 문항이다. 이를 위해서 제시문 [나]~[라]의 함수의 극한, 연속성 및 미분가능성의 정의를 적절하게 활용할 수 있는지 평가한다.

2차 · 문제 1

제시문

[가] 두 초점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단, } a>c>0,\ b^2=a^2-c^2)$$

[나] 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

[다] $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, $\quad\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

제시문 [가]~[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

두 초점이 $\mathrm{F}\left(\sqrt{3}b,0\right)$, $\mathrm{F}'\left(-\sqrt{3}b,0\right)$인 타원 $\dfrac{x^2}{4b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$이 $\angle\mathrm{F}'\mathrm{PF}=90°$를 만족시킨다. 문항 【1-1】과 【1-2】에 답하시오. (단, $b>0$이고 $x_1>0$, $y_1>0$)

【1-1】 $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}}=l_1$이고 $\overline{\mathrm{FP}}=l_2$라고 할 때, l_1과 l_2의 곱 l_1l_2를 구하시오. 또한 l_1과 l_2를 각각 구하시오.

【1-2】 점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$의 좌표를 구하시오.

두 초점이 $\mathrm{F}\left(\sqrt{3}b,0\right)$, $\mathrm{F}'\left(-\sqrt{3}b,0\right)$인 타원 $\dfrac{x^2}{4b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$가 $\angle\mathrm{F}'\mathrm{FQ}=135°$를 만족시킨다. 문항 【1-3】과 【1-4】에 답하시오. (단, $b>0$이고 $x_2>0$, $y_2>0$)

【1-3】 $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}=l_3$이고 $\overline{\mathrm{FQ}}=l_4$라고 할 때, l_3과 l_4를 각각 구하시오.

【1-4】 타원 $\dfrac{x^2}{4b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 R이라고 하자. $\angle\,\mathrm{FQR}=\theta$라고 할 때, $\tan\theta$를 구하시오.

■ 예시 답안

【1-1】

삼각형 F′PF가 직각 삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여 $l_1^2+l_2^2=\left(2\sqrt{3}b\right)^2=12b^2$이다. 따라서 $(l_1+l_2)^2-2l_1l_2=l_1^2+l_2^2=12b^2$ 이다. 타원의 정의에 의하여 $l_1+l_2=4b$이므로, $(4b)^2-2l_1l_2=12b^2$이고 $l_1l_2=2b^2$이다. 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 l_1과 l_2는 t에 관한 이차방정식 $t^2-(4b)t+2b^2=0$의 근이다. 이를 풀면, $t=2b\pm\sqrt{2}b$이고 $l_1>l_2$이므로

$$l_1=\left(2+\sqrt{2}\right)b,\quad l_2=\left(2-\sqrt{2}\right)b$$

【1-2】

점 $\mathrm{P}(x_1,y_1)$가 타원 $\dfrac{x^2}{4b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있으므로

$$\frac{x_1^2}{4b^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad \text{---} \quad \text{(a)}$$

$\angle\mathrm{F'PF}=90°$이므로 두 점 F′와 P를 지나는 직선의 기울기 $\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt{3}b}$과 두 점 F와 P를 지나는 직선의 기울기 $\dfrac{y_1}{x_1-\sqrt{3}b}$은 $\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt{3}b}\times\dfrac{y_1}{x_1-\sqrt{3}b}=-1$을 만족시킨다. 따라서

$$x_1^2=3b^2-y_1^2 \quad \text{---} \quad \text{(b)}$$

식 (b)를 식 (a)에 대입하면 $\dfrac{3b^2-y_1^2}{4b^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1$이므로 $3y_1^2=b^2$이다. $y_1>0$이므로 $y_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b$이고 식 (b)에 대입하면 $x_1^2=3b^2-y_1^2=3b^2-\dfrac{1}{3}b^2=\dfrac{8}{3}b^2$이다. $x_1>0$이므로 $x_1=\sqrt{\dfrac{8}{3}}b=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}b$ 이다. 따라서

$$(x_1,y_1)=\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}b,\frac{\sqrt{3}}{3}b\right)$$

【1-3】

$\angle\mathrm{F'FQ}=135°$ 이다. 삼각형 QF′F에 코사인법칙을 적용하면

$$l_3^2=l_4^2+\left(2\sqrt{3}b\right)^2-2l_4\left(2\sqrt{3}b\right)\cos 135°$$

$$=l_4^2+12b^2+2\sqrt{6}bl_4$$

$l_3+l_4=4b$이므로 $l_3=4b-l_4$를 위의 식에 대입하면 $(4b-l_4)^2=l_4^2+12b^2+2\sqrt{6}bl_4$이고 좌변을 전개한 후 계산하면 $l_4=\dfrac{4}{8+2\sqrt{6}}b=\dfrac{4-\sqrt{6}}{5}b$이고 $l_3=\dfrac{16+\sqrt{6}}{5}b$이다.

【1-4】

두 점 $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$와 $\mathrm{F}(c,0)$을 지나는 직선은 기울기가 $\tan 45°=1$이므로 $y=x-\sqrt{3}b$이다. 따라서

$$y_2=x_2-\sqrt{3}b \quad \text{---} \quad \text{(c)}$$

또한 $\mathrm{Q}(x_2,y_2)$는 타원 $\dfrac{x^2}{4b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있으므로

$$\frac{x_2^2}{4b^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \quad \text{---} \quad \text{(d)}$$

을 만족시킨다. 식 (c)를 (d)에 대입하여 정리하면 $5x_2^2-8\sqrt{3}bx_2+8b^2=0$이므로 이차방정식의 근의 공식에 의해 $x_2=\dfrac{1}{5}\left(4\sqrt{3}\pm 2\sqrt{2}\right)b$이다. $x_2>\sqrt{3}b$이어야 하므로 $x_2=\dfrac{2\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{5}b$이고 식 (c)에 대입하면 $y_2=\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}b$이다. 따라서

$$\mathrm{Q}(x_2,y_2)=\mathrm{Q}\left(\frac{2\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{5}b,\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}b\right)$$

제시문 [나]에 의하여 점 Q에서 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{10b}x+\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5b}y=1$$

$y=0$일 때 $x=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)b$이므로 점 R의 x좌표는 $x_3=\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)b$이다. 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 점 $\mathrm{S}(x_2,0)$라 하고 $\angle \mathrm{QRS}=\alpha$라고 하면 $\tan\alpha=\dfrac{y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$이다.

$\theta=135^\circ-\alpha$이므로 제시문 [다]로부터

$$\tan\theta=\tan(135^\circ-\alpha)=\frac{\tan 135^\circ-\tan\alpha}{1+\tan 135^\circ\tan\alpha}=\frac{-1-\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$$

■ 채점 기준

고등학교 교육과정에서 다루는 기하 및 삼각함수의 기본적인 내용을 바탕으로 평면 위의 두 점 사이의 거리, 타원의 방정식, 두 직선의 수직 관계, 코사인법칙과 삼각함수의 덧셈정리 등을 제대로 이해하고 이를 다양한 상황에서 활용할 수 있는지를 평가한다. 특히, 타원의 방정식이 하나의 문자를 포함한 경우에도 점들 간의 거리와 삼각함수 값을 올바르게 구하고, 그 과정을 논리적으로 서술할 수 있는지를 확인한다. 구체적인 채점 기준은 다음과 같다.

- ■ 문항 【1-1】은 제시문 [가]의 타원의 정의로부터 타원 위의 점 P에서 두 초점까지의 거리의 합을 구하고 직각삼각형의 피타고라스 정리를 이용하여 두 거리의 곱을 구할 수 있는지 평가한다. 이차방정식의 근과 계수와의 관계로부터 각 거리를 구할 수 있는지 평가한다.
- ■ 문항 【1-2】는 두 직선의 수직일 때 두 직선의 기울기의 곱이 -1임을 이용하여 점 P의 좌표를 구할 수 있는지 평가한다.
- ■ 문항 【1-3】은 점 Q와 두 초점으로 이루어진 삼각형에 대하여 코사인법칙을 적용하여 점 Q에서 두 초점까지의 거리를 구할 수 있는지 평가한다.
- ■ 문항 【1-4】는 제시문 [나]의 공식을 이용하여 점 Q에서 접선의 방정식을 구하고, 이 접선이 x축과 만나는 점, 초점 F, 점 Q로 이루어진 삼각형에 대하여 제시문 [다]의 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 탄젠트 값을 구할 수 있는지 평가한다.

2차 · 문제 2

제시문

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) < f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다. 또 $x_1 < x_2$일 때 $f(x_1) > f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

[나] 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때

① 열린구간 (a, b)에서 $f'(x) > 0$이면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 증가한다.

② 열린구간 (a, b)에서 $f'(x) < 0$이면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소한다.

[다] 함수 $y = f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a + \Delta x$까지 변할 때, 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 $\Delta x \to 0$일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 함수 $y = f(x)$는 $x = a$에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수 $y = f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x에서 미분가능하면 함수 $y = f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

제시문 [가]~[다]를 참고하여 다음 물음에 답하시오.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(i) $f(x) \le g(x)$	(ii) $\{g(x) - f(x)\}^2 + \sin^2 f(x) = 1$

【2-1】 함수 $f(x)$가 $f(x) = 10x$일 때, 정적분 $\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)dx$의 값을 구하시오.

【2-2】 함수 $f(x)$가 $f(x) = x$일 때, 함수 $g(x)$가 열린구간 $(0, \pi)$에서 미분가능한지 조사하시오. 또한 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 증가함을 보이시오.

【2-3】 함수 $f(x)$가 $f(x) = x$일 때, 방정식 $g(x) - kx + \dfrac{\pi}{2}(k-1) = 0$이 $0 \le x \le \pi$에서 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 양의 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

【2-4】 함수 $g(x)$가 $g(x) = x$일 때, $f'(a) = \dfrac{2}{3}$를 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } \dfrac{\pi}{2} < a < \pi + 1\right)$

■ 예시 답안

주어진 조건에 의해, $g(x)=f(x)+\sqrt{1-\sin^2 f(x)}=f(x)+|\cos f(x)|$이다.

【2-1】

$f(x)=10x$이므로 $g(x)=10x+|\cos 10x|$이고

$$\int_0^{\pi} g(x)dx=\int_0^{\pi}(10x+|\cos 10x|)dx=5\pi^2+\int_0^{\pi}|\cos 10x|\,dx$$

$y=|\cos 10x|$는 주기가 $\frac{\pi}{10}$인 주기함수이므로

$$\int_0^{\pi}|\cos 10x|\,dx=10\int_0^{\frac{\pi}{10}}|\cos 10x|\,dx=10\left(\int_0^{\frac{\pi}{20}}\cos 10x dx-\int_{\frac{\pi}{20}}^{\frac{\pi}{10}}\cos 10x dx\right)=2$$

따라서

$$\int_0^{\pi} g(x)dx=5\pi^2+2$$

【2-2】

$g(x)=x+|\cos x|=\begin{cases}x+\cos x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ x-\cos x\left(\frac{\pi}{2}<x\le\pi\right)\end{cases}$이므로 함수 $g(x)$는 구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$와 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$에서 미분가능하다.

$x=\frac{\pi}{2}$에서의 미분가능성을 조사하면

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h-\sin h}{h}=0,\quad \lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h+\sin h}{h}=2$$

이므로 제시문 [다]에 의해 $x=\frac{\pi}{2}$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(x)$는 닫힌구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$에서 연속이고 열린구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 $g'(x)=1-\sin x>0$이므로 제시문 [나]에 의해 닫힌구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$에서 증가한다. 또한, $g(x)$는 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$에서 연속이고 열린구간 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$에서 $g'(x)=1+\sin x>0$이므로, 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$에서 증가한다. 따라서 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,\pi]$에서 증가한다.

【2-3】

$h(x)=g(x)-kx+\frac{\pi}{2}(k-1)$이라고 하자. $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}=0$이므로 $x=\frac{\pi}{2}$는 방정식 $h(x)=0$의 근이다. 따라서 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$와 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$에서 방정식 $h(x)=0$의 근이 존재하지 않는 양의 실수 k의 값의 범위를 구하면 된다.

(1) 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$의 경우: $0<x<\frac{\pi}{2}$이면 $h'(x)=1-\sin x-k$이다.

(1-1) $k\ge 1$일 때, 구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 $h'(x)<0$이므로 함수 $h(x)$는 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$에서 감소한다. 따라서 $0\le x<\frac{\pi}{2}$일 때, $h(x)>h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로 방정식 $h(x)=0$은 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 근을 갖지 않는다. (1-2) $0<k<1$일 때, $h'(\alpha)=1-\sin\alpha-k=0$이 되는 α가 구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에 존재하고 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$1+\frac{\pi}{2}(k-1)$	$\nearrow$	$h(\alpha)$	$\searrow$	0

$0<k\le 1-\frac{2}{\pi}$이면 $h(0)\le 0$이므로 방정식 $h(x)=0$이 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 근을 갖는다.

$1-\frac{2}{\pi}<k<1$이면 $h(0)>0$이므로 방정식 $h(x)=0$이 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 근을 갖지 않는다.

따라서 (1-1)과 (1-2)에 의해 $k>1-\frac{2}{\pi}$일 때, 방정식 $h(x)=0$은 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 근을 갖지 않는다.

(2) 구간 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$의 경우: $\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서 $h'(x)=1+\sin x-k$이다.

(2-1) $0 < k \le 1$일 때, 함수 $h(x)$는 구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$에서 증가하므로 방정식 $h(x) = 0$은 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$에서 근을 갖지 않는다.

(2-2) $k \ge 2$일 때, 함수 $h(x)$는 구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$에서 감소하므로 방정식 $h(x) = 0$은 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$에서 근을 갖지 않는다.

(2-3) $1 < k < 2$일 때, $h'(\beta) = 1 + \sin\beta - k = 0$이 되는 β가 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$에 존재하고 구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	$h(\beta)$	↘	$1 + \frac{\pi}{2}(1-k)$

$1 + \frac{2}{\pi} \le k < 2$이면 $h(\pi) \le 0$이므로 방정식 $h(x) = 0$은 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$에서 근을 갖는다.

$1 < k < 1 + \frac{2}{\pi}$이면 $h(\pi) > 0$이므로 방정식 $h(x) = 0$은 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$에서 근을 갖지 않는다.

따라서 (2-1), (2-2), (2-3)에 의해 $0 < k < 1 + \frac{2}{\pi}$ 또는 $k \ge 2$일 때, 방정식 $h(x) = 0$은 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$에서 근을 갖지 않는다.

경우 (1)과 (2)에 의해 방정식 $h(x) = 0$이 구간 $[0, \pi]$에서 오직 한 개의 근을 갖는 양의 실수 k의 값의 범위는

$$1 - \frac{2}{\pi} < k < 1 + \frac{2}{\pi} \quad \text{또는} \quad k \ge 2$$

【2-4】

$g(x) = x$이므로 $x = f(x) + |\cos f(x)|$이다. $\{x - f(x)\}^2 + \sin^2 f(x) = 1$의 양변을 x로 미분하면

$$2\{x - f(x)\}\{1 - f'(x)\} + 2f'(x)\sin f(x)\cos f(x) = 0$$

$x - f(x) = |\cos f(x)|$이므로

$$|\cos f(x)|\ \{1 - f'(x)\} + f'(x)\sin f(x)\cos f(x) = 0$$

따라서 $x = a$와 $f'(a) = \frac{2}{3}$를 대입하면

$$|\cos f(a)| + 2\sin f(a)\cos f(a) = 0$$

이고 만약 $\cos f(x)$가 0이 아니면

$$f'(x) = \frac{|\cos f(x)|}{|\cos f(x)| - \sin f(x)\cos f(x)}$$

(1) $\cos f(a) = 0$이면 $f(a) = a - |\cos f(a)| = a$이므로 $\cos a = 0$이 된다. 하지만 $\frac{\pi}{2} < a < \pi + 1$에서 $\cos a = 0$이 되는 a는 존재하지 않는다.

(2) $\cos f(a) > 0$이면 $\frac{2}{3} = \frac{1}{1 - \sin f(a)}$이므로 $\sin f(a) = -\frac{1}{2}$이고 $\cos f(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 한편 $\frac{\pi}{2} < a < \pi + 1$이고 $f(a) = a - \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < f(a) < \pi + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 하지만 이 범위에서 $\sin f(a) = -\frac{1}{2}$과 $\cos f(a) > 0$을 모두 만족시키는 $f(a)$는 존재하지 않는다.

(3) $\cos f(a) < 0$일 때, $\frac{2}{3} = \frac{1}{1 + \sin f(a)}$이므로 $\sin f(a) = \frac{1}{2}$이고 $\cos f(a) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 한편 $\frac{\pi}{2} < a < \pi + 1$이고 $f(a) = a - \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < f(a) < \pi + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서 $f(a) = \frac{5}{6}\pi$이고

$$a = f(a) + |\cos f(a)| = \frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

■ 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루는 미적분의 기본 내용을 바탕으로, 미분과 적분을 제대로 이해하고 이를 다양한 상황에서 활용할 수 있는지를 평가한다. 특히, 삼각함수의 주기성을 활용하여 정적분을 구할 수 있는지, 극한을 이용해 함수의 미분가능성을 조사할 수 있는지, 도함수를 활용하여 함수의 증가 또는 감소를 판단할 수 있는지, 도함수를 활용해 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는지, 그리고 합성함수 미분법 및 삼각함수의 미분을 활용하여 함수의 미분계수가 특정 값이 되는 점을 구할 수 있는지를 중점적으로 평가한다. 제시문에는 문제 해결에 필요한 관련 교과서 내용을 포함하였으며, 제시문과 이전에 해결한 문항을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있도록 구성하였다. 구체적인 채점 기준은 다음과 같다.

- 문항 【2-1】은 조건을 만족하는 함수 $g(x)$를 구하고 다항함수 및 삼각함수의 적분법 및 삼각함수의 주기성을 이용하여 정적분을 구할 수 있는지 평가한다.
- 문항 【2-2】는 제시문 [다]를 바탕으로 미분계수의 정의로부터 구간에서의 함수의 미분가능성을 조사하고 제시문 [나]를 이용하여 함수 $g(x)$가 증가함수임을 보일 수 있는지 평가한다.
- 문항 【2-3】은 도함수를 활용하여 주어진 구간에서 방정식이 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 양의 실수 k의 범위를 구할 수 있는지 평가한다.
- 문항 【2-4】는 조건을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 합성함수의 미분법을 활용하여 미분계수 $f'(a)$가 $\frac{2}{3}$가 되는 실수 a의 값을 구할 수 있는지 평가하는 문항이다. 특히, 함수 $f(x)$를 직접 구하지 않고 합성함수 미분법을 이용하여 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하고 $f'(a)=\frac{2}{3}$의 값을 갖는 a의 값을 주어진 범위에서 찾을 수 있는지 평가한다.

2024학년도 자연계열

1차 · 문제 1

제시문

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다.

[나] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수 x에서 미분가능하면 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

[다] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) < f(x_2)$이면 그 구간에서 증가한다고 한다.

[라] 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률은 $\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이다. (단, $\mathrm{P}(A) > 0$)

자연수 n에 대하여 a, b, c, d는 각각 $-n$보다 크거나 같고 n보다 작거나 같은 정수이다. $-1 \le x \le 1$에서 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} x & (-1 \le x < 0) \\ d & (x = 0) \\ \dfrac{a}{2}x^2 + bx + c & (0 < x \le 1) \end{cases}$$

1-1 $f(x)$**가 닫힌구간** $[-1, 1]$**에서 증가하는 함수가 되도록 하는 순서쌍** (a, b)**와** (c, d)**의 개수를 각각 구하시오.**

1-2 $f(x)$**가 닫힌구간** $[-1, 1]$**에서 증가하는 연속함수이고 열린구간** $(-1, 1)$**에서 미분가능한 함수라 하자.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx \le 1$**을 만족하는 순서쌍** (a, b)**와** (c, d)**의 개수를 각각 구하시오.**

자연수 n에 대하여 $-n$부터 n까지 서로 다른 정수가 적힌 $2n+1$장의 카드가 주머니에 들어 있다. 주머니에서 임의로 한 장을 뽑아 수를 확인하고 주머니에 다시 넣는다. 이 시행을 4번 반복하여 나온 수를 차례로 위에 정의된 함수 $f(x)$의 a, b, c, d라 하자. 문항 【1-3】과 【1-4】에 답하시오.

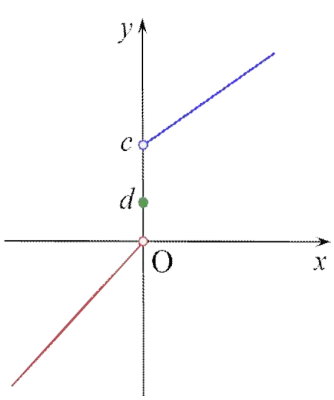
1-3 **위 시행으로부터 얻어진 함수** $f(x)$**가 닫힌구간** $[-1, 1]$**에서 연속일 때,** $f(x)$**가 증가하는 함수일 확률을 구하시오.**

1-4 **위 시행으로부터 얻어진 함수** $f(x)$**가 닫힌구간** $[-1, 1]$**에서 증가할 때,** $f(x)$**가 열린구간** $(-1, 1)$**에서 미분가능한 함수일 확률을 구하시오.**

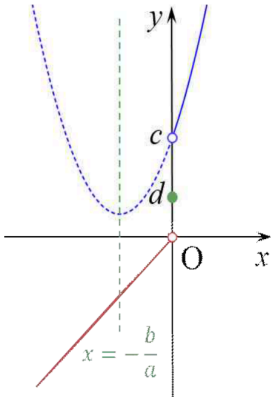
■ 예시 답안

【1-1】

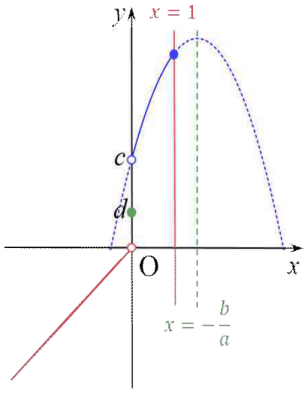
구간 $[-1,0)$에서 $f(x)=x$는 증가하는 함수이다. $x=0$에서 $\lim_{x\to 0-} f(x) \le f(0) \le \lim_{x\to 0+} f(x)$를 만족해야 하므로 $0 \le d \le c \le n$을 얻는다. 그리고 구간 $[0,1]$에서 $f(x)$가 증가할 조건은 아래의 그림처럼 세 가지의 경우로 나누어 찾을 수 있다.



$a=0$



$a>0$



$a<0$

① $a=0$일 때, $0<b\le n$을 만족해야 하므로 (a,b)의 개수는 n

② $a>0$일 때, $-\frac{b}{a}\le 0$을 만족해야 하므로 $0\le b\le n$이 되어 (a,b)의 개수는 $n(n+1)$

③ $a<0$일 때, $-\frac{b}{a}\ge 1$을 만족해야 하므로 $0<-a\le b\le n$이 되어 (a,b)의 개수는 $\frac{n(n+1)}{2}$

그러므로 (a,b)의 개수는 $n+n(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(3n+5)}{2}$이다.

한편, (c,d)는 $0\le d\le c\le n$를 만족해야 하므로, (c,d)의 개수는

${}_{n+1}\mathrm{H}_2={}_{n+2}\mathrm{C}_2=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$이다.

【1-2】

($f(x)$가 연속함수일 조건) 함수 $f(x)$는 $[-1,0)$과 $(0,1]$에서 다항함수이므로 연속이다.

$x=0$에서 $f(x)$가 연속일 조건은 $f(0)=d$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=c$가 모두 같은 것이다.

따라서 $c=d=0$이다.

($f(x)$가 미분가능할 조건) 함수 $f(x)$는 $(-1,0)$과 $(0,1)$에서 다항함수이므로 미분가능하다.

$x=0$에서 $f(x)$가 미분가능할 조건은 $\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{a}{2}h^2+bh-0}{h}=b$와 $\lim_{h\to 0-}\frac{h-0}{h}=1$이 같은 것이다.

따라서 $b=1$이다.

($f(x)$가 증가하고 미분가능할 조건) $b=1$이어야 하므로 문항 【1-1】로부터 $-1\le a\le n$이다.

(적분 조건) $\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0} x dx=-\frac{1}{2}$이므로 $\int_{0}^{1} f(x)dx\le\frac{3}{2}$이어야 한다. 따라서,

$$\frac{3}{2}\ge\int_0^1\left(\frac{a}{2}x^2+x\right)dx=\frac{a}{6}+\frac{1}{2}$$

즉, $a\le 6$이다.

그러므로 $n\ge 6$일 때 $-1\le a\le 6$이고, $1\le n\le 5$일 때 $-1\le a\le n$이다.

따라서 (c,d)의 개수는 1이고, (a,b)의 개수는 $1\le n\le 5$일 때 $n+2$이고 $n\ge 6$일 때 8이다.

【1-3】

정수 a,b,c,d는 각각 $-n$보다 크거나 같고 n보다 작거나 같으므로 근원사건의 개수는 $(2n+1)^4$이다.

($f(x)$가 연속함수일 확률) 문항 【1-2】로부터 $f(x)$가 연속함수일 a,b,c,d의 개수는 $(2n+1)^2$이므로 $f(x)$가 연속함수일 확률은 $\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^4}=\frac{1}{(2n+1)^2}$이다.

($f(x)$가 증가하는 연속함수일 확률) 문항 【1-2】로부터 $f(x)$가 증가하는 연속함수일 a, b, c, d의 개수는 $\frac{n(3n+5)}{2}$이므로 $f(x)$가 증가하는 연속함수일 확률은 $\frac{n(3n+5)}{2(2n+1)^4}$이다.
그러므로 구하는 확률은 $\frac{n(3n+5)}{2(2n+1)^2}$이다.

【1-4】

($f(x)$가 증가할 확률) 문항 【1-1】로부터 $f(x)$가 증가할 a, b, c, d의 개수는 $\frac{n(3n+5)(n+1)(n+2)}{4}$이므로 $f(x)$가 증가할 확률은 $\frac{n(3n+5)(n+1)(n+2)}{4(2n+1)^4}$이다.

($f(x)$가 미분가능하고 증가할 확률) 문항 【1-2】로부터 $f(x)$가 미분가능하고 증가할 a, b, c, d의 개수는 $n+2$이므로 $f(x)$가 미분가능하고 증가할 확률은 $\frac{n+2}{(2n+1)^4}$이다.
그러므로 구하는 확률은 $\frac{4}{n(3n+5)(n+1)}$이다.

■ 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루는 함수의 연속, 미분가능, 증가, 정적분의 기본 개념을 이해하는지 평가한다. 또한 이의 활용과 조건부확률과의 융합적 응용 사고력을 평가한다. 구체적인 채점 기준은 다음과 같다.

【1-1】
- ■ 함수의 증가에 대한 정의를 명확히 이해하고 이를 주어진 함수에 적용할 수 있다.
- ■ 중복조합을 이해하고 이를 주어진 상황에 적용할 수 있다.

【1-2】
- ■ 함수의 연속에 대한 정의를 이해하고 이를 주어진 함수에 적용할 수 있다.
- ■ 함수의 미분가능에 대한 정의를 이해하고 이를 주어진 함수에 적용할 수 있다.
- ■ 다항함수의 정적분의 값을 계산할 수 있다.

【1-3】
- ■ 근원사건을 이해하여 경우의 수를 찾아낼 수 있다.
- ■ 확률 및 조건부확률의 정의를 이해하고 이를 주어진 문제에 적용할 수 있다.

【1-4】
- ■ 근원사건을 이해하여 경우의 수를 찾아낼 수 있다.
- ■ 확률 및 조건부확률의 정의를 이해하고 이를 주어진 문제에 적용할 수 있다.

1차 · 문제 2

제시문

[가] 무리수 e의 정의

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

[나] 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

[다] 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 사항을 조사하여 그릴 수 있다.

① 함수의 정의역과 치역

② 곡선과 좌표축의 교점

③ 곡선의 대칭성과 주기

④ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

⑤ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

⑥ $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, 점근선

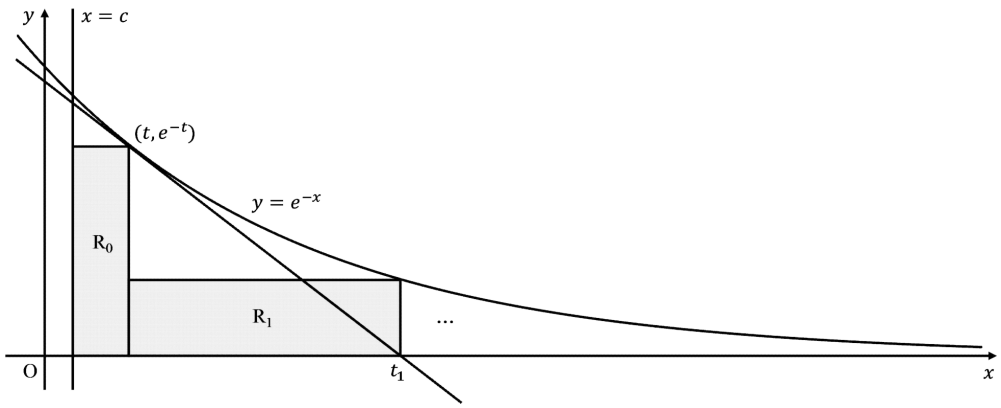
[라] 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이므로 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

2-1 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치 (x, y)가 $x = \frac{1}{3}e^{3t} + te^t$, $y = \int_{\ln\sqrt{2}}^{t} \sqrt{(2s - s^2)e^{2s} + 2s}\,ds$일 때, 시각 $t = \frac{1}{2}$에서 $t = \ln 2$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

2-2 $x \geq 0$일 때 부등식 $2e^x > x^2$이 성립함을 보이고, 이 부등식을 이용하여 극한값 $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$을 구하시오. 그리고 구간 $(-\infty, \infty)$에서 함수 $f(x) = xe^{-x}$의 그래프의 개형을 그리시오.

양수 c에 대하여 다음 그림과 같이 직사각형 R_0의 두 변은 각각 x축, 직선 $x = c$ 위에 있고, 한 꼭짓점은 곡선 $y = e^{-x}$ 위에 있다. 이때, 곡선 $y = e^{-x}$ 위의 꼭짓점을 (t, e^{-t})이라 하자. 곡선 $y = e^{-x}$ 위의 점 (t, e^{-t})에서의 접선의 x절편을 t_1이라 할 때, 두 변이 각각 x축, 직선 $x = t$ 위에 있고 한 꼭짓점이 곡선 $y = e^{-x}$ 위의 점 (t_1, e^{-t_1})인 직사각형을 R_1이라 하자. 곡선 $y = e^{-x}$ 위의 점 (t_1, e^{-t_1})에서의 접선의 x절편을 t_2라 할 때, 두 변이 각각 x축, 직선 $x = t_1$ 위에 있고 한 꼭짓점이 곡선 $y = e^{-x}$ 위의 점 (t_2, e^{-t_2})인 직사각형을 R_2라 하자. 이 과정을 반복하여 직사각형 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \cdots, \mathrm{R}_n$을 만든다. 문항 【2-3】과 【2-4】에 답하시오. (단, $t > c$이고 n은 자연수)



2-3 두 개의 직사각형 R_0와 R_1의 넓이의 합의 최댓값이 $\frac{1}{e}$일 때, c의 값을 구하시오.

2-4 $c = \frac{1}{e}$일 때, $n+1$개의 직사각형 $\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \cdots, \mathrm{R}_n$의 넓이의 합이 최대가 되는 t를 a_n이라 하자. 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 구하시오.

■ 예시 답안

【2-1】

$\frac{dx}{dt}=e^{3t}+(t+1)e^{t}$, $\frac{dy}{dt}=\sqrt{(2t-t^2)e^{2t}+2t}$이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{\ln 2}\sqrt{\left(e^{3t}+te^{t}+e^{t}\right)^2+(2t-t^2)e^{2t}+2t}dt$$

근호 안의 식을 정리하면

$$\begin{aligned}\left\{e^{3t}+(t+1)e^{t}\right\}^2+(2t-t^2)e^{2t}+2t&=t(2e^{4t}+4e^{2t}+2)+e^{6t}+2e^{4t}+e^{2t}\\&=2t(e^{4t}+2e^{2t}+1)+e^{2t}(e^{4t}+2e^{2t}+1)\\&=(2t+e^{2t})(e^{2t}+1)^2\end{aligned}$$

이므로 점 P가 움직인 거리는 $\int_{\frac{1}{2}}^{\ln 2}(e^{2t}+1)\sqrt{e^{2t}+2t}dt$이다.

$e^{2t}+2t=u$로 놓으면 $\frac{du}{dt}=2(e^{2t}+1)$이고, $t=\frac{1}{2}$일 때 $u=e+1$, $t=\ln 2$일 때 $u=4+2\ln 2$

이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\ln 2}(e^{2t}+1)\sqrt{e^{2t}+2t}dt=\frac{1}{2}\int_{e+1}^{4+2\ln 2}\sqrt{u}du=\frac{(4+2\ln 2)^{\frac{3}{2}}-(e+1)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

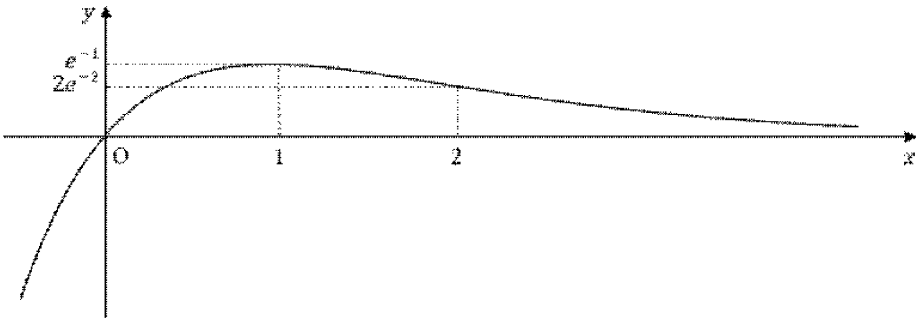
【2-2】

$g(x)=2e^{x}-x^2$이라고 하면, $g'(x)=2(e^{x}-x)>0$이므로 제시문 **[나]**에 의해 $g(x)$는 증가한다. $g(0)=2>0$이므로 $x\geq 0$에서 $g(x)>0$이 되어 부등식 $2e^{x}>x^2$이 성립한다. 따라서 $x>0$일 때, $0<xe^{-x}<\frac{2}{x}$이고 $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$이다.

함수 $f(x)=xe^{-x}$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, $f(0)=0$이므로 원점을 지난다. $f'(x)=(1-x)e^{-x}$이고 $f''(x)=(x-2)e^{-x}$이므로, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	e^{-1}	↘	$2e^{-2}$	↘

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 e^{-1}을 갖고, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(2,2e^{-2})$이다. 또 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$이고 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



【2-3】

직사각형 R_0의 넓이는 $(t-c)e^{-t}$이다. 그리고, 제시문 **[라]**에 의하여, 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 점 (t,e^{-t})에서의 접선의 방정식은 $y=-e^{-t}(x-t)+e^{-t}$이다. 따라서 이 접선의 x절편은 $t_1=t+1$이 되어, 직사각형 R_1의 넓이는 e^{-t-1}이다. 직사각형 R_0와 R_1의 넓이의 합을 $S(t)$라고 하면

$$S(t)=(t-c)e^{-t}+e^{-t-1}=(t-c+e^{-1})e^{-t}\quad(t>c)$$

이 되어 $S'(t)=(1-t+c-e^{-1})e^{-t}$이므로, 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	c	$\cdots$	$1+c-e^{-1}$	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	$e^{-1-c+e^{-1}}$	↘

따라서 함수 $S(t)$는 $t=c+1-e^{-1}$에서 최댓값 $e^{-1-c+e^{-1}}$을 갖는다.
최댓값이 $\frac{1}{e}$이므로 $c=\frac{1}{e}$이다.

【2-4】

직사각형 R_0의 넓이는 $(t-e^{-1})e^{-t}$이다. $k=1,2,3,\cdots,n$일 때, 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 점 $(t+k-1, e^{-t-k+1})$에서의 접선의 방정식은 $y=-e^{-t-k+1}(x-t-k+1)+e^{-t-k+1}$이다. 따라서 이 접선의 x절편은 $t_k=t+k$이 되어, 직사각형 R_k의 넓이는 e^{-t-k}이다. 직사각형 R_0, R_1, R_2, $\cdots$, R_n의 넓이의 합을 $A(t)$라고 하면

$$A(t)=(t-e^{-1})e^{-t}+e^{-t}\sum_{k=1}^{n}e^{-k} \quad (t>e^{-1})$$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}e^{-k}$이라고 하면, $A(t)=(t-e^{-1}+S_n)e^{-t}$이 되어

$$A'(t)=(1-t+e^{-1}-S_n)e^{-t}$$

그러므로 함수 $A(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	e^{-1}	$\cdots$	$1+e^{-1}-S_n$	$\cdots$
$A'(t)$		$+$	0	$-$
$A(t)$		↗		↘

따라서 함수 $A(t)$는 $t=a_n=1+e^{-1}-S_n$에서 최댓값을 갖는다.
$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$은 첫째항이 e^{-1}, 공비가 e^{-1}인 등비급수이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}=\frac{1}{e-1}$이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1+\frac{1}{e}-\frac{1}{e-1}$$

■ 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 미적분의 기본적인 내용을 바탕으로 급수, 함수의 도함수와 정적분을 제대로 이해하고 이를 다양한 상황에 활용할 수 있는지 평가한다. 특히 평면 위를 움직이는 점의 움직인 거리, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 함수의 그래프와 부등식, 접선의 방정식 및 등비급수를 활용할 수 있는지 평가한다. 구체적인 채점 기준은 다음과 같다.

【2-1】
- ■ 다양한 미분법과 적분과 미분의 관계를 이용하여 좌표평면 위에서 움직이는 점의 속도를 구하고 이를 이용하여 움직인 거리를 정적분으로 나타낼 수 있다.
- ■ 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있다.

【2-2】
- ■ 제시문 **[나]**에 주어진 도함수의 부호와 함수의 증가·감소의 관계를 이용하여 부등식이 성립함을 보일 수 있다.
- ■ 제시문 **[다]**에 주어진 그래프 개형을 그리는 방법을 바탕으로, 도함수와 이계도함수를 이용하여 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

【2-3】
- ■ 제시문 **[라]**를 이용하여 지수함수 $y=e^{-x}$ 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구한 후, 직사각형 R_1의 넓이를 구할 수 있다.
- ■ 두 직사각형 R_0와 R_1의 넓이의 합이 최대가 되는 양수 c의 값을 도함수를 이용하여 구할 수 있다.

【2-4】
- ■ 자연수 k에 대하여 직사각형 R_k의 넓이를 구할 수 있다.
- ■ $n+1$개의 직사각형 R_0, R_1, $\cdots$, R_n의 넓이의 합을 구할 수 있다.
- ■ 직사각형의 넓이의 합이 최대가 되는 $t=a_n$을 도함수를 이용하여 구할 수 있다.
- ■ 등비급수를 이용하여 a_n의 극한값을 구할 수 있다.

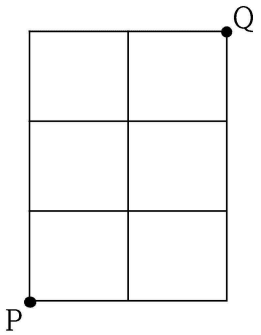
2차 · 문제 1

제시문

[가] 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 순열의 수는 ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ (단, $0 < r \leq n$)

[나] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치가 (x, y)이고, x, y가 t의 함수일 때, 시각 t에서 점 P의 속도는 $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$, 속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

1-1 다음 그림과 같은 도로망이 있다. 서강이와 한국이는 P지점을 동시에 출발하여 같은 속력으로 Q지점까지 최단 경로로 이동한다. 서강이와 한국이가 이동 중에 만나지 않고 Q지점에 도착할 확률을 구하시오.

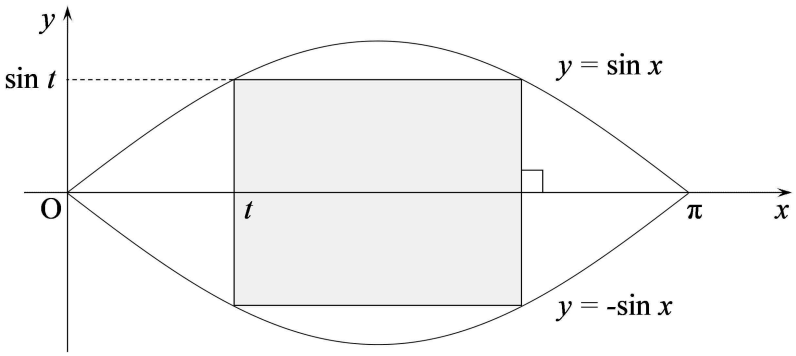


1-2 I♡Sogang의 7개의 문자 I, S, o, g, a, n, g와 1개의 기호 ♡를 일렬로 나열할 때, 기호 ♡와 문자 g가 이웃하도록 나열하는 경우의 수를 구하시오.

1-3 미분가능한 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서 위치 (x, y)가 $x = f(t)$, $y = \sin f(t)$이다. $x = \frac{\pi}{3}$에서 점 P의 속력이 1일 때, 점 P의 속도로 가능한 것을 모두 구하시오.

1-4 다음 그림과 같이 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 두 곡선 $y = \sin x$와 $y = -\sin x$로 둘러싸인 도형에 내접하는 직사각형이 있다. 직사각형의 한 꼭짓점의 좌표를 $(t, \sin t)$라 할 때, 직사각형의 넓이가 최대가 되는 $t = t_0$가 오직 하나 존재함을 보이시오. 또한, 정적분 $\int_0^{t_0} (1 + \sec^2 x)dx$의 값을 구하시오.

(단, $0 < t < \frac{\pi}{2}$)



■ 예시 답안

【1-1】

그림 1과 같은 도로망에서 P지점을 출발하여 Q지점까지 최단 경로로 이동하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!2!} = 10$이므로, 근원사건의 개수는 $10 \times 10 = 100$이다.

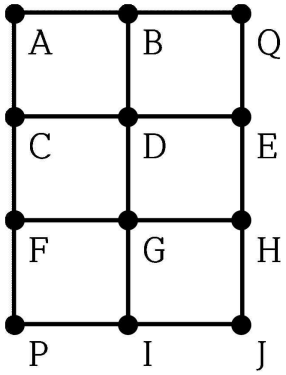


그림 1

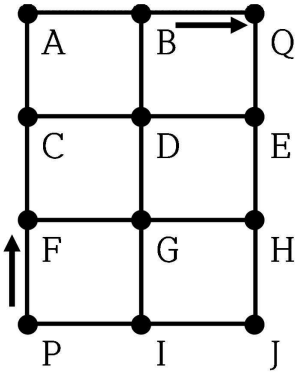


그림 2

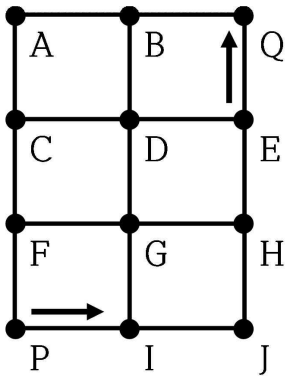


그림 3

서강이와 한국이가 도중에 만나지 않고 이동하는 경우의 수는 다음과 같이 두 가지로 나누어 구할 수 있다.

① 서강이가 그림 2처럼 F지점과 B지점을 통과하는 경우: 이때 한국이는 그림 3처럼 I지점과 E지점을 통과해야 한다.

② 서강이가 그림 3처럼 I지점과 E지점을 통과하는 경우: 이때 한국이는 그림 2처럼 F지점과 B지점을 통과해야 한다.

① 서강이가 F지점과 B지점을 통과하는 경우:

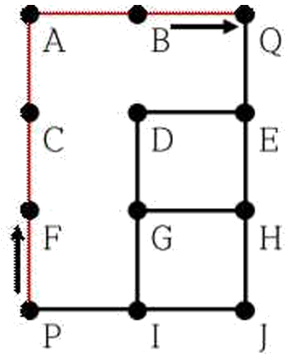


그림 4

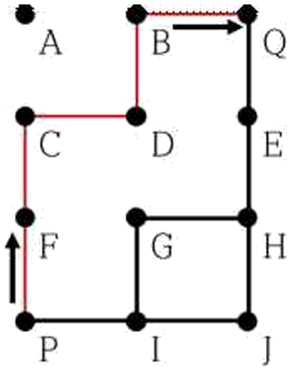


그림 5

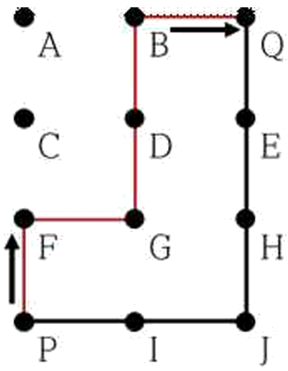


그림 6

①-ⓐ (그림 4) 서강이가 PFCABQ(빨간 선)인 경로로 이동하는 경우, 한국이가 이동할 수 있는 경로는 3가지(검은 선)이다.

①-ⓑ (그림 5) 서강이가 PFCDBQ(빨간 선)인 경로로 이동하는 경우, 한국이가 이동할 수 있는 경로는 2가지(검은 선)이다.

①-ⓒ (그림 6) 서강이가 PFGDBQ(빨간 선)인 경로로 이동하는 경우, 한국이가 이동할 수 있는 경로는 1가지(검은 선)이다.

따라서, ①에 해당하는 경우의 수는 $3 + 2 + 1 = 6$가지이다.

② 서강이가 I지점과 E지점을 통과하는 경우:

①에서 서강이와 한국이가 택한 경로를 서로 맞바꾸면 되므로 ①에 해당하는 경우의 수와 같이 6가지이다.

그러므로 서강이와 한국이가 도중에 만나지 않고 이동하는 경우의 수는 $6 + 6 = 12$가지이다.

따라서 서강이와 한국이가 이동 중에 만나지 않고 Q지점에 도착할 확률은 $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$이다.

【1-2】

① 문자 g가 기호 ♡의 왼쪽에 이웃하도록 나열하는 경우의 수는 'g♡', 'I', 'S', 'o', 'a', 'n', 'g'를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로, $7! = 5040$이다.

② 문자 g가 기호 ♡의 오른쪽에 이웃하도록 나열하는 경우의 수는 '♡g', 'I', 'S', 'o', 'a', 'n', 'g'를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로, $7! = 5040$이다.

③ 문자 g가 기호 ♡의 왼쪽 및 오른쪽에 각각 이웃하도록 나열하는 경우의 수는 'g♡g', 'I', 'S', 'o', 'a', 'n'을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로, $6! = 720$이다.

따라서, 기호 ♡와 문자 g가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$$5040 + 5040 - 720 = 9360$$

【1-3】

$\frac{dx}{dt} = f'(t)$, $\frac{dy}{dt} = f'(t)\cos f(t)$이므로 제시문 **[나]**에 의해 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{f'(t)\cos f(t)\}^2} = |f'(t)|\sqrt{1+\cos^2 f(t)}$$

$x = \frac{\pi}{3}$일 때의 시각을 t_0라고 하면, $f(t_0) = x = \frac{\pi}{3}$이고 이때 속력이 1이므로

$$|f'(t_0)|\sqrt{1+\cos^2 f(t_0)} = |f'(t_0)|\sqrt{1+\frac{1}{4}} = 1$$

따라서 $\frac{dx}{dt} = f'(t_0) = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$이고 $\frac{dy}{dt} = f'(t_0)\cos f(t_0) = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\frac{\pi}{3} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$이다.

그러므로, $x = \frac{\pi}{3}$에서 점 P의 가능한 속도는 제시문 **[나]**에 의해

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \quad \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

【1-4】

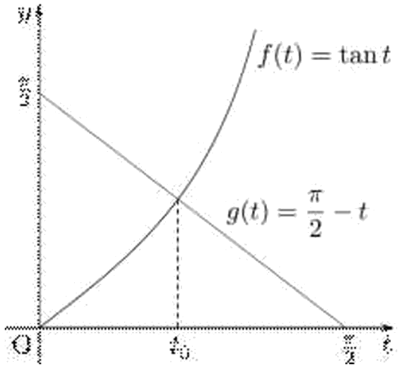
직사각형의 넓이를 $S(t)$라고 하면,

$$S(t) = 2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \times 2\sin t = 4\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\sin t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

$S'(t) = -4\left\{\sin t - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cos t\right\} = -4\cos t\left\{\tan t - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right\}$이고 $0 < t < \frac{\pi}{2}$일 때 $\cos t \neq 0$이므로

$S'(t) = 0$이기 위해서는 $\tan t = \frac{\pi}{2} - t$를 만족해야 한다.

$0 < t < \frac{\pi}{2}$에 대하여 $f(t) = \tan t$, $g(t) = \frac{\pi}{2} - t$라고 할 때, 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $f(0) < g(0)$, $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} f(t) = \infty$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$이라는 사실과 $f(t)$와 $g(t)$의 그래프에 의해 방정식 $f(t) = g(t)$는 오직 하나의 실근을 갖는다. 이 실근을 t_0라고 하고, 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.



t	0	⋯	t_0	⋯	$\frac{\pi}{2}$
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗		↘	

따라서, $S(t)$는 $t = t_0$일 때만 최대가 된다.

또한, $\tan t_0 = \frac{\pi}{2} - t_0$이므로 정적분의 값은

$$\int_0^{t_0}(1+\sec^2 x)dx=[x+\tan x]_0^{t_0}=t_0+\tan t_0=t_0+\left(\frac{\pi}{2}-t_0\right)=\frac{\pi}{2}$$

■ 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 확률 및 미적분학의 기본적인 내용을 바탕으로 순열, 확률, 함수의 도함수와 정적분을 제대로 이해하고 이를 다양한 상황에 활용할 수 있는지 평가한다. 특히 같은 것이 있는 수학적 확률, 같은 것이 있는 순열, 좌표평면 위를 움직이는 한 점에 대한 속도, 정적분에 대한 문제를 해결하는 과정을 서술하도록 하였으며, 구체적인 채점 기준은 다음과 같다.

【1-1】
- ■ 주어진 도로망에서 최단 경로로 이동하는 경우의 수를 계산할 수 있다.
- ■ 제시문 **[가]**에 주어진 순열의 수와 함께 수학적 확률의 정의를 이용하여 확률을 계산할 수 있다.

【1-2】
- ■ 같은 것이 있는 순열을 이해하고 그 순열의 수를 구할 수 있다.
- ■ 이웃하도록 나열하는 경우의 수를 구할 수 있다.

【1-3】
- ■ 제시문 **[나]**를 이해하고 합성함수의 미분법을 활용하여 좌표평면 위를 움직이는 점의 속도와 속력을 구할 수 있다.

【1-4】
- ■ 직사각형의 넓이를 t에 대한 함수로 표현할 수 있다.
- ■ 삼각함수의 미분과 곱의 미분법을 이용하여 함숫값이 최대가 되는 $t=t_0$가 오직 하나 존재함을 보일 수 있다.
- ■ t_0가 만족하는 등식을 이용하여 주어진 정적분의 값을 계산할 수 있다.

2차 · 문제 2

제시문

[가] 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

[나] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

[다] 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같은 사항을 조사하여 그릴 수 있다.

① 함수의 정의역과 치역

② 곡선과 좌표축의 교점

③ 곡선의 대칭성과 주기

④ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

⑤ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

⑥ $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, 점근선

2-1 방정식 $x^4-8x^2-1=0$의 1보다 큰 해가 오직 하나 존재함을 보이시오.

1보다 큰 실수 t에 대하여, 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 두 점 $\mathrm{P}_1\left(\dfrac{1}{t}, t\right)$와 $\mathrm{P}_2\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$에서의 접선을 각각 l_1과 l_2라 하고, 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 두 접선 l_1과 l_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라 하자. 문항 【2-2】~【2-5】에 답하시오.

2-2 함수 $S(t)$를 구하시오.

2-3 함수 $y=t-2\ln t\ (t>1)$의 최솟값을 구하고, 1보다 큰 실수 t에 대하여 $S(t)<t$임을 보이시오.

2-4 극한 $\lim_{t\to1+} S'(t)$를 조사하고, $t^2(t^2+1)^3S''(t)$를 구하시오.

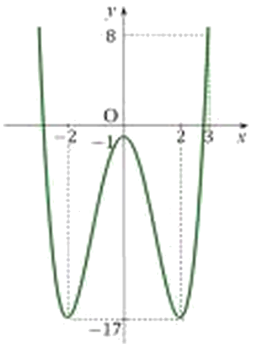
2-5 두 함수 $y=S(t)$와 $y=S^{-1}(t)$의 그래프의 개형을 한 평면에 그리시오. (단, 방정식 $x^4-8x^2-1=0$의 1보다 큰 해는 a라 한다.)

■ 예시 답안

【2-1】

$f(x)=x^4-8x^2-1$이라고 하면 $f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$이므로, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-17	↗	-1	↘	-17	↗



$f(1)=-8<0$이고 $f(3)=8>0$라는 사실과 $f(x)$의 그래프에 의해 방정식 $x^4-8x^2-1=0$의 1보다 큰 해는 오직 하나 존재한다.

【2-2】

$y=\dfrac{1}{x}$을 미분하면 $y'=-\dfrac{1}{x^2}$이므로 제시문 **[가]**에 의해 두 접선 l_1과 l_2의 방정식은 각각

$$y-t=-t^2\left(x-\frac{1}{t}\right),\quad y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t),\quad \text{즉, } y=-t^2x+2t,\quad y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}$$

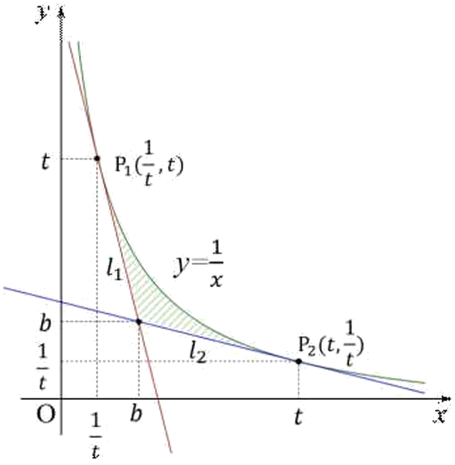
이다.

l_1과 l_2의 교점의 x좌표를 구하기 위해
$-t^2x+2t=-\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}$을 풀면 $t>1$이기 때문에

$$x=\frac{2t}{t^2+1}$$

따라서, 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{2t}{t^2+1},\dfrac{2t}{t^2+1}\right)$이다.

$b=\dfrac{2t}{t^2+1}$라 놓고 $S(t)$를 적분과 사다리꼴의 넓이를 이용하여 계산하면,



$$\begin{aligned}S(t)&=\int_{\frac{1}{t}}^{t}\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}(t+b)\left(b-\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{t}\right)(t-b)\\&=\ln t-\ln\frac{1}{t}-b\left(t-\frac{1}{t}\right)\\&=2\ln t-\frac{2(t^2-1)}{t^2+1}\end{aligned}$$

【2-3】

함수 $y=t-2\ln t\ (t>1)$의 최솟값을 구하기 위해, $g(t)=t-2\ln t\ (t>1)$라고 하면 $g'(t)=1-\dfrac{2}{t}=\dfrac{t-2}{t}$이므로 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘	$2-2\ln 2$	↗

따라서 $y=t-2\ln t\ (t>1)$의 최솟값은 $2-2\ln 2$이다.

그러므로 $t>1$일 때, $\dfrac{2(t^2-1)}{t^2+1}>0$와 $\ln 2<\ln e=1$임을 이용하면

$$t-S(t)=t-2\ln t+\frac{2(t^2-1)}{t^2+1}>t-2\ln t\geq 2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$$

이 되어 $S(t)<t$이다.

【2-4】

$S(t)=2\ln t-\dfrac{2(t^2-1)}{t^2+1}$이므로

$$S'(t)=\frac{2}{t}-2\times\frac{2t(t^2+1)-(t^2-1)(2t)}{(t^2+1)^2}=\frac{2}{t}-\frac{8t}{(t^2+1)^2}$$

이고

$$S''(t)=-\frac{2}{t^2}-8\left\{\frac{1}{(t^2+1)^2}-\frac{4t^2}{(t^2+1)^3}\right\}=-\frac{2}{t^2}-\frac{8}{(t^2+1)^2}+\frac{32t^2}{(t^2+1)^3}$$

따라서 $\lim\limits_{t\to 1+}S'(t)=\dfrac{2}{1}-\dfrac{8}{(1^2+1)^2}=0$이고 $t^2(t^2+1)^3S''(t)=-2(t^2+1)^3-8t^2(t^2+1)+32t^4$이다.

【2-5】

$S'(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{8t}{(t^2+1)^2}=2\times\dfrac{(t^2+1)^2-(2t)^2}{t(t^2+1)^2}=\dfrac{2(t+1)^2(t-1)^2}{t(t^2+1)^2}$이므로, 구간 $(1,\infty)$에 속하는 모든 t에 대하여 $S'(t)>0$이다. 따라서 $S(t)$의 극값은 존재하지 않고 제시문 **[나]**에 의해 $S(t)$는 구간 $(1,\infty)$에서 증가한다. 또한,

$\lim\limits_{t\to 1+}S(t)=\lim\limits_{t\to 1+}\left\{2\ln t-\dfrac{2(t^2-1)}{t^2+1}\right\}=2\ln 1-\dfrac{2(1^2-1)}{1^2+1}=0$이고

$\lim\limits_{t\to\infty}S(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left\{2\ln t-\dfrac{2(t^2-1)}{t^2+1}\right\}=\infty$이므로 치역은 $(0,\infty)$이다.

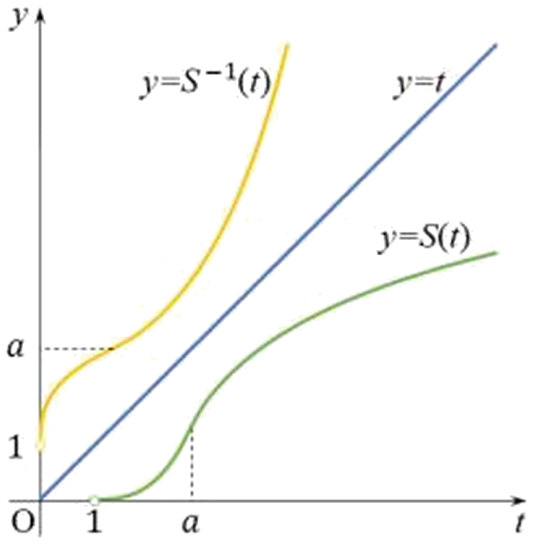
$h(t)=t^4-8t^2-1$라 하면, $S''(t)=\dfrac{-2(t^2-1)h(t)}{t^2(t^2+1)^3}$이다. 따라서 $t>1$일 때, $S''(a)=0$이고 문항 **【2-1】**의 $y=x^4-8x^2-1$의 그래프로부터 다음을 알 수 있다.

① $1<t<a$이면 $h(t)<0$이므로 $S''(t)>0$이 되어 곡선 $y=S(t)$는 아래로 볼록

② $t>a$이면 $h(t)>0$이므로 $S''(t)<0$이 되어 곡선 $y=S(t)$는 위로 볼록

그러므로 점 $(a,S(a))$는 변곡점이다.

따라서 $y=S(t)$의 그래프의 개형을 그린 후, 이를 직선 $y=t$에 대칭이 되도록 역함수 $y=S^{-1}(t)$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



■ 채점 기준

고등학교 교육과정에서 필수적으로 다루어지는 미적분학의 기본적인 내용을 바탕으로 함수의 도함수와 정적분을 제대로 이해하고 이를 다양한 상황에 활용할 수 있는지 평가한다. 특히 접선의 방정식, 함수의 증가와 감소, 곡선의 오목과 볼록, 변곡점, 함수의 그래프를 이용하여 최솟값, 방정식, 부등식에 관한 문제해결, 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이에 활용할 수 있는지 평가한다. 또한, 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계를 이해하는지 평가한다. 구체적인 채점 기준은 다음과 같다.

【2-1】
- ■ 주어진 함수의 도함수와 제시문 **[나]**를 활용하여 다항함수의 그래프를 그릴 수 있다.
- ■ 함수의 그래프를 방정식에 관한 문제에 적용할 수 있다.

【2-2】
- ■ 제시문 **[가]**를 이용하여 주어진 곡선 위의 두 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
- ■ 두 직선의 교점을 구할 수 있다.
- ■ 주어진 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 계산할 수 있다.

【2-3】
- ■ 주어진 함수의 도함수와 제시문 **[나]**를 활용하여 최솟값을 구할 수 있다.
- ■ 이를 활용하여 주어진 부등식이 성립함을 보일 수 있다.

【2-4】
- ■ 여러 가지 미분법을 이용하여 로그함수와 유리함수의 도함수를 계산할 수 있다.
- ■ 함수의 우극한을 구할 수 있다.

【2-5】
- ■ 문항 【2-1】~【2-4】의 결과를 활용하여 제시문 **[다]**에 주어진 그래프 개형을 그리는 방법을 바탕으로 문항 【2-2】에서 구한 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
- ■ 함수와 그 역함수의 그래프 사이의 관계를 이해하여 역함수의 그래프를 그릴 수 있다.

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관

writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다