

성균관대논술

수리형

목차

2026학년도 논술위주 수리형	3
1교시 · 문제 1	3
1교시 · 문제 2	6
1교시 · 문제 3	9
2교시 · 문제 1	12
2교시 · 문제 2	15
2교시 · 문제 3	18
3교시 · 문제 1	22
3교시 · 문제 2	25
3교시 · 문제 3	28
 2025학년도 논술우수 수리형	 32
1교시 · 문제 1	32
1교시 · 문제 2	36
1교시 · 문제 3	40
2교시 · 문제 1	43
2교시 · 문제 2	46
2교시 · 문제 3	49
3교시 · 문제 1	52
3교시 · 문제 2	55
3교시 · 문제 3	58
 2024학년도 논술우수 자연계	 61
1교시 · 문제 1	61
1교시 · 문제 2	64
1교시 · 문제 3	67
2교시 · 문제 1	70
2교시 · 문제 2	73
2교시 · 문제 3	76

2026학년도 논술위주 수리형

1교시 · 문제 1

[문제1] 다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 1- i] ~ [문제 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

[제시문1] 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $h(x)$ 의 한 부정적분을 $H(x)$ 라고 하면

$$\int_a^b h(x)dx = H(b) - H(a) \text{ 이다.}$$

[제시문2] 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 주어졌을 때, 닫힌구간 $[-2, 2]$ 위에서 정의되는 연속함수 $g(x)$ 는 다음과 같다.

$$g(x) = \begin{cases} f'(-1)(x+1) + f(-1) & (-2 \leq x \leq -1) \\ f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \\ f'(1)(x-1) + f(1) & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

- i <제시문2>에서 $f(x) = -2x^2 + 1$ 일 때, 정적분 $\int_{-2}^2 g(x)dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.
- ii <제시문2>에서 $f(x)$ 는 다음의 두 조건을 모두 만족하는 이차함수이다.
 (1) $f(1), f(-1) \in [-1, 1]$
 (2) $f'(1) = \frac{1}{3}, f'(-1) = -\frac{1}{2}$
 이때 $y = g(x), y = -2$ 및 $x = -2, x = 2$ 로 둘러싸인 도형의 가능한 넓이 중에서 최솟값을 구하고 그 이유를 논하시오.
- iii 상수 c 에 대하여 <제시문2>에서 $f(x) = cx(x-1)$ 이라 하자. 이때 연속함수 $G(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.
 $g(x) \leq 2$ 이면 $G(x) = g(x)$ 이고, $g(x) > 2$ 이면 $G(x) = 2$ 이다. 정적분 $\int_{-2}^2 (G(x) + 2)dx$ 의 값이 $\frac{109}{10}$ 가 되도록 하는 c 를 구하고 그 이유를 논하시오. (단, $0 < c \leq 1$)

■ 예시 답안

[문제 1-i]

주어진 $f(x) = -2x^2 + 1$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$g(x) = \begin{cases} 4x + 3 & (-2 \leq x \leq -1) \\ -2x^2 + 1 & (-1 < x < 1) \\ -4x + 3 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

따라서 이를 적분하면

$$\int_{-2}^2 g(x)dx = 2 \int_0^2 g(x)dx = 2 \left(\int_0^1 (-2x^2 + 1)dx + \int_1^2 (-4x + 3)dx \right) = -\frac{16}{3}.$$

[문제 1-ii]

$f(x)$ 는 이차함수이므로, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)이라 할 수 있다. $f'(x) = 2ax + b$ 임을 이용하여, (2)번 조건에 의해 $f'(1) = 2a + b = \frac{1}{3}$ 그리고 $f'(-1) = -2a + b = -\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $a = \frac{5}{24}$, $b = -\frac{1}{12}$ 임을 알 수 있다.

$f(x) = \frac{5}{24}x^2 - \frac{1}{12}x + c$ 이므로 (1)번 조건에 의해 상수 c 는 다음의 두 범위 안에 모두 속해야 한다.

$$-1 \leq f(1) = \frac{1}{8} + c \leq 1 \iff -\frac{9}{8} \leq c \leq \frac{7}{8}$$

$$-1 \leq f(-1) = \frac{7}{24} + c \leq 1 \iff -\frac{31}{24} \leq c \leq \frac{17}{24}$$

이를 종합하면 $-\frac{9}{8} \leq c \leq \frac{17}{24}$ 이다.

이 범위 안에서 $f(x) \geq c - \frac{1}{120} > -2$ 이므로, $y = g(x)$, $y = -2$, $x = -2$, $x = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 c 가 가장 작을 때, 즉 $c = -\frac{9}{8}$ 일 때 최솟값을 가지게 된다. 따라서, $f(x) = \frac{5}{24}x^2 - \frac{1}{12}x - \frac{9}{8}$ 일 때 도형의 넓이를 구하자. 이 경우에 도형은 다음의 세 부분 A, B, C 로 이루어져 있다.

$A: \left(-1, -\frac{5}{6}\right), \left(-2, -\frac{1}{3}\right), (-2, -2), (-1, -2)$ 를 꼭짓점으로 갖는 사다리꼴

$B: y = f(x)$, $y = -2$, $x = -1$, $x = 1$ 로 둘러싸인 도형

$C: \left(2, -\frac{2}{3}\right), (1, -1), (1, -2), (2, -2)$ 를 꼭짓점으로 갖는 사다리꼴

A, B, C 각각의 넓이를 기하 혹은 적분을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$A \text{의 넓이} = \left(\frac{7}{6} + \frac{5}{3}\right) \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{17}{12}$$

$$B \text{의 넓이} = \int_{-1}^1 \left(\frac{5}{24}x^2 - \frac{1}{12}x - \frac{9}{8} + 2\right)dx = \frac{17}{9}$$

$$C \text{의 넓이} = \left(1 + \frac{4}{3}\right) \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

따라서 정답은 $\frac{17}{12} + \frac{17}{9} + \frac{7}{6} = \frac{161}{36}$ 이다.

[문제 1-iii]

$f(x) = cx^2 - cx$ 이므로 $f'(x) = 2cx - c$ 이다. 따라서 $f(1) = 0$, $f(-1) = 2c$, $f'(1) = c$, $f'(-1) = -3c$ 이를 이용하여 $g(x)$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$g(x) = \begin{cases} -3cx - c & (-2 \leq x \leq -1) \\ cx^2 - cx & (-1 < x < 1) \\ cx - c & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

따라서 $y = g(x)$ 의 그래프는 점 $(-2, 5c)$ 를 지난다. c 의 구간을 나누어 $G(x)$ 를 계산하면 다음과 같다.

(1) $c \in \left(0, \frac{2}{5}\right]$ 인 경우: $G(x) = g(x)$ 이다. 따라서 $\int_{-2}^2 (G(x) + 2)dx = \frac{14}{3}c + 8$ 이며, 이 때 $\left(0, \frac{2}{5}\right]$ 의 구간 안에 있으면서 $\frac{14}{3}c + 8 = \frac{109}{10}$ 가 되도록 하는 c 는 존재하지 않는다.

(2) $c \in \left(\frac{2}{5}, 1\right]$ 인 경우:

$$G(x) = \begin{cases} 2 & \left(-2 \leq x \leq -\frac{1}{3} - \frac{2}{3c}\right) \\ -3cx - c & \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3c} < x \leq -1\right) \\ cx^2 - cx & (-1 < x < 1) \\ cx - c & (1 < x \leq 2) \end{cases} \text{이다.}$$

따라서 $\int_{-2}^2 (G(x) + 2)dx = \frac{34}{3} + \frac{1}{2}c - \frac{2}{3c}$ 이며, $c = \frac{4}{5}$ 일 때 그 값이 $\frac{109}{10}$ 가 된다.

따라서 정답은 $c = \frac{4}{5}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1- i	문제에서 요구하는 함수를 제시문의 정의에 맞게 정확히 계산하고, 이를 이용하여 정적분의 값을 계산할 수 있다.	6점
1- ii	문제에서 제시된 조건을 바탕으로 이차함수의 그래프의 형태를 추론하고, 이를 이용하여 제시된 도형의 형태를 정적분으로서 해석한 후, 문제에서 질문하고 있는 도형이 언제 최소화되는지 이해하여 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	12점
1- iii	문제에서 정의하는 함수의 형태를 상수 c 의 범위를 나눠 정확하게 파악하고, 정적분의 넓이로서의 해석을 이용하여 복잡한 정적분의 계산을 정확하게 할 수 있다.	12점

1교시 · 문제 2

[문제2] 다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 2- i] ~ [문제 2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

제시문

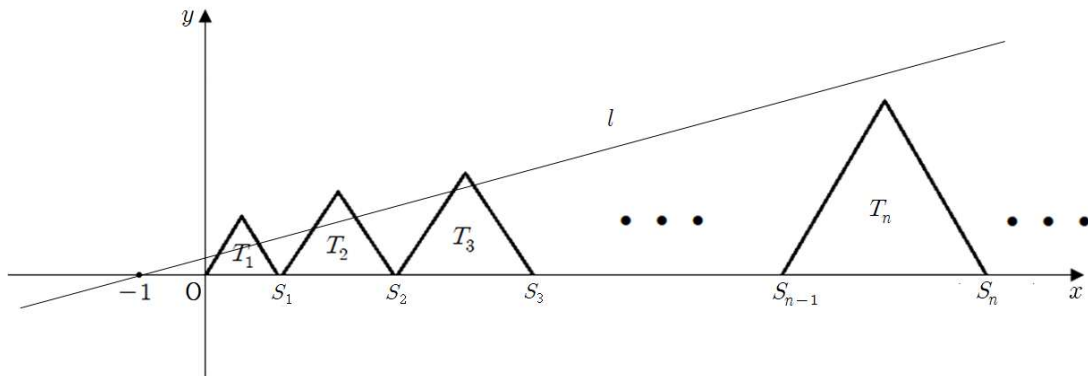
[제시문1] 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 $a > 0$ 인 등차수열이고, 등차수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 자연수 n 에 대하여 한 변의 길이가 b_n 인 정삼각형 T_n 이 좌표평면에 아래 그림과 같이 나란히 놓여져 있다. 삼각형 T_1 의 한 꼭짓점은 제1사분면에 놓여져 있고, 다른 두 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 과 $(S_1, 0)$ 이다. $n \geq 2$ 일 때 삼각형 T_n 의 한 꼭짓점은 제1사분면에 놓여져 있고, 다른 두 꼭짓점의 좌표는 $(S_{n-1}, 0)$ 과 $(S_n, 0)$ 이다.

구간 $[0, \infty)$ 을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$ 를 아래와 같이 정의한다.

(1) $0 \leq x < S_1$ 일 때 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\left|x - \frac{1}{2}\right|$ 이다.

(2) n 이 2 이상의 자연수이고 $S_{n-1} \leq x < S_n$ 일 때 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}(S_n - S_{n-1}) - \sqrt{3}\left|x - \frac{S_n + S_{n-1}}{2}\right|$ 이다.

이 경우 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 정삼각형 T_n 의 윗 두 변들을 합친 도형과 일치한다. 여기서 윗 두 변은 변의 한 끝이 제1사분면 위에 있는 두 변을 의미한다.



[제시문2] 직선 l 은 점 $(-1, 0)$ 을 지나며 기울기가 m 이다.

- i <제시문1>에서 $a = 2$ 일 때 정적분 $\int_0^{134} f(x)dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.
- ii <제시문1>과 <제시문2>에서 $a = 1, m = \frac{\sqrt{3}}{10}$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 l 이 만나는 점의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.
- iii <제시문1>과 <제시문2>에서 $m = \frac{\sqrt{3}}{30}$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 l 이 만나는 점의 개수가 30이 되는 a 의 값의 범위를 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 2-i]

$a = 2$ 이면 $b_k = 2k - 1$ 이고, $S_n = b_1 + \dots + b_n = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n(n + 1) - n = n^2$ 이다. $S_{11} = 121 < 134$ 이고 $S_{12} = 144 > 134$ 이다. 따라서 $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{11}$ 의 전체 넓이와 T_{12} 의 일부 영역의 넓이의 합이 적분값이 된다. 특히 T_{12} 의 일부 영역은 T_{12} 전체 넓이에서 T_{12} 의 x 의 구간 $[134, S_{12}] = [134, 144]$ 에 해당되는 T_{12} 의 영역을 제외하면 된다. 제외하여야 하는 영역은 밑변의 길이가 10이고 높이가 $10\sqrt{3}$ 인 삼각형이므로 넓이는 $\frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$ 이다. 한편 $T_1, T_2, \dots, T_{12}$ 의 넓이의 합은 $\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^{12} b_k^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^{12} (4k^2 - 4k + 1)$ 이다.

$$\sum_{k=1}^{12} (4k^2 - 4k + 1) = 4 \cdot \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} - 4 \cdot \frac{12 \cdot 13}{2} + 12 = 4 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 25 - 24 \cdot 13 + 12 = 2300$$

이므로 $\frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^{12} b_k^2 = 575\sqrt{3}$ 이다. 따라서 구하고자 하는 영역의 넓이는 $575\sqrt{3} - 50\sqrt{3} = 525\sqrt{3}$ 이다.

[문제 2-ii]

$a = 1$ 이면 $b_n = n$ 이다. 따라서 $S_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이고 삼각형 T_n 의 중점의 x 좌표는

$$\frac{1}{2}(S_{n-1} + S_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n^2}{2} \text{ 이다.}$$

점 $(-1, 0)$ 의 x 좌표부터 T_n 의 중점의 x 좌표까지의 거리는 $\frac{n^2}{2} + 1$ 이다. 그리고 삼각형 T_n 의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}b_n = \frac{\sqrt{3}}{2}n$ 이다. 따라서 $(-1, 0)$ 에서 T_n 의 제1사분면 위의 꼭짓점까지 잇는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}n}{\frac{n^2}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3}n}{n^2 + 2}$$

이다. 이 기울기가 직선 l 의 기울기 $\frac{\sqrt{3}}{10}$ 보다 크면 l 과 T_n 은 두 점에서 만나고, $\frac{\sqrt{3}}{10}$ 과 같으면 한 점에서 만나고, $\frac{\sqrt{3}}{10}$ 보다 작으면 만나지 않는다. 따라서 먼저 $\frac{\sqrt{3}n}{n^2 + 2} > \frac{\sqrt{3}}{10}$ 이 되는 n 의 범위를 찾으면 $10n > n^2 + 2$ 인 범위를 찾으면 되고, $n^2 - 10n + 2 < 0$ 인 범위이므로 $5 - \sqrt{23} < n < 5 + \sqrt{23}$ 이 되고, 가능한 자연수는 $n = 1, 2, \dots, 8, 9$ 가 된다. 한편 $\frac{\sqrt{3}n}{n^2 + 2} = \frac{\sqrt{3}}{10}$ 인 자연수는 없다. 따라서 $T_1, \dots, T_9$ 가 직선 l 과 각각 두 점에서 만나므로 만나는 점의 개수는 18개이다.

[문제 2-iii]

(풀이1) $S_n = b_1 + \dots + b_n = \sum_{k=1}^n (1 - a + ka) = n + a \frac{n(n-1)}{2}$ 이다. 따라서 삼각형 T_n 의 중점의 좌표는

$$\frac{1}{2}(S_n + S_{n-1}) = \frac{1}{2} \left[n + \frac{an(n-1)}{2} + (n-1) + \frac{a(n-1)(n-2)}{2} \right] = \frac{1}{2}[2n - 1 + a(n-1)^2]$$

으로 주어지게 된다. 한편 T_n 의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - a + na)$ 이다. 원점부터 삼각형 T_n 의 제1사분면 위의 꼭짓점과 $(-1, 0)$ 를 잇는 직선의 기울기는

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - a + na)}{\frac{1}{2}[2n - 1 + a(n-1)^2] + 1}$$

이고 이 기울기가 직선 l 의 기울기 $\frac{\sqrt{3}}{30}$ 보다 크면 T_n 과 직선 l 은 두 점에서 만나고, 같으면 한 점에서 만나며, 작으면 만나지 않는다. $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 l 이 만나는 점의 개수가 30이려면 T_{15} 와 2개의 점에서 만나고, T_{16} 과 만나지 않는다. 따라서 $n = 15$ 일 때

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(14a+1)}{\frac{1}{2}(29+14^2a)+1} > \frac{\sqrt{3}}{30}$$

을 만족하고 따라서 $a > \frac{1}{224}$. $n = 16$ 일 때

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(15a+1)}{\frac{1}{2}(31+15^2a)+1} < \frac{\sqrt{3}}{30}$$

이 성립하고, 따라서 $a < \frac{1}{75}$. 따라서 a 의 범위는 $\frac{1}{224} < a < \frac{1}{75}$ 이다.

(풀이2) 위에 풀이1에서 주어진 다음의 조건

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-a+na)}{\frac{1}{2}[2n-1+a(n-1)^2]+1} > \frac{\sqrt{3}}{30}$$

을 정리하면 $m = n - 1$ 으로 두었을 때

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1+ma)}{\frac{1}{2}[2m+1+a \cdot m^2]+1} > \frac{\sqrt{3}}{30}$$

이 되고 이를 정리하면 $\frac{1+ma}{am^2+2m+3} > \frac{1}{30}$ 이다. 이를 한 번 더 정리하면 $am^2+2m(1-15a)-27 < 0$ 이 되는데, $g(m) = am^2+2m(1-15a)-27$ 이라 하면 $g(0) = -27 < 0$ 이고 $a > 0$ 이므로 그래프 개형을 통해 자연수 u 에 대해 $g(u) < 0$ 이면 $g(u-1) < 0$ 임을 알 수 있다. 따라서 $g(W) < 0$ 이고 $g(W+1) > 0$ 인 자연수 W 가 있으면, $g(m) < 0$ 인 자연수 m 의 개수는 W 가 된다. 그러면 위 식을 만족하는 n 은 $1, 2, \dots, W, W+1$ 이 되고 삼각형과 직선이 만나는 개수는 $2(W+1)$ 개가 된다. 만약 $g(W) < 0$ 이고 $g(W+1) = 0$ 을 성립하는 W 가 존재하면 $n = W+2$ 일 때는 T_n 과 직선이 유일하게 하나 만나게 되므로 $2(W+1)+1$ 개 점에서 만나게 된다. 따라서 우리는 $2(W+1) = 30$ 이 되는 $W = 14$ 에 대해서 $g(14) < 0$ 와 $g(15) > 0$ 을 동시에 만족하는 조건을 찾으면 된다. 대입하여 찾으면 $g(14) = 196a - 420a + 1 < 0$ 이고, $224a > 1$ 에 해당된다. 또한 $g(15) = 225a + 30(1-15a) - 27 > 0$ 에서 $225a < 3$, 즉 $75a < 1$ 에 해당됨을 확인할 수 있다. 따라서 a 의 범위는 열린구간 $\left(\frac{1}{224}, \frac{1}{75}\right)$ 이 된다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-i	문제에서 주어진 함수의 적분에 해당하는 도형의 넓이를 정확히 계산할 수 있다.	10점
2-ii	문제에서 주어진 직선과 각 삼각형이 두 점에서 만나는 조건을 수식적으로 표현해서 해당하는 경우를 정확히 찾아낼 수 있다.	15점
2-iii	문제에서 주어진 직선과 각 삼각형이 두 점에서 만나는 조건을 수식적으로 표현하여 기울기의 등차수열의 공차 범위를 계산할 수 있다.	15점

1교시 · 문제 3

[문제 3] 다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 3-i] ~ [문제 3-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

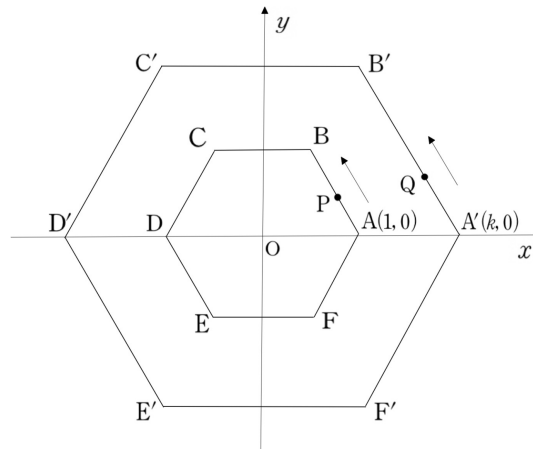
[제시문1] 삼각형 ABC의 세 각 $\angle A, \angle B, \angle C$ 의 크기를 각각 A, B, C 로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c 로 나타내기로 한다. 삼각형의 세 변의 길이와 세 각의 크기 사이에는 다음과 같은 관계가 성립하는데 이를 코사인법칙이라고 한다.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

[제시문2] 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 1이고 점 $A(1, 0)$ 을 한 꼭짓점으로 하는 정육각형 ABCDEF가 있다. 그리고 2 이상의 자연수 k 에 대하여 한 변의 길이가 k 이고 점 $A'(k, 0)$ 을 한 꼭짓점으로 하는 정육각형 $A'B'C'D'E'F'$ 가 있다. 두 꼭짓점 A와 D는 원점 O에 대하여 대칭이고, 두 꼭짓점 A'와 D'도 원점 O에 대하여 대칭이다. 점 P는 꼭짓점 A를 출발하여 시계 반대 방향으로 정육각형 ABCDEF의 변을 따라 움직이며, 출발 후 t 분 동안 이동한 거리는 $s_P(t) = t^2 + 2t$ 이다. 점 Q는 꼭짓점 A'를 출발하여 시계 반대 방향으로 정육각형 $A'B'C'D'E'F'$ 의 변을 따라 움직이며, 출발 후 t 분 동안 이동한 거리는 $s_Q(t) = 2t^2 + t$ 이다.



- i <제시문2>의 두 점 P, Q가 동시에 각각 두 꼭짓점 A, A'를 출발한 후 8분이 지났을 때 두 선분 OP와 OQ의 사이각을 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 라 하자. $k = 6$ 인 경우 $\sin \theta$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.
- ii 자연수 k 에 대하여 <제시문2>의 두 점 P, Q가 동시에 각각 두 꼭짓점 A, A'를 출발하였을 때, 출발한 후 10분 동안 두 선분 OP와 OQ의 사이각이 $\frac{\pi}{3}$ 가 되는 횟수를 a_k 라 하자. 이때

$$\sum_{j=3}^{10} a_{5j} = a_{125} + a_{625} + \cdots + a_{510}$$

의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

- iii $k = 8$ 에 대하여 <제시문2>의 세 점 O, P, Q가 일직선 상에 있지 않을 경우 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값을 α 라 하자. 두 점 P, Q가 동시에 각각 두 꼭짓점 A, A'를 출발하였을 때, 출발한 후 6분 동안 아래의 두 조건을 모두 만족하는 경우의 수를 구하고 그 이유를 논하시오.

- (1) 점 Q가 선분 $C'D'$ 위에 위치한다.
- (2) 삼각형 OPQ의 넓이가 α 가 된다.

■ 예시 답안

[문제 3-i]

두 점 P, Q가 8분 동안 이동한 거리는 각각 $s_P(8) = 80$, $s_Q(8) = 136$ 이므로, 8분 뒤 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q(1, -3\sqrt{3})$ 이다. $\overline{OP} = 1$, $\overline{OQ} = 2\sqrt{7}$, $\overline{PQ} = \sqrt{39}$, $\angle POQ = \theta$ 이므로 삼각형 OPQ에 코사인법칙을 적용하면 $39 = 1 + 28 - 4\sqrt{7} \cos \theta$ 가 되어 $\cos \theta = -\frac{5}{2\sqrt{7}}$ 이 된다. 따라서 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$ 이다.

[문제 3-ii]

선분 OQ와 정육각형 ABCDEF가 만나는 점을 Q'라고 하면 점 Q'는 꼭짓점 A를 출발하여 반시계 방향으로 정육각형 ABCDEF 위를 움직인다. 그리고 출발 후 t분 동안 이동한 거리는 $s_{Q'}(t) = \frac{2}{k}t^2 + \frac{1}{k}t$ 가 된다. 두 선분 OP와 OQ의 사잇각과 두 선분 OP와 OQ'의 사잇각이 같으므로, 두 선분 OP와 OQ'의 사잇각이 $\frac{\pi}{3}$ 일 경우는 $s_P(t) - s_{Q'}(t) = \left(1 - \frac{2}{k}\right)t^2 + \left(2 - \frac{1}{k}\right)t$ 가 어떤 정수 m에 대하여 $6m + 1$ 또는 $6m + 5$ 가 될 때만 가능하다. $k \geq 125$ 인 경우 $s_P(t) - s_{Q'}(t)$ 는 $0 \leq t \leq 10$ 에서 증가하므로 $s_P(0) - s_{Q'}(0) = 0$ 이상 $s_P(10) - s_{Q'}(10) = 120 - \frac{210}{k}$ 이하의 수 중 6으로 나누었을 때 나머지가 1 또는 5가 되는 자연수의 개수가 a_k 가 된다. 우선 $k > 210$ 인 경우 0부터 119까지의 자연수를 고려하므로

$$1, 7, 13, \dots, 115 \Rightarrow 20\text{개}$$

$$5, 11, 17, \dots, 119 \Rightarrow 20\text{개}$$

가 되어 $a_k = 40$ 이다. $k = 125$ 인 경우는 0부터 118까지의 자연수를 고려하므로 $a_{53} = 39$ 이다.

따라서, $\sum_{j=3}^{10} a_{5j} = 319$ 이다.

[문제 3-iii]

삼각형 OPQ의 넓이가 최대가 되는 조건에 대해 먼저 생각해보자.

1. 만약 점 Q가 정육각형 A'B'C'D'E'F'의 한 꼭짓점 위에 있다면, 점 P가 선분 OQ와 평행인 정육각형 ABCDEF의 두 변 위에 점 P가 놓이면 된다. 이때의 삼각형 OPQ의 넓이는 $2\sqrt{3}$ 이 된다.
2. 만약 점 Q가 정육각형 A'B'C'D'E'F'의 꼭짓점이 아닌 한 변 위에 있다면, OQ와 평행인 직선이 정육각형 ABCDEF와 한 점에서만 만나게 될 때(두 가지 경우)만 가능하다. 이 경우 삼각형 OPQ의 넓이는 $2\sqrt{3}$ 이 된다.

따라서 가능한 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값은 $2\sqrt{3}$ 이고 위 두 가지 경우에만 가능하다.

경우1. 점 Q가 꼭짓점 C' 위에 있는 경우

점 P가 선분 AB 또는 선분 DE 위에 놓이면 된다. $0 \leq t \leq 6$ 이므로 $2t^2 + t = 16$ 또는 $2t^2 + t = 64$ 중에 하나가 성립하고, 어떤 정수 m이 존재하여

$$6m \leq t^2 + 2t \leq 6m + 1 \quad \text{또는} \quad 6m + 3 \leq t^2 + 2t \leq 6m + 4 \quad (*)$$

중에 하나가 성립하면 된다. 우선 $2t^2 + t = 16$ 이면, $2 < t < 3$ 이고 $11 < t^2 + 2t = 8 + \frac{3}{2}t < 12 + \frac{1}{2}$ 이다. 그러므로 조건(*)은 $12 \leq 8 + \frac{3}{2}t < 12 + \frac{1}{2}$ 이고, 이는 $\frac{8}{3} \leq t < 3$ 이 된다. 하지만 이 경우 $16 = 2t^2 + t \geq \frac{152}{9}$ 가 되어 모순이다. 그리고 $2t^2 + t = 64$ 이면, 비슷한 방식으로 조건(*)은 $5 < t \leq \frac{16}{3}$ 이 되는데 해당 범위에서 $64 = 2t^2 + t \leq \frac{560}{9}$ 이 되어 모순이다. 따라서 0번 발생한다.

경우2. 점 Q가 꼭짓점 D' 위에 있는 경우

점 P가 선분 BC 또는 선분 EF 위에 놓이면 가능하다. $0 \leq t \leq 6$ 이므로 $2t^2 + t = 24$ 또는 $2t^2 + t = 72$ 중에 하나가 성립하고, 어떤 정수 m 이 존재하여

$$6m + 1 \leq t^2 + 2t \leq 6m + 2 \quad \text{또는} \quad 6m + 4 \leq t^2 + 2t \leq 6m + 5 \quad (**)$$

중에 하나가 성립하면 된다. 우선 $2t^2 + t = 24$ 이면, $3 < t < 4$ 이고 $16 + \frac{1}{2} < t^2 + 2t = 12 + \frac{3}{2}t < 18$ 이다. 그러므로 조건(**)은 $16 + \frac{1}{2} < 12 + \frac{3}{2}t \leq 17$ 이고, 이는 $3 < t \leq \frac{10}{3}$ 이 된다. 해당 범위에서 $2t^2 + t = 24$ 를 만족하는 t 가 1개 존재한다. 그리고 $2t^2 + t = 72$ 이면, 비슷한 방식으로 조건(**)은 $5 < t \leq \frac{16}{3}$ 이 되는데, $72 = 2t^2 + t \leq \frac{560}{9}$ 이 되어 모순이다. 따라서 1번 발생한다.

경우3. 점 Q가 선분 C'D' 위에 있으면서 양 끝점이 아닌 경우

점 P가 꼭짓점 B 또는 꼭짓점 E 위에 있을 경우 가능하다. $0 \leq t \leq 6$ 이므로 $8 < t^2 + \frac{t}{2} < 12$ 또는 $32 < t^2 + \frac{t}{2} < 36$ 둘 중 하나가 성립하고, 어떤 정수 m 이 존재하여

$$t^2 + 2t = 6m + 1 \quad \text{또는} \quad t^2 + 2t = 6m + 4 \quad (***)$$

둘 중 하나가 성립하면 된다. 우선 $8 < t^2 + \frac{t}{2} < 12$ 이면, $2 < t < 4$ 이고 $11 < t^2 + 2t < 18$ 이 되어야 하므로 조건(***)은 $t^2 + 2t = 13$ 또는 $t^2 + 2t = 16$ 이 된다. 만약 $t^2 + 2t = 13$ 이면 $\frac{2}{3} < t < \frac{10}{3}$ 이 된다. 이 범위에서 $t^2 + 2t = 13$ 을 만족하는 t 가 1개 존재한다. 만약 $t^2 + 2t = 16$ 이면 $\frac{8}{3} < t < \frac{16}{3}$ 이 된다. 이 범위에서 $t^2 + 2t = 16$ 을 만족하는 t 가 1개 존재한다. 따라서 $8 < t^2 + \frac{t}{2} < 12$ 인 경우 원하는 t 는 2개 존재한다. 그리고 $32 < t^2 + \frac{t}{2} < 36$ 이면, $5 < t < 6$ 이고 $39 + \frac{1}{2} < t^2 + 2t < 45$ 가 되어야 하므로 조건(***)은 $t^2 + 2t = 40$ 또는 $t^2 + 2t = 43$ 이 된다. 만약 $t^2 + 2t = 40$ 이면 $\frac{8}{3} < t < \frac{16}{3}$ 이 되는데, 이 경우 $40 = t^2 + 2t < \frac{352}{9}$ 이 되어 모순이다. 만약 $t^2 + 2t = 43$ 이면 $\frac{14}{3} < t < \frac{22}{3}$ 가 성립한다. 따라서 해당 범위에 $t^2 + 2t = 43$ 을 만족하는 t 가 1개 존재한다. 그러므로 $32 < t^2 + \frac{t}{2} < 36$ 인 경우 원하는 t 는 1개 존재한다. 따라서 3번 발생한다.

위의 모든 경우를 종합하면 조건 (1),(2)를 모두 만족하는 삼각형 OPQ의 넓이가 최대가 되는 경우의 수는 4번이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-i	코사인법칙을 활용하여 삼각함수의 값을 계산할 수 있다.	5점
3-ii	기하학적 정보를 수식화하여 특정한 경우의 수를 올바르게 계산할 수 있다.	10점
3-iii	기하학적 정보를 수식화하여 특정한 경우의 수를 올바르게 계산할 수 있다.	15점

2교시 · 문제 1

[문제 1] 다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 1-i] ~ [문제 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.
(30점)

제시문

[제시문1] 좌표평면 위에서 점 (a, b) 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y = m(x - a) + b$ 이다.

[제시문2] 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 실수 $t(0 \leq t \leq 1)$ 에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $P(0, t)$ 와 $Q(1, f(t))$ 라고 하자. 예를 들어, $f(x) = 1 - x$ 이고 $t = \frac{1}{3}$ 인 경우, 점 P 는 $(0, \frac{1}{3})$, 점 Q 는 $(1, \frac{2}{3})$ 이다.

- i <제시문2>에서 $f(x) = -x^3 + 1$ 일 때, 점 $(\frac{1}{3}, \frac{44}{81})$ 가 선분 PQ 위의 점이 되도록 하는 실수 $t(0 \leq t \leq 1)$ 를 구하고 그 이유를 논하시오.
- ii <제시문2>에서 $f(x) = -x^4 + 1$ 이라 하자. 이때 점 $(\frac{1}{5}, b)$ 가 적어도 하나의 선분 PQ 위에 놓이기 위한 실수 b 의 범위를 구하고 그 이유를 논하시오.
- iii <제시문2>에서 $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ -2x + 2 & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}$ 이라 하자. 서로 다른 두 자연수 $p, q \in \{3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 점 $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ 이 적어도 하나의 선분 PQ 위에 놓이도록 하는 순서쌍 (p, q) 의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 1-i]

$f(x) = -x^3 + 1$ 이므로, 어떤 $t(0 \leq t \leq 1)$ 에 대하여 <제시문2>의 두 점 P와 Q는 각각 $P(0, t)$ 그리고 $Q(1, f(t))$ 이다. 따라서, 점 $\left(\frac{1}{3}, \frac{44}{81}\right)$ 가 어떤 t 에 대하여 선분 PQ 위에 놓이는지 찾으려면, 다음 방정식을 만족하는 어떤 $t(0 \leq t \leq 1)$ 가 존재하는지 찾아야 한다.

$$\frac{44}{81} = (-t^3 + 1 - t)\frac{1}{3} + t \iff 27t^3 - 54t + 17 = (3t - 1)(9t^2 + 3t - 17) = 0$$

$9t^2 + 3t - 17 = 0$ 의 근은 $\frac{-1 \pm \sqrt{69}}{6}$ 이므로 $0 \leq t \leq 1$ 의 범위 안에 들어가지 않는다.

따라서 정답은 $t = \frac{1}{3}$.

[문제 1-ii]

$f(x) = -x^4 + 1$ 이므로, 점 $\left(\frac{1}{5}, b\right)$ 가 어떤 t 에 대하여 선분 PQ 위에 놓으려면, 방정식 $b = (-t^4 + 1 - t)\frac{1}{5} + t \iff 5b = -t^4 + 4t + 1$ 을 만족하는 근이 0과 1 사이에 있어야만 한다.

함수 $g(x)$ 를 $g(x) = -x^4 + 4x + 1$ 이라 정의할 때, 어떤 $t(0 \leq t \leq 1)$ 가 $g(t) = 5b$ 를 만족시키는지 찾아야 한다. $g'(x) = -4x^3 + 4 = -4(x-1)(x^2 + x + 1)$ 이므로 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 위에서 증가함수이다. 또한, $g(0) = 1, g(1) = 4$ 이므로 $1 \leq 5b \leq 4 \iff \frac{1}{5} \leq b \leq \frac{4}{5}$ 일 때 항상 $g(t) = 5b$ 를 만족시키는 어떤 $t(0 \leq t \leq 1)$ 가 존재하게 된다. 따라서 정답은 $\frac{1}{5} \leq b \leq \frac{4}{5}$.

[문제 1-iii]

(a, b) 가 한 선분 PQ 위에 있기 위한 필요충분조건은 어떤 $t(0 \leq t \leq 1)$ 에서 다음 방정식이 성립하는 것이다.

$$b = (f(t) - t)a + t = \begin{cases} (1-a)t + a & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right) \\ (1-3a)t + 2a & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right) \end{cases}$$

이때 $a \leq \frac{1}{3}$ 인 a 에 대하여 $(f(t) - t)a + t$ 가 항상 t 에 대하여 감소하지 않는 함수이므로, (a, b) 가 한 선분 PQ 위에 있기 위한 필요충분조건은 $a = f(0) \leq b \leq f(1) = 1 - a$ 이다. p 가 3 이상일 때 $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{3}$ 을 만족하므로, (p, q) 가 어떤 선분 위의 점이라면 $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \leq 1 - \frac{1}{p} \iff \frac{p}{p-1} \leq q \leq p$ 를 만족해야 한다. 이를 이용하여 q 를 찾으면 다음과 같다.

$p = 3$ 일 때, 서로 다른 q 는 존재하지 않는다.

$p = 4$ 일 때, $q = 3$

$p = 5$ 일 때, $q = 3, 4$

$p = 6$ 일 때, $q = 3, 4, 5$

따라서 정답은 6개이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1- i	문제의 조건을 이용하여 주어진 점이 선분 위에 있기 위한 필요충분조건이 되는 삼차 방정식을 찾을 수 있는지 평가한다. 또한, 이 삼차방정식의 계수와 사잇값 정리 등을 이용하여 삼차방정식의 특정 범위 안에서의 근을 구할 수 있는지 평가한다.	8점
1- ii	문제의 조건을 이용하여 주어진 점이 선분 위에 있기 위한 필요충분조건이 되는 사차 방정식을 찾을 수 있는지 평가한다. 또한, 이 사차방정식에 대응되는 사차함수가 어떤 구간에서 증가하는지 미분계수를 이용하여 구할 수 있는지 평가한다. 그리고 이를 이용하여 정확한 b 의 범위를 구할 수 있는지 평가한다.	11점
1-iii	문제의 조건을 이용하여 순서쌍 (p, q) 가 선분 위에 있기 위한 필요충분조건이 되는 부 등식을 찾을 수 있는지 평가한다. 이를 이용하여 순서쌍의 개수를 정확히 찾을 수 있는지 평가한다.	11점

2교시 · 문제 2

[문제 2]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [문제 2- i] ~ [문제 2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

<제시문1>

미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a) = 0$ 이고 $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가

- (1) 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$ 를 갖는다.
- (2) 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$ 를 갖는다.

<제시문2>

함수 $f(x)$ 가 두 실수 a, b 를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분은 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

<제시문3>

연속함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 는 $g(x+4) = g(x)$ 와

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (-2 \leq x \leq 0) \\ f(-x) & (0 < x < 2) \end{cases}$$

를 만족한다. 그리고 함수 $h(x) = g(x-1)|g(x) - g(x-1)|$ 로 정의한다.

예를 들어, $f(x) = -x - \frac{1}{2}$ 일 때, $g(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$ 과 $g(-\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$ 이므로 $h(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$ 이다.

- i [문제 2- i] <제시문3>에서 $f(x) = x + 1$ 일 때, $2 \leq x \leq 2026$ 인 x 에 대하여 $\int_1^x h(t) dt = 0$ 을 만족하는 x 의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)
- ii [문제 2- ii] <제시문3>에서 $f(x) = (x+1)^2$ 일 때, 정적분 $\int_0^{\frac{2025}{2}} h(x) dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)
- iii [문제 2- iii] <제시문3>에서 $f(x) = ax + b$ (단, a, b 는 $1 \leq a < b \leq 10$ 을 만족하는 자연수)이고, 정적분 $\int_{2023}^{2025} h(x) dx$ 의 값이 0보다 작다고 한다. 이때 가능한 순서쌍 (a, b) 를 모두 구하고 그 이유를 논하시오. (10점)

■ 예시 답안

[문제 2-i]

$g(x+4) = g(x)$ 이므로 $h(x+4) = h(x)$ 이다.

또한, $|g(x) - g(x-1)| = \begin{cases} |1-2x| & (0 \leq x \leq 1) \\ 1 & (1 < x < 2) \end{cases}$ 이므로, $h(x) = \begin{cases} x|1-2x| & (0 \leq x \leq 1) \\ 2-x & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 이다.

마찬가지로, $h(x) = \begin{cases} (2-x)|5-2x| & (2 \leq x \leq 3) \\ x-4 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$ 이다.

이제 $H(x) = \int_1^x h(t) dt$ 라고 하면 $H'(x) = h(x)$ 이므로, 함수 $H(x)$ 는 다음 표와 같은 증감표를 가진다.

x	1	...	2	...	3	...	4	...	5
$H'(x) = h(x)$	1	+	0	-	-1	-	0	+	1
$H(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

또한 $\alpha = \int_4^5 h(t) dt = \int_0^1 h(t) dt = \int_0^1 t|1-2t| dt = \frac{1}{4}$ 이고 $\beta = \int_1^2 h(t) dt = \frac{1}{2}$ 이다.

그리고 $\int_2^3 h(t) dt = -\alpha = -\frac{1}{4}$ 이고 $\int_3^4 h(t) dt = -\beta = -\frac{1}{2}$ 이다. 이로부터

$$H(1) = 0, H(2) = \frac{1}{2}, H(3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, H(4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}, H(5) = 0$$

을 얻게 된다. 따라서, $\int_1^5 h(t) dt = 0$ 이고 모든 정수 k 에 대해 $\int_1^{4k+1} h(t) dt = 0$ 이다.

위의 증감표와 사잇값 정리로부터 닫힌구간 $[3, 4]$ 에서 $\int_1^x h(t) dt = 0$ 를 만족하는 유일한 x 가 존재한다.

따라서, 모든 정수 k 에 대해 구간 $(4k-3, 4k+1]$ 위에 $\int_1^x h(t) dt = 0$ 를 만족하는 x 가 정확히 두 개 존재한다.

이로부터 닫힌구간 $[2, 2026]$ 에서 $\int_1^x h(t) dt = 0$ 를 만족하는 x 는 $506 \times 2 = 1012$ 개 존재한다.

[문제 2-ii]

$f(x) = (x+1)^2$ 일 때, $g(x+2) = g(x)$ 이고 $h(x+2) = h(x)$ 이다.

그리고 $|g(x) - g(x-1)| = \begin{cases} |1-2x| & (0 \leq x \leq 1) \\ |3-2x| & (1 < x < 2) \end{cases}$ 이므로 $h(x) = \begin{cases} x^2 |1-2x| & (0 \leq x \leq 1) \\ (x-2)^2 |3-2x| & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 이다.

구하고자 하는 정적분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2025}{2}} h(x) dx &= \int_0^2 h(x) dx + \int_2^4 h(x) dx + \cdots + \int_{1010}^{1012} h(x) dx + \int_{1012}^{\frac{2025}{2}} h(x) dx \\ &= 506 \left(\int_0^1 h(x) dx + \int_1^2 h(x) dx \right) + \int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx = \int_{\frac{3}{2}}^2 h(x) dx = \frac{1}{96} \text{과 } \int_{\frac{1}{2}}^1 h(x) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} h(x) dx = \frac{17}{96} \text{이므로,}$$

$$\int_0^{\frac{2025}{2}} h(x) dx = 506 \left(\frac{1}{96} + \frac{17}{96} + \frac{17}{96} + \frac{1}{96} \right) + \frac{1}{96} = \frac{18217}{96} \text{이다.}$$

[문제 2-iii]

$g(x+4) = g(x)$ 이므로 $h(x+4) = h(x)$ 를 얻게 되어 $\int_{2023}^{2025} h(x) dx = \int_{-1}^1 h(x) dx$ 이다.

$|g(x) - g(x-1)| = \begin{cases} a & (-1 \leq x \leq 0) \\ a|1-2x| & (0 < x < 1) \end{cases}$ 이므로 $h(x) = \begin{cases} a(ax + (b-a)) & (-1 \leq x \leq 0) \\ a|1-2x|(ax + (b-a)) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$ 이다.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 h(x) dx &= \int_{-1}^0 h(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 h(x) dx \\ &= a \left[\left(b - \frac{3}{2}a \right) + \left(-\frac{5}{24}a + \frac{1}{4}b \right) + \left(-\frac{1}{24}a + \frac{1}{4}b \right) \right] \\ &= a \left(-\frac{7}{4}a + \frac{3}{2}b \right) < 0 \end{aligned}$$

으로부터 $a < b < \frac{7}{6}a$ 를 얻게 된다. 이를 만족하는 순서쌍은 (7, 8), (8, 9), (9, 10)이다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
문제 2- i	평행이동과 대칭이동을 통해 얻어진 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있고, 미분과 적분의 관계를 통해 함수의 증가, 감소를 판단할 수 있다.	10점
문제 2- ii	평행이동과 대칭이동을 통해 얻어진 함수의 정적분 값을 구할 수 있다.	10점
문제 2- iii	평행이동과 대칭이동을 통해 얻어진 함수의 정적분 값을 구할 수 있다.	10점

2교시 · 문제 3

[문제 3]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [문제 3- i] ~ [문제 3-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

제시문

<제시문1>

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & (x \leq 1) \\ x + 1 & (1 < x \leq \frac{3}{2}) \\ -x + 4 & (\frac{3}{2} < x \leq 2) \\ -x^2 + 3x & (x > 2) \end{cases}$ 에 대하여 집합 D_1 과 D_2 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$D_1 = \{x \mid f(f(x)) \leq f(x) + 1\}$ 이고 $D_2 = \{x \mid f(f(x)) \leq f(x)\}$ 이다.

<제시문2>

좌표평면 위에 놓여있는 원 C 는 원점이 중심이고 반지름이 1이다. <제시문1>의 함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 P 와 점 $N(0, 1)$ 을 지나는 직선이 원 C 와 만나는 점 중 N 이 아닌 점을 R 이라고 한다. 또한 점 P 에서 원 C 에 그은 두 접선과 원의 교점 Q 중에서 세 점 N, Q, R 이 시계 방향으로 놓이도록 점 Q 를 잡는다. 만약 직선 NP 가 원에 접하는 경우에는 점 R 과 점 Q 를 모두 점 N 으로 정의한다.

<제시문3>

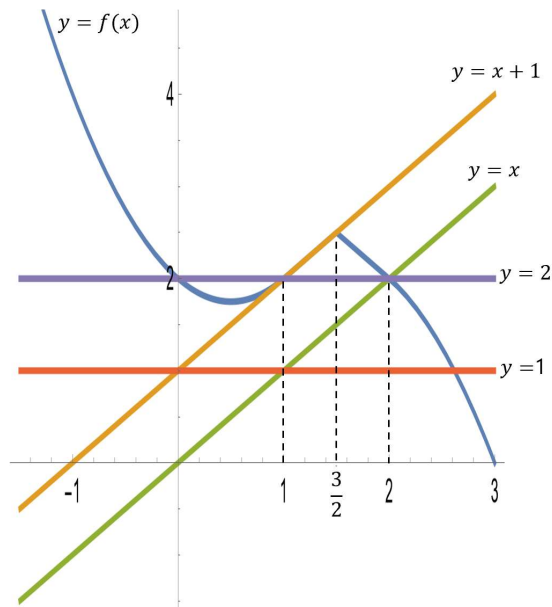
함수 $h(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $h(a) \neq h(b)$ 이면, $h(a)$ 와 $h(b)$ 사이의 임의의 값 k 에 대하여 $h(c) = k$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

- i [문제 3- i] <제시문1>에서 집합 $D_1 = (-\infty, a]$ 이고 집합 $D_2 = (-\infty, b] \cup [c, d]$ 일 때, a, b, c, d 의 값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오.
- ii [문제 3- ii] <제시문1>과 <제시문2>에서 점 P 의 x 좌표가 집합 D_1 에 속한다고 하자. 점 R 이 될 수 있는 모든 점들로 이루어진 호의 길이를 θ 라고 할 때, $\tan(\frac{\theta}{2})$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.
- iii [문제 3- iii] <제시문1>과 <제시문2>에서 직선 NP 의 기울기가 m 이고 점 P 의 x 좌표가 집합 $D_2 \cap (1, \infty)$ 에 속한다고 하자. 삼각형 NQR 이 선분 QR 을 빗변으로 하는 직각삼각형이 되었을 때, m 은 삼차방정식 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ 의 근이다. 이때 유리수 p, q, r 을 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 3-i]

곡선 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



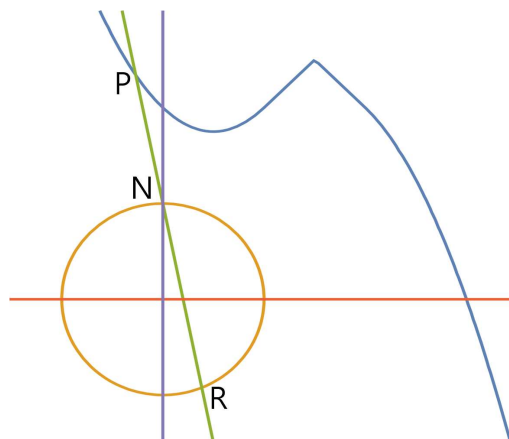
$f(x)$ 를 t 로 치환하면, $f(f(x)) \leq f(x) + 1$ 이라는 조건은 $f(t) \leq t + 1$ 이 된다. 곡선 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x + 1$ 의 그래프를 비교해보면, $f(t) \leq t + 1$ 이 되는 t 의 범위는 $t \geq 1$ 임을 알 수 있다. <제시문1>에 주어진 함수의 정의로부터 $f(x) \geq 1$ 이 되는 x 의 범위를 조사해 보면, $-x^2 + 3x = 1$ 의 두 실근 중에서 더 큰 실근을 a 라고 했을 때, $x \leq a$ 가 된다. 여기서 $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ 이므로, 집합 $D_1 = (-\infty, a]$ 일 때, $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ 이다.

비슷한 방법으로, $f(f(x)) \leq f(x)$ 라는 조건은 $f(t) \leq t$ 이 된다. 곡선 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프를 비교해보면, $f(t) \leq t$ 이 되는 t 의 범위는 $t \geq 2$ 임을 알 수 있다. <제시문1>에 주어진 함수의 정의로부터 $f(x) \geq 2$ 이 되는 x 의 범위를 조사해 보면, $x \leq 0$ 이거나 $1 \leq x \leq 2$ 임을 알 수 있다. 따라서 집합 $D_2 = (-\infty, b] \cup [c, d]$ 일 때, $b = 0$, $c = 1$, $d = 2$ 가 된다.

답: $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 2$

[문제 3-ii]

문제에 주어진 상황을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



점 N과 점 P를 지나는 직선의 기울기를 m 이라고 하자. 먼저 점 $(0, 1)$ 을 지나고 $y = x^2 - x + 2$ 에 접하는 직선을 찾아보자. 접점을 $(t, t^2 - t + 2)$ 라 하고 접선의 방정식을 구해보면, $y = (2t - 1)(x - t) + t^2 - t + 2$ 가 되는데, 이 접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로, $t = \pm 1$ 을 얻는다. 이로부터 접선의 기울기는 -3 또는 1 이 된다. 따라서 점 P의 x 좌표가 0 이 아니고, 1 이하인 경우에, 직선 $y = mx + 1$ 과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점이 생기도록 하는 m 의 범위는 $m \geq 1$ 또는 $m \leq -3$ 임을 알 수 있다. 한편 점 P가 $(0, 2)$ 인 경우에 점 R은 $(0, -1)$ 이 된다.

곡선 $y = f(x)$ 의 그래프를 관찰해보면, 점 P의 x 좌표가 $(1, 2]$ 에 속한 경우에는 직선 NP의 기울기 m 이 $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ 을 만족하게 된다. 또한 $2 < x \leq a$ (여기서 $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$)일 때, 직선 $y = mx + 1$ 과 곡선 $y = -x^2 + 3x$ 의 교점이 생기도록 하는 m 의 범위는 $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다.

따라서 점 P는 $(0, 2)$ 가 아니고 점 P의 x 좌표가 집합 D_1 에 속하는 경우, 직선 NP의 기울기 m 은 $m \leq -3$ 또는 $m \geq 0$ 임을 알 수 있다. 두 점 R_0 과 R_1 을 $R_0(-1, 0)$, $R_1(0, -1)$ 로 놓고, R_2 를 $m = -3$ 일 때, 대응하는 점이라 하자. $m \geq 0$ 일 때, 점 R은 N과 R_0 , R_1 을 시계 반대 방향으로 연결하는 호 위를 움직이고, $m \leq -3$ 일 때, 점 R은 R_1 과 R_2 를 시계 반대 방향으로 연결하는 호 위를 움직인다. 따라서 문제에서 요구하는 θ 는 N과 R_2 를 연결하는 더 긴 쪽의 호의 길이와 같게 되므로 $\pi + \widehat{R_1 R_2}$ 이 된다. 따라서

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\widehat{R_1 R_2}}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \angle ONR_1\right)$$

이고 $\frac{\pi}{2} + \angle ONR_1$ 은 x 축의 양의 방향과 직선 $y = -3x + 1$ 이 이루는 각의 크기와 같으므로, $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \angle ONR_1\right) = -3$ 임을 알 수 있다.

답: -3

[문제 3-iii]

점 P의 x 좌표가 $D_2 \cap (1, \infty) = (1, 2]$ 에 속하는 경우, 기울기가 m 인 직선 NP의 방정식 $y = mx + 1$ 과 원의 방정식 $x^2 + y^2 = 1$ 을 연립하면, 점 R의 좌표는 $\left(-\frac{2m}{1+m^2}, \frac{1-m^2}{1+m^2}\right)$ 임을 알 수 있다. 삼각형 NQR이 선분 QR을 빗변으로 하는 직각삼각형이면 선분 QR은 원의 지름이다. 선분 QR이 지름이 되는 경우에, 점 Q는 점 R의 원점 대칭점이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{2m}{1+m^2}, \frac{m^2-1}{m^2+1}\right)$ 이 된다. 원 위의 점 Q에서의 접선과 직선 NP의

교점이 곡선 $y = f(x)$ 위에 놓여있어야 한다. 교점의 좌표를 구하면, $\left(\frac{2}{m(1+m^2)}, \frac{m^2+3}{m^2+1}\right)$ 이 되고, 이 좌표값을 $y = x + 1$ 에 대입하고 정리하면, $m = 1$ 을 얻는다. 이때 교점의 x 좌표는 1 이므로, $D_2 \cap (1, \infty) = (1, 2]$ 에 속하지 않게 된다.

이제 [문제 3-ii] 풀이에서 $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ 인 m 에 대하여, $\left(\frac{2}{m(1+m^2)}, \frac{m^2+3}{m^2+1}\right)$ 의 좌표값을 $y = -x + 4$ 에 대입하고 정리하면, $3m^3 + m - 2 = 0$ 을 얻는다. $h(m) = 3m^3 + m - 2$ 로 두면, $h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8} < 0$ 이고 $h(1) = 2 > 0$ 이므로, 사잇값의 정리 (<제시문3>)에 의해 $h(m) = 0$ 의 실근 β 가 열린구간 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 에 존재하게 된다.

또한 $m = \beta$ 에 대응하는 점 P의 x 좌표는 열린구간 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 에 속하게 된다. 따라서 β 가 만족하는 삼차방정식은 $x^3 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ 이므로, $p = 0$, $q = \frac{1}{3}$, $r = -\frac{2}{3}$ 임을 알 수 있다.

답: $p = 0$, $q = \frac{1}{3}$, $r = -\frac{2}{3}$

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
문제 3- i	제시문에 주어진 함수의 합성함수와 관련된 부등식의 해로 이루어진 집합을 제대로 구할 수 있다.	10점
문제 3- ii	제시문에 주어진 함수의 그래프를 그리고, 그래프 밖에 있는 한 원의 특정한 점을 지나는 직선이 그래프의 특정한 부분을 지날 때, 원에 생기는 호의 길이를 제대로 구할 수 있다.	15점
문제 3-iii	제시문에 주어진 함수의 그래프 위의 한 점에서 그래프 밖에 있는 한 원의 특정한 점을 지나는 직선과 원에 접선을 그었을 때 생기는 삼각형이 직각삼각형이 되는 경우를 제대로 찾을 수 있다.	15점

3교시 · 문제 1

[문제 1]

다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 1- i] ~ [문제 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

<제시문1>

실수 A, B, P, Q 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + Ax + B & (x < 1) \\ x^2 + Px + Q & (x \geq 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 는 실수 전체 집합에서 미분가능하고, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = m$ 이 서로 다른 두 점에 서만 만나도록 하는 모든 실수 m 의 집합은 $\{-6, 2\}$ 이다.

<제시문2>

실수 a, b, c, p, q 에 대하여 함수 $g(x)$ 가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 + ax^2 + bx + c & (x \leq 0) \\ x^2 + px + q & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 는 아래의 조건을 모두 만족한다.

- (1) 함수 $g(x)$ 는 연속함수이다.
- (2) 함수 $g(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극소가 된다.
- (3) 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = m$ 이 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 모든 실수 m 의 집합은 열린구간 $(1, \beta)$ 이다.
- (4) $p + c = a + b$ 가 성립한다.
- (5) 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 점 $\left(1, -\frac{19}{2}\right)$ 를 지난다.

- i [문제 1- i] <제시문1>에서 실수 A, B, P, Q 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.
- ii [문제 1- ii] <제시문2>에서 실수 a, b, c, p, q 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.
- iii [문제 1-iii] <제시문 2>에서 실수 β 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 1-i]

$x = 1$ 에서 미분가능하므로 다음이 성립한다.

$$-2 + A = 2 + P \quad \text{----- (i)}$$

$x = 1$ 에서 연속이므로 다음이 성립한다.

$$-1 + A + B = 1 + P + Q \quad \text{----- (ii)}$$

$y = f(x)$ 가 $y = t$ 와 두 점에서 만나기 위한 t 가 -6 과 2 이므로

$x < 1$ 범위에서 $-x^2 + Ax + B = -\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + 2$ 이어야 한다. 따라서 $B = 2 - \frac{A^2}{4}$ 이 성립한다.

$x > 1$ 범위에서 $x^2 + Px + Q = \left(x + \frac{P}{2}\right)^2 - 6$ 이어야 한다. 따라서 $Q = \frac{P^2}{4} - 6$ 이 성립한다. 또한 극대점

이 $x < 1$ 에서, 극소점이 $x \geq 1$ 에서 존재하려면 $\frac{A}{2} < 1$ 과 $-\frac{P}{2} > 1$ 이 성립하여야 한다. 얻어낸 두 관계식을 위의 식 (ii)에 대입하면

$$A - \frac{A^2}{4} + 2 - 1 = 1 + P + \frac{P^2}{4} - 6 \text{이 성립한다. 즉,}$$

$$A - P - \frac{A^2}{4} - \frac{P^2}{4} = -6 \text{이다.}$$

위의 식 (i)의 $A - P = 4$ 관계식을 대입하면 $A^2 + P^2 = 40$ 이 성립한다. 두 식을 통해 $P^2 + 8P + 16 + P^2 = 40$ 이 되고, 정리하면 $P^2 + 4P - 12 = 0$ 이다. $(P + 6)(P - 2) = 0$ 인데, 이 중 음수인 P 를 택하면 $P = -6$ 이다. 이를 대입하여 $A = -2$ 임을 알 수 있고, 위 관계식에 대입하여 $Q = 3$ 과 $B = 1$ 을 얻는다.

[문제 1-ii]

점 $x = 0$ 에서 연속이므로 $c = q$ 가 성립한다.

$x = -2$ 에서 극소가 되므로 $g'(-2) = 0$ 이다. $g'(x) = -3x^2 + 2ax + b$ 이므로 $-12 - 4a + b = 0$ 이다.

(3)에서 그래프 개형을 통해 극솟값이 1이 되어야 함을 알 수 있다. 따라서 $1 = g(-2) = 8 + 4a - 2b + c$ 이 성립한다.

(5)에서 $1 + p + q = -\frac{19}{2}$ 이 된다. 즉 $p + q = -\frac{21}{2}$ 가 되고 $c = q$ 임을 활용하고 (4)의 식과 합치면 $a + b = -\frac{21}{2}$ 이다.

앞에서 구한 $4a - b = -12$ 와 연립하여 풀면 $5a = -\frac{21}{2} - 12 = -\frac{45}{2}$ 이 돼서 $a = -\frac{9}{2}$ 이다. 이를 앞의 식 $a + b = -\frac{21}{2}$ 에 대입하면 $b = -6$ 이 된다.

이제 $8 + 4a - 2b + c = 1$ 에 대입하면, $c = -1$ 가 됨을 알 수 있다. 따라서 $q = -1$ 이고 $p = -\frac{19}{2}$ 이다.

[문제 1-iii]

앞에서 $x < 0$ 범위에서 $g(x) = -x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 6x - 1$ 임을 확인하였다.

$g'(x) = -3x^2 - 9x - 6$ 이므로 $g'(x) = 0$ 이 될 때를 구하면 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 에서 $x = -2$ 와 $x = -1$ 이고 따라서 $x = -1$ 에서 극댓값 $g(-1) = 1 - \frac{9}{2} + 6 - 1 = \frac{3}{2}$ 를 갖는다. (3)의 정보와 그래프 개형을 통해 $\beta = \frac{3}{2}$ 임을 알 수 있다.

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
1 - i	주어진 이차함수가 직선과 두 점에서 만나는 조건과 $x = 1$ 에서 미분가능한 조건을 활용하여 다항식을 규명할 수 있다.	10점
1 - ii	주어진 삼차함수가 직선과 네 점에서 만나는 조건과 $x = 0$ 에서 연속인 조건을 활용하여 다항식을 규명할 수 있다.	10점
1 - iii	삼차함수의 극댓값을 계산하여 주어진 값 β 를 계산할 수 있다.	10점

3교시 · 문제 2

[문제 2]

다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 2- i] ~ [문제 2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

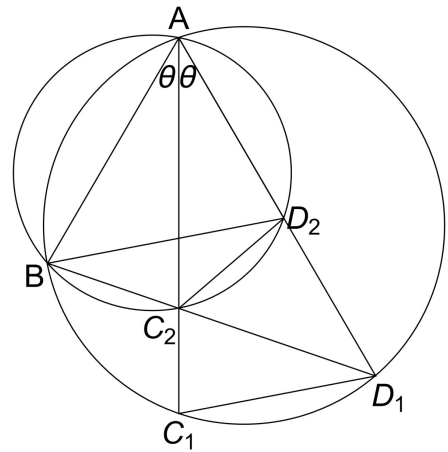
제시문

<제시문1>

한 원 위에 세 점 A, B, D_1 이 시계 반대 방향으로 놓여져 있고, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 인 θ 에 대하여, $\angle BAD_1 = 2\theta$ 이다. 각 BAD_1 의 이등분선이 원과 만나는 점 중에서 점 A가 아닌 점을 점 C_1 이라고 하자.

<제시문2>

<제시문1>의 삼각형 ABD_1 을 생각하자. 그림과 같이 2 이상의 자연수 n 에 대하여 직선 AB와 직선 $C_{n-1}D_{n-1}$ 이 서로 평행이 아닐 때, 두 점 C_n 과 D_n 을 다음과 같이 귀납적으로 정의하자. 점 B를 지나고 직선 $C_{n-1}D_{n-1}$ 과 평행한 직선이 직선 AD_1 과 만나는 점을 점 D_n 이라 하고, 각 BAD_n 의 이등분선이 삼각형 ABD_n 의 외접원과 만나는 점 중에서 점 A가 아닌 점을 점 C_n 으로 정의한다.



- i [문제 2- i] <제시문1>에서 $\overline{AB} : \overline{AD_1} = m : 1$ 이라고 하자. 선분 AB와 선분 C_1D_1 이 서로 평행일 때, m 과 θ 의 관계식을 구하고 그 이유를 논하시오.
- ii [문제 2- ii] <제시문2>에서 $\overline{AB} = \overline{AD_1} = 2$ 이고, 직선 AB와 직선 C_1D_1 의 교점을 점 P라고 하자. 이때 $\overline{AP}$ 를 $\tan \theta$ 에 관한 식으로 표현하고, 그 이유를 논하시오.
- iii [문제 2- iii] <제시문2>에서 $\overline{AB} = 2$, $\overline{AD_1} = 3$ 이고 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 라고 하자. 이때 $\angle BAD_n = \frac{2}{3}\pi$ 가 되는 자연수 n 의 최솟값과 그때 $\overline{AD_{n-1}}$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 2-i]

주어진 조건으로부터 선분 AB 와 선분 C_1D_1 이 서로 평행하므로, 각 AC_1D_1 과 각 BAC_1 은 엇각으로 같게 되어 크기가 θ 가 된다. 각 AC_1D_1 과 각 ABD_1 은 호 AD_1 에 대한 원주각으로 서로 같게 되므로, 크기가 θ 가 된다. 또한 $\angle C_1AD_1 = \theta$ 이므로, 호 C_1D_1 에 대한 원주각인 각 C_1BD_1 의 크기도 θ 가 된다. 마찬가지로 $\angle BAC_1 = \theta$ 이므로, 호 BC_1 에 대한 원주각인 각 BD_1C_1 의 크기도 θ 가 된다. 사각형 ABC_1D_1 이 원에 내접하므로, $\angle ABC_1 + \angle AD_1C_1 = 2\theta + (\theta + \alpha) = \pi$ 가 성립한다. 여기서 $\alpha = \angle AD_1B$ 이다. 따라서 $\sin \alpha = \sin(3\theta)$ 임을 알 수 있다. 이제 삼각형 ABD_1 에 사인법칙을 적용하면, $\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AD_1}{\sin \theta}$ 이므로, $\frac{m}{\sin(3\theta)} = \frac{1}{\sin \theta}$ 가 되어 $\sin(3\theta) = m \sin \theta$ 를 얻는다.

답: $\sin(3\theta) = m \sin \theta$

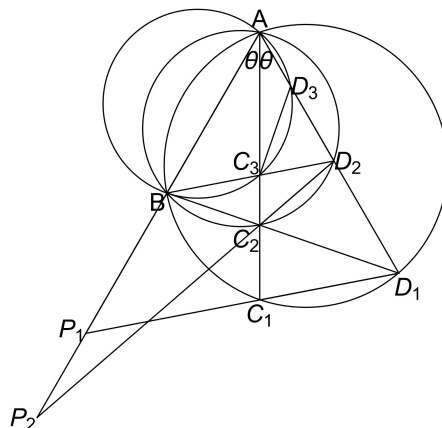
[문제 2-ii]

주어진 조건으로부터 삼각형 ABC_1 은 삼각형 AD_1C_1 과 서로 합동이 된다. 따라서 $\angle ABC_1 = \angle AD_1C_1$ 이고, 사각형 ABC_1D_1 이 원에 내접하므로, $\angle ABC_1 + \angle AD_1C_1 = \pi$ 이다. 이로부터 $\angle ABC_1 = \angle AD_1C_1 = \frac{\pi}{2}$ 임을 알 수 있다. 따라서 삼각형 ABC_1 은 삼각형 AD_1C_1 과 서로 합동인 직각삼각형이다. 이로부터 $\overline{C_1D_1} = 2 \tan \theta$ 를 얻는다. $x = \overline{AP}$, $t = \tan \theta$ 라고 두자. 삼각형 APD_1 에서 각 PAD_1 의 이등분선과 선분 PD_1 의 교점이 C_1 이므로, $\overline{PC_1} : \overline{C_1D_1} = \overline{AP} : \overline{AD_1} = x : 2$ 가 성립하고 $\overline{C_1D_1} = 2t$ 이므로 $\overline{PC_1} = xt$ 가 된다. 이제 점 P 으로부터 원에 그은 할선들의 길이 사이의 관계로부터, $(x-2) \cdot x = xt \cdot (x+2)t$ 이므로, $x = \frac{2(1+t^2)}{1-t^2}$ 을 얻는다. 따라서 $\overline{AP} = \frac{2(1+\tan^2 \theta)}{1-\tan^2 \theta}$ 이다.

답: $\frac{2(1+\tan^2 \theta)}{1-\tan^2 \theta}$

[문제 2-iii]

문제에 주어진 점들을 좌표평면에서 잡고 직선 AB 의 기울기가 양수인 경우를 생각하자. [문제 2-i]의 결과로부터 $\overline{AB} : \overline{AD_1} = 2 : 1$ 인 경우에 선분 AB 와 선분 C_nD_n 이 서로 평행하게 됨을 주목하자. $\overline{AB} : \overline{AD_1} = \frac{2}{3} : 1$ 이므로 선분 AB 의 기울기는 선분 C_1D_1 의 기울기보다 더 큼을 알 수 있다. (다음 그림 참조)



점 P_1 을 직선 AB 와 직선 C_1D_1 의 교점으로 놓고, 선분 AP_1 의 길이를 x 라고 하자. 삼각형 AP_1D_1 에 코사인법칙을 적용하면, $\overline{P_1D_1} = \sqrt{x^2 - 3x + 9}$ 를 얻는다. 점 C_1 은 선분 P_1D_1 을 $x : 3$ 으로 내분하는 점이므로, $\overline{P_1C_1} =$

$\sqrt{x^2 - 3x + 9} \cdot \frac{x}{x+3}$ 이다. 이제 점 P_1 으로부터 삼각형 ABD_1 의 외접원에 그은 할선들의 길이 사이의 관계로부터, $(x-2) \cdot x = \sqrt{x^2 - 3x + 9} \cdot \frac{x}{x+3} \cdot \sqrt{x^2 - 3x + 9}$ 이므로 이를 정리하면, $x = \frac{15}{4}$ 를 얻는다. 삼각형 ABD_2 와 삼각형 AP_1D_1 이 서로 닮아 있으므로, 비례식 $\overline{AD_2} : 3 = 2 : \frac{15}{4}$ 가 성립하고, 이로부터 $\overline{AD_2} = \frac{8}{5}$ 을 얻는다. 이제 $\overline{AB} : \overline{AD_2} = 1.25 : 1$ 이므로 선분 AB 의 기울기는 선분 C_2D_2 의 기울기보다 더 크음을 알 수 있다. 이제 점 P_2 를 직선 AB 와 직선 C_2D_2 의 교점으로 놓고, 선분 AP_2 의 길이를 t 라고 하자. 삼각형 AP_2D_2 에 코사인법칙을 적용하면, $\overline{P_2D_2} = \frac{\sqrt{25t^2 - 40t + 64}}{5}$ 를 얻는다. 점 C_2 은 선분 P_2D_2 을 $t : \frac{8}{5}$ 로 내분하는 점이므로, $\overline{P_2C_2} = \frac{\sqrt{25t^2 - 40t + 64}}{5} \cdot \frac{t}{t+1.6}$ 이다. 이제 점 P_2 으로부터 삼각형 ABD_2 의 외접원에 그은 할선들의 길이 사이의 관계로부터, $t = \frac{24}{5}$ 를 얻는다. 삼각형 ABD_3 과 삼각형 AP_2D_2 가 서로 닮아있으므로, 비례식 $\overline{AD_3} : \frac{8}{5} = 2 : \frac{24}{5}$ 가 성립하고, 이로부터 $\overline{AD_3} = \frac{2}{3}$ 을 얻는다. 이제 $\overline{AB} : \overline{AD_3} = 3 : 1$ 이므로 선분 AB 의 기울기는 선분 C_3D_3 의 기울기보다 더 작아짐을 알 수 있다. 따라서 직선 AD_1 위에 점 D_4 와 점 D_3 사이에 점 A 가 위치하게 된다. 따라서 $\angle BAD_n = \frac{2\pi}{3}$ 가 되는 자연수 n 의 최솟값은 4이고 그때 $\overline{AD_3} = \frac{2}{3}$ 이다.

답: $\angle BAD_n = \frac{2\pi}{3}$ 가 되는 자연수 n 의 최솟값: 4, $\overline{AD_3} = \frac{2}{3}$

■ 채점 기준

하위문항	채점 기준	배점
문제 2- i	제시문에 주어진 두 선분 AB 와 CD 가 서로 평행이 되는 조건을 사인법칙을 활용하여 제대로 구할 수 있다.	10점
문제 2- ii	선분 AP 의 길이를 코사인법칙을 활용하여 제대로 구할 수 있다.	5점
문제 2- iii	귀납적으로 정의된 두 점 C_n 과 D_n 을 제대로 구하고, 선분 AB 의 기울기와 선분 C_nD_n 의 기울기의 비가 작아지는 최소의 n 을 구하고, 그때 선분 AD_{n-1} 의 길이를 제대로 구할 수 있다.	15점

3교시 · 문제 3

[문제 3]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [문제 3 - i] ~ [문제 3 - iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

제시문

[제시문1] 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 보다 크면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 L 에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ 과 같이 나타내고, L 을 함수 $f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 우극한이라고 한다.

또한, 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 보다 작으면서 a 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값이 일정한 값 M 에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = M$ 과 같이 나타내고, M 을 함수 $f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 좌극한이라고 한다.

[제시문2] 주어진 실수 x 에 대하여, 집합 $\{1, 2, 3\}$ 에서 서로 다른 세 수 a, b, c 를 선택하여 $(x^2 - ax + b)(x - c)$ 의 값이 최대가 되도록 하고 이 최댓값을 $g(x)$ 로 정의한다. 이 경우 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이 된다.

예를 들어, $x = 1$ 이면 $(1 - a + b)(1 - c)$ 의 값은 $(a, b, c) = (3, 1, 2)$ 일 경우 최대이고 $g(1) = 1$ 이다. $x = 0$ 이면 $b(-c)$ 의 값은 $(a, b, c) = (3, 1, 2)$ 또는 $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ 일 경우 최대이고 $g(0) = -2$ 이다.

[제시문3] 실수 r 에 대하여 좌표평면 위의 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 12이고 네 꼭짓점은 다음과 같다.

$$A(-2, r), \quad B(-2, r + 12), \quad C(-14, r + 12), \quad D(-14, r)$$

i [문제 3 - i] <제시문2>의 함수 $g(x)$ 에 대하여 정적분 $\int_{-1}^1 g(x)dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

ii [문제 3 - ii] <제시문2>의 함수 $g(x)$ 가 열린구간 $\left(x_0 - \frac{1}{2}, x_0\right)$ 와 $\left(x_0, x_0 + \frac{1}{2}\right)$ 에서 미분가능하도록 하는 실수 x_0 에 대하여

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0-} g'(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+} g'(x) \right|$$

이 될 수 있는 값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오.

iii [문제 3 - iii] 점 $Q(x_1, y_1)$ 은 <제시문2>의 함수 $y = g(x)$ 의 그래프 위를 움직이고, 점 $R(x_2, y_2)$ 는 <제시문3>의 r 에 관한 정사각형 ABCD의 네 변 위를 움직인다. 아래의 두 조건 (1), (2)를 모두 만족하는 두 점 $Q(x_1, y_1)$ 과 $R(x_2, y_2)$ 가 존재하면 정사각형 ABCD의 네 변 위에서 점 $R(x_2, y_2)$ 가 놓일 수 있는 부분의 길이를 $k(r)$ 이라 하고, 그러한 점들이 존재하지 않으면 $k(r) = 0$ 으로 정의한다.

$$(1) 0 \leq x_1 \leq 1$$

$$(2) y_1(x_2 - 1) + y_2(x_1 + 1) = 2(x_1 + x_2)$$

이때 $k(r)$ 의 최댓값을 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 3 - i]

실수 x 와 $b > 0$ 가 고정되었을 경우

$$x^3 - ax^2 - cx^2 + bx + acx - bc = \{x^3 + bx + acx - (a+c)x^2\} - bc$$

가 최댓값을 가지려면, $x^3 + bx + acx - (a+c)x^2$ 가 고정된 값이므로 $a > c$ 가 성립하여야 한다. 이 경우 (a, b, c) 는 $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 3, 1)$ 세 가지 중 하나이다. 따라서 x 가 주어졌을 때,

$$P(x) = (x^2 - 3x + 1)(x - 2) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$$

$$Q(x) = (x^2 - 3x + 2)(x - 1) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$R(x) = (x^2 - 2x + 3)(x - 1) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$$

중 가장 큰 값이 $g(x)$ 가 된다. 세 부등식

$$P(x) > Q(x), \quad Q(x) > R(x), \quad P(x) > R(x)$$

은 모두 이차부등식이 되며, 이를 풀면 각각

$$0 < x < 2, \quad -1 < x < 1, \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

이 된다. 따라서 $P(x)$ 의 값이 가장 큰 경우는 $0 < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ 이고, $Q(x)$ 의 값이 가장 큰 경우는 $-1 < x < 0$ 이고, $R(x)$ 의 값이 가장 큰 경우는 $x < -1$ 또는 $x > \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ 이다. 함수 $g(x)$ 가 모든 실수에서 연속임을 고려하여 종합하면

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 5x - 3 & (x \leq -1) \\ x^3 - 4x^2 + 5x - 2 & (-1 < x \leq 0) \\ x^3 - 5x^2 + 7x - 2 & \left(0 < x \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \\ x^3 - 3x^2 + 5x - 3 & \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} < x\right) \end{cases}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(x) dx &= \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 g(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - 4x^2 + 5x - 2) dx + \int_0^1 (x^3 - 5x^2 + 7x - 2) dx = -6 \end{aligned}$$

이다.

[문제 3 - ii]

[문제 3 - i]의 함수 $g(x)$ 에 대하여

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 5 & (x < -1) \\ 3x^2 - 8x + 5 & (-1 < x < 0) \\ 3x^2 - 10x + 7 & \left(0 < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \\ 3x^2 - 6x + 5 & \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} < x\right) \end{cases}$$

이 성립한다. 따라서 x_0 가 $-1, 0, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ 이외의 값일 경우에는

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0^-} g'(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^+} g'(x) \right| = |g'(x_0) - g'(x_0)| = 0$$

이 된다. 또한

$$\left| \lim_{x \rightarrow -1-} g'(x) - \lim_{x \rightarrow -1+} g'(x) \right| = 2$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0-} g'(x) - \lim_{x \rightarrow 0+} g'(x) \right| = 2$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{2}-} g'(x) - \lim_{x \rightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{2}+} g'(x) \right| = 2\sqrt{3}$$

이므로 답은 0, 2, $2\sqrt{3}$ 이다.

[문제 3 - iii]

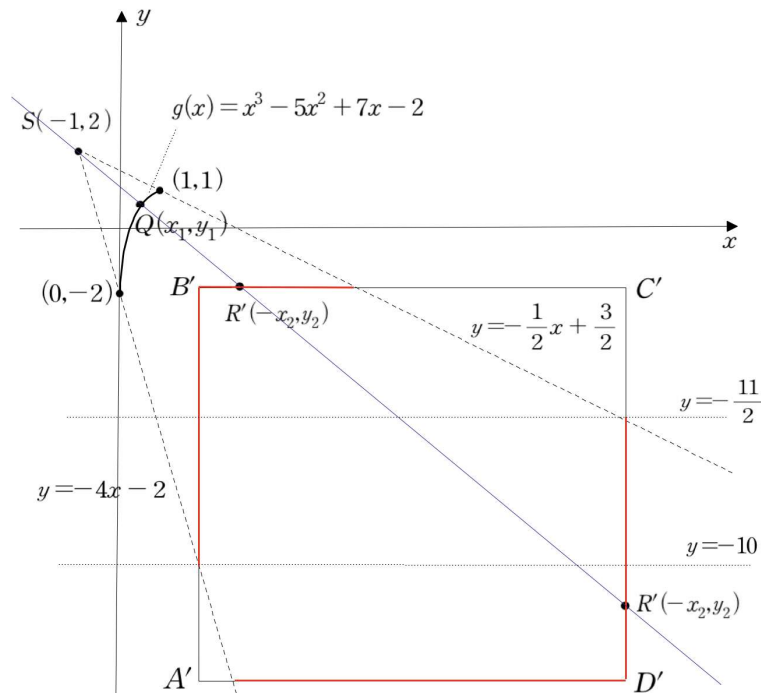
점 $Q(x_1, y_1)$ 가 $0 \leq x_1 \leq 1$ 인 경우만 고려되고, [문제 3 - i]에서 $0 \leq x \leq 1$ 인 경우

$$g(x) = (x^2 - 3x + 1)(x - 2) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$$

임을 확인하였다. 정사각형 ABCD를 y 축에 대칭시킨 정사각형 $A'B'C'D'$ 를 고려하자, 그러면 점 $R(x_2, y_2)$ 를 y 축에 대칭한 점 $R'(-x_2, y_2)$ 은 정사각형 $A'B'C'D'$ 의 네 변 위에 놓이게 된다. 주어진 조건 $y_1(x_2 - 1) + y_2(x_1 + 1) = 2(x_1 + x_2)$ 은

$$\frac{y_2 - 2}{-x_2 + 1} = \frac{y_1 - 2}{x_1 + 1}$$

이므로, 세 점 $Q(x_1, y_1)$, $R'(-x_2, y_2)$, $S(-1, 2)$ 가 한 직선 위에 놓이게 됨을 의미한다. 즉, 점 $Q(x_1, y_1)$ 가 $y = g(x)$ ($0 \leq x \leq 1$)의 그래프 위를 움직일 때, 두 점 $Q(x_1, y_1)$ 와 $S(-1, 2)$ 를 지나는 직선 l 이 정사각형 $A'B'C'D'$ 와 만날 때의 교점이 $R'(-x_2, y_2)$ 이 된다. 따라서 실수 r 이 고정되었을 때 모든 $Q(x_1, y_1)$ 에 대하여 직선 l 과 정사각형 $A'B'C'D'$ 가 만나지 않을 경우 $k(r) = 0$ 이고, 그렇지 않을 경우 정사각형 $A'B'C'D'$ 의 네 변 위에서 점 $R'(-x_2, y_2)$ 가 놓일 수 있는 부분의 길이가 $k(r)$ 이 된다. 아래 그림에서 정사각형 $A'B'C'D'$ 위의 빨간색 선이 $R'(-x_2, y_2)$ 이 놓일 수 있는 부분이므로, 빨간색 선의 길이가 $k(r)$ 이 된다.



r 의 값에 따라 정사각형 $A'B'C'D'$ 는 두 직선 $x = 2$ 와 $x = 14$ 사이에서 위 아래로 움직일 수 있으므로, $k(r)$ 이 최댓값이 되기 위해선

1. 점 A' 가 직선 $y = -4x - 2$ 보다 위에 위치하면 안 되고
2. 점 C' 가 직선 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 보다 밑에 위치하면 안 된다

이를 고려하면 $r \leq -10$ 과 $r + 12 \geq -\frac{11}{2}$ 이 성립해야 하고, 따라서 $-\frac{35}{2} \leq r \leq -10$ 범위에서 $k(r)$ 의 최댓값이 가능하다. 이때

$$k(r) = \left(14 + \frac{r+2}{4}\right) + \left(-\frac{11}{2} - r\right) + (-2r - 23) + (r + 22) = -\frac{7}{4}r + 8$$

이므로 $-\frac{35}{2} \leq r \leq -10$ 범위에서 $k\left(-\frac{35}{2}\right) = \frac{245}{8} + 8 = \frac{309}{8}$ 이 최댓값이 된다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3- i	이차부등식을 이용하여 함숫값의 크기를 비교하고, 관련 정적분의 값을 구할 수 있다.	10점
문제 3- ii	이차부등식을 이용하여 함숫값의 크기를 비교하고, 우극한과 좌극한의 정의를 정확히 이해하고 있다.	10점
문제 3-iii	주어진 식의 기하학적 의미를 올바르게 파악하고, 이를 활용하여 문제를 올바르게 해결할 수 있다.	20점

2025학년도 논술우수 수리형

1교시 · 문제 1

[문제 1]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [문제 1- i] ~ [문제 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

<제시문1>

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ 이다.

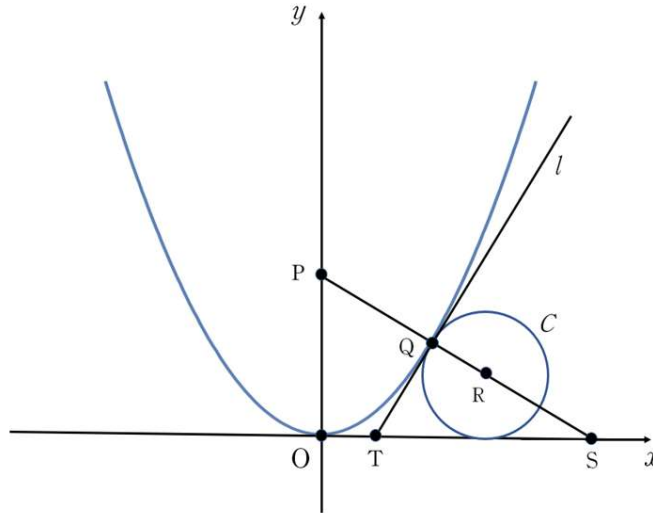
<제시문2>

좌표평면 위의 두 직선 $y = mx + n, y = m'x + n'$ 에 대하여

- (1) 두 직선이 서로 수직이면 $mm' = -1$ 이다.
- (2) $mm' = -1$ 이면 두 직선이 수직이다.

<제시문3>

아래 그림과 같이 곡선 $y = x^2$ 위의 한 점을 제1사분면 위에서 택하고 이를 Q라 한다. 곡선 $y = x^2$ 위의 점 Q에서의 접선을 l이라 한다. 직선 l이 x축과 만나는 점을 T라 한다. 점 Q를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 P라 하고, x축과 만나는 점을 S라 한다. 직선 l과 점 Q에서 접하고, 동시에 x축과 접하는 원을 C라 한다. 단, 원 C와 x축의 접점의 x좌표는 양수이다. 원 C의 중심을 R라고 하고 그 둘레의 길이를 L이라 한다. 좌표평면의 원점을 O라 한다.



- i [문제 1- i] <제시문3>에서 주어진 점 Q, S, T에 대하여, $\frac{\overline{QS} \times \overline{ST}}{\overline{QT}^3}$ 의 값은 점 Q의 위치에 관계없이 일정함을 보이고 그 이유를 논하시오.
- ii [문제 1- ii] <제시문3>에서 주어진 점 P, Q, R에 대하여, $\frac{1}{2}\overline{PQ} + \overline{QR} - \overline{OP}$ 의 값은 점 Q의 위치에 관계없이 일정함을 보이고 그 이유를 논하시오.
- iii [문제 1- iii] <제시문3>에서 정의된 점 Q의 x좌표를 a라 할 때, <제시문 3>에서 정의된 원 C의 둘레의 길이 L에 대하여 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{L}{\overline{PQ}^2}$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 1-i]

점 Q의 좌표를 $Q(a, a^2)$ 라 하자.

직선 l 의 방정식은

$$y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$$

이므로 l 의 x 절편은 $\frac{a}{2}$ 이고 $T(\frac{a}{2}, 0)$.

따라서

$$\overline{QT} = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - a\right)^2 + (0 - a^2)^2} = a\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$$

직선 l 에 수직인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

이므로 x 절편을 구해보면 점 S의 좌표는

$$S(2a^3 + a, 0)$$

이다. 따라서

$$\overline{ST} = 2a^3 + a - \frac{a}{2} = 2a^3 + \frac{a}{2} = 2a\left(a^2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$\overline{QS} = \sqrt{(2a^3 + a - a)^2 + (0 - a^2)^2} = 2a^2\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$$

따라서

$$\frac{\overline{QS} \times \overline{ST}}{\overline{QT}^3} = \frac{2a^2\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \times 2a\left(a^2 + \frac{1}{4}\right)}{\left(a\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}\right)^3} = 4.$$

따라서 Q의 위치와 관계없이 $\frac{\overline{QS} \times \overline{ST}}{\overline{QT}^3}$ 의 값은 일정하다.

[문제 1-ii]

점 Q의 좌표를 $Q(a, a^2)$ 라 하자.

직선 l 에 수직인 직선의 방정식:

$$y = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

이 직선의 y 절편은 $a^2 + \frac{1}{2}$ 이므로 P의 좌표는

$$P\left(0, a^2 + \frac{1}{2}\right)$$

따라서

$$\overline{OP} = a^2 + \frac{1}{2} \quad \text{-----}(1)$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(0 - a)^2 + \left(a^2 + \frac{1}{2} - a^2\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \quad \text{-----}(2)$$

문제 1의 결과에 의해

$$\overline{QT} = a\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$$

이므로 R에서 x축에 내린 수선의 발을 U라 하면

$$\overline{TU} = \overline{QT} = a\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$$

따라서

$$\overline{OU} = \frac{a}{2} + a\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$$

이제 선분 $\overline{QR}$ 의 길이를 r 이라 하면 점 R의 좌표는

$$R\left(\frac{a}{2} + a\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}, r\right)$$

이 된다. 선분 $\overline{QR}$ 과 직선 l 은 서로 수직이므로

$$2a \times \left(\frac{r - a^2}{\frac{a}{2} + a\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} - a} \right) = -1$$

이를 풀면

$$r = a^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$$

따라서

$$\overline{QR} = r = a^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} \quad \text{----- (3)}$$

(1), (2), (3) 으로부터

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\overline{PQ} + \overline{QR} - \overline{OP} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} + a^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} - \left(a^2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

따라서 Q의 위치와 관계없이 $\frac{1}{2}\overline{PQ} + \overline{QR} - \overline{OP}$ 의 값은 일정하다.

[문제 1-iii]

점 Q의 좌표를 $Q(a, a^2)$ 라 하자.

문제 1에 의해

$$\overline{PQ} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}, \quad \overline{QR} = a^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}$$

따라서

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{L}{\overline{PQ}^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} 2\pi \left(\frac{a^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}}}{a^2 + \frac{1}{4}} \right) = 2\pi$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1- i	문제에 제시된 직선들로 이루어진 삼각형의 각 변의 길이에 관한 식을 도출하고 이들 사이에 변하지 않는 값을 가지는 관계를 증명할 수 있다.	10점
1- ii	문제에 주어진 곡선 및 직선을 조건에 맞게 수식화하고 이를 바탕으로 다양한 점들 사이의 거리 관계를 도출한 후, 이 점들로 이루어진 선분들 사이의 변하지 않는 값을 가지는 관계를 증명할 수 있다.	15점
1-iii	[문제 1-ii]에서 도출한 원의 둘레의 길이와 점들 사이의 거리가 일정한 값으로 수렴함을 보일 수 있다.	5점

1교시 · 문제 2

[문제 2]

다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 2- i] ~ [문제 2-iv]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

제시문

<제시문1>

함수 $g(x)$ 가 미분가능하고 $g'(b) = 0$ 일 때, $x = b$ 의 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가

- 양에서 음으로 바뀌면, $g(x)$ 는 $x = b$ 에서 극대이고, 극댓값 $g(b)$ 를 갖는다.
- 음에서 양으로 바뀌면, $g(x)$ 는 $x = b$ 에서 극소이고, 극솟값 $g(b)$ 를 갖는다.

<제시문2>

- 함수 $f(t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 2t & (t > 0) \\ -t & (t \leq 0) \end{cases}$$

- 함수 $g(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 12x + \int_{-10}^x (1-t)f(t) dt - \int_{-10}^x (4-t)f(t-3) dt$$

- i [문제 2- i] <제시문2>에서 정의된 함수 $f(t)$ 에 대하여 $\int_{-2}^a f(t) dt = \frac{32-3a}{3}$ 를 만족시키는 양의 실수 a 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.
- ii [문제 2- ii] <제시문2>에서 정의된 함수 $f(t)$ 에 대하여 정적분 $\int_{-2}^2 f(t)|t-1| dt$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.
- iii [문제 2- iii] <제시문2>에서 정의된 함수 $f(t)$ 에 대하여 정적분 $\int_{-2}^2 f(t^2-2)|t-1| dt$ 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.
- iv [문제 2- iv] <제시문2>에서 정의된 함수 $g(x)$ 를 생각하자. 열린구간 $(-10, 10)$ 에서 $g(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값을 모두 구하고, 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 2-i]

$a > 0$ 인 경우 $[-2, 0]$ 과 $[0, a]$ 구간으로 나누어 적분하면

$$\int_{-2}^0 f(t) dt = \int_{-2}^0 (-t) dt = 2$$

$$\int_0^a f(t) dt = \int_0^a (t^2 + 2t) dt = \frac{a^3}{3} + a^2.$$

이다. 따라서 아래와 같은 적분식을 얻는다.

$$\int_{-2}^a f(t) dt = \frac{a^3}{3} + a^2 + 2.$$

그러므로 주어진 식은 다음과 같다: $\frac{a^3}{3} + a^2 + 2 = \frac{32-3a}{3}$. 이 식을 정리하면 $a^3 + 3a^2 + 3a = 26$ 이 되고, 해를 구하면 $a = 2$ 가 된다.

[문제 2-ii]

적분의 영역을 $[-2, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$ 로 나누어 계산하자.

$$\int_{-2}^0 (-t)(1-t) dt = \int_{-2}^0 (t^2 - t) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_{-2}^0 = \frac{8}{3} + 2$$

$$\int_0^1 (t^2 + 2t)(1-t) dt = \int_0^1 (-t^3 - t^2 + 2t) dt = \left[-\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + t^2 \right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$\int_1^2 (t^2 + 2t)(t-1) dt = \int_1^2 (t^3 + t^2 - 2t) dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - t^2 \right]_1^2 = \frac{8}{3} + \frac{5}{12}$$

따라서 전체 적분값은 $\frac{16}{3} + \frac{17}{6} = \frac{49}{6}$ 이다.

[문제 2-iii]

주어진 함수의 적분을 적분의 구간을 $[-2, -\sqrt{2}]$, $[-\sqrt{2}, 1]$, $[1, \sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}, 2]$ 로 나누어 계산하자.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} f(t^2 - 2)|t - 1| dt \\ &= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} ((t^2 - 2)^2 + 2(t^2 - 2))(1 - t) dt \\ &= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} (t^4 - 2t^2)(1 - t) dt \\ &= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} (-t^5 + t^4 + 2t^3 - 2t^2) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\sqrt{2}}^1 f(t^2 - 2)|t - 1| dt \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^1 (2 - t^2)(1 - t) dt = \int_{-\sqrt{2}}^1 (t^3 - t^2 - 2t + 2) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_1^{\sqrt{2}} f(t^2 - 2)|t - 1| dt = \int_1^{\sqrt{2}} (2 - t^2)(t - 1) dt \\
 &= \int_1^{\sqrt{2}} (-t^3 + t^2 + 2t - 2) dt \\
 I_4 &= \int_{\sqrt{2}}^2 f(t^2 - 2)|t - 1| dt = \int_{\sqrt{2}}^2 (t^4 - 2t^2)(t - 1) dt \\
 &= \int_{\sqrt{2}}^2 (t^5 - t^4 - 2t^3 + 2t^2) dt
 \end{aligned}$$

이를 토대로 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \left[-\frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{2} - \frac{2t^3}{3} \right]_{-2}^{-\sqrt{2}} \\
 &= \left(-\frac{8}{6} - \frac{4\sqrt{2}}{5} + 2 + \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) - \left(-\frac{64}{6} - \frac{32}{5} + 8 + \frac{16}{3} \right) \\
 I_2 &= \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - t^2 + 2t \right]_{-\sqrt{2}}^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 1 + 2 \right) - \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2 - 2\sqrt{2} \right) \\
 I_3 &= \left[-\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + t^2 - 2t \right]_1^{\sqrt{2}} = \left(-1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 - 2\sqrt{2} \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1 - 2 \right) \\
 I_4 &= \left[\frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{2} + \frac{2t^3}{3} \right]_{\sqrt{2}}^2 \\
 &= \left(\frac{64}{6} - \frac{32}{5} - \frac{16}{2} + \frac{16}{3} \right) - \left(\frac{8}{6} - \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{4}{2} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \right)
 \end{aligned}$$

이를 이용해 아래와 같이 계산하자.

$$\begin{aligned}
 I_1 + I_4 &= -2\left(\frac{8}{6} - 2\right) + 2\left(\frac{64}{6} - 8\right) \\
 &= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{64}{3} - 16 = \frac{56}{3} - 12 = \frac{20}{3} \\
 I_2 + I_3 &= 2(-1 + 2) + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 1 + 2\right) \\
 &= 2 + 2\left(-\frac{1}{12} + 1\right) = 2 - \frac{1}{6} + 2 = \frac{23}{6}
 \end{aligned}$$

이들을 합하면 $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{63}{6} = \frac{21}{2}$.

[문제 2-iv]

$$g(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 12x + \int_{-10}^x (1-t)f(t) dt - \int_{-10}^x (4-t)f(t-3) dt$$

적분과 미분의 관계를 활용하여 함수 $g(x)$ 를 미분하면

$g'(x) = 2x^2 - 4x + 12 + (1-x)f(x) - (4-x)f(x-3)$ 임을 알 수 있다. 이제 x 의 구간을 $x \leq 0$, $0 < x \leq 3$, $x > 3$ 으로 나누어 $g'(x)$ 의 개형을 조사하자.

(가) $x \leq 0$ 인 경우.

$g'(x) = 2x^2 - 4x + 12 + (1-x)(-x) - (4-x)(3-x) = 2x(x+1)$ 이고, $x = -1$ 일 때와 $x = 0$ 일 때 0이 된다.

(나) $0 < x \leq 3$ 인 경우.

$g'(x) = -x^3 + 5x = -x(x^2 - 5)$ 이고, $x = \sqrt{5}$ 일 때 0이 된다.

(다) $x > 3$ 인 경우.

$g'(x) = -7x^2 + 17x = -x(7x - 17) < 0$ 이므로 항상 음수이다.

이제 $g'(x)$ 의 구간별 부호를 조사하면 아래와 같다.

x 값	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt{5}$	$x = \sqrt{5}$	$x > \sqrt{5}$
$g'(x)$	양수	0	음수	0	양수	0	음수

따라서 $x = -1, 0, \sqrt{5}$ 에서 극값을 갖는 것을 알 수 있다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2- i	다항함수의 정적분을 구할 수 있다.	10점
2- ii	다항함수의 정적분을 구할 수 있다.	10점
2-iii	다항함수의 정적분을 구할 수 있다.	10점
2-iv	함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.	10점

1교시 · 문제 3

[문제 3]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [문제 3- i] ~ [문제 3-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

<제시문1>

함수 $f(x)$ 가 미분가능하고 $f'(a) = 0$ 일 때, $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가

- 양에서 음으로 바뀌면, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$ 를 갖는다.
- 음에서 양으로 바뀌면, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$ 를 갖는다.

<제시문2>

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하고 $x = a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$ 이다.

<제시문3>

정수 a, b, c 에 대하여 삼차함수 $f(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$ 가 다음의 두 조건을 모두 만족한다.

- 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 을 가진다. (단, $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$)
- 모든 정수 n 에 대하여 닫힌구간 $[n, n+1]$ 은 세 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 중 많아야 하나를 포함한다.

- i [문제 3- i] <제시문3>에서 $a = -1, b = -3$ 일 때, 가능한 모든 함수 $f(x)$ 의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.
- ii [문제 3- ii] <제시문3>에서 $b = 0$ 이고 세 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 중 두 수가 닫힌구간 $[0, 2]$ 에 포함될 때, 가능한 $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|$ 의 값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오.
- iii [문제 3-iii] [문제 3- ii]의 조건을 모두 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여, 정수 계수를 가지는 사차함수 $y = g(x)$ 가 $g'(x) = f(x)$ 이고 사차방정식 $g(x) = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가진다고 한다. 이때 가능한 함수 $g(x)$ 를 모두 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 3-i]

함수 $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + c$ 를 미분하여,

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x + 1)(x - 1)$$

를 얻게 된다. $f'(x) = 0$ 은 두 개의 근 $x = -\frac{1}{2}, 1$ 를 얻게 되어

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)f(1) = \left(c + \frac{7}{4}\right)(c - 5) < 0$$

이 성립한다. 이로부터 $-\frac{7}{4} < c < 5$ 를 얻게 되어, $-1 \leq c \leq 4$ 이다.

(i) $c = -1$ 일 때, $f(0) = -1 < 0$ 이므로 $\alpha_1 < -\frac{1}{2} < \alpha_2 < 0 < \alpha_3$ 이 성립한다. 따라서, 실근 α_2 이 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에 포함되므로 $\alpha_1 < -1$ 이다. 이 경우, $0 < f(-1) = -2$ 가 되어 모순이다.

(ii) $c = 0$ 일 때, $f(x) = x(4x^2 - 3x - 6)$ 이므로,

$$\alpha_1 = \frac{3 - \sqrt{105}}{8}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{3 + \sqrt{105}}{8}$$

이고 α_1, α_2 가 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에 포함되어 모순이다.

(iii) $c = 1, 2, 3, 4$ 일 때, $f(0) = c > 0$ 이고 $f(1) = c - 5 < 0$ 이므로 닫힌구간 $[0, 1]$ 은 α_2 만을 포함한다.

따라서, 가능한 함수 $f(x)$ 의 개수는 4이다.

[문제 3-ii]

함수 $f(x) = 4x^3 + 3ax^2 + c$ 를 미분하여

$$f'(x) = 12x^2 + 6ax = 6x(2x + a)$$

를 얻게 된다. 세 개의 근이 존재하기 위해선 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 하므로 $a \neq 0$ 이고

$$f(0)f\left(-\frac{a}{2}\right) = c\left(c + \frac{a^3}{4}\right) < 0$$

이다. 이로부터 $ac < 0$ 임을 알 수 있다.

$f'(0) = 0$ 이므로 삼차방정식 $f(x) = 0$ 은 적어도 하나의 음의 근을 가져야 한다. 따라서 닫힌 구간 $[0, 2]$ 에는 α_2, α_3 가 포함된다. $\alpha_2 = 0$ 일 때, $f(x) = 4x^3 + 3ax^2 = 0$ 은 중근 $x = 0$ 을 갖게 되어 가능하지 않다.

그러므로 $\alpha_1 < 0 < \alpha_2 < 1 < \alpha_3 \leq 2$ 이 성립하고,

$$f(0) = c > 0, \quad f(1) = 4 + 3a + c < 0, \quad f(2) = 32 + 12a + c \geq 0$$

이다. a 와 c 가 정수이므로,

$$c \geq 1, \quad 3a + c \leq -5, \quad 12a + c \geq -32$$

이다. $1 \leq c \leq -3a - 5$ 와 $-32 - 12a \leq c \leq -3a - 5$ 로부터 $a = -2, -3$ 이다.

(i) $a = -2$ 일 때, $c = 1$ 이고

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1 = (2x - 1)(2x^2 - 2x - 1)$$

이므로 $\alpha_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ 을 얻게 된다. 이 경우, $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$ 이다.

(ii) $a = -3$ 일 때, $c = 4$ 이고

$$f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4 = (x - 2)(4x^2 - x - 2)$$

이므로 $\alpha_1 = \frac{1 - \sqrt{33}}{8}$, $\alpha_2 = \frac{1 + \sqrt{33}}{8}$, $\alpha_3 = 2$ 를 얻게 된다. 이 경우, $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| = 2 + \frac{\sqrt{33}}{4}$ 이다. 따라서, 가능한 $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|$ 의 값은 $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$, $2 + \frac{\sqrt{33}}{4}$ 이다.

[문제 3-iii]

(i) 먼저 $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$ 이라고 가정하면,

$$g(x) = x^4 - 2x^3 + x + d$$

이고 d 는 정수이다. 문제의 조건으로부터 $g(\alpha_1) < 0$, $g(\alpha_2) = g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ 이고, $g(\alpha_3) < 0$ 을 만족해야 한다. $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16} + d > 0$ 으로부터 $d \geq 0$ 이 성립한다. 한편, $\alpha = \alpha_1$ 에 대해

$$g(\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha + d = d - \frac{1}{4} < 0$$

을 얻게 되어 $d \leq 0$ 이다. 따라서, $g(x) = x^4 - 2x^3 + x = x(x-1)(x^2 - x - 1)$ 이고 서로 다른 네 개의 실근을 가진다.

(ii) $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4$ 이라고 가정하면,

$$g(x) = x^4 - 3x^3 + 4x + d$$

이고 d 는 정수이다. 문제의 조건으로부터 $g(\alpha_1) < 0$, $g(\alpha_2) > 0$ 이고, $g(\alpha_3) = g(2) < 0$ 을 만족해야 한다. $g(2) = d < 0$ 으로부터 $d \leq -1$ 이 성립한다. $g(0) = d \leq -1$ 이므로, $g(x) = 0$ 은 α_1 보다 작은 근을 하나 가진다. 따라서, 추가적으로 조건 $g(\alpha_2) > 0$ 을 만족하는 d 의 값을 찾아야 한다. $q = \alpha_2$ 라고 두면

$4q^2 - q - 2 = 0$ 이 성립하고, 이를 이용하면,

$$\begin{aligned} g(\alpha_2) &= g(q) = q^4 - 3q^3 + 4q + d \\ &= \frac{165}{64}q - \frac{3}{32} + d \end{aligned}$$

가 된다. $\frac{11}{2} < \sqrt{33} < 6$ 이므로 $\frac{13}{16} < \alpha_2 = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} < \frac{7}{8}$ 이다. 이를 이용하면,

$$g(q) = \frac{165}{64}q - \frac{3}{32} + d > \frac{165}{64} \times \frac{13}{16} - \frac{3}{32} + d = \frac{2049}{1024} + d$$

와

$$g(q) = \frac{165}{64}q - \frac{3}{32} + d < \frac{165}{64} \times \frac{7}{8} - \frac{3}{32} + d = \frac{1107}{512} + d$$

이므로, $g(q) > 0$ 을 만족하는 d 의 값은 $d = -1, -2$ 이다.

(i)과 (ii)를 종합하면, 가능한 함수 $g(x)$ 는

$$x^4 - 2x^3 + x, \quad x^4 - 3x^3 + 4x - 1, \quad x^4 - 3x^3 + 4x - 2$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3- i	이차부등식과 이차함수의 관계, 도함수를 통해 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	10점
3- ii	삼차함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있고, 삼차방정식을 풀 수 있다.	10점
3-iii	미분을 통해 사차함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	10점

2교시 · 문제 1

[문제 1]

다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 1- i] ~ [문제 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

<제시문1>

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 $S = \int_a^b |f(x)| dx$ 이다.

<제시문2>

$-3 \leq t \leq 0$ 인 임의의 실수 t 에 대하여 곡선 $y = 3x^2 - 3$ 과 x 축 및 두 직선 $x = t, x = t + 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $g(t)$ 라 한다.

- i [문제 1- i] <제시문2>에서 정의된 함수 $g(t)$ 에 대하여, $g\left(-\frac{3}{2}\right)$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.
- ii [문제 1- ii] <제시문2>에서 정의된 함수 $g(t)$ 의 식을 구하고, 그 이유를 논하시오.
- iii [문제 1- iii] <제시문2>에서 정의된 함수 $g(t)$ 의 최솟값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 1-i]

$$\begin{aligned}
 g\left(-\frac{3}{2}\right) &= \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} (3x^2 - 3) dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (3 - 3x^2) dx \\
 &= [x^3 - 3x]_{-\frac{3}{2}}^{-1} + [3x - x^3]_{-1}^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

[문제 1-ii]

다음과 같이 세 가지 경우를 생각한다.

(1) $-3 \leq t < -2$ 경우

이때 $t \leq t+1 < -1$ 이므로 $t \leq x \leq t+1$ 일 때 $|3x^2 - 3| = 3x^2 - 3$ 이다.

따라서

$$g(t) = \int_t^{t+1} (3x^2 - 3) dx = [x^3 - 3x]_t^{t+1} = 3t^2 + 3t - 2$$

(2) $-2 \leq t < -1$ 경우

이때 $t < -1 \leq t+1$ 이므로

$t \leq x < -1$ 에서 $|3x^2 - 3| = 3x^2 - 3$ 이고, $-1 \leq x < t+1$ 에서 $|3x^2 - 3| = 3 - 3x^2$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_t^{-1} (3x^2 - 3) dx + \int_{-1}^{t+1} (3 - 3x^2) dx \\
 &= [x^3 - 3x]_t^{-1} + [3x - x^3]_{-1}^{t+1} \\
 &= (-t^3 + 3t + 2) + (-t^3 - 3t^2 + 4) \\
 &= -2t^3 - 3t^2 + 3t + 6
 \end{aligned}$$

(3) $-1 \leq t \leq 0$ 경우

$-1 \leq t < t+1 \leq 1$ 이므로 $t \leq x \leq t+1$ 일 때 $|3x^2 - 3| = 3 - 3x^2$ 이다.

따라서

$$g(t) = \int_t^{t+1} (3 - 3x^2) dx = [3x - x^3]_t^{t+1} = -3t^2 - 3t + 2$$

위의 세 가지 경우를 종합하면

$$g(t) = \begin{cases} 3t^2 + 3t - 2 & (-3 \leq t < -2) \\ -2t^3 - 3t^2 + 3t + 6 & (-2 \leq t < -1) \\ -3t^2 - 3t + 2 & (-1 \leq t \leq 0) \end{cases}$$

[문제 1-iii]

(1) $-3 \leq t < -2$ 경우

$$g'(t) = 6t + 3 < 0$$

(2) $-2 \leq t < -1$ 경우

$$g'(t) = -6t^2 - 6t + 3 = -6\left(t + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(t + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

따라서 $-2 \leq t < -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 에서 $g'(t) < 0$, $-\frac{1+\sqrt{3}}{2} < t < -1$ 에서 $g'(t) > 0$

(3) $-1 \leq t \leq 0$ 경우

$$g'(t) = -6t - 3$$

따라서 $-1 < t < -\frac{1}{2}$ 에서 $g'(t) > 0$, $-\frac{1}{2} < t < 0$ 에서 $g'(t) < 0$

이를 종합하여 닫힌구간 $[-3, 0]$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면

t	-3		-2		$-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		0
$g'(t)$		-		-		+		+		-	
$g(t)$	16	$\searrow$	4	$\searrow$	$4 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$\frac{11}{4}$	$\searrow$	2

따라서 함수 g 는 $t = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 에서 최솟값을 가지고 그 최솟값은 $g\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 4 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1- i	닫힌 구간 위에서 양수와 음수 값을 동시에 가지는 함수의 넓이를 구할 수 있다.	6점
1- ii	변수로 주어진 닫힌 구간 위에서 양수와 음수 값을 동시에 가지는 함수의 넓이를 함수로 나타낼 수 있다.	12점
1-iii	문제는 이렇게 구해진 함수의 극값과 그래프의 개형을 조사해서 최솟값을 구할 수 있다.	12점

2교시 · 문제 2

[문제 2]

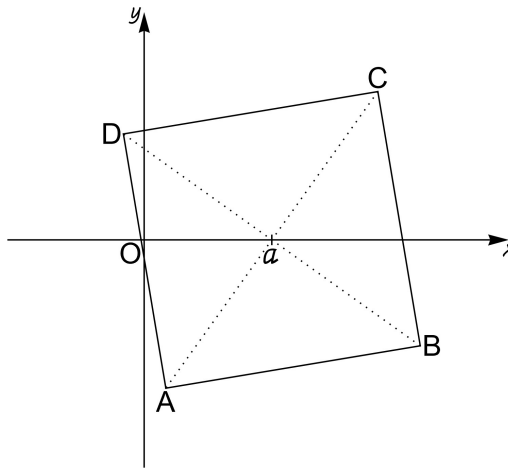
다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 2- i] ~ [문제 2-iv]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

제시문

[제시문1] 두 대각선의 교점이 x 축 위에 놓여있는 정사각형 ABCD가 다음 세 조건을 모두 만족한다.

- $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이고 점 D의 y 좌표는 0보다 크다.
- 두 대각선의 교점이 $(a, 0)$ 일 때, 대각선 AC의 기울기는 a 이다.
- 꼭짓점 A, B, C, D는 시계바늘이 도는 반대 방향으로 주어진다.

[제시문2] 임의의 실수 a 에 대하여 <제시문1>의 두 대각선의 교점이 $(a, 0)$ 일 때, 점 A의 y 좌표와 점 D의 y 좌표를 각각 함수 $f(a)$ 와 $g(a)$ 로 정의하자. 제시된 상황을 그림으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



- <제시문2>에 주어진 함수 $f(a)$ 와 $g(a)$ 를 각각 a 에 관한 식으로 표현하고, 그 이유를 논하시오.
- <제시문2>에 주어진 함수 $f(a)$ 와 $g(a)$ 에 대하여, $|f(a) - g(a)| = 1$ 이 되는 a 의 값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오.
- <제시문1>에 주어진 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이 $(a, 0)$ 이고 직선 AC가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 접할 때, a^2 의 값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오.
- <제시문2>에 주어진 함수 $f(a)$ 에 대하여, $|f(2\sin(\frac{\pi}{2}a))| = \sqrt{3}$ 이 되는 모든 양수 a 를 작은 것부터 크기 순서대로 나열한 것을 수열 $\{a_n\}$ 으로 정의하자. 이때 부등식 $\sum_{k=1}^m a_k > 2025$ 를 만족하는 가장 작은 자연수 m 을 구하고, 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 2-i]

두 꼭짓점 A와 C는 직선 $y = a(x - a)$ 와 원 $(x - a)^2 + y^2 = 4$ 의 두 교점이 된다. 이 두 식을 연립하여 변수 x 를 소거한 후, y 에 대해서 풀면, $y = \pm \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}$ 를 얻는다. 이제 다음 세 가지 경우로 나누어 생각해 보자.

$a > 0$ 인 경우:

이 경우에 $a > 0$ 이고 $f(a) < 0$ 이므로, $f(a) = -\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}$ 를 얻는다.

$a < 0$ 인 경우:

이 경우에 $a < 0$ 이고 $f(a) > 0$ 이므로, $f(a) = -\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}$ 를 얻는다.

$a = 0$ 인 경우:

이 경우에 $f(a) = 0$ 이고 $-\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}$ 에 $a = 0$ 을 대입한 값도 0이므로, $f(a) = -\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}$ 이 성립한다.

따라서, 이를 종합하면 모든 실수 a 에 대하여, $f(a) = -\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}$ 임을 알 수 있다.

또한 두 꼭짓점 B와 D는 직선 $y = -\frac{1}{a}(x - a)$ 와 원 $(x - a)^2 + y^2 = 4$ 의 두 교점이 된다. 이 두 식을 연립하여 변수 x 를 소거한 후, y 에 대해서 풀면, $y = \pm \frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$ 를 얻는다. 이제 다음 두 가지 경우로 나누어 생각해 보자.

$a \neq 0$ 인 경우:

이 경우에 모든 a 에 대하여 $g(a) > 0$ 이므로, $g(a) = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$ 임을 알 수 있다.

$a = 0$ 인 경우:

이 경우에 $g(a) = 2$ 이고 $\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$ 에 $a = 0$ 을 대입한 값도 2이므로, $g(a) = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$ 이 성립한다.

따라서, 이를 종합하면 모든 실수 a 에 대하여, $g(a) = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$ 임을 알 수 있다.

답: $f(a) = -\frac{2a}{\sqrt{1+a^2}}, g(a) = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$

[문제 2-ii]

[문제 2-i]의 결과로부터 $|f(a) - g(a)| = \frac{2|a+1|}{\sqrt{1+a^2}}$ 이다. 이 값이 1이 되기 위해서는 $2|a+1| = \sqrt{1+a^2}$ 이 성립해야 한다. 양변을 제곱해서 이차방정식의 근을 구하면, $a = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$ 을 얻는다.

답: $\frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$

[문제 2-iii]

직선 AC가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 접할 때, $(0, 0)$ 에서 직선 AC에 이르는 거리는 2와 같게 된다. 직선 AC의 방정식은 $ax - y - a^2 = 0$ 이므로, 한 점에서 직선에 이르는 거리에 관한 공식으로부터 $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}} = 2$ 를 얻는다. 양변을 제곱하면, $\frac{a^4}{a^2+1} = 4$ 이므로 $a^4 - 4a^2 - 4 = 0$ 으로부터 $a^2 = 2\sqrt{2} + 2$ 를 얻는다.

답: $2\sqrt{2} + 2$

[문제 2-iv]

$t = 2\sin(\frac{\pi}{2}a)$ 라고 놓자. $|f(2\sin(\frac{\pi}{2}a))| = \sqrt{3}$ 으로부터 $\frac{|2t|}{\sqrt{t^2+1}} = \sqrt{3}$ 이 된다. 양변을 제곱한 후에 정리하면, $t^2 = 3$ 을 얻는다. 이로부터 $t = 2\sin(\frac{\pi}{2}a) = \pm\sqrt{3}$ 이 되는 양수 a 를 찾아보자.

$0 < a \leq 4$ 일 때, $2\sin(\frac{\pi}{2}a) = \pm\sqrt{3}$ 이 되는 a 의 값을 찾아보면, $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}$ 네 값 뿐임을 알 수 있다. 이제 $2\sin(\frac{\pi}{2}a)$ 는 주기를 4로 갖는 주기함수임을 이용하면, $2\sin(\frac{\pi}{2}a) = \pm\sqrt{3}$ 이 되는 양수 a 의 값은 $a = \frac{2}{3} + 2(k-1)$ 또는 $a = \frac{4}{3} + 2(k-1)$ (단, k 는 자연수) 뿐임을 알 수 있다. 따라서, 이 값들을 크기 순서로 나열하여 얻어지는 수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다. $a_{2k-1} = \frac{2}{3} + 2(k-1)$ 이고 $a_{2k} = \frac{4}{3} + 2(k-1)$ 이고, 이로부터

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n} a_k &= \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{8}{3} + \frac{10}{3}\right) + \left(\frac{14}{3} + \frac{16}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{3} + 2(n-1) + \frac{4}{3} + 2(n-1)\right) \\ &= 2 + 6 + 10 + \cdots + (4n-2) = 2n^2\end{aligned}$$

이므로, $\sum_{k=1}^{62} a_k = 1922$, $\sum_{k=1}^{64} a_k = 2048$ 을 얻는다.

또한 $a_{63} = \frac{188}{3}$, $a_{64} = \frac{190}{3}$ 이므로, $\sum_{k=1}^{63} a_k < 2025 < \sum_{k=1}^{64} a_k$ 이므로, $\sum_{k=1}^m a_k > 2025$ 를 만족하는 최소의 자연수 m 은 64임을 알 수 있다.

답: 64

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2- i	제시문에 주어진 두 대각선의 직선의 방정식과 정사각형에 외접하는 원의 방정식을 이용하여 원과 직선의 교점을 제대로 구할 수 있다.	10점
2- ii	[문제 2- i]의 결과를 사용하여, $ f(a) - g(a) = 1$ 을 만족하게 하는 a 의 값을 제대로 구할 수 있다.	7점
2-iii	제시문에 주어진 정사각형의 한 대각선 AC가 고정된 원 $x^2 + y^2 = 4$ 와 접하게 되는 경우는 언제인지를 원과 직선의 위치관계를 활용하여 제대로 구할 수 있다.	7점
2-iv	[문제 2- i]에서 구한 함수와 사인함수를 합성시켜 얻어지는 함수의 절댓값이 $\sqrt{3}$ 이 되는 경우를 제대로 구하고, 이와 관련지어 얻어지는 등차수열의 합을 제대로 구할 수 있다.	16점

2교시 · 문제 3

[문제 3]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [문제 3- i] ~ [문제 3-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

[제시문1] 함수 $y = f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a + \Delta x$ 까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ 이다. 여기서 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때, 평균변화율의 극한값 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ 가 존재하면 함수 $y = f(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능하다고 한다. 이때 이 극한값을 함수 $y = f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 순간변화율 또는 미분계수라 하고, 기호로 $y = f'(a)$ 와 같이 나타낸다.

[제시문2] 임의의 실수 a 에 대하여, 곡선 $y = -x^2$ 과 직선 $y = ax + a$ 의 교점의 개수가 $f(a)$ 가 되도록 함수 $f(x)$ 를 정의하자.

[제시문3] 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$ 와 <제시문2>의 함수 $f(x)$ 는 다음 세 조건을 모두 만족한다.

- 사차방정식 $g(x) = 0$ 은 허근을 가지지 않는다.
- 함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 는 모든 실수에서 연속이다.
- 함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 는 열린구간 $(2, 10)$ 에서 미분가능하다.

- i <제시문2>의 함수 $f(x)$ 에 대하여, $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5)$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.
- ii <제시문3>의 함수 $h(x)$ 에 대하여, 가능한 $h(-1) + 3h(2) + 5h(5)$ 의 값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오.
- iii <제시문3>의 함수 $g(x)$ 에 대하여 두 방정식 $g(x) = 0$ 과 $g'(x) + 5x^3 - 20x^2 = 0$ 의 실근이 모두 정수이다. 이때 가능한 사차함수 $g(x)$ 의 개수를 구하고, 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 3-i]

곡선 $y = -x^2$ 과 직선 $y = ax + a$ 의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2 + ax + a = 0$ 의 실근의 개수와 같고 이는 이차방정식의 판별식으로 결정된다. 판별식이 $a^2 - 4a = a(a - 4)$ 이므로

$$f(a) = \begin{cases} 2 & (a(a-4) > 0) \\ 1 & (a(a-4) = 0) \\ 0 & (a(a-4) < 0) \end{cases}$$

이 된다. 이를 정리하여 함수로 나타내면

$$(*) \quad f(x) = \begin{cases} 2 & (x > 4) \\ 1 & (x = 4) \\ 0 & (0 < x < 4) \\ 1 & (x = 0) \\ 2 & (x < 0) \end{cases}$$

이다. 따라서 구하는 답은 $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 2 = 4$ 이다.

[문제 3-ii]

함수 $h(x)$ 를 (*)를 이용하여 나타내면

$$h(x) = f(x)g(x) = \begin{cases} 2g(x) & (x > 4) \\ g(4) & (x = 4) \\ 0 & (0 < x < 4) \\ g(0) & (x = 0) \\ 2g(x) & (x < 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$ 가 모든 실수에서 연속이므로 $g(0) = g(4) = 0$ 이 성립한다. 따라서 위 식은

$$h(x) = \begin{cases} 2g(x) & (x > 4) \\ 0 & (0 \leq x \leq 4) \\ 2g(x) & (x < 0) \end{cases}$$

이다. 그리고 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $k(x)$ 가 존재하여 $g(x) = (x^2 - 4x)k(x)$ 로 표현된다. 상수함수와 다항식은 모든 실수에서 미분가능하므로 함수 $h(x)$ 가 열린구간 $(2, 10)$ 에서 미분가능하려면 $x = 4$ 에서 미분가능해야 한다. 그러므로

$$h'(4) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{h(4 + \Delta x) - h(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{h(4 + \Delta x) - h(4)}{\Delta x}$$

가 존재한다. 함수 $h(x)$ 의 식을 이용하면 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{h(4 + \Delta x) - h(4)}{\Delta x} = 0$ 과

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{h(4 + \Delta x) - h(4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{2g(4 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{2g(4 + \Delta x) - 2g(4)}{\Delta x} = 2g'(4)$$

이 되므로 $g'(4) = 0$ 이 성립한다. 함수의 곱의 미분법을 사용하면 $g'(x) = (2x - 4)k(x) + (x^2 - 4x)k'(x)$ 이 되고 $g'(4) = 4k(4) = 0$ 이 성립하므로 어떤 수 α 가 존재하여 $k(x) = (x - 4)(x - \alpha)$ 가 된다. 즉,

$$(**) \quad g(x) = x(x - 4)^2(x - \alpha) = (x^2 - 8x + 16)(x^2 - \alpha x)$$

형태가 된다. 따라서 $g(-1) = 25(1 + \alpha)$, $g(5) = 5(5 - \alpha)$ 이고 구하는 답은

$$h(-1) + 3h(2) + 5h(5) = 2g(-1) + 0 + 10g(5) = 50(1 + \alpha) + 50(5 - \alpha) = 300$$

이다.

[문제 3-iii]

사차함수 $g(x)$ 가 식 (**)의 형태로 표현될 때 α 는 $g(x) = 0$ 의 근이 되므로 실수가 되어야 하고 $g(x) = 0$ 의 모든 실근이 정수가 되어야 하므로 α 는 정수이다. 그리고 식 (**)로부터

$$g'(x) = (2x - 8)(x^2 - \alpha x) + (x^2 - 8x + 16)(2x - \alpha) = (x - 4)(4x^2 - (3\alpha + 8)x + 4\alpha)$$

이고

$$g'(x) + 5x^3 - 20x^2 = g'(x) + 5x^2(x - 4) = (x - 4)(9x^2 - (3\alpha + 8)x + 4\alpha)$$

이다. 따라서 방정식 $g'(x) + 5x^3 - 20x^2 = 0$ 의 실근은 $x = 4$ 와 방정식 $9x^2 - (3\alpha + 8)x + 4\alpha = 0$ 의 실근이다. 방정식 $9x^2 - (3\alpha + 8)x + 4\alpha = 0$ 의 계수가 모두 실수이므로 (근과 계수와의 관계를 이용하면) 실근과 허근을 동시에 가지는 경우는 발생하지 않는다. 따라서 만약 $9x^2 - (3\alpha + 8)x + 4\alpha = 0$ 이 실근을 가진다고 하면 어떤 실수 A, B 가 존재하여 $9x^2 - (3\alpha + 8)x + 4\alpha = 9(x - A)(x - B)$ 형태가 된다. 해당 방정식의 모든 실근이 정수가 되어야 하므로 A, B 는 정수이고 이 경우 근과 계수와의 관계를 통하여

$$A + B = \frac{3\alpha + 8}{9}, \quad A \cdot B = \frac{4\alpha}{9}$$

이 성립한다. 두 번째 식으로부터 어떤 정수 l 가 존재하여 $\alpha = 9l$ 이 되지만, 이를 첫 번째 식에 대입하면 $A + B$ 가 정수라는 조건에 모순이 된다. 따라서 방정식 $9x^2 - (3\alpha + 8)x + 4\alpha = 0$ 은 실근을 가지지 않는다. 이는 해당 방정식의 판별식이 음수가 되는 것과 같은 의미이다. 이를 식으로 표현하면 $(3\alpha + 8)^2 - 144\alpha < 0$ 이고 이를 정리하면 $(3\alpha - 16)^2 < 192$ 가 된다. α 가 정수이므로 $-13 \leq 3\alpha - 16 \leq 13$, 즉 $1 \leq \alpha \leq 9$ 이다. 따라서 α 는 $1 \leq \alpha \leq 9$ 인 정수가 모두 가능하다. 각각의 α 에 따라 서로 다른 사차함수 $g(x)$ 가 존재하므로 답은 총 9개다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-i	이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수와 이차방정식의 근의 개수의 관계를 올바르게 이해할 수 있다.	5점
3-ii	도함수의 정의를 정확히 알고 근이 주어진 다항식을 인수분해 할 수 있다.	10점
3-iii	이차함수의 근과 계수와의 관계를 올바르게 이해하고, 이차방정식의 실근의 개수를 판별식을 통하여 올바르게 찾을 수 있다. 이차부등식을 올바르게 풀 수 있다.	15점

3교시 · 문제 1

[문제 1]

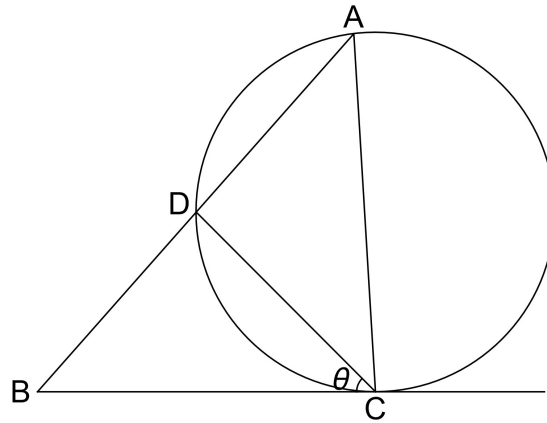
다음 <제시문>을 읽고 [문제 1-i] ~ [문제 1-iv]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

제시문

[제시문] 좌표평면 위의 세 점 B, C, D를 다음과 같이 정의하자.

- 점 B와 C의 좌표는 각각 $(-4, 0)$ 과 $(0, 0)$ 이다.
- 점 D의 y 좌표는 양수이고, 선분 CD의 길이는 3이다.

점 C에서 직선 BC와 접하고, 점 D를 지나는 원을 생각하자. 직선 BD가 점 D를 제외하고 이 원과 다시 만나는 점을 점 A라 하자. $\angle BCD = \theta$ 라 할 때, 함수 $f(\theta)$ 를 선분 AD의 길이로 정의하자. 단, 원이 점 D에서 직선 BD와 접할 경우에는, 점 A를 점 D로 정의하고 그 때의 θ 의 값을 α 라고 하며 $f(\alpha) = 0$ 으로 정의한다. $0 < \theta < \alpha$ 일 때, 제시된 상황을 그림으로 나타내면 아래와 같다.



- <제시문>에 주어진 원의 반지름을 θ 에 관한 식으로 표현하고, 그 이유를 논하시오.
- <제시문>에 주어진 α 와 원에 대하여 $\cos \alpha$ 의 값과 원의 반지름을 각각 구하고, 그 이유를 논하시오.
- <제시문>에 주어진 함수 $f(\theta)$ 에 대하여, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 와 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값을 각각 구하고 그 이유를 논하시오.
- <제시문>에 주어진 함수 $f(\theta)$ 의 값이 선분 AC의 길이와 같을 때, $\cos \theta$ 의 값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 1-i]

원의 반지름을 r 이라고 하자.

$0 < \theta < \alpha$ 인 경우:

$\angle CAD = \theta$ 이므로, 삼각형 CAD에 사인법칙을 적용하면, $\frac{3}{\sin \theta} = 2r$ 이므로 $r = \frac{3}{2 \sin \theta}$ 를 얻는다.

$\alpha < \theta < \pi$ 인 경우:

$\angle CAD = \pi - \theta$ 이므로, 삼각형 CAD에 사인법칙을 적용하면, $\frac{3}{\sin(\pi - \theta)} = 2r$ 이므로 $r = \frac{3}{2 \sin \theta}$ 를 얻는다.

$\theta = \alpha$ 인 경우:

더 긴 길이를 갖는 호 AC위에 양 끝점이 아닌 임의의 점을 E라고 하자. 삼각형 ACE에 사인법칙을 적용하면,

$$\frac{3}{\sin \alpha} = 2r \text{이므로 } r = \frac{3}{2 \sin \alpha} \text{를 얻는다.}$$

따라서 모든 경우에 $r = \frac{3}{2 \sin \theta}$ 를 얻는다.

$$\text{답: } r = \frac{3}{2 \sin \theta}$$

[문제 1-ii]

원이 점 D에서 직선 BD와 접할 경우, 삼각형 BCD는 이등변삼각형이 된다. $\overline{BC} = \overline{BD} = 4$, $\overline{CD} = 3$, $\angle BCD = \alpha$ 이므로 코사인법칙을 적용하면, $4^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos \alpha$ 를 얻는다. 이로부터 $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ 임을 알 수 있다. 이로부터 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$ 이 되고, [문제 1-i]의 결과를 적용하면, $r = \frac{3}{2 \sin \alpha} = \frac{12}{\sqrt{55}}$ 임을 알 수 있다.

(별해)

선분 CD의 중점을 H라고 하면, $\cos \alpha = \frac{\overline{CH}}{\overline{BC}} = \frac{3/2}{4} = \frac{3}{8}$ 을 얻는다.

$$\text{답: } \cos \alpha = \frac{3}{8}, r = \frac{12}{\sqrt{55}}$$

[문제 1-iii]

삼각형 BCD에 코사인법칙을 적용하면, $\overline{BD}^2 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \theta = 25 - 24 \cos \theta$ 를 얻는다. 이제 다음 두 경우를 나누어서 생각해보자.

$0 < \theta < \alpha$ 인 경우:

$$4^2 = \overline{BD}(\overline{BD} + f(\theta)) = \overline{BD}^2 + \overline{BD} \cdot f(\theta) = 25 - 24 \cos \theta + \overline{BD} \cdot f(\theta)$$

$$\text{이므로 } f(\theta) = \frac{24 \cos \theta - 9}{\sqrt{25 - 24 \cos \theta}} \text{를 얻는다.}$$

$\alpha < \theta < \pi$ 인 경우:

$$4^2 = (\overline{BD} - f(\theta))\overline{BD} = \overline{BD}^2 - \overline{BD} \cdot f(\theta) = 25 - 24 \cos \theta - \overline{BD} \cdot f(\theta)$$

$$\text{이므로 } f(\theta) = \frac{9 - 24 \cos \theta}{\sqrt{25 - 24 \cos \theta}} \text{를 얻는다.}$$

이제 $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이므로, 위에서 얻은 $f(\theta)$ 에 대한 첫 번째 경우의 식으로부터 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{13}}$ 과 두 번째 경우의 식으로부터 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9}{5}$ 를 얻는다.

$$\text{답: } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{13}}, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9}{5}$$

[문제 1-iv]

다음 세 가지 경우로 나누어서 생각해보자.

$\theta = \alpha$ 인 경우:

점 A는 점 D와 같으므로 $f(\theta) = 0$ 이다. 한편, $\overline{AC} = \overline{DC} = 3$ 이므로, 이 경우에 $f(\theta)$ 는 $\overline{AC}$ 와 같지 않게 된다.

$0 < \theta < \alpha$ 인 경우:

$4^2 = \overline{BD}(\overline{BD} + f(\theta)) = \overline{BD}^2 + \overline{BD} \cdot f(\theta) = \overline{BD}^2 + \overline{BD} \cdot \overline{AC}$ 가 성립한다. 한편, 삼각형 BCD와 삼각형 BAC는 서로 닮음이므로, $3 : \overline{AC} = 4 : (f(\theta) + \overline{BD})$ 를 얻는다. 이로부터

$4\overline{AC} = 3(f(\theta) + \overline{BD}) = 3 \cdot \frac{16}{\overline{BD}}$ 이 되므로 $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 12$ 임을 알 수 있다. 따라서

$4^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BD} \cdot \overline{AC} = \overline{BD}^2 + 12$ 로부터 $\overline{BD} = 2$ 를 얻는다. 이제 삼각형 BCD에 코사인법칙을 적용하면, $4 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \theta = 25 - 24 \cos \theta$ 로부터 $\cos \theta = \frac{7}{8}$ 을 얻는다.

$\alpha < \theta < \pi$ 인 경우:

$4^2 = (\overline{BD} - f(\theta))\overline{BD} = \overline{BD}^2 - \overline{BD} \cdot f(\theta) = \overline{BD}^2 - \overline{BD} \cdot \overline{AC}$ 가 성립한다. 한편, 삼각형 BAC와 삼각형 BCD는 서로 닮음이므로, $\overline{AC} : 3 = 4 : \overline{BD}$ 를 얻는다. 이로부터 $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 12$ 임을 알 수 있다. 따라서 $4^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BD} \cdot \overline{AC} = \overline{BD}^2 - 12$ 로부터 $\overline{BD} = 2\sqrt{7}$ 을 얻는다. 이제 삼각형 BCD에 코사인법칙을 적용하면, $28 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \theta = 25 - 24 \cos \theta$ 로부터 $\cos \theta = -\frac{1}{8}$ 을 얻는다.

답: $\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-i	제시문에 주어진 삼각형 ACD의 외접원의 반지름을 사인법칙을 활용하여 제대로 구할 수 있다.	9점
1-ii	제시문에 주어진 직선 BD가 원과 접하는 경우, 코사인법칙을 활용하여 $\alpha = \angle BCD$ 와 삼각형 ACD의 외접원의 반지름을 제대로 구할 수 있다.	10점
1-iii	$\angle BCD$ 가 α 보다 작은 경우와 큰 경우에 점 A와 점 D의 위치 관계를 제대로 구분할 수 있고, 각각의 경우에 코사인법칙을 활용하여 선분 AD의 길이를 제대로 구할 수 있다.	10점
1-iv	선분 AD와 선분 AC의 길이가 서로 같아지는 경우에 코사인법칙을 활용하여 $\angle BCD$ 를 제대로 구할 수 있다.	11점

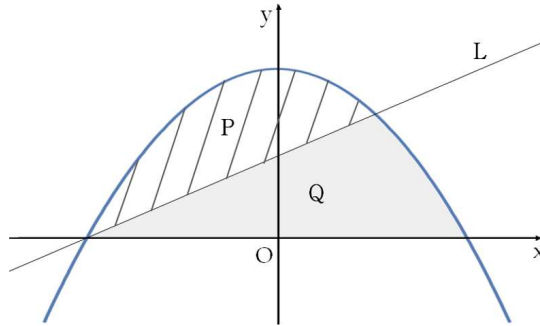
3교시 · 문제 2

[문제 2]

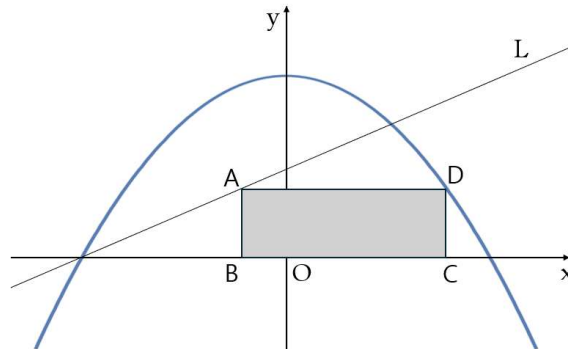
다음 <제시문>을 읽고 [문제 2-i] ~ [문제 2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

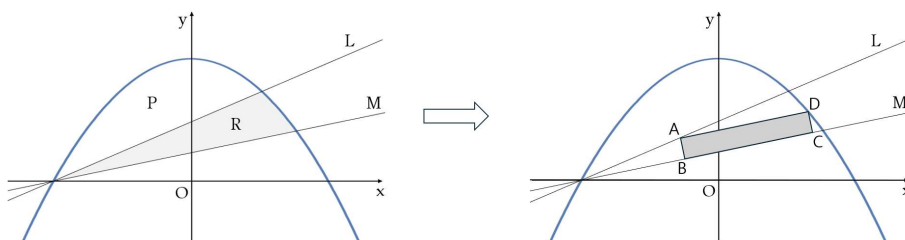
[제시문] 아래 그림과 같이 곡선 $y = 1 - x^2$ 과 x 축으로 둘러싸인 도형이 직선 $L : y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ 에 의해 두 부분으로 나뉘어진다. 이때 윗부분의 도형을 P라 하고 아랫부분의 도형을 Q라고 하자.



- i <제시문>에서 주어진 도형 P의 넓이 S_P 와 도형 Q의 넓이 S_Q 의 비율 $\frac{S_P}{S_Q}$ 를 구하고, 그 이유를 논하시오.
- ii 아래 그림과 같이 <제시문>에서 주어진 도형 Q에 내접하는 직사각형 ABCD가 다음 두 조건을 모두 만족한다.
 (1) 점 B와 점 C는 x 축 위에 있다.
 (2) 점 A는 직선 $L : y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ 위에 있고, 점 D는 곡선 $y = 1 - x^2$ 위에 있다.
 이 조건들을 만족하면서 직사각형 ABCD의 넓이가 최대가 될 때의 점 C의 좌표를 $(q, 0)$ 이라 하고, $w = q - \frac{1}{2}$ 로 정의하자. 이때 $8w^3 + 15w^2 + 3w$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.



- iii 아래 그림과 같이 <제시문>에서 주어진 도형 Q를 직선 $M : y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ 로 나누어 윗부분의 도형을 R이라 하자. 이때 도형 R에 내접하는 직사각형 ABCD는 다음 두 조건을 모두 만족한다.
 (1) 점 B와 점 C는 직선 $M : y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ 위에 있고, $\overline{BC} = \frac{\sqrt{17}}{4}$ 이다.
 (2) 점 A는 직선 $L : y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$ 위에 있고, 점 D는 곡선 $y = 1 - x^2$ 위에 있다.
 이때 점 B의 좌표를 구하고 그 이유를 논하시오.



■ 예시 답안

[문제 2-i]

$$S_P + S_Q = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

$$S_P = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left\{ (1 - x^2) - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right\} dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{9}{16}$$

$$S_Q = \frac{37}{48} \text{이므로 } \frac{S_P}{S_Q} = \frac{27}{37} \text{이다.}$$

$$\text{답: } \frac{27}{37}$$

[문제 2-ii]

$$C(q, 0), B(p, 0) \text{이라 하면 } \frac{p+1}{2} = 1 - q^2, p = 1 - 2q^2$$

$$\overline{BC} = q - p = q + 2q^2 - 1, \overline{DC} = 1 - q^2 \text{이므로 } f(q) = (1 - q^2)(2q^2 + q - 1)$$

$$f'(q) = -8q^3 - 3q^2 + 6q + 1 = 0 \text{이 된다.}$$

$$q = \frac{1}{2} + w \text{이라고 하면 } 8w^3 + 15w^2 + 3w = \frac{9}{4}$$

$$\text{답: } \frac{9}{4}$$

(부연 설명)

$$f(q) = (1 - q^2)(2q^2 + q - 1) \text{에 대해 } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, f(1) = 0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1 - \frac{3}{4} + 3 + 1 = \frac{9}{4} > 0, f'(1) = -11 + 7 = -4 < 0$$

$$H(q) = f'(q) = -8q^3 - 3q^2 + 6q + 1 \text{으로 두고 이를 미분하면 } H'(q) = -24q^2 - 6q + 6$$

$$\text{열린구간 } \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{에서 } H'(q) < 0$$

$H\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0, H(1) = f'(1) < 0$ 이므로 열린구간 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 에서 $H(q) = 0$ 인 q 가 유일하게 존재한다. 즉 $f'(q) = 0$ 이고 이때의 q 의 좌우에서 $f'(x)$ 값의 부호가 양에서 음으로 변하므로 q 에서 $f(q)$ 가 최댓값이 된다.

[문제 2-iii]

점 A의 좌표를 $\left(w, \frac{w+1}{2}\right)$ 이라 하자.

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{17}}{4}, \text{AD의 기울기} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$(\text{D의 } x\text{좌표}) - (\text{A의 } x\text{좌표}) = \overline{AD} \times \frac{4}{\sqrt{17}} = 1$$

$$\therefore \text{점 D는 직선 AD : } y = \frac{1}{4}(x - w) + \frac{1}{2}(w + 1) \text{와 곡선 } y = 1 - x^2 \text{의 교점의 } x\text{좌표이므로,}$$

$$x = w + 1 \text{은 } \frac{1}{4}(x - w) + \frac{1}{2}(w + 1) = 1 - x^2 \text{의 해가 된다.}$$

$$\therefore 4w^2 + 10w + 3 = 0, w = \frac{-5 + \sqrt{13}}{4}$$

$$B\left(a, \frac{a+1}{4}\right) \text{이라 하자.}$$

직선 BA와 직선 BC는 수직이므로 기울기가 -4 이다.

$$\text{따라서, BA : } y = -4(x - a) + \frac{a+1}{4}$$

점 A를 직선 BA와 $y = \frac{x+1}{2}$ 가 만나는 점이라고 하면

점 A의 좌표인 w 는 $-4(w-a) + \frac{a+1}{4} = \frac{w+1}{2}$ 를 만족한다.

$$w = \frac{1}{18}(-1+17a) \text{ 이므로 } \frac{1}{18}(-1+17a) = \frac{-5+\sqrt{13}}{4}.$$

$$\therefore a = \frac{-43+9\sqrt{13}}{34} \text{ 이고 } B\left(\frac{-43+9\sqrt{13}}{34}, \frac{-9+9\sqrt{13}}{136}\right)$$

$$\text{답: } \left(\frac{-43+9\sqrt{13}}{34}, \frac{-9+9\sqrt{13}}{136}\right)$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2- i	곡선과 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있다.	8점
2- ii	주어진 조건을 만족하는 직사각형의 넓이를 변수로 표현할 수 있고, 미분을 통해 극점을 구할 수 있다.	12점
2-iii	주어진 조건을 만족하는 직사각형의 좌표를 직선의 방정식을 활용하여 구할 수 있다.	10점

3교시 · 문제 3

[문제 3] 다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [문제 3-i] ~ [문제 3-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.
(30점)

제시문

[제시문1] 세제곱하여 실수 a 가 되는 수, 즉 방정식 $x^3 = a$ 를 만족시키는 수 x 를 a 의 세제곱근이라 한다. 실수 a 의 세제곱근 중에서 실수인 것은 하나뿐이고, 이것을 $\sqrt[3]{a}$ 로 나타낸다.

[제시문2] 실수 a, b 에 대하여 다음과 같은 다항식의 곱셈 공식이 성립한다

$$\bullet (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\bullet (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

[제시문3] 주어진 실수 r 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_n = r \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 으로 정의하고, $A_n = \sqrt[3]{\frac{n}{4} + (-1)^n a_n}$ 에 가장 가까운 정수를 b_n 이라 하자. 만약 A_n 에 가장 가까운 정수가 두 개 존재하면 두 수 중에서 더 큰 수를 b_n 이라 한다.

[문제 3-i] <제시문3>의 수열 $\{b_n\}$ 에 대하여 $r = \frac{4}{3}$ 일 때, b_1 을 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3-ii] <제시문3>의 수열 $\{b_n\}$ 에 대하여 $r = \frac{4}{3}$ 일 때, $\sum_{k=1}^{150} b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_{150}$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3-iii] <제시문3>의 수열 $\{b_n\}$ 에 대하여 실수 r 이 $1 < |r| < 2$ 일 때, 가능한 $\sum_{k=1}^{150} b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_{150}$ 의 값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 3-i]

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 $a_1 = r = \frac{4}{3}$ 이므로 $A_1 = \sqrt[3]{-\frac{13}{12}} = -\sqrt[3]{\frac{13}{12}}$ 이다. $-\frac{3}{2} < -\sqrt[3]{\frac{13}{12}} < -1$ 이므로 답은 $b_1 = -1$ 이다.

[문제 3-ii]

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이다. 우선 $b_n = M$ 이라고 할 때 $M \geq 1$ 인 경우를 살펴보자. 조건 $b_n = M$ 은 부등식 $M - \frac{1}{2} \leq A_n < M + \frac{1}{2}$ 의 필요충분조건이고 부등식의 세 항이 모두 양수이다. 이 부등식을 세 제공하여 정리하면 아래 부등식이 된다.

$$(*) \quad 4M^3 - 6M^2 + 3M - \left(\frac{1}{2} + (-1)^n 4a_n\right) \leq n < 4M^3 + 6M^2 + 3M + \left(\frac{1}{2} - (-1)^n 4a_n\right)$$

만약 $n \geq 5$ 이면 $0 < 4a_n \leq \frac{1}{3}$ 이므로 두 부등식 $0 < \frac{1}{2} + (-1)^n 4a_n < 1$, $0 < \frac{1}{2} - (-1)^n 4a_n < 1$ 이 성립하고, 결국 다음 부등식이 (n, M 둘 다 자연수이므로) 부등식 (*)의 필요충분조건으로 성립한다.

$$(**) \quad 4M^3 - 6M^2 + 3M \leq n \leq 4M^3 + 6M^2 + 3M$$

이를 통해 $M = 1$ 이면 $1 \leq n \leq 13$ 이고, $n \geq 5$ 인 경우만 고려하고 있으므로 $5 \leq n \leq 13$ 이다. 이와 비슷하게 $M = 2$ 이면 $14 \leq n \leq 62$, $M = 3$ 이면 $63 \leq n \leq 171$ 가 성립한다. 즉

$$b_5 = b_6 = \dots = b_{13} = 1, \quad b_{14} = b_{15} = \dots = b_{62} = 2, \quad b_{63} = b_{64} = \dots = b_{150} = 3$$

이다. 따라서

$$(***) \quad \sum_{k=5}^{150} b_k = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 49 + 3 \cdot 88 = 9 + 98 + 264 = 371$$

이 성립한다. 이제 $1 \leq n \leq 4$ 인 경우를 생각하자. 우선 [문제 3-i]에서 $b_1 = -1$ 임을 보였다. 그리고 $a_2 = \frac{2}{3}$ 이므로 $1 < A_2 = \sqrt[3]{\frac{7}{6}} < \frac{3}{2}$ 이 성립하고 $b_2 = 1$ 이다. 비슷하게 $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{6}$ 이므로 $\frac{1}{2} < A_3 = \sqrt[3]{\frac{5}{12}} < 1$, $1 < A_4 = \sqrt[3]{\frac{7}{6}} < \frac{3}{2}$ 이 성립하여 $b_3 = b_4 = 1$ 이다. 그러므로

$$\sum_{k=1}^4 b_k = -1 + 1 + 1 + 1 = 2$$

이고 (***)를 고려하면 답은 $\sum_{k=1}^{150} b_k = 2 + 371 = 373$ 이다.

[문제 3-iii]

$b_n = M$ 이고 $M \geq 1$ 이면 [문제 3-ii]에서 부등식 (*)는 조건 $b_n = M$ 의 필요충분조건임을 확인하였다. 실수 r 이 $1 < |r| < 2$ 를 만족하므로 $2^3\left(\frac{1}{2}\right)^n < |4a_n| < 2^4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이다. 따라서 만약 $n \geq 5$ 이면 $0 < |4a_n| < \frac{1}{2}$ 이 성립하여 [문제 3-ii]의 경우와 비슷하게 부등식 $0 < \frac{1}{2} + (-1)^n 4a_n < 1$, $0 < \frac{1}{2} - (-1)^n 4a_n < 1$ 이 성립한다. 따라서 부등식 (*)는 부등식 (**)이 된다. 이 경우 식 (***)에서 $\sum_{k=5}^{150} b_k = 371$ 이 됨을 보였다.

이제 $\sum_{k=1}^4 b_k$ 가 가능한 값을 모두 구하면 된다. 두 가지 경우로 나누어 생각하자.

우선 $1 < r < 2$ 라 가정하자. 이 경우

$$-\frac{3}{2} < -\sqrt[3]{\frac{7}{4}} < A_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} - r < -\sqrt[3]{\frac{3}{4}} < -\frac{1}{2}$$

이므로 $b_1 = -1$ 이다. 나머지 경우도

$$1 < A_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{r}{2}} < \sqrt[3]{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \sqrt[3]{\frac{1}{4}} < A_3 = \sqrt[3]{\frac{3}{4} - \frac{r}{4}} < \sqrt[3]{\frac{1}{2}} < 1$$

$$1 < \sqrt[3]{\frac{9}{8}} < A_4 = \sqrt[3]{1 + \frac{r}{8}} < \sqrt[3]{\frac{5}{4}} < \frac{3}{2}$$

이 성립하여 $b_2 = b_3 = b_4 = 1$ 이 된다. 그러므로 $1 < r < 2$ 이면 $\sum_{k=1}^4 b_k = 2$ 이다.

이제 $r = -t$ 라 놓고 $1 < t < 2$ 라 가정하자. 이 경우 $a_1 = -t, a_2 = -\frac{t}{2}, a_3 = -\frac{t}{4}, a_4 = -\frac{t}{8}$ 이 되어 $1 < t < 2$ 인 범위에서

$$1 < \sqrt[3]{\frac{5}{4}} < A_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{4} + t} < \sqrt[3]{\frac{9}{4}} < \frac{3}{2}$$

$$-\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < A_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{t}{2}} < 0$$

$$1 < A_3 = \sqrt[3]{\frac{3}{4} + \frac{t}{4}} < \sqrt[3]{\frac{5}{4}} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} < \sqrt[3]{\frac{3}{4}} < A_4 = \sqrt[3]{1 - \frac{t}{8}} < \sqrt[3]{\frac{7}{8}} < 1$$

이 성립한다. 이를 통해 $b_1 = b_3 = b_4 = 1$ 이고, $-1 < -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < -\frac{1}{2}$ 이므로 $b_2 = -1, 0$ 이 모두 가능하다. 따라서

$\sum_{k=1}^4 b_k = 2$ 또는 $\sum_{k=1}^4 b_k = 3$ 이 가능하다.

최종적으로 $1 < |r| < 2$ 인 경우 $\sum_{k=1}^4 b_k = 2$ 또는 $\sum_{k=1}^4 b_k = 3$ 이 가능하므로 가능한 $\sum_{k=1}^{150} b_k$ 의 값은 373 또는 374이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3- i	세제곱근을 부등식을 이용하여 범위를 찾아 가장 가까운 정수를 찾을 수 있다.	5점
3- ii	제시된 수열의 규칙을 찾아 수열의 합을 계산할 수 있다.	10점
3-iii	제시된 수열의 규칙을 찾아 수열의 합을 계산할 수 있다.	15점

2024학년도

논술우수 자연계

1교시 · 문제 1

[문제 1]

다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 1- i] ~ [문제 1-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

[제시문1] 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ 이다.

[제시문2] 좌표평면 위의 네 점 A, B, C, D가 다음의 조건을 만족한다.

- 점 A는 곡선 $y = \sqrt{x-1}$ 위의 점이다. (단, $x \geq 1$)
- 점 B는 직선 $y = x$ 위의 점이다.
- 점 C는 직선 $y = 0$ 위의 점이다.
- 점 D는 곡선 $y = 2x^2 - 30x + 113$ 위의 점이다.

- i [문제 1- i] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 이 곡선 위에 있지 않은 점 P가 주어져 있다. 이 곡선 위의 점 중에서 주어진 점 P까지의 거리가 최소가 되는 점을 Q라고 하자. 이때, 점 Q에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 접선이 직선 PQ에 수직인 이유를 논하시오.
- ii [문제 1- ii] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 에 대하여, 곡선 $y = g(x)$ 와 곡선 $y = h(x)$ 가 서로 만나지 않는다고 하자. 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 Q와 곡선 $y = h(x)$ 위의 점 R에 대해 선분 QR의 길이가 최소일 때, 점 Q에서 곡선 $y = g(x)$ 에 접하는 접선과 점 R에서 곡선 $y = h(x)$ 에 접하는 접선이 모두 직선 QR에 수직인 이유를 논하시오.
- iii [문제 1-iii] <제시문2>의 네 점 A, B, C, D에 대해 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ 의 값이 최소가 될 때, 점 D의 x 좌표와 점 A의 y 좌표의 차가 6이라고 한다. 이때, 점 A와 D의 좌표를 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 1-i]

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $Q(c, f(c))$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 접선과 수직이며 점 Q 를 지나는 직선을 ℓ 이라 하자. 이 직선 ℓ 이 점 $P(a, b)$ 를 지난다는 것을 보이면 된다. 직선 ℓ 의 방정식은

$$y = -\frac{1}{f'(c)}(x - c) + f(c)$$

이므로 다음을 만족함을 보이면 된다.

$$b = -\frac{1}{f'(c)}(a - c) + f(c) \quad \dots\dots\dots(*)$$

이제 곡선 위의 점 $(x, f(x))$ 에서 점 P 까지의 거리의 제곱을

$$g(x) = (x - a)^2 + (f(x) - b)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + f(x) \cdot f(x) - 2bf(x) + b^2$$

이라 하자. 그러면 미분가능한 함수 $g(x)$ 는 $x = c$ 에서 최솟값을 가지므로 극소가 된다. 그러므로 도함수

$$g'(x) = 2x - 2a + f'(x)f(x) + f(x)f'(x) - 2bf'(x) = 2(x - a) + 2f'(x)(f(x) - b)$$

는 $g'(c) = 0$ 을 만족한다. 따라서

$$2(c - a) + 2f'(c)(f(c) - b) = 0$$

을 얻는다. 이 식은 식 (*)과 같으므로 직선 ℓ 은 점 P 를 지난다.

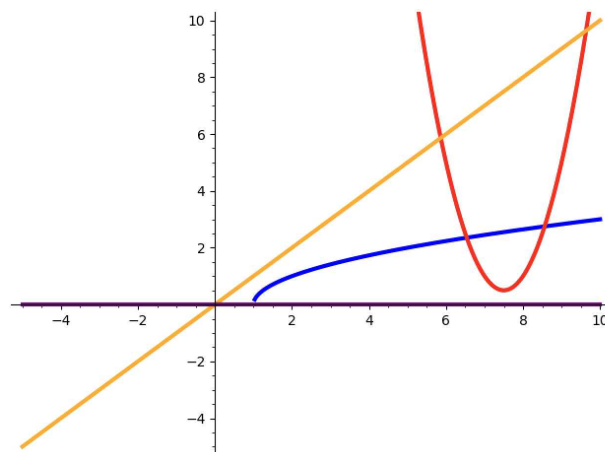
참고: 만약 $f'(c) = 0$ 인 경우 위에서 얻은 식 $2(c - a) + 2f'(c)(f(c) - b) = 0$ 로부터 $a = c$ 가 되고 직선 ℓ 의 방정식은 $x = c$ 가 된다. 따라서 이 경우에도 직선 ℓ 은 점 P 를 지난다.

[문제 1-ii]

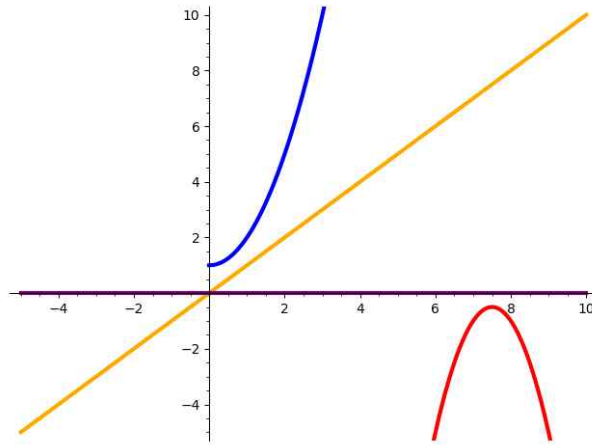
점 Q 에서 곡선 $y = g(x)$ 에 접하는 접선과 수직이며 점 Q 를 지나는 직선을 ℓ_1 이라 하고 점 R 에서 곡선 $y = h(x)$ 에 접하는 접선과 수직이며 점 R 를 지나는 직선을 ℓ_2 라 하자. 점 Q 를 고정하고 곡선 $y = h(x)$ 위의 점 중에서 점 Q 까지의 거리가 최소인 점을 R 이라고 할 때, 선분 QR 의 길이가 최소가 되어야 하므로 [문제 1-i]에 의해 직선 ℓ_1 이 점 R 을 지난다. 같은 이유로 직선 ℓ_2 는 점 Q 를 지난다. 따라서 직선 ℓ_1 과 ℓ_2 는 모두 직선 QR 와 같으므로 점 Q 에서 곡선 $y = g(x)$ 에 접하는 접선과 점 R 에서 곡선 $y = h(x)$ 에 접하는 접선은 모두 직선 QR 에 수직이다.

[문제 1-iii]

주어진 곡선과 직선의 개형을 그리면 아래와 같다.



곡선 $y = \sqrt{x-1}$ ($x \geq 1$)을 직선 $y = x$ 에 대해 대칭시키면 $y = x^2 + 1$ ($x \geq 0$)이 되고 곡선 $y = 2x^2 - 30x + 113$ 을 직선 $y = 0$ 에 대해 대칭시키면 $y = -2x^2 + 30x - 113$ 이 된다. 이렇게 얻어진 곡선의 개형을 그리면 아래와 같다.



따라서 선분 AB, BC, CD의 길이의 합이 최소가 될 때는 점 A', B, C, D'이 한 직선 위에 있고, 선분 A'D'의 길이가 두 포물선 사이의 최소 거리가 될 때이다. 점 A(a, b)를 직선 $y = x$ 에 대해 대칭시켜 얻은 점을 A'(b, a)라 하고 점 D(c, d)를 직선 $y = 0$ 에 대해 대칭시켜 얻은 점을 D'(c, -d)라 하면 주어진 조건으로부터 $c - b = 6$ 을 얻는다. 또한 [문제 1-ii]에 의해 점 A'에서 곡선 $y = x^2 + 1$ 에 접하는 접선과 점 D'에서 곡선 $y = -2x^2 + 30x - 113$ 에 접하는 접선은 서로 평행하므로 기울기가 같다. 두 접선의 기울기를 비교하면 $2b = -4c + 30$ 이 되고, 이 식과 위에서 얻은 식을 연립하면 $b = 1, c = 7$ 을 얻는다. 따라서 A' = (1, 2), D' = (7, -1)이므로, 정답은 A = (2, 1), D = (7, 1)이다.

참고: 문제에서 주어진 조건 $c - b = 6$ 이 없어도 다음과 같이 답을 구할 수 있다. 점 A'(b, b² + 1)에서 곡선 $y = x^2 + 1$ 에 접하는 접선과 수직이며 점 A'을 지나는 직선과 점 D' = (c, -2c² + 30c - 113)에서 곡선 $y = -2x^2 + 30x - 113$ 에 접하는 접선과 수직이며 점 D'을 지나는 직선은 각각 다음과 같다.

$$y = -\frac{1}{2b}(x - b) + b^2 + 1, \quad y = -\frac{1}{30 - 4c}(x - c) - 2c^2 + 30c - 113$$

이 두 직선은 일치하므로 기울기가 같고 y절편이 같음을 이용하여 다음 식을 얻는다.

$$2b = -4c + 30, \quad \frac{3}{2} + b^2 = \frac{c}{30 - 4c} - 2c^2 + 30c - 113$$

첫 번째 식에서 얻은 $b = 15 - 2c$ 를 두 번째 식에 대입하여 정리하면

$$-24c^3 + 540c^2 - 4059c + 10185 = -3(8c^2 - 124c + 485)(c - 7) = 0$$

이 되어 $c = 7$ 을 얻을 수 있다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1- i	접선의 방정식을 계산할 수 있다.	8점
1- ii	접선의 성질을 이해하고 문제를 해결할 수 있다.	6점
1-iii	함수의 그래프를 직선에 대해 대칭할 수 있다.	16점

1교시 · 문제 2

[문제 2]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [문제 2- i] ~ [문제 2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

제시문

[제시문1] 기울기가 양수이고 서로 평행인 두 직선 L_1 과 L_2 의 y 절편을 각각 p 와 0 이라 하자. (단, $p > 0$) 직선 L_1 이 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 만나는 두 점을 x 좌표의 값이 작은 것부터 A, D라 하고, 직선 L_2 가 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프와 만나는 두 점을 x 좌표의 값이 작은 것부터 B, C라 하자. 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 P, 선분 AD의 중점을 M_1 , 선분 BC의 중점을 M_2 라 하자.

[제시문2] 이차함수 $y = x^2$ 과 반지름이 r 인 원이 다음 세 조건을 만족시킨다.

- 원의 중심의 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수이다.
- 이차함수 $y = x^2$ 과 원이 서로 다른 네 점에서 만나고, 교점의 y 좌표는 모두 정수이다.
- 네 교점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 사다리꼴이다.

[제시문3] 최고차항의 계수가 -1 인 사차함수 $y = g(x)$ 가 $g(x) = g(-x)$ 를 만족하고, x 축과 x_1, x_2, x_3, x_4 에서 만난다. 또한, 사차함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프가 서로 다른 네 점 Q, R, S, T에서 만난다고 가정하자. (단, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ 이고, x_k ($k = 1, 2, 3, 4$)는 정수가 아니다.)

- i [문제 2- i] <제시문1>에서 $\overline{PM_1} = 5$ 이고 $\overline{PM_2} = 1$ 일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하고 그 이유를 논하시오.
- ii [문제 2- ii] <제시문2>에서 $r = 4$ 일 때, 사다리꼴의 넓이를 모두 구하고 그 이유를 논하시오.
- iii [문제 2- iii] 양의 정수 m, n 에 대해 <제시문3>에서 $x_3 = \sqrt{m}, x_4 = \sqrt{n}$ 이고, 네 점 Q, R, S, T를 지나는 원의 반지름이 10이라 하자. 이때, <제시문3>을 만족하는 양의 정수 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 2-i]

두 직선 L_1, L_2 의 기울기를 k 라 하면, 두 직선의 방정식은

$$L_1 : y = kx + p, \quad L_2 : y = kx$$

이다. L_2 와 $y = x^2$ 의 교점은 $B(0, 0)$ 와 $C(k, k^2)$ 이고, 이로부터 $M_2\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{2}\right)$ 이다.

두 점 A, D의 x 좌표를 각각 x_1, x_2 라 하면, 이차방정식 $x^2 - kx - p = 0$ 의 해이므로

$$x_1 + x_2 = k, \quad x_1 x_2 = -p$$

와 $M_1\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{2} + p\right)$ 를 얻을 수 있다. 두 점 M_1, M_2 의 x 좌표가 같고 $\overline{PM_1} = 5, \overline{PM_2} = 1$ 이므로,

$$P\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{2} + 1\right), \quad \overline{M_1 M_2} = p = 6$$

이다. 직선 BP의 방정식이 $y = \left(\frac{\frac{k^2}{2} + 1}{\frac{k}{2}}\right)x = \left(\frac{k^2 + 2}{k}\right)x$ 이고, 이 직선과 그래프 $y = x^2$ 의 교점 중의 하나가 점 D이므로,

$$(x_2, kx_2 + p) = \left(\frac{k^2 + 2}{k}, \left(\frac{k^2 + 2}{k}\right)^2\right)$$

를 얻게 된다. 즉,

$$kx_2 + p = k\left(k + \frac{2}{k}\right) + 6 = k^2 + 8 = \left(\frac{k^2 + 2}{k}\right)^2$$

이고, 이를 정리하면 $k = 1$ 이다.

따라서, 점 $A(-2, 4), B(0, 0), C(1, 1), D(3, 9)$ 의 좌표를 얻게 되고, 이 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 사다리꼴이므로 그 넓이는

$$(5\sqrt{2} + \sqrt{2}) \times \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = 18$$

이다.

[문제 2-ii]

$y = x^2$ 과 원의 교점을 x 좌표의 값이 작은 순으로 A, B, C, D라고 하자. <제시문 1>과 같이 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 P, 선분 AD의 중점을 M_1 , 선분 BC의 중점을 M_2 라고 하자.

직선 $y = kx + p$ 가 $y = x^2$ 의 두 교점의 x 좌표값의 합은 항상 k 이다. <제시문 2>의 조건으로부터 두 직선 AD와 BC가 서로 평행이고, 그 기울기를 k 라 하면, M_1 과 M_2 는 y 축과 평행한 직선 $x = \frac{k}{2}$ 위에 놓이게 된다. <제시문 2>의 조건에 의해 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로, 선분 $M_1 M_2$ 는 원의 중심을 지나게 되고 두 직선 AD와 BC는 선분 $M_1 M_2$ 와 수직이다. 따라서, $k = 0$ 이다.

이제, 점 C, D가 $y = x^2$ 위의 점이므로, $C(\sqrt{a}, a), D(\sqrt{b}, b)$ ($b > a > 0$)라 하자. 점 A, B, C, D를 지나는 원의 방정식을 $x^2 + (y - k)^2 = r^2$ 이라 하면,

$$y^2 + (1 - 2k)y + k^2 - r^2 = 0$$

의 두 근이 a, b 이므로, 근과 계수의 관계에 의해

$$a + b = 2k - 1, \quad ab = k^2 - r^2$$

이다. 따라서, $k = \frac{a+b+1}{2}$, $r^2 = \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 - ab$ 이다. $r = 4$ 이므로 $\left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 - ab = 16$ 이고 <제시문 2>의 조건으로부터 $\frac{a+b+1}{2}$ 는 정수이다. 이 식을 정리하면 $(b-a)^2 + 2(a+b) = 63$ 이고 $b-a$ 는 홀수이다. 이로부터 가능한 경우는 다음 표와 같다.

$b-a$	$b+a$	a	b
1	31	15	16
3	27	12	15
5	19	7	12

사다리꼴 ABCD의 넓이는 $(\sqrt{b} + \sqrt{a})(b-a)$ 이므로 각 경우의 넓이는

$$\sqrt{16} + \sqrt{15}, \quad 3(\sqrt{15} + \sqrt{12}), \quad 5(\sqrt{12} + \sqrt{7})$$

이다.

[문제 2-iii]

<제시문 3>의 조건과 $x_3 = \sqrt{m}$, $x_4 = \sqrt{n}$ 이므로 $g(x) = -(x^2 - m)(x^2 - n)$ 이다. $y = x^2$ 과 $y = g(x)$ 가 네 개의 점에서 만나기 위해서는 $y = -(y-m)(y-n)$, 즉

$$y^2 - (m+n-1)y + mn = 0$$

이 서로 다른 두 실근 a, b ($0 < a < b$)를 가져야 한다. 따라서,

$$D = (m+n-1)^2 - 4mn = (m-n)^2 - 2(m+n) + 1 > 0 \quad \text{----} \textcircled{1}$$

이다. 한편, $S(\sqrt{a}, a)$, $T(\sqrt{b}, b)$ 라 하면, 네 점 Q, R, S, T를 지나는 원의 방정식은 [문제 2-ii]에서와 같이

$$x^2 + \left(y - \frac{a+b+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 - ab$$

이다. 근과 계수의 관계로부터

$$a+b = m+n-1, \quad ab = mn$$

이므로, 원의 방정식은

$$x^2 + \left(y - \frac{m+n}{2}\right)^2 = \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$$

이고, $n-m = 20$ 이다. 이를 ①에 대입하면 $m+n \leq 200$ 이 성립한다. 따라서, 가능한 순서쌍 (m, n) 은

$$(1, 21), (2, 22), \dots, (90, 110)$$

이다. 이 중에서 완전제곱수인 m 은 $m = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$ 의 9가지이고, 완전제곱수인 n 은 $n = 25, 36, 49, 64, 81, 100$ 의 6가지이다. 여기서 $(m, n) = (16, 36)$ 은 중복해서 발생하므로 $9 + 6 - 1 = 14$ 가지를 제외해야 한다. 따라서, 문제의 개수는 $90 - 14 = 76$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2- i	직선의 방정식을 올바르게 구하고, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 올바르게 적용할 수 있다.	10점
2- ii	직선의 방정식과 원의 방정식을 올바르게 구할 수 있다.	15점
2-iii	이차함수와 사차함수를 이해하고, 이로부터 원의 방정식을 올바르게 유도할 수 있다.	15점

1교시 · 문제 3

[문제 3]

다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 3- i] ~ [문제 3-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

[제시문1] 함수 $h(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y = h(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |h(x)| dx$$

[제시문2] 정수 계수를 갖는 두 이차함수

$$f(x) = -Ax^2 + Bx + C, \quad g(x) = -px^2 + qx + r$$

가 다음의 다섯 조건을 만족시킨다.

- A, B, C, p, q, r 는 모두 양수이고, $B > C$ 이다.
- $B^2 + 4AC = 100$ 이고 $q^2 + 4pr$ 는 완전제곱수이다.
- 이차함수 $y = g(x)$ 의 그래프 위의 점 $R(0, r)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 교점을 $P(\alpha, 0)$ 이라고 하자.
- 점 $R(0, r)$ 를 지나고 직선 PR 에 수직인 직선이 x 축과 만나는 교점을 $Q(\beta, 0)$ 이라고 하자.
- α 와 β 는 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 해이다.

- i [문제 3- i] <제시문2>에 주어진 α, β 를 q, r 에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.
- ii [문제 3- ii] <제시문2>를 만족시키는 모든 순서쌍 (A, B, C) 와 각각의 순서쌍에 대해 p 의 값이 최소가 되도록 하는 순서쌍 (p, q, r) 를 찾고, 그 이유를 논하시오.
- iii [문제 3- iii] <제시문2>에서 직선 PR 와 곡선 $y = g(x)$ 및 x 축($x < 0$)으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최솟값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 3-i]

함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x) = -2px + q$ 이고 여기에 $x = 0$ 을 대입하면, $g'(0) = q$ 가 된다. 따라서 포물선 $y = g(x)$ 위의 점 $R(0, r)$ 에서의 접선의 방정식은 $y = qx + r$ 이 되고, x 절편은 $-\frac{r}{q}$ 이므로, $\alpha = -\frac{r}{q}$ 이 된다. 또한 포물선 $y = g(x)$ 위의 점 $R(0, r)$ 를 지나고 직선 PR 에 수직인 직선의 방정식은 $y = -\frac{1}{q}x + r$ 이 되고, 이 직선의 x 절편은 qr 이므로, $\beta = qr$ 이 된다.

답: $\alpha = -\frac{r}{q}, \beta = qr$

[문제 3-ii]

제시문의 조건으로부터 다음이 성립한다.

- $B > C$
- $B^2 \leq B^2 + 4AC = 100$ 이므로, $B \leq 10$ 이고 B 는 짝수이다.
- A 와 C 는 $\frac{100 - B^2}{4}$ 의 약수이다.
- $-\alpha\beta = r^2$ 이므로, 근과 계수의 관계로부터 $\frac{C}{A}$ 는 제곱수이다.

이로부터 가능한 순서쌍 (A, B, C) 는 아래의 표와 같이 두 쌍이 존재한다. 각 순서쌍에 대해 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 실근 α, β 를 구하고 [문제 3-i]의 결과로부터 그에 대응하는 q, r 을 구할 수 있다.

B	AC	(A, B, C)	(α, β)	(q, r)
8	9	(3, 8, 3)	$(-\frac{1}{3}, 3)$	(3, 1)
6	16	(4, 6, 4)	$(-\frac{1}{2}, 2)$	(2, 1)

마지막으로 $q^2 + 4pr$ 가 완전제곱수가 되도록 하는 p 중에서 최소인 것을 구하면 아래 표에 있는 것과 같다.

(A, B, C)	(p, q, r)
(3, 8, 3)	(4, 3, 1)
(4, 6, 4)	(3, 2, 1)

[문제 3-iii]

$g(x) = 0$ 의 두 근 중에서 음수인 근을 γ 로 놓자. 선분 PR 와, 곡선 $y = g(x)$ 및 x 축($x < 0$)으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} |\alpha| r - \int_{\gamma}^0 (-px^2 + qx + r) dx = \frac{1}{2} |\alpha| r - \frac{p}{3} \gamma^3 + \frac{q}{2} \gamma^2 + r\gamma$$

와 같다. 이 도형의 넓이가 최소가 되기 위해서는 곡선 $y = g(x)$, x 축($x < 0$), y 축($y > 0$)으로 둘러싸인 도형의 넓이가 최대가 되어야 한다. 고정된 q 와 r 에 대하여, p 의 값이 최소일 때 이 넓이는 최대가 된다. 이제 [문제 3-ii]의 풀이에서 구한 표에 있는 순서쌍 (p, q, r) 로부터, $g(x) = 0$ 의 음수인 근 γ 를 구하여, 위에서 구한 넓이 공식에 대입하면, 아래에 표에 있는 것과 같은 값을 얻는다.

(A, B, C)	(p, q, r)	γ	넓이
(3, 8, 3)	(4, 3, 1)	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$
(4, 6, 4)	(3, 2, 1)	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{108}$

이로부터 넓이가 최소가 되는 경우는 $(A, B, C) = (3, 8, 3)$ 인 경우이고, 이때, 넓이의 값은 $\frac{1}{32}$ 임을 알 수 있다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3- i	곡선 위의 점에서의 접선의 방정식과 접선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있고, 이를 이용하여 x 절편을 구할 수 있다.	8점
3- ii	소문항 [3-i]에서 구한 α, β, q, r 이 만족하는 관계식과, 근과 계수의 관계 등을 적절히 활용하여, 제시문의 조건을 만족하는 순서쌍 (A, B, C) 와 (p, q, r) 을 구체적으로 구할 수 있다.	12점
3-iii	제시문에 주어진 도형의 넓이를 정적분을 이용하여 표시한 후, 이 넓이가 최소가 되는 경우를 이해하고, 소문항 [3-ii]에서 구한 순서쌍들을 활용하여 도형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있다.	10점

2교시 · 문제 1

[문제 1]

다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 1- i] ~ [문제 1-iv]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (40점)

제시문

[제시문1] 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$ 이다.

[제시문2] 함수 $A(x), B(x), C(x), D(x)$ 가 다음과 같이 정의된다.

$$A(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 8$$

$$B(x) = -x^4 + 8x^3 - 22x^2 + 25x + 13$$

$$C(x) = x$$

$$D(x) = -x^2 + 6x$$

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $0 < x < 3.5$ 인 모든 x 에 대해 다음 부등식을 만족한다.

$$A(x) \leq f(x) \leq B(x)$$

$$C(x) \leq g(x) \leq D(x)$$

i [문제 1- i] <제시문2>에서 $0 < x < 3.5$ 인 모든 x 에 대해 부등식 $g(x) \leq f(x)$ 가 성립하는 이유를 논하시오.

ii [문제 1- ii] <제시문2>에서 $f(1) = 8$ 일 때, $f'(1)$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

iii [문제 1- iii] 실수 a 와 <제시문2>의 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 다음의 극한값

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - g(a+5h)}{h}$$

이 존재한다고 하자. 이때, a 의 값과 극한값을 구하고 그 이유를 논하시오. (단, $0 < a < 3.5$)

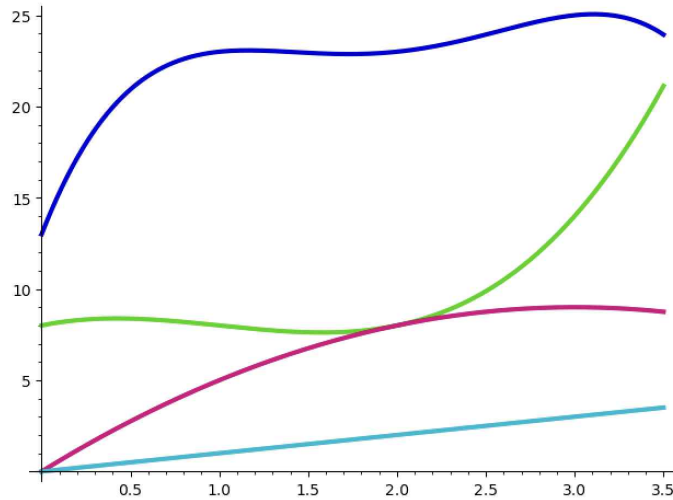
iv [문제 1- iv] 실수 b 와 <제시문2>의 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 다음의 극한값

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+4h) - g(b-3h) - 22}{h}$$

이 존재한다고 하자. 이때, 가능한 b 의 값과 극한값을 모두 구하고 그 이유를 논하시오. (단, $0 < b < 3.5$)

■ 예시 답안

주어진 함수 $A(x), B(x), C(x), D(x)$ 의 그래프의 개형은 아래와 같다.



[문제 1-i]

$h(x) = A(x) - D(x)$ 라 했을 때 $h(x) \geq 0$ 임을 보이면 된다. $h'(x) = (3x+2)(x-2)$ 이므로 $h(x)$ 는 구간 $(0, 3.5)$ 에서 $x=2$ 일 때 최소가 된다. $h(2) = 0$ 이므로 구간 $(0, 3.5)$ 에서 $h(x) \geq 0$ 을 얻는다. 즉 $D(x) \leq A(x)$ 이므로, <제시문 2>의 조건에 의해 $g(x) \leq D(x) \leq A(x) \leq f(x)$ 가 되어 $g(x) \leq f(x)$ 가 성립한다.

[문제 1-ii]

모든 x 에 대해 $f(x) \geq A(x)$ 이므로, 함수 $k(x) = f(x) - A(x)$ 는 모든 x 에 대해 $k(x) \geq 0$ 이다. 한편 $k(1) = f(1) - A(1) = 8 - 8 = 0$ 이므로 $k(1)$ 은 $y = k(x)$ 의 최솟값이다. $y = k(x)$ 가 열린구간 $(0, 3.5)$ 에서 미분가능한 함수이므로 $y = k(x)$ 는 $x=1$ 일 때 극솟값을 가진다. 따라서 <제시문 1>에 의해 $k'(1) = f'(1) - A'(1) = 0$ 이므로 $f'(1) = -1$ 이다.

[문제 1-iii]

극한값이 존재하려면

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+3h) - g(a+5h)) = f(a) - g(a) = 0$$

이 되어야 한다. 따라서 $f(a) = g(a)$ 이고 [문제 1-i]의 풀이에 의해 $a=2$ 가 된다. 이때, $f(2) = A(2) = D(2) = g(2)$ 이고 항상 $f(x) \geq A(x)$ 이므로 $f'(2) = A'(2) = 2$ 이다. 같은 방법으로 $g'(2) = D'(2) = 2$ 이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 2, \quad g'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = 2$$

그러면 구해야 하는 극한값은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - g(2+5h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(2+3h) - f(2)}{h} - \frac{g(2+5h) - g(2)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(3 \times \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h} - 5 \times \frac{g(2+5h) - g(2)}{5h} \right) \\ &= 3f'(2) - 5g'(2) = 6 - 10 = -4 \end{aligned}$$

[문제 1-iv]

극한값이 존재하려면

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(b+4h) - g(b-3h) - 22) = f(b) - g(b) - 22 = 0$$

이 되어야 한다. 따라서 $f(b) - g(b) = 22$ 이 된다. 조건에 의해 $f(x) - g(x) \leq B(x) - C(x)$ 이다.

이제 함수 $p(x) = B(x) - C(x)$ 을 생각하자. $p'(x) = -4(x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로 구간 $(0, 3.5)$ 에서 $p(x)$ 의 최댓값은 $x = 1$ 또는 $x = 3$ 에서 얻어진다. 그런데 $p(1) = p(3) = 22$ 이므로 $b = 1$ 또는 $b = 3$ 을 얻는다.

여기서 $f(b) = B(b)$ 이고 $g(b) = C(b)$ 이고 항상 $f(x) \leq B(x)$ 와 $g(x) \geq C(x)$ 이 성립하므로 $f'(b) = B'(b)$ 와 $g'(b) = C'(b)$ 을 얻는다. 그런데 $B'(1) = B'(3) = 1$ 와 $C'(1) = C'(3) = 1$ 이므로 $b = 1$ 와 $b = 3$ 일 때 모두 $f'(b) = g'(b) = 1$ 이 된다. 따라서 구해야 하는 극한값은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+4h) - g(b-3h) - 22}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+4h) - g(b-3h) - f(b) + g(b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(b+4h) - f(b)}{h} - \frac{g(b-3h) - g(b)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(4 \times \frac{f(b+4h) - f(b)}{4h} - (-3) \times \frac{g(b-3h) - g(b)}{-3h} \right) \\ &= 4f'(b) + 3g'(b) = 7 \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-i	두 함수 사이의 대소 관계를 계산할 수 있다.	6점
1-ii	함수의 극소를 계산할 수 있다.	8점
1-iii	미분계수를 이용해 극한값을 계산할 수 있다.	12점
1-iv	미분계수를 이용해 극한값을 계산할 수 있다.	14점

2교시 · 문제 2

[문제 2]

다음 <제시문1>과 <제시문2>를 읽고 [문제 2-i] ~ [문제 2-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

[제시문1] 자연수 n 에 대하여, 수열 $\{t_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자. n 이 홀수일 때 $t_n = 3$ 이고, n 이 짝수일 때 $t_n = 4$ 이다. 점 $P_0(-1, 0)$ 에서 그은 기울기가 $\tan\left(\frac{t_n}{12}\pi\right)$ 인 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 다시 만나는 점을 P_1 이라 하자. 자연수 n 에 대하여, 점 P_n 에서 그은 기울기가 $\tan\left(\frac{t_{n+1}}{12}\pi\right)$ 인 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 다시 만나는 점을 P_{n+1} 이라 하자. 만약 이 직선이 원과 접할 경우, $P_{n+1} = P_n$ 이다.

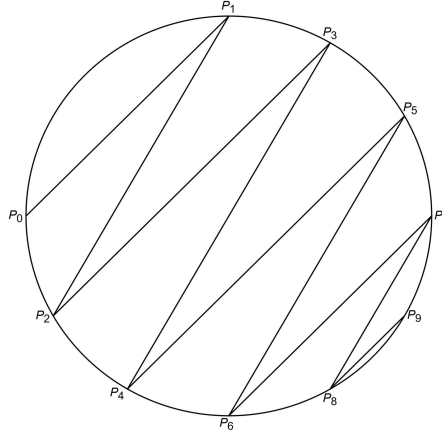
[제시문2] 음이 아닌 정수 n 에 대하여, $A(n)$ 을 삼각형 $P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 의 넓이라 하자. (단, 세 점 P_n, P_{n+1}, P_{n+2} 중에서 두 점이 서로 일치할 경우, $A(n) = 0$ 이다.)

- i $0 \leq n \leq 7$ 인 정수 n 에 대하여 호 $P_n P_{n+2}$ 의 길이가 항상 일정함을 보이고, 그 값을 구하시오.
(단, 호 $P_n P_{n+2}$ 는 두 점 P_n, P_{n+2} 에 의하여 나누어지는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 두 부분 중 길이가 짧은 것으로 한다.)
- ii 점 P_{2024} 의 좌표를 구하고, 그 이유를 논하시오.
- iii <제시문2>에 주어진 $A(n)$ 의 최댓값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 2-i]

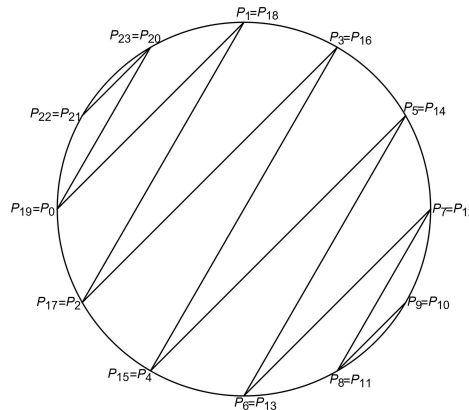
점 $P_0(-1, 0)$ 에서 그은 기울기가 $\tan\left(\frac{t_1\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{12}\right) = 1$ 인 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 다시 만나는 점은 $(0, 1)$ 이므로, 점 P_1 의 좌표는 $(0, 1)$ 임을 알 수 있다. 또한 n 이 홀수이면, 점 P_n 에서 그은 기울기가 $\tan\left(\frac{t_{n+1}\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{4\pi}{12}\right) = \sqrt{3}$ 인 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 다시 만나는 점이 P_{n+1} 이 된다. 만약 n 이 짝수이면, 점 P_n 에서 그은 기울기가 $\tan\left(\frac{t_{n+1}\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{12}\right) = 1$ 인 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 다시 만나는 점이 P_{n+1} 이 된다. 이로부터 얻어지는 점들 $P_0, P_1, \dots, P_9$ 을 그림으로 나타내면 다음 그림과 같다.



선분 P_0P_1 이 x 축과 이루는 각이 $\frac{\pi}{4}$ 이고, 선분 P_1P_2 가 x 축과 이루는 각이 $\frac{\pi}{3}$ 이므로, 호 P_0P_2 에 대한 원주각 $\angle P_0P_1P_2 = \frac{\pi}{12}$ 임을 알 수 있다. 따라서 호 P_0P_2 에 대한 중심각은 $\frac{\pi}{6}$ 가 되므로, 호 P_0P_2 의 길이도 $\frac{\pi}{6}$ 가 된다. 동일한 방법으로, $1 \leq n \leq 7$ 인 자연수 n 에 대하여, 호 P_nP_{n+2} 에 대한 원주각 $\angle P_nP_{n+1}P_{n+2} = \frac{\pi}{12}$ 가 되므로, 호 P_nP_{n+2} 에 대한 중심각은 $\frac{\pi}{6}$ 가 되고, 호 P_nP_{n+2} 의 길이 역시 $\frac{\pi}{6}$ 로 항상 일정하게 된다.

[문제 2-ii]

점 P_9 에서 그은 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선은 원과 접하게 되므로, $P_{10} = P_9$ 이 된다. 이제 점 P_{10} 에서 그은 기울기가 1인 직선은 원과 점 P_8 에서 만나게 되므로, $P_{11} = P_8$ 이 됨을 알 수 있다. 동일한 방법으로, $P_{12} = P_7, P_{13} = P_6, P_{14} = P_5, P_{15} = P_4, P_{16} = P_3, P_{17} = P_2, P_{18} = P_1, P_{19} = P_0$ 이 된다. 이제 점 P_{19} 에서 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선을 그어서 원과 만나는 점 P_{20} 을 얻고, 이 점에서 기울기가 1인 직선을 그어서 원과 만나는 점 P_{21} 을 얻는다. 점 P_{21} 에서 그은 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선은 원과 접하게 되므로, $P_{22} = P_{21}$ 이 된다. 점 P_{22} 에서 그은 기울기가 1인 직선은 원과 점 P_{20} 에서 만나게 되므로, $P_{23} = P_{20}$ 이 됨을 알 수 있다. 동일한 방법으로, $P_{24} = P_{19} = P_0, P_{25} = P_{18} = P_1, P_{26} = P_{17} = P_2, P_{27} = P_{16} = P_3, P_{28} = P_{15} = P_4, P_{29} = P_{14} = P_5, P_{30} = P_{13} = P_6, P_{31} = P_{12} = P_7, P_{32} = P_{11} = P_8, P_{33} = P_{10} = P_9$ 이 된다. 이로부터 $P_{24+n} = P_n$ 임을 관찰할 수 있다. 점들 $P_0, P_1, \dots, P_{23}$ 을 그림으로 나타내면 다음 그림과 같다.



위에서 얻은 규칙과 $2024 = 24 \times 84 + 8$ 임을 감안하여, 같은 점들이 같은 열에 위치하도록 점 P_n 들을 다음 표에 있는 것과 같이 나열해 보자.

		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
P_{21}	P_{20}	P_{19}	P_{18}	P_{17}	P_{16}	P_{15}	P_{14}	P_{13}	P_{12}	P_{11}	P_{10}
P_{22}	P_{23}	P_{24}	P_{25}	P_{26}	P_{27}	P_{28}	P_{29}	P_{30}	P_{31}	P_{32}	P_{33}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
P_{2013}	P_{2012}	P_{2011}	P_{2010}	P_{2009}	P_{2008}	P_{2007}	P_{2006}	P_{2005}	P_{2004}	P_{2003}	P_{2002}
P_{2014}	P_{2015}	P_{2016}	P_{2017}	P_{2018}	P_{2019}	P_{2020}	P_{2021}	P_{2022}	P_{2023}	P_{2024}	P_{2025}

따라서 $P_{2024} = P_8$ 이므로 P_{2024} 의 좌표는 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 임을 알 수 있다.

[문제 2-iii]

n 이 22보다 큰 경우에는 같은 모양의 도형이 계속 반복되므로, $n \leq 22$ 일 때, $A(n)$ 의 최댓값을 구하면 충분하다. $n = 8, 9, 20, 21$ 인 경우에는 $A(n) = 0$ 이 된다. $n \leq 22$ 이고, $n \neq 8, 9, 20, 21$ 이면, 선분 $P_n P_{n+1}$, 선분 $P_{n+1} P_{n+2}$, 선분 $P_n P_{n+2}$ 로 둘러싸인 도형은 원에 내접하는 삼각형이 되므로,

$$A(n) = \frac{\overline{P_n P_{n+1}} \cdot \overline{P_{n+1} P_{n+2}} \cdot \overline{P_n P_{n+2}}}{4}$$

이 됨을 알 수 있다. [문제 2-i]로부터, 호 $P_n P_{n+2}$ 의 길이가 일정하므로, 선분 $P_n P_{n+2}$ 의 길이도 일정하게 된다. 선분 $P_n P_{n+1}$ 의 길이는 이 선분이 지름이 되는 경우 (즉, 중심각이 π , 원주각이 $\frac{\pi}{2}$ 인 경우) 최대가 되고, 그 다음으로 중심각이 $\frac{5\pi}{6}$, 즉 원주각이 $\frac{5\pi}{12}$ 인 경우임을 알 수 있다. 선분 $P_n P_{n+1}$ 이 지름이 되는 경우, 선분 $P_{n+1} P_{n+2}$ 의 원주각이 $\frac{5\pi}{12}$ 임을 관찰할 수 있다. 또한 선분 $P_{n+1} P_{n+2}$ 가 지름이 되는 경우에는, 선분 $P_n P_{n+1}$ 의 원주각이 $\frac{5\pi}{12}$ 임을 관찰할 수 있다. 따라서 선분 $P_n P_{n+1}$ 또는 선분 $P_{n+1} P_{n+2}$ 가 지름이 되는 경우 (즉, $n = 2, 3, 14, 15$), $A(n)$ 은 최대가 된다. 이제 삼각형 $P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 를 지름을 밑변으로 하는 삼각형으로 볼 때, $A(n) = \frac{1}{2} \times 2 \times \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 이므로, $A(n)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이 된다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-i	원과 직선이 만나는 교점들을 원 위에 표시하고, 원주각과 중심각의 성질을 활용하여 이러한 원 위의 점들이 규칙적인 패턴을 이룬다는 것을 이해하고, 이웃하는 두 점으로부터 만들어지는 호의 길이를 구할 수 있다.	10점
2-ii	원과 직선이 두 점에서 만나는 경우와 접하는 경우를 구분할 수 있고, 원 위의 점들이 이루는 규칙성으로부터 P_{2024} 의 좌표를 구체적으로 구할 수 있다.	10점
2-iii	제시문에 주어진 삼각형의 형태를 이해하고, 이 삼각형의 넓이가 언제 최대가 되는지를 논할 수 있고, 구체적인 최댓값을 구할 수 있다.	10점

2교시 · 문제 3

[문제 3]

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [문제 3-i] ~ [문제 3-iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오. (30점)

제시문

[제시문1] 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

[제시문2] 함수 $f(x)$ 가 미분가능하고 $f'(a) = 0$ 일 때, $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가

- 양에서 음으로 바뀌면, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$ 를 갖는다.
- 음에서 양으로 바뀌면, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$ 를 갖는다.

[제시문3] 정수 계수를 가지는 다항함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음과 같이 정의된다.

$$f(x) = px^2 + qx + r$$

$$g(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

- i <제시문3>에서 $f(x) = g'(x)$ 이고 $S_n = f(n)$ 이 어떤 등차수열 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이라고 한다. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $y = h(x)$ 가 다음의 조건을 만족시킬 때,
- $0 \leq x \leq 6$ 에서 $h(x) = g(x)$
 - 모든 실수 x 에 대하여 $h(x+6) = h(x) + h(6)$
- 정적분 $\int_0^8 h(x)dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.
- ii <제시문3>에서 $A = q, B = p, C = r$ ($p, q, r \neq 0$)이라 하자. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 실근 α, β (단, $\alpha < \beta$)가 모두 삼차방정식 $g(x) = 0$ 의 해일 때, 정적분 $\int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)| dx$ 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.
- iii <제시문3>에서 $C < 0$ 이고 A, B 가 이차방정식 $x^2 + 9C = 0$ 의 두 근일 때, 삼차함수 $y = g(x)$ 는 다음의 조건을 만족시킨다.
- 함수 $y = g(x)$ 가 극값을 가지고, 극댓값은 양수이고 극솟값은 음수이다.
 - 함수 $y = g(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차는 $24\sqrt{6}$ 이다.
- 이때, A 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

■ 예시 답안

[문제 3-i]

$px^2 + qx + r = f(x) = g'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ 로부터 $p = 3$ 이다.

수열 $S_n = f(n)$ 이 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이라고 할 때,

$$S_n - S_{n-1} = a_n = f(n) - f(n-1) = 6(n-1) + q + 3 = 6n + q - 3 \quad (n \geq 2 \text{ 일 때})$$

이 성립하므로 공차는 6이다. 또한, $a_1 = S_1 = f(1)$ 이므로,

$$a_1 = 3 + q = f(1) = 3 + q + r$$

를 얻게 되고, $r = 0$ 이다. 한편, 함수 $y = h(x)$ 의 조건으로부터

$$g'(0) = 0 = g'(6) = 108 + 6q$$

를 얻게 되어, $q = -18$ 이고, $h(6) = h(0) + h(6)$ 로부터 $C = h(0) = 0$ 이다. 따라서, 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는

$$f(x) = 3x^2 - 18x, \quad g(x) = x^3 - 9x^2$$

이다. 이로부터 정적분 값을 구하면

$$\int_0^6 g(x)dx = \int_0^6 (x^3 - 9x^2)dx = -324$$

와

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 (x^3 - 9x^2)dx = -20$$

이고 $g(6) - g(0) = -108$ 이므로,

$$\int_0^8 h(x)dx = -324 - 20 - 108 \times 2 = -560$$

이다.

[문제 3-ii]

두 실수 α, β 는 $f(x) = px^2 + qx + r = 0$ 의 해이고 $r \neq 0$ 이므로, 모두 0이 아니다. 또한 α, β 는 삼차방정식

$$g(x) - f(x) = (x^3 + qx^2 + px + r) - (px^2 + qx + r) = x(x^2 + (q-p)x - (q-p)) = 0$$

의 해가 되므로, 이차방정식

$$x^2 + (q-p)x - (q-p) = 0$$

의 해가 되어, $\alpha + \beta = \alpha\beta = p - q$ 가 성립한다. 한편, $\alpha + \beta = -\frac{q}{p}$, $\alpha\beta = \frac{r}{p}$ 가 성립하므로,

$$\alpha + \beta = \alpha\beta = p - q = -\frac{q}{p} = \frac{r}{p}$$

를 얻을 수 있고, 이로부터 $r = -q$ 이다. 또한, $p - q = -\frac{q}{p}$ 로부터 $p^2 = q(p-1)$ 을 얻게 되고, $p \neq 1$ 임을 알 수 있다. 양변을 $p-1$ 로 나누면 $q = \frac{p^2}{p-1} = p + 1 + \frac{1}{p-1}$ 를 얻게 되고, q 는 정수이므로 $p = 2$ 이다. 따라서, $(p, q, r) = (2, 4, -4)$ 을 얻게 되어

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 4, \quad g(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 4$$

이고, $\alpha = -1 - \sqrt{3}$, $\beta = -1 + \sqrt{3}$ 이다. 따라서 구하고자 하는 정적분은

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx &= \int_{\alpha}^0 x(x^2 + 2x - 2)dx - \int_0^{\beta} x(x^2 + 2x - 2)dx \\ &= -\frac{1}{4}(\alpha^4 + \beta^4) - \frac{2}{3}(\alpha^3 + \beta^3) + (\alpha^2 + \beta^2)\end{aligned}$$

이다. $\alpha + \beta = \alpha\beta = -2$ 로부터

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8, \alpha^3 + \beta^3 = -20, \alpha^4 + \beta^4 = 56$$

을 얻게 되어, 문제의 정적분의 값은 $\frac{22}{3}$ 임을 알 수 있다.

[문제 3-iii]

$A + B = 0, AB = 9C$ 가 성립하므로, 삼차함수 $g(x) = x^3 + Ax^2 - Ax - \frac{A^2}{9}$ 이다.

이차방정식 $g'(x) = 3x^2 + 2Ax - A = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로, 판별식 $D = A^2 + 3A > 0$ 이 성립해야 하고, 이로부터 $A > 0$ 또는 $A < -3$ 이다.

이때, 이차방정식 $g'(x) = 0$ 의 두 근 $\frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 3A}}{3}$ 을 각각 a, b (단, $a < b$)라고 하면,

$$a + b = -\frac{2A}{3}, ab = -\frac{A}{3}$$

이 성립한다. 한편,

$$\begin{aligned}g(a) &= a^3 + Aa^2 - Aa - \frac{A^2}{9} \\ &= g'(a)\left(\frac{a}{3} + \frac{A}{9}\right) - \frac{2}{9}A(A+3)a \\ &= -\frac{2}{9}A(A+3)a > 0\end{aligned}$$

이 되어 $a < 0$ 이다. 동일한 방법으로 $g(b) = -\frac{2}{9}A(A+3)b < 0$ 으로부터 $b > 0$ 을 얻게 되어, $A = -3ab > 0$ 을 얻을 수 있다. 마지막으로,

$$\begin{aligned}24\sqrt{6} &= g(a) - g(b) \\ &= (a^3 - b^3) + A(a^2 - b^2) - A(a - b) \\ &= (a - b)((a^2 + ab + b^2) + A(a + b) - A) \\ &= \frac{4}{27}A(A+3)\sqrt{A(A+3)}\end{aligned}$$

을 얻게 되어 $A(A+3) = 54$ 이다. 따라서, $A = 6$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3- i	등차수열과 미분에 대해 올바르게 이해하고 있고, 정적분의 값을 올바르게 구할 수 있다.	10점
3- ii	이차방정식의 근과 계수의 관계를 올바르게 이해하고 있고, 정적분의 값을 올바르게 구할 수 있다.	10점
3- iii	도함수를 활용하여 함수의 증가와 감소, 극대와 극소에 대해 올바르게 이해하고 있다.	10점

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다