

# 세종대논술

자연계

# 목차

---

|                                       |               |
|---------------------------------------|---------------|
| <b>2026학년도 자연계열 (A형·B형) .....</b>     | <b>3</b>      |
| A형 · 문제 1 .....                       | 3             |
| A형 · 문제 2 .....                       | 6             |
| A형 · 문제 3 .....                       | 10            |
| B형 · 문제 1 .....                       | 14            |
| B형 · 문제 2 .....                       | 18            |
| B형 · 문제 3 .....                       | 25            |
| <br><b>2025학년도 자연계열 (A형·B형) .....</b> | <br><b>29</b> |
| A형 · 문제 1 .....                       | 29            |
| A형 · 문제 2 .....                       | 33            |
| A형 · 문제 3 .....                       | 37            |
| B형 · 문제 1 .....                       | 41            |
| B형 · 문제 2 .....                       | 44            |
| B형 · 문제 3 .....                       | 48            |
| <br><b>2024학년도 자연계열 (A형·B형) .....</b> | <br><b>51</b> |
| A형 · 문제 1 .....                       | 51            |
| A형 · 문제 2 .....                       | 55            |
| A형 · 문제 3 .....                       | 60            |
| B형 · 문제 1 .....                       | 63            |
| B형 · 문제 2 .....                       | 68            |
| B형 · 문제 3 .....                       | 73            |

# 2026학년도 자연계열 (A형·B형)

## A형 · 문제 1

[문제 1]  $x \geq 0$ 에서 정의된 증가하는 연속함수  $f(x)$ 의 역함수  $f^{-1}(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

### 제시문

(가)  $x \geq 0$ 에서  $f^{-1}(x)$ 는 연속이다.

(나)  $x \geq 0$ 에서  $\int_0^x e^{-t} f^{-1}(t) dt = x^2$ 이다.

(1-1)  $f^{-1}(\ln 2)$ ,  $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 의 값을 각각 구하시오. (70점)

(1-2)  $\int_0^{\sqrt{e}} f(x) dx$ 의 값을 구하시오. (80점)

(1-3)  $0 \leq x \leq 4 \ln 2$ 에서  $g(x) = f(x) - \frac{x}{4}$ 라 하자. 함수  $g(x)$ 가  $x = \alpha$ 에서 최댓값을 가질 때,  $g(\alpha)$ 를  $\alpha$ 의 유리식으로 나타내시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (1-1)

$x > 0$ 일 때 (나)의 식을 미분하면  $f^{-1}(x) = 2xe^x$ 을 얻고  $f^{-1}(x)$ 는 연속이므로  $f^{-1}(0) = 0$ 이다. 이로부터  $f^{-1}(\ln 2) = 4\ln 2$ ,  $f^{-1}(\frac{1}{2}) = \sqrt{e}$ 이다. 또한 역함수의 미분법에 의하여  $f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{(f^{-1})'(\frac{1}{2})} = \frac{1}{3\sqrt{e}}$ 이다.

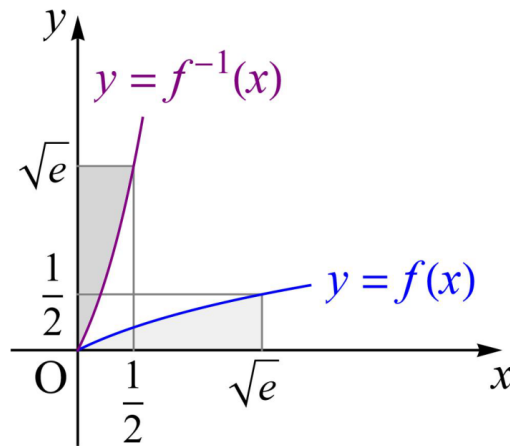
### [별해]

$x > 0$ 일 때 (나)의 식을 미분하면  $f^{-1}(x) = 2xe^x$ 을 얻고  $f^{-1}(x)$ 는 연속이므로  $f^{-1}(0) = 0$ 이다. 이로부터  $f^{-1}(\ln 2) = 4\ln 2$ ,  $f^{-1}(\frac{1}{2}) = \sqrt{e}$ 이다. 또한  $f(2xe^x) = x$ 에서 양변을 미분하면  $f'(2xe^x) = \frac{1}{2(1+x)e^x}$ 이고  $x = \frac{1}{2}$ 을 대입하면  $f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f'(\sqrt{e}) = \frac{1}{3\sqrt{e}}$ 이다.

### (1-2)

$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ 이고 그래프의 대칭성을 이용하면 아래 그림처럼 색칠된 두 영역의 넓이가 같다. 따라서 다음과 같이 계산된다.

$$\int_0^{\sqrt{e}} f(x)dx = \sqrt{e}f(\sqrt{e}) - \int_0^{f(\sqrt{e})} 2xe^x dx = \frac{\sqrt{e}}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} 2xe^x dx = \frac{3\sqrt{e}}{2} - 2$$



### [별해]

$f(x) = t$ 로 치환하고,  $f(0) = 0$ ,  $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ ,  $x = f^{-1}(t) = 2te^t$ 을 이용하면

$$\int_0^{\sqrt{e}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2t(1+t)e^t dt = \frac{3\sqrt{e}}{2} - 2$$

이다.

### (1-3)

$f(0) = 0$ ,  $f(4\ln 2) = \ln 2$ 이므로  $g(0) = 0$ ,  $g(4\ln 2) = 0$ 이고 롤의 정리로부터  $g'(a) = f'(a) - \frac{1}{4} = 0$ 을 만족하는  $0 < a < 4\ln 2$ 가 존재한다.

$(f^{-1})''(x) = 2(x+2)e^x > 0$ 이므로  $f^{-1}(x)$ 가 아래로 볼록하고  $g(x)$ 는 위로 볼록하다. 따라서  $a$ 는 유일하고  $g(x)$ 는  $a$ 에서 최댓값을 가진다. 따라서  $a = \alpha$ 이다.

$f^{-1}(x) = 2xe^x = \alpha$ 를 만족하는  $x$ 는 유일하고  $f'(2xe^x) = \frac{1}{2(1+x)e^x}$ 로부터 이  $x$ 에 대하여  $f'(\alpha) = \frac{1}{4}$ 이므로  $(1+x)e^x = 2$ 를 얻는다. 두 식  $2xe^x = \alpha$ 와  $(1+x)e^x = 2$ 로부터  $x = \frac{\alpha}{4-\alpha}$ 이고,

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \frac{\alpha}{4} = x - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha}{4-\alpha} - \frac{\alpha}{4} = \frac{\alpha^2}{4(4-\alpha)}$$

이다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 배점 |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>f^{-1}(\ln 2) = 4 \ln 2</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>f'(\sqrt{e}) = \frac{1}{3\sqrt{e}}</math> (+30점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                        | 70 |
| 1-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\int_0^{\sqrt{e}} f(x)dx = \frac{\sqrt{e}}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} 2xe^x dx</math> (+40점)</li> <li>▪ 답 <math>\frac{3\sqrt{e}}{2} - 2</math>을 구하면(+40점)</li> </ul> <p>[별해]</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\int_0^{\sqrt{e}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2t(1+t)e^t dt</math> (+40점)</li> <li>▪ 답 <math>\frac{3\sqrt{e}}{2} - 2</math>을 구하면(+40점)</li> </ul> | 80 |
| 1-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f'(a) = \frac{1}{4}</math>을 만족하는 <math>a</math>가 <math>\alpha</math>임을 설명(+20점)</li> <li>▪ <math>2xe^x = \alpha</math>로 쓰면 (+10점)</li> <li>▪ <math>(1+x)e^x = 2</math>를 구하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>g(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4(4-\alpha)}</math>를 구하면 (+40점)</li> </ul>                                                                                                         | 80 |

**A형 · 문제 2**

[문제 2] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$\int_0^x (2t - x)f(t)dt = (x - 2)e^x + ax + b \quad (\text{단, } a \text{와 } b \text{는 상수})$$

(2-1) 상수  $a, b$ 의 값과  $f(2) - f(1)$ 의 값을 각각 구하시오. (70점)

(2-2) 함수  $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대하여  $r(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(x+h) - g(x-2h)}{h}$ 라 하자. 모든 실수  $x$ 에 대하여  $r(x)$ 의 값이 존재할 때,  $f(x)$ 와  $r(x)$ 를 각각 구하시오. (80점)

(2-3) (2-2)에서 구한 함수  $r(x)$ 에 대하여 곡선  $y = e^{2x} + k$ 와 함수  $y = r(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 실수  $k$ 의 값을 모두 구하시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (2-1)

모든 실수  $x$ 에 대하여

$$\int_0^x (2t - x)f(t)dt = (x - 2)e^x + ax + b \quad \dots\dots(1)$$

이 성립하므로  $x = 0$ 을 양변에 대입하면  $0 = -2 + b$ 에서  $b = 2$ 이다. 또한

$$\int_0^x (2t - x)f(t)dt = \int_0^x 2tf(t)dt - x \int_0^x f(t)dt$$

임을 이용하여

$$2xf(x) - \int_0^x f(t)dt - xf(x) = e^x + (x - 2)e^x + a, \quad \text{즉}$$

$$xf(x) - \int_0^x f(t)dt = (x - 1)e^x + a \quad \dots\dots(2)$$

임을 알 수 있고, 이 식의 양변에 다시  $x = 0$ 을 대입하면  $0 = -1 + a$ 에서  $a = 1$ 이다.

식 (2)의 양변을 미분하면  $f(x) + xf'(x) - f(x) = xe^x$ 에서  $f'(x) = e^x$ 이다. 이를 적분하면 적당한 실수  $C$ 에 대하여  $f(x) = e^x + C$ 이고, 이 함수는 문제의 조건을 모두 만족시킨다.

따라서 다음을 얻는다.

$$f(2) - f(1) = e^2 - e$$

### (2-2)

(2-1)의 결과로부터  $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & (x < 0) \\ e^x + C & (x \geq 0) \end{cases}$ 이다. 그런데

$r(x) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(x+h) - g(x-2h)}{h}$ 의 값이 실수 전체의 집합에서 존재하므로  $x = 0$ 에서도 존재하여야 한다.

즉,  $r(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(h) - g(-2h)}{h}$ 에서 분모가 0으로 갈 때 분자도 0으로 가야 하므로  $\lim_{h \rightarrow 0+} g(h) = \lim_{h \rightarrow 0+} g(-2h)$

이다. 따라서  $1 + C = 3$ 에서  $C = 2$ 이다. 그러므로

$f(x) = e^x + 2$ 이고

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & (x < 0) \\ e^x + 2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 그런데 지수함수  $e^x$ 의  $x = 0$ 에서의 미분계수를 생각하면  $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{e^h - e^0}{h} = e^0 = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} r(0) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(h) - g(-2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{e^h + 2 - (4h^2 - 4h + 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{e^h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{-4h^2 + 4h}{h} = 1 + \lim_{h \rightarrow 0+} (-4h + 4) \\ &= 5 \end{aligned}$$

이다.  $x \neq 0$ 일 때는  $g(x)$ 가 미분가능하므로

$$\begin{aligned} r(x) &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(x+h) - g(x-2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(x+h) - g(x) + g(x) - g(x-2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + 2 \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(x-2h) - g(x)}{-2h} \\ &= g'(x) + 2g'(x) = 3g'(x) \end{aligned}$$

이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$r(x) = \begin{cases} 6x + 6 & (x < 0) \\ 5 & (x = 0) \\ 3e^x & (x > 0) \end{cases}$$

(2-3)

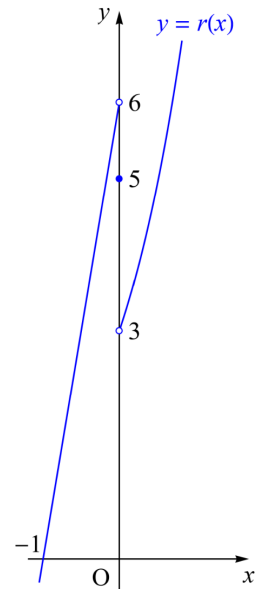
함수  $y = r(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽과 같다. 우선 두 곡선  $y = e^{2x} + k$ 와  $y = 3e^x$ 가  $x > 0$ 인 영역에서 만나는 점의 개수를 구하기 위해 방정식

$$e^{2x} + k = 3e^x$$

의  $x > 0$ 인 영역에서의 서로 다른 실근의 개수를 구해보자. 이를 위해  $t = e^x$ 이라 두면,  $x > 0$ 일 필요충분조건은  $t > 1$ 이므로 방정식

$$t^2 - 3t + k = 0 \quad \cdots(3)$$

의  $t > 1$ 인 영역에서 서로 다른 실근의 개수를 구해보면 된다.  
그런데 이차방정식 (3)의 판별식은  $D = 9 - 4k$ 이고



(i)  $k > \frac{9}{4}$ 이면  $D < 0$ 이므로 방정식 (3)은 실근을 갖지 않는다.

(ii)  $k = \frac{9}{4}$ 이면  $D = 0$ 이고 방정식 (3)은  $\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$ 이 되어  
중근  $t = \frac{3}{2} (> 1)$ 을 갖는다.

(iii)  $k < \frac{9}{4}$ 이면  $D > 0$ 이므로 방정식 (3)이 실수 전체의 집합에서는

2개의 서로 다른 실근을 갖는다. 실근의 위치를 따져보기 위해

$p(t) = t^2 - 3t + k$ 라 정의하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

①  $k \leq 2$  일 때: 포물선  $y = p(t)$ 의 대칭축이  $t = \frac{3}{2}$ 이고  $p(1) \leq 0$ 인 것을 생각하면  $t > 1$ 인 영역에서 방정식 (3)은 단 하나의 실근을 갖는다.

②  $2 < k < \frac{9}{4}$  일 때: 포물선  $y = p(t)$ 의 대칭축이  $t = \frac{3}{2}$ 이고  $p(1) > 0$ 인 것을 생각하면  $t > 1$ 인 영역에서 방정식 (3)은 두 개의 실근을 갖는다.

(i), (ii), (iii)의 결과로부터 곡선  $y = e^{2x} + k$ 와  $y = 3e^x$ 은  $x > 0$ 인 영역에서  $k \leq 2$  또는  $k = \frac{9}{4}$  일 때 한 점에서 만나고,  $2 < k < \frac{9}{4}$  일 때 두 점에서 만나며,  $k > \frac{9}{4}$  이면 만나지 않는다.

이제  $x \leq 0$ 인 영역에서 곡선  $y = e^{2x} + k$ 와 함수  $y = r(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 함께 고려하면 다음 표를 얻는다. 특히  $k = 5$ 일 때, 함수  $y = e^{2x} + 5$ 의  $x \leq 0$ 에서의 미분계수는 6보다 작다.

| k의 범위 | $k \leq 2$ | $2 < k < \frac{9}{4}$ | $k = \frac{9}{4}$ | $\frac{9}{4} < k < 4$ | $k = 4$ | $4 < k < 5$ | $k \geq 5$ |
|-------|------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|---------|-------------|------------|
| 교점의 수 | 2          | 3                     | 2                 | 1                     | 2       | 1           | 0          |

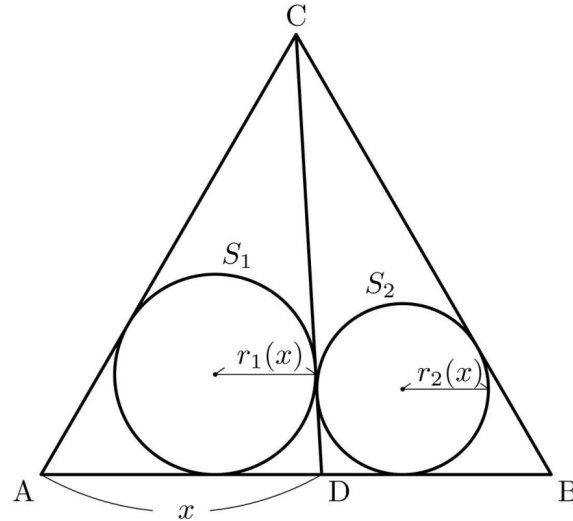
따라서 답은  $k \leq 2$  또는  $k = \frac{9}{4}$  또는  $k = 4$ 이다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 배점 |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>b = 2</math> (+10점)</li> <li>▪ <math>a = 1</math> (+30점)</li> <li>▪ <math>f'(x) = e^x</math> 또는 <math>f(x) = e^x + C</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>f(2) - f(1) = e^2 - e</math> (+10점)</li> </ul>                                                                                                      | 70 |
| 2-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>C = 2</math> 또는 <math>f(x) = e^x + 2</math> 또는 <math>x \geq 0</math>일 때 <math>g(x) = e^x + 2</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>r(0) = 5</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>x &lt; 0</math>일 때 <math>r(x) = 6x + 6</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>x &gt; 0</math>일 때 <math>r(x) = 3e^x</math> (+20점)</li> </ul> | 80 |
| 2-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>k = \frac{9}{4}</math>일 때 방정식 (3)이 <math>t &gt; 1</math>인 영역에서 중근을 갖는다. (+20점)</li> <li>▪ <math>k = \frac{9}{4}</math>일 때 교점 2개 (+20점)</li> <li>▪ <math>k \leq 2</math>일 때 교점 2개 (+20점)</li> <li>▪ <math>k = 4</math>일 때 교점 2개 (+20점)</li> </ul>                                                        | 80 |

**A형 · 문제 3**

[문제 3] 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 밑변 AB 위의 한 점 D에 대하여, 삼각형 ACD에 내접하는 원을  $S_1$ , 삼각형 BCD에 내접하는 원을  $S_2$ 라 하자. 선분 AD의 길이가  $x$ 일 때,  $S_1, S_2$ 의 반지름의 길이를 각각  $r_1(x), r_2(x)$ 라 정의하자. 닫힌구간  $[0, 2]$ 에서 정의된 연속함수  $f(x)$ 는  $0 < x < 2$ 일 때,  $f(x) = r_1(x) + r_2(x)$ 이다.



(3-1) 함수  $f(x)$ 를 구하시오. 또한  $f$ 의 치역을 구하시오. (80점)

(3-2)  $x$ 좌표가 1인 점 P를 지나는 두 직선이 곡선  $y = f(x)$ 에 점 Q와 점 R에서 각각 접한다. Q의  $x$ 좌표가  $\frac{1}{4}$ 이고  $\angle QPR = \theta$ 일 때,  $\sin \theta$ 의 값을 구하시오. (80점)

(3-3)  $f$ 의 치역에 속하는  $t$ 에 대하여  $g(t) = \int_0^2 |f(x) - t| dx$ 라 하자. 함수  $g(t)$ 가  $t = \alpha$ 에서 최솟값을 가질 때,  $\alpha$ 의 값을 구하시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (3-1)

$\angle CAD = \frac{\pi}{3}$ 이므로 코사인 법칙에 의하여  $\overline{CD}^2 = x^2 + 4 - 2x$ 이다. 따라서

$\overline{CD} = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ 이다. 삼각형 ADC의 넓이가  $\frac{\sqrt{3}x}{2}$ 이므로

$\frac{\sqrt{3}x}{2} = r_1(x) \frac{x + 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}}{2}$ 를 얻는다. 따라서

$$r_1(x) = \frac{\sqrt{3}x}{x + 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 4}} = \frac{\sqrt{3}(x + 2 - \sqrt{x^2 - 2x + 4})}{6}$$

이다. 선분 BD의 길이가  $2 - x$ 이므로 대칭성에 의하여

$$r_2(x) = r_1(2 - x) = \frac{\sqrt{3}(4 - x - \sqrt{x^2 - 2x + 4})}{6}$$

이다. 그러므로

$$f(x) = r_1(x) + r_1(2 - x) = \frac{\sqrt{3}(3 - \sqrt{x^2 - 2x + 4})}{3} \text{ 이고, } f'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} \text{ 이다.}$$

$x < 1$ 일 때,  $f'(x) > 0$ ,  $x > 1$ 일 때,  $f'(x) < 0$ 이므로,  $f(1) = \sqrt{3} - 1$ 이  $f(x)$ 의 최댓값이다.

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로  $f$ 의 치역은

$$\left\{ y \mid \frac{\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \sqrt{3} - 1 \right\} \text{ 이다.}$$

### (3-2)

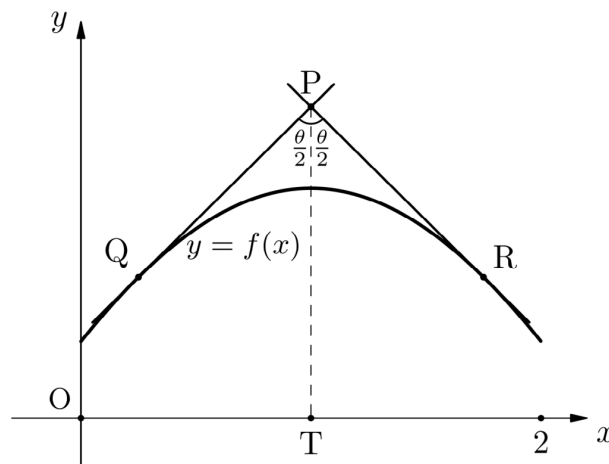
$f(x) = r_1(x) + r_1(2 - x) = f(2 - x)$ 이므로  $y = f(x)$ 의 그래프는  $x = 1$ 에 대하여 대칭이다. 따라서, P를 지

나는 두 직선은  $y = f(x)$ 의 그래프와 각각  $Q\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ 과

$R\left(\frac{7}{4}, f\left(\frac{7}{4}\right)\right)$ 에서 접한다. 또한 T(1, 0)에 대하여  $\angle QPT = \angle RPT$ 이다. Q에서의 접하는

접선의 기울기는  $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{19}}$ 이다. 따라서  $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{19}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{19}}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$ ,  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{20}}$ 이고,

$\sin \theta = \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{19}}{10}$ 이다.



(3-3)

$f(x)$ 가  $x = 1$ 을 중심으로 대칭이므로  $g(t) = \int_0^2 |f(x) - t| dx = 2 \int_0^1 |f(x) - t| dx$ 이다.

$0 \leq x \leq 1$ 에서  $f(x)$ 는 증가함수이므로  $f(x)$ 의 역함수  $f^{-1}(t)$ 가  $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \sqrt{3} - 1$ 에서

존재한다. 따라서  $F'(x) = f(x)$ 라 하면,

$$\begin{aligned} g(t) &= 2 \left( \int_0^{f^{-1}(t)} (t - f(x)) dx + \int_{f^{-1}(t)}^1 (f(x) - t) dx \right) \\ &= 2(t f^{-1}(t) - F(f^{-1}(t)) + F(0) + F(1) - t - F(f^{-1}(t)) + t f^{-1}(t)) \end{aligned}$$

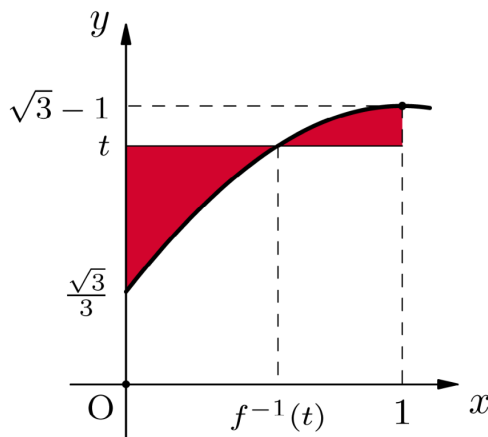
이다. 따라서  $g'(t) = 2(2f^{-1}(t) - 1)$ 이다.  $0 \leq x \leq 1$ 에서  $f(x)$ 가 증가함수이므로,

$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \sqrt{3} - 1$ 에서  $f^{-1}(t)$  또한 증가함수이다. 그러므로

$\frac{\sqrt{3}}{3} < t < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}(6 - \sqrt{13})$ 이면  $g'(t) < 0$ 이고,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}(6 - \sqrt{13}) < t < \sqrt{3} - 1$ 이면

$g'(t) > 0$ 이다. 따라서  $g(t)$ 는 최솟값을  $t = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}(6 - \sqrt{13})$ 일 때 가진다. 그러므로

$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}(6 - \sqrt{13}) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{39}}{6}$ 이다.



[별해 1] 부분적분법과  $y = f(x)$ 의 치환적분법에 의하여

$$\int_0^{f^{-1}(t)} f(x) dx = [x f(x)]_0^{f^{-1}(t)} - \int_0^{f^{-1}(t)} x f'(x) dx = t f^{-1}(t) - \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^t f^{-1}(y) dy \text{이다.}$$

그러므로  $\int_0^{f^{-1}(t)} (t - f(x)) dx = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^t f^{-1}(y) dy$ 이다. 같은 방법으로

$$\int_{f^{-1}(t)}^1 (f(x) - t) dx = (\sqrt{3} - 1) - t - \int_t^{\sqrt{3}-1} f^{-1}(y) dy \text{이다.}$$

따라서  $g'(t) = 2(2f^{-1}(t) - 1)$ 임을 얻을 수도 있다.

[별해 2]  $a = f^{-1}(t)$ 라 하면,  $0 \leq a \leq 1$ 이고,

$$\begin{aligned} h(a) &= 2 \left( \int_0^a (f(a) - f(x)) dx + \int_a^1 (f(x) - f(a)) dx \right) \\ &= 2(f(a)a - F(a) + F(0) + F(1) - f(a) - F(a) + f(a)a) \end{aligned}$$

이며  $h'(a) = 2f'(a)(2a - 1)$ 이다.  $0 < a < 1$ 에서,  $f'(a) > 0$ 이므로  $h'(a) = 0$ 이기 위해서는

$a = \frac{1}{2}$ 임을 얻는다. 따라서  $t = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}(6 - \sqrt{13})$ 일 때  $h(a)$ 는 최솟값을 가진다.

그러므로  $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}(6 - \sqrt{13}) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{39}}{6}$ 이다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 배점  |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>r_1(x) = \frac{\sqrt{3}(x+2-\sqrt{x^2-2x+4})}{6}</math>: (+30점)</li> <li>▪ <math>f(x) = \frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{x^2-2x+4})}{3}</math>: (+20점)</li> <li>▪ <math>f</math>의 증감을 따져 <math>f</math>의 치역 <math>\left\{y \mid \frac{\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \sqrt{3}-1\right\}</math>임을 밝히면: (+30점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 80점 |
| 3-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\angle QPT = \angle RPT</math>임을 보이면: (+20점)</li> <li>▪ <math>f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{19}}</math> 구하면: (+20점)</li> <li>▪ 올바른 풀이가 있고 <math>\sin \theta = \frac{\sqrt{19}}{10}</math>: (+40점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 80점 |
| 3-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>g'(t) = 2(2f^{-1}(t)-1)</math>: (+40점)</li> <li>▪ <math>t = f\left(\frac{1}{2}\right)</math>에서 최소임을 설명하면: (+30점)</li> <li>▪ 답 <math>\frac{\sqrt{3}}{6}(6-\sqrt{13})</math> 또는 <math>\sqrt{3}-\frac{\sqrt{39}}{6}</math>: (+10점)</li> </ul> <p><b>[별해 1]</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>g'(t) = 2(2f^{-1}(t)-1)</math>: (+40점)</li> <li>▪ <math>t = f\left(\frac{1}{2}\right)</math>에서 최소임을 설명하면: (+30점)</li> <li>▪ 답 <math>\frac{\sqrt{3}}{6}(6-\sqrt{13})</math> 또는 <math>\sqrt{3}-\frac{\sqrt{39}}{6}</math>: (+10점)</li> </ul> <p><b>[별해 2]</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>h'(a) = 2f'(a)(2a-1)</math>: (+40점)</li> <li>▪ <math>a = \frac{1}{2}</math>에서 최소임을 설명하면: (+30점)</li> <li>▪ 답 <math>\frac{\sqrt{3}}{6}(6-\sqrt{13})</math> 또는 <math>\sqrt{3}-\frac{\sqrt{39}}{6}</math>: (+10점)</li> </ul> | 80점 |

**B형 · 문제 1**

[문제 1] 실수 전체의 집합에서 함수  $f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} |x - t| \cos \frac{t}{2} dt$$

- (1-1)  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. 또한  $x < \frac{\pi}{2}$ 일 때,  $f'(x)$ 를 구하시오. (70점)
- (1-2) 함수  $f(x)$ 가  $x = \alpha$ 에서 최댓값을 가질 때,  $\cos \frac{\alpha}{2}$ 의 값을 구하시오. (80점)
- (1-3) 곡선  $y = f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 와 직선  $y = \sqrt{2}x + k$ 가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 실수  $k$ 의 값을 모두 구하시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (1-1)

$x = \frac{\pi}{2}$ 일 때,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{t}{2} dt = \left[2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt \\ &= -\left[-4 \cos \frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = -4 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

이다. 한편,  $x < \frac{\pi}{2}$ 일 때

$$f(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (t - x) \cos \frac{t}{2} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} t \cos \frac{t}{2} dt - x \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt$$

이므로  $f'(x) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt = \left[-2 \sin \frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = \sqrt{2}$ 이다.

### (1-2)

(1-1)에서  $x < \frac{\pi}{2}$ 일 때  $f'(x) = \sqrt{2}$ 이고,  $x > 2\pi$ 일 때

$$f(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (x - t) \cos \frac{t}{2} dt = x \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} t \cos \frac{t}{2} dt$$

이므로  $f'(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt = \left[2 \sin \frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = -\sqrt{2}$ 이다. 한편  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x (x - t) \cos \frac{t}{2} dt + \int_x^{2\pi} (t - x) \cos \frac{t}{2} dt \\ &= x \int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos \frac{t}{2} dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^x t \cos \frac{t}{2} dt + \int_x^{2\pi} t \cos \frac{t}{2} dt - x \int_x^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos \frac{t}{2} dt + x \cos \frac{x}{2} - x \cos \frac{x}{2} - x \cos \frac{x}{2} - \int_x^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt + x \cos \frac{x}{2} \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos \frac{t}{2} dt - \int_x^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt \\ &= \left[2 \sin \frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^x - \left[2 \sin \frac{t}{2}\right]_x^{2\pi} = 4 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

이다. 즉

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \left(x < \frac{\pi}{2}\right) \\ 4 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{2} & \left(\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right) \\ -\sqrt{2} & (x > 2\pi) \end{cases}$$

이다. 따라서  $f'(x)$ 는  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 인  $\alpha$ 에 대하여  $x < \alpha$ 일 때 양수,  $x > \alpha$ 일 때 음수이므로,

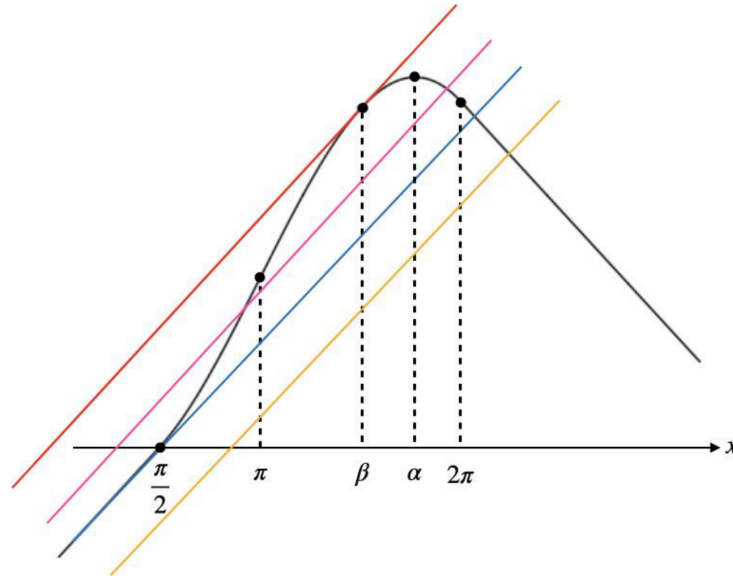
$f(x)$ 는  $x = \alpha$ 일 때 최댓값을 가진다. 한편  $\pi < \alpha < 2\pi$ 이므로  $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{14}}{4}$ 이다.

### (1-3)

$\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$ 일 때  $f''(x) = 2 \cos \frac{x}{2}$ 이다. 따라서 함수  $f(x)$ 의 증감 및 볼록성을 조사하면 아래 표와 같다.

|          |     |                 |     |       |     |          |     |        |     |
|----------|-----|-----------------|-----|-------|-----|----------|-----|--------|-----|
| $x$      | ... | $\frac{\pi}{2}$ | ... | $\pi$ | ... | $\alpha$ | ... | $2\pi$ | ... |
| $f'(x)$  | +   | +               | +   | +     | +   | 0        | -   | -      | -   |
| $f''(x)$ | 0   |                 | +   | 0     | -   | -        | -   |        | 0   |
| $f(x)$   |     | ↗               |     | ↗     | 변곡점 | ↗        | ↘   |        | ↘   |

이로부터 곡선  $y = f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 개형이 아래와 같음을 알 수 있다.



따라서 직선  $y = \sqrt{2}x + k$ 가 곡선  $y = f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 와 교점이 1개이기 위해서는 직선이  $y = f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 에 접하거나, 기울기가  $\sqrt{2}$ 이고 점  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 을 지나는 직선보다  $y$ 절편이 작아야 한다. 직선  $y = \sqrt{2}x + k$ 가  $y = f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 에 접할 때 그 접점의  $x$ 좌표를  $\beta$ 라 하면,  $4\sin\frac{\beta}{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ 이고  $\frac{\pi}{2} < \beta < 2\pi$ 에서  $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\beta = \frac{3}{2}\pi$ 이다. 한편

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) - f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (4\sin\frac{t}{2} - \sqrt{2}) dt = \left[-8\cos\frac{t}{2} - \sqrt{2}t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = 8\sqrt{2} - \sqrt{2}\pi$$

이므로, 직선  $y = \sqrt{2}x + k$ 가 점  $\left(\frac{3}{2}\pi, f\left(\frac{3}{2}\pi\right) - f\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right)$ 을 지날 때  $k = \left(8 - \frac{5}{2}\pi\right)\sqrt{2}$ 이다.

또한 직선  $y = \sqrt{2}x + k$ 가 점  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 을 지나는 경우  $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ 이므로, 답은

$$k = \left(8 - \frac{5}{2}\pi\right)\sqrt{2} \quad \text{또는} \quad k < -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

이다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 배점 |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 - 2\sqrt{2}</math>를 구하면 (+40점)</li> <li>▪ <math>x &lt; \frac{\pi}{2}</math>일 때 <math>f'(x) = \sqrt{2}</math>를 구하면 (+30점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 70 |
| 1-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>x &gt; 2\pi</math>일 때 <math>f'(x) = -\sqrt{2}</math>를 구하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi</math>일 때 <math>f'(x) = 4 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{2}</math>를 구하면 (+30점)</li> <li>▪ <math>\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}</math>를 구하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{14}}{4}</math>를 구하면 (+20점)</li> </ul>                                                                                                                             | 80 |
| 1-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ 직선 <math>y = \sqrt{2}x + k</math>가 곡선 <math>y = f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)</math>에 접할 때와 기울기가 <math>\sqrt{2}</math>이고 점 <math>\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)</math>을 지나는 직선보다 <math>y</math>절편이 작을 때 주어진 조건을 만족함을 서술하면 (+30점)</li> <li>▪ 직선 <math>y = \sqrt{2}x + k</math>가 곡선 <math>y = f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)</math>에 접할 때 <math>k = \left(8 - \frac{5}{2}\pi\right)\sqrt{2}</math>임을 구하면 (+30점)</li> <li>▪ <math>k &lt; -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi</math>인 경우를 구하면 (+20점)</li> </ul> | 80 |

**B형 · 문제 2**

[문제 2] 삼차함수  $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & (x \leq 0) \\ f(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 다음을 만족시킨다.

(가)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|g(x)|}{x^3} = 1$

(나)  $g(x)$ 가 극값을 갖는  $x$ 의 값은  $\alpha$  하나뿐이다. (단,  $\alpha$ 는 실수이다.)

(다)  $\int_{-1}^1 g(x)dx = 0$

**(2-1)**  $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 구하시오. (70점)

**(2-2)** 실수  $\alpha$ 의 값의 범위를 구하시오. (80점)

**(2-3)** 함수  $h(x) = |g(x) - f'(0)x|$ 에 대하여

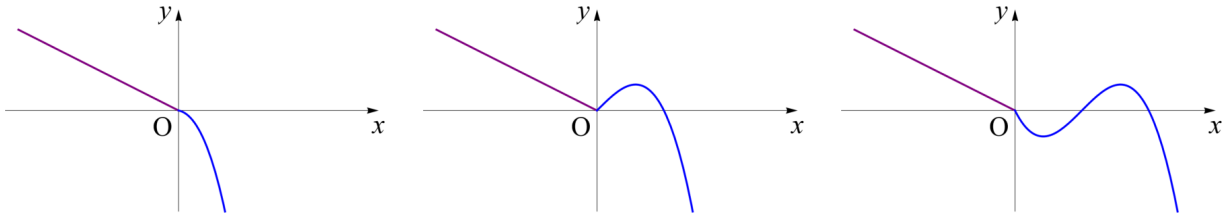
$$D = \{k \mid h(x) \text{는 } x = k \text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하자.  $D$ 의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 실수  $\alpha$ 의 값을 모두 구하시오. (80점)

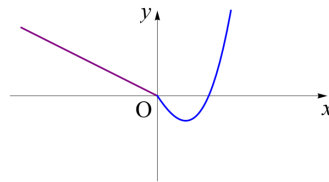
## ■ 예시 답안

### (2-1)

$g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로  $f(0) = 0$ 이고,  $f(x)$ 의 최고차항의 계수를  $a$ 라 하면 조건 (가)에 의해  $a = 1$  또는  $a = -1$ 이다.  $a = -1$ 인 경우에는 그림과 같이  $g(x)$ 의 극값이 존재하지 않거나, 극값을 갖는  $x$ 가 두 개 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

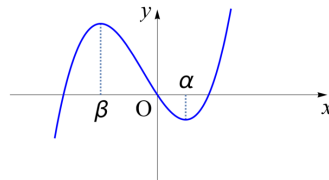


반면에  $a = 1$ 인 경우에는 그림과 같이 조건 (나), (다)를 모두 만족시키는 경우가 존재하는 것이 자명하다. 따라서  $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이다.



### (2-2)

(2-1)의 결과로부터  $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이다. 또한 조건 (나), (다)를 모두 만족시키는 경우는 아래 그림과 같이 적당한 양수  $\alpha$ 에 대하여  $x = \alpha$ 에서 극소가 되어야 하므로 방정식  $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖고, 이를  $\alpha, \beta$ 라 할 때  $\alpha > 0$ 이고  $\beta \leq 0$ 이어야 한다.



따라서

$$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta) = 3x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 3\alpha\beta$$

라 둘 수 있다. 그런데  $f(0) = 0$ 이므로

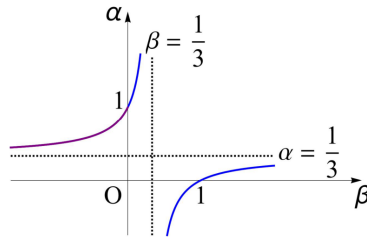
$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)x^2 + 3\alpha\beta x$$

이다. 이제 조건 (다)에서  $\int_{-1}^1 g(x)dx = 0$ 이고  $\int_{-1}^0 g(x)dx = \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x^3 + \frac{3}{2}\alpha\beta x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{3}{2}\alpha\beta = -\frac{1}{4}$$

이다. 그러므로  $\alpha + \beta - 3\alpha\beta = 1$ , 즉  $\alpha = \frac{1 - \beta}{1 - 3\beta}$  ( $\beta \leq 0$ )을 얻는다. 따라서 아래 그림과 같이 그래프를 이용

하면  $\beta \leq 0$ 일 때  $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$ 임을 알 수 있다.



**[별해 1]**

(2-1)의 결과로부터  $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이고  $f(0) = 0$ 이므로  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$ 라 둘 수 있고, 조건 (다)에서  $\int_{-1}^1 g(x)dx = 0$ 이고  $\int_{-1}^0 g(x)dx = \int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = -\frac{1}{4}$$

이다. 그러므로  $c = -\frac{2}{3}b - 1$ 이고 다음을 얻는다.

$$f(x) = x^3 + bx^2 - \left(\frac{2}{3}b + 1\right)x$$

그런데 조건 (나), (다)를 모두 만족시키는 경우는 적당한 양수  $\alpha$ 에 대하여  $x = \alpha$ 에서 극소가 되어야 하므로 방정식  $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖고, 이를  $\alpha, \beta$ 라 할 때  $\alpha > 0$ 이고  $\beta \leq 0$ 이어야 한다. 따라서 이차 함수  $f'(x) = 3x^2 + 2bx - \frac{2}{3}b - 1$ 의 그래프의 개형을 생각하면

(i)  $f'(0) = -\frac{2}{3}b - 1 < 0$ 일 때, 즉  $b > -\frac{3}{2}$ 일 때 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

(ii)  $f'(0) = -\frac{2}{3}b - 1 = 0$ 일 때, 즉  $b = -\frac{3}{2}$ 일 때  $f'(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x - 1)$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii)  $f'(0) = -\frac{2}{3}b - 1 > 0$ 일 때, 즉  $b < -\frac{3}{2}$ 일 때는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 (i), (ii), (iii)의 결과로부터  $b \geq -\frac{3}{2}$ 이다. 근의 공식을 이용하면 방정식  $f'(x) = 3x^2 + 2bx - \frac{2}{3}b - 1 = 0$ 의 양의 실근은  $\alpha = \frac{1}{3}(-b + \sqrt{b^2 + 2b + 3})$ 이다.

이제  $b \geq -\frac{3}{2}$ 인 영역에서

$$u(b) = \frac{1}{3}(-b + \sqrt{b^2 + 2b + 3})$$

이라 정의하면  $u\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$ 이고

$$u'(b) = -\frac{1}{3} + \frac{b+1}{3\sqrt{b^2+2b+3}} = \frac{1}{3}\left(-1 + \frac{b+1}{\sqrt{(b+1)^2+2}}\right) < 0$$

이므로 주어진 영역에서 감소하며

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} u(b) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{3}(-b + \sqrt{b^2 + 2b + 3}) = \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2b + 3}{\sqrt{b^2 + 2b + 3} + b} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{b}}{\sqrt{1 + \frac{2}{b} + \frac{3}{b^2}} + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

이다. 따라서  $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$ 이다.

**[별해 2]**

별해 1에서와 같이  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$ 라 둘 수 있고,

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = -\frac{1}{4}$$

이다. 그러므로  $b = -\frac{3}{2}c - \frac{3}{2}$ 이고 다음을 얻는다.

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(c+1)x^2 + cx$$

그런데 조건 (나), (다)를 모두 만족시키는 경우는 적당한 양수  $\alpha$ 에 대하여  $x = \alpha$ 에서 극소가 되어야 하므로 방정식  $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖고, 이를  $\alpha, \beta$ 라 할 때  $\alpha > 0$ 이고  $\beta \leq 0$ 이어야 한다. 따라서 이차 함수  $f'(x) = 3x^2 - 3(c+1)x + c$ 의 그래프의 개형을 생각하면

(i)  $f'(0) = c < 0$ 일 때 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

(ii)  $f'(0) = c = 0$ 일 때  $f'(x) = 3x^2 - 3x = 3x(x-1)$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(iii)  $f'(0) = c > 0$ 일 때 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 (i), (ii), (iii)의 결과로부터  $c \leq 0$ 이다. 근의 공식을 이용하면 방정식  $f'(x) = 3x^2 - 3(c+1)x + c = 0$ 의 양의 실근  $\alpha$ 는 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{1}{2}(c+1) + \frac{1}{6}\sqrt{9c^2 + 6c + 9} = \frac{1}{2}\left(c+1 + \sqrt{c^2 + \frac{2}{3}c + 1}\right)$$

이제  $c \leq 0$ 인 영역에서

$$v(c) = \frac{1}{2}\left(c+1 + \sqrt{c^2 + \frac{2}{3}c + 1}\right)$$

이라 정의하면  $v(0) = 1$ 이고

$$v'(c) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c + \frac{1}{3}}{\sqrt{\left(c + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}}}\right) > 0$$

이므로 주어진 영역에서 증가하며

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow -\infty} v(c) &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}\left(c+1 + \sqrt{c^2 + \frac{2}{3}c + 1}\right) = \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow -\infty} \frac{(c+1)^2 - \left(c^2 + \frac{2}{3}c + 1\right)}{c+1 - \sqrt{c^2 + \frac{2}{3}c + 1}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{3}c}{c+1 - \sqrt{c^2 + \frac{2}{3}c + 1}} = \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{3}}{1 + \frac{1}{c} + \sqrt{1 + \frac{2}{3c} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

이다. 따라서  $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$ 이다.

(2-3)

(2-2)의 풀이에서  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)x^2 + 3\alpha\beta x$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 3\alpha\beta$ ,  $f'(0) = 3\alpha\beta$ 이고,  $\alpha + \beta - 3\alpha\beta = 1$ 로부터  $\beta = \frac{1-\alpha}{1-3\alpha}$ ,  $\alpha + \beta = \frac{1-3\alpha^2}{1-3\alpha} \left( \frac{1}{3} < \alpha \leq 1 \right)$ 이다. 이제  $p(x) = g(x) - f'(0)x$ 라 정의하면  $h(x) = |p(x)|$ 이고 다음을 얻는다.

$$p(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - (\alpha + \beta - 1)x & (x \leq 0) \\ x^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)x^2 & (x > 0) \end{cases}$$

$p(x)$ 의 식을 보면  $x \leq 0$ 인 영역에서  $\alpha + \beta - 1 = -\frac{1}{2}$ 일 때  $-\frac{1}{2}x - (\alpha + \beta - 1)x = 0$ 이 된다.

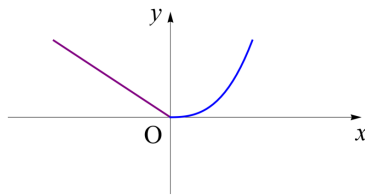
또한  $x \geq 0$ 인 영역에서  $x^3 - \frac{3}{2}(\alpha + \beta)x^2 = x^2 \left\{ x - \frac{3}{2}(\alpha + \beta) \right\}$ 이므로, 방정식  $p(x) = 0$ 은  $x = 0$ 에서는 항상 중근을 갖고  $\alpha + \beta > 0$ 일 때 양의 실근을 갖는다.

따라서  $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$ 인 영역에서 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

- $\alpha + \beta \leq 0$ 인 경우:  $\alpha + \beta = \frac{1-3\alpha^2}{1-3\alpha} \leq 0$ 이므로  $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.
- $\alpha + \beta > 0$ 인 경우:  $\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha \leq 1$ 이다.
- $\alpha + \beta - 1 = -\frac{1}{2}$ 인 경우: 방정식  $6\alpha^2 - 3\alpha - 1 = 0$ 에서  $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{12}$ 이다.  
(이 경우  $\alpha + \beta = \frac{1}{2} > 0$ 이므로  $\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha \leq 1$ 이다.)

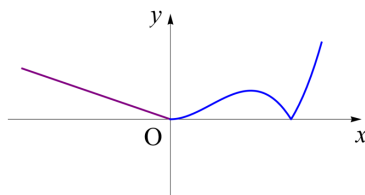
그러므로  $\alpha$ 의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i)  $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때: 방정식  $p(x) = 0$ 이 양의 실근을 갖지 않으며,  $x \leq 0$ 인 영역에서  $p(x)$ 의 일차항의 계수가 0이 아니므로  $y = h(x) (= |p(x)|)$ 의 그래프는 다음과 같다.



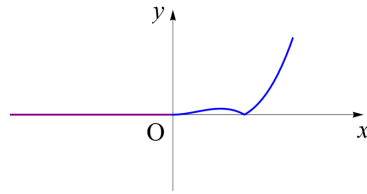
이때  $h(x)$ 의  $x = 0$ 에서의 좌미분계수는 음수이고 우미분계수는 0이므로  $h(x)$ 는  $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다.  $x \neq 0$ 일 때  $h(x)$ 가 미분가능한 것은 자명하므로  $D$ 의 원소의 개수는 1이다.

(ii)  $\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha \leq 1$ 이고  $\alpha \neq \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{12}$ 일 때: 방정식  $p(x) = 0$ 이 양의 실근을 가지며,  $x \leq 0$ 인 영역에서  $p(x)$ 의 일차항의 계수가 0이 아니므로  $y = h(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$x = 0$ 일 때는 (i)에서의 설명과 유사하게 미분가능하지 않으며, 양의 실근인 점에서는 좌미분계수는 음수, 우미분계수는 양수이므로 역시 미분가능하지 않다. 나머지 점에서  $h(x)$ 가 미분가능한 것은 자명하므로  $D$ 의 원소의 개수는 2이다.

(iii)  $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{12}$ 인 경우:  $x \leq 0$ 인 영역에서  $p(x) = 0$ 이고  $y = p(x)$ 가 양의 실근을 가진다.  
그러므로  $y = h(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이 경우  $x = 0$ 에서는 좌미분계수와 우미분계수가 모두 0이므로 미분가능하고, (ii)에서의 설명과 유사하게 양의 실근인 경우에는 미분가능하지 않다. 그 외의 점에서는 모두 미분가능한 것이 자명하므로  $D$ 의 원소의 개수는 1이다.

(i), (ii), (iii)으로부터 답은  $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$  또는  $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{12}$ 이다.

### [별해 1]

(2-2)의 별해 1에서  $f(x) = x^3 + bx^2 - \left(\frac{2}{3}b + 1\right)x$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 2bx - \frac{2}{3}b - 1$ 이고  $b \geq -\frac{3}{2}$ 이다. 또한  $\alpha = \frac{1}{3}(-b + \sqrt{b^2 + 2b + 3})$ ,  $\beta = \frac{1}{3}(-b - \sqrt{b^2 + 2b + 3})$ 이고  $u(b) = \frac{1}{3}(-b + \sqrt{b^2 + 2b + 3})$ 이라 하면  $u(b)$ 는 주어진 영역에서 감소하며  $\lim_{b \rightarrow \infty} u(b) = \frac{1}{3}$ 이다.

(i)  $\alpha + \beta \leq 0$ 인 경우, 즉 방정식  $p(x) = 0$ 이 양의 실근을 갖지 않는 경우  $-\frac{2}{3}b \leq 0$ 이므로  $b \geq 0$ 이다. 이때  $u(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로  $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

(ii)  $\alpha + \beta > 0$ 인 경우, 즉 방정식  $p(x) = 0$ 이 양의 실근을 갖는 경우  $-\frac{2}{3}b > 0$ 이므로  $-\frac{3}{2} \leq b < 0$ 이다. 이때  $u\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$ ,  $u(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로  $\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha \leq 1$ 이다.

(iii)  $\alpha + \beta - 1 = -\frac{1}{2}$ 인 경우  $b = -\frac{3}{4}$ 이고  $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{12}$ 이다.  
이후의 풀이는 원래의 풀이와 같다.

### [별해 2]

(2-2)의 별해 2에서  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(c+1)x^2 + cx$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 3(c+1)x + c$ 이고  $c \leq 0$ 이다.

또한  $\alpha = \frac{1}{2}\left(c+1 + \sqrt{c^2 + \frac{2}{3}c + 1}\right)$ ,  $\beta = \frac{1}{2}\left(c+1 - \sqrt{c^2 + \frac{2}{3}c + 1}\right)$ 이고

$v(c) = \frac{1}{2}\left(c+1 + \sqrt{c^2 + \frac{2}{3}c + 1}\right)$ 는 주어진 영역에서 증가하며  $\lim_{c \rightarrow -\infty} v(c) = \frac{1}{3}$ 이다.

(i)  $\alpha + \beta \leq 0$ 인 경우, 즉 방정식  $p(x) = 0$ 이 양의 실근을 갖지 않는 경우  $c \leq -1$ 이고  $v(-1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로  $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

(ii)  $\alpha + \beta > 0$ 인 경우, 즉 방정식  $p(x) = 0$ 이 양의 실근을 갖는 경우  $-1 < c \leq 0$ 이고  $v(-1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $v(0) = 1$ 이므로  $\frac{\sqrt{3}}{3} < \alpha \leq 1$ 이다.

(iii)  $\alpha + \beta - 1 = -\frac{1}{2}$ 인 경우  $c = -\frac{1}{2}$ 이고  $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{12}$ 이다.

이후의 풀이는 원래의 풀이와 같다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 배점 |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f(0) = 0</math> 또는 <math>g(x)</math>가 <math>x = 0</math>에서 연속 또는 <math>y = g(x)</math>의 그래프가 원점을 지남 (+10점)</li> <li>▪ 조건 (가)에 의해 <math>a = 1</math> 또는 <math>a = -1</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>a = -1</math>일 때 조건을 만족시키지 못하는 이유 설명 (+20점)</li> <li>▪ <math>a = 1</math>일 때 조건을 만족시키는 이유 설명 (+20점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 70 |
| 2-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f'(x) = 0</math>의 두 근이 <math>\alpha &gt; 0, \beta \leq 0</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>\alpha + \beta - 3\alpha\beta = 1</math> 또는 <math>\alpha = \frac{1-\beta}{1-3\beta}</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>\frac{1}{3} &lt; \alpha \leq 1</math> (+40점)</li> </ul> <p><b>[별해 1]</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f'(x) = 0</math>의 두 근이 <math>\alpha &gt; 0, \beta \leq 0</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>\frac{1}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = -\frac{1}{4}</math> 또는 <math>c = -\frac{2}{3}b - 1</math> 또는 <math>2b + 3c = -3</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>\frac{1}{3} &lt; \alpha \leq 1</math> (+40점)</li> </ul> <p><b>[별해 2]</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f'(x) = 0</math>의 두 근이 <math>\alpha &gt; 0, \beta \leq 0</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>\frac{1}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = -\frac{1}{4}</math> 또는 <math>b = -\frac{3}{2}c - \frac{3}{2}</math> 또는 <math>2b + 3c = -3</math> (+20점)</li> <li>▪ <math>\frac{1}{3} &lt; \alpha \leq 1</math> (+40점)</li> </ul> | 80 |
| 2-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\frac{1}{3} &lt; \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{3}</math>일 때 <math>D</math>의 원소의 개수는 1 (+30점)</li> <li>▪ <math>\frac{\sqrt{3}}{3} &lt; \alpha \leq 1</math>이고 <math>\alpha \neq \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{12}</math>일 때 <math>D</math>의 원소의 개수는 2 (+20점)</li> <li>▪ <math>\alpha = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{12}</math>일 때 <math>D</math>의 원소의 개수는 1 (+30점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 80 |

**B형 · 문제 3**

[문제 3]  $n = 1, 2, 3, \dots, 100, 101$ 에 대하여

$$a_n = \int_0^1 (2x)^n (1-x)^{102-n} dx$$

라 하자.

(3-1)  $\frac{a_{98}}{2^{98}} + 3\frac{a_{99}}{2^{99}} + 3\frac{a_{100}}{2^{100}} + \frac{a_{101}}{2^{101}} = \frac{q}{p}$ 일 때,  $p$ 와  $q$ 를 각각 구하시오.  
(단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수이다.) (80점)

(3-2)  $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$ 을 만족시키는  $n$ 을 모두 구하시오. (80점)

(3-3)  $a_n$ 이  $n = m$ 에서 최솟값을 가질 때,  $m$ 을 구하시오. 또한  ${}_{102}C_m \times a_m = \frac{q}{p}$ 일 때,  $p$ 와  $q$ 를 각각 구하시오. (단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수이다.) (80점)

## ■ 예시 답안

(3-1)

$$\frac{a_n}{2^n} = \int_0^1 x^n (1-x)^{102-n} dx \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{98}}{2^{98}} + 3 \frac{a_{99}}{2^{99}} + 3 \frac{a_{100}}{2^{100}} + \frac{a_{101}}{2^{101}} &= \int_0^1 (x^{98}(1-x)^4 + 3x^{99}(1-x)^3 + 3x^{100}(1-x)^2 + x^{101}(1-x)) dx \\ &= \int_0^1 x^{98}(1-x)((1-x)^3 + 3x(1-x)^2 + 3x^2(1-x) + x^3) dx \\ &= \int_0^1 x^{98}(1-x)((1-x) + x)^3 dx = \int_0^1 (x^{98} - x^{99}) dx \\ &= \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{9900} \end{aligned}$$

그러므로  $p = 9900, q = 1$ 이다.

(3-2)

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n \int_0^1 x^n (1-x)^{102-n} dx = 2^n \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} (1-x)^{102-n} \right]_0^1 + 2^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} (102-n)(1-x)^{101-n} dx \\ &= 2^n \frac{102-n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^{101-n} dx = \frac{102-n}{2(n+1)} a_{n+1} \end{aligned}$$

이므로  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{102-n}{2(n+1)}$ 이다.

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{102-n}{2(n+1)} \geq 1$ 이 되려면  $102-n \geq 2n+2$ 이므로  $n \leq \frac{100}{3}$ 이다.

그러므로  $n = 1, 2, 3, \dots, 33$ 이다.

(3-3)

$a_1 > a_2 > \dots > a_{33} > a_{34} < a_{35} < \dots < a_{100} < a_{101}$ 이므로  $m = 34$ 이다.

그런데  ${}_{102}C_{34} \times a_{34} = {}_{102}C_{34} \times \frac{a_{34}}{a_{35}} \times \frac{a_{35}}{a_{36}} \times \dots \times \frac{a_{99}}{a_{100}} \times \frac{a_{100}}{a_{101}} \times a_{101}$ 이고

$$a_{101} = \int_0^1 (2x)^{101} (1-x) dx = 2^{101} \int_0^1 (x^{101} - x^{102}) dx = 2^{101} \left[ \frac{x^{102}}{102} - \frac{x^{103}}{103} \right]_0^1 = \frac{2^{101}}{102 \times 103} \text{이므로}$$

$${}_{102}C_{34} \times a_{34} = {}_{102}C_{34} \times \frac{68}{2 \times 35} \times \frac{67}{2 \times 36} \times \dots \times \frac{3}{2 \times 100} \times \frac{2}{2 \times 101} \times \frac{2^{101}}{102 \times 103} = \frac{2^{34}}{103} \text{이다.}$$

그러므로  $p = 103, q = 2^{34}$ 이다.

[별해 1]

$a_1 > a_2 > \dots > a_{33} > a_{34} < a_{35} < \dots < a_{100} < a_{101}$ 이므로  $m = 34$ 이다.

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 2x(1-x)^{101} dx = \int_0^1 2(1-x)x^{101} dx = 2 \int_0^1 (x^{101} - x^{102}) dx \\ &= 2 \left[ \frac{x^{102}}{102} - \frac{x^{103}}{103} \right]_0^1 = \frac{2}{102 \times 103} \end{aligned}$$

$$a_2 = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{102 \times 103} \times \frac{2 \times 2}{101}$$

$$a_3 = a_2 \times \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{102 \times 103} \times \frac{2 \times 2}{101} \times \frac{2 \times 3}{100}$$

$$a_4 = a_3 \times \frac{a_4}{a_3} = \frac{2}{102 \times 103} \times \frac{2 \times 2}{101} \times \frac{2 \times 3}{100} \times \frac{2 \times 4}{99}$$

이런 방법으로 계속 계산하면

$$a_{34} = \frac{2}{102 \times 103} \times \frac{2 \times 2}{101} \times \frac{2 \times 3}{100} \times \frac{2 \times 4}{99} \times \cdots \times \frac{2 \times 34}{69} = \frac{2^{34} \times 34! \times 68!}{103!} \text{ 이다.}$$

따라서  ${}_{102}C_{34} \times a_{34} = \frac{102!}{34!68!} \times \frac{2^{34} \times 34! \times 68!}{103!} = \frac{2^{34}}{103}$ 이다.

그러므로  $p = 103, q = 2^{34}$ 이다.

### [별해 2]

$a_1 > a_2 > \cdots > a_{33} > a_{34} < a_{35} < \cdots < a_{100} < a_{101}$ 이므로  $m = 34$ 이다.

$$a_{101} = \int_0^1 (2x)^{101}(1-x)dx = 2^{101} \int_0^1 (x^{101} - x^{102})dx = 2^{101} \left[ \frac{x^{102}}{102} - \frac{x^{103}}{103} \right]_0^1 = \frac{2^{101}}{102 \times 103}$$

$$a_{100} = a_{101} \times \frac{a_{100}}{a_{101}} = \frac{2^{101}}{102 \times 103} \times \frac{2}{2 \times 101}$$

$$a_{99} = a_{100} \times \frac{a_{99}}{a_{100}} = \frac{2^{101}}{102 \times 103} \times \frac{2}{2 \times 101} \times \frac{3}{2 \times 100}$$

$$a_{98} = a_{99} \times \frac{a_{98}}{a_{99}} = \frac{2^{101}}{102 \times 103} \times \frac{2}{2 \times 101} \times \frac{3}{2 \times 100} \times \frac{4}{2 \times 99}$$

이런 방법으로 계속 계산하면

$$a_{34} = \frac{2^{101}}{102 \times 103} \times \frac{2}{2 \times 101} \times \frac{3}{2 \times 100} \times \frac{4}{2 \times 99} \times \cdots \times \frac{68}{2 \times 35} = \frac{2^{34} \times 68! \times 34!}{103!} \text{ 이다.}$$

따라서  ${}_{102}C_{34} \times a_{34} = \frac{102!}{34!68!} \times \frac{2^{34} \times 68! \times 34!}{103!} = \frac{2^{34}}{103}$ 이다.

그러므로  $p = 103, q = 2^{34}$ 이다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 배점 |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\int_0^1 x^{98}(1-x)dx</math>를 구하면 (+60점)</li> <li>▪ <math>\frac{a_{98}}{2^{98}} + 3\frac{a_{99}}{2^{99}} + 3\frac{a_{100}}{2^{100}} + \frac{a_{101}}{2^{101}} = \frac{1}{9900}</math>을 구하면 (+20점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 80 |
| 3-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>a_n</math>을 부분적분으로 계산을 진행하면 (+30점)</li> <li>▪ <math>a_n = \frac{102-n}{2(n+1)}a_{n+1}</math>을 얻으면 (+30점)</li> <li>▪ 답 <math>n = 1, 2, 3, \dots, 33</math>을 구하면 (+20점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 80 |
| 3-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>a_{34}</math>가 최소임을 보여서 <math>m = 34</math>임을 구하면 (+30점)</li> <li>▪ <math>a_{101}</math>을 구하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>a_{34}</math>를 곱의 형태로 나열하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>{}_{102}C_{34} \times a_{34} = \frac{2^{34}}{103}</math>을 구하면 (+20점)</li> </ul> <p><b>[별해 1]</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>a_{34}</math>가 최소임을 보여서 <math>m = 34</math>임을 구하면 (+30점)</li> <li>▪ <math>a_1</math>을 구하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>a_{34}</math>를 곱의 형태로 나열하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>{}_{102}C_{34} \times a_{34} = \frac{2^{34}}{103}</math>를 구하면 (+20점)</li> </ul> | 80 |

# 2025학년도 자연계열 (A형·B형)

## A형 · 문제 1

[문제 1] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

제시문

[가]  $f(0) = f(a) = 0$  (단,  $a > 0$ )

[나]  $\int_0^a f(x) dx = 0$

(1-1)  $f(x)$ 의 극댓값을  $a$ 의 식으로 나타내시오. (70점)

(1-2)  $g(x) = \int_0^x tf(x-t) dt$ 에 대하여  $g''(-a)$ 를  $a$ 의 식으로 나타내시오. (80점)

(1-3)  $h(x) = f(x) + x, p(x) = e^{h(x)} + e^{h(a-x)}$ 라 각각 정의할 때,  $p(x)$ 의 최솟값을  $a$ 의 식으로 나타내시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (1-1)

$f(x) = x(x-a)(x-b)$ 라 하면

$$0 = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a \{x^3 - (a+b)x^2 + abx\} dx = \frac{a^4}{4} - \frac{(a+b)a^3}{3} + ab\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{12}(-a+2b)$$

이므로  $b = \frac{a}{2}$ 이다. 따라서  $f(x) = x(x-a)\left(x - \frac{a}{2}\right)$ 이고  $f'(x) = 3x^2 - 3ax + \frac{a^2}{2}$ 이다.

$f'(x) = 0$ 을 풀면  $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}a$ 이다. 따라서  $f(x)$ 의 증감을 조사하면  $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}a$ 에서 극댓값

$$f\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{6}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{36}a^3 \text{을 가진다.}$$

### (1-2)

$y = x - t$ 로 치환하면

$$g(x) = \int_0^x tf(x-t) dt = \int_x^0 (x-y)f(y)(-dy) = \int_0^x (x-y)f(y) dy = x \int_0^x f(y) dy - \int_0^x yf(y) dy$$

이다. 따라서  $g'(x) = \int_0^x f(y) dy$ 이고  $g''(x) = f(x)$ 이다. 그러므로  $g''(-a) = -3a^3$ 이다.

### (1-3)

$f(x) = x\left(x - \frac{a}{2}\right)(x-a)$ 이므로  $h(x) = x\left(x - \frac{a}{2}\right)(x-a) + x$ 이다. 또한

$$\begin{aligned} h(a-x) &= (a-x)\left(a-x - \frac{a}{2}\right)(a-x-a) + a-x = (a-x)\left(\frac{a}{2}-x\right)(-x) + a-x \\ &= -x\left(x - \frac{a}{2}\right)(x-a) - x + a = -h(x) + a \end{aligned}$$

이다. 따라서 기하평균 산술평균 부등식에 의해

$$e^{h(x)} + e^{h(a-x)} = e^{h(x)} + e^{a-h(x)} \geq 2\sqrt{e^{h(x)}e^{a-h(x)}} = 2\sqrt{e^a} (= 2e^{a/2})$$

이다.  $h\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{2}$ 이므로  $x = \frac{a}{2}$ 일 때, 위 부등식의 등호가 성립한다.

따라서  $p(x) = e^{h(x)} + e^{h(a-x)}$ 의 최솟값은  $2\sqrt{e^a} (= 2e^{a/2})$ 이다.

(별해1)  $h(x) = f(x) + x = x\left(x - \frac{a}{2}\right)(x-a) + \left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2}$ 이므로 곡선  $y = h(x)$ 의 그래프는 점  $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ 를 중심으로 대칭이다. 그러므로  $h(a-x) = a - h(x)$ 이다.

이후의 풀이는 위와 같음.

(별해2) 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하지 않는 풀이

$p(x)$ 를  $t = h(x)$ 로 치환하여  $q(t) = e^t + e^{a-t}$ 을 얻고 도함수  $q'(t) = e^t - e^{a-t}$ 를 구한다.

$t > \frac{a}{2}$ 에서  $q'(t) > 0$ 이고  $t < \frac{a}{2}$ 에서  $q'(t) < 0$ 이다. 따라서  $q(t)$ 는  $t = \frac{a}{2}$ 에서 최솟값을 가지고 최솟값은  $2\sqrt{e^a} (= 2e^{a/2})$ 이다.

(별해3)  $h(x) = x\left(x - \frac{a}{2}\right)(x - a) + x = x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)x$ 이고

$h(a - x) = -x^3 + \frac{3}{2}ax^2 - \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)x + a$ 이다.

따라서  $p(x) = e^{h(x)} + e^{h(a-x)} = e^{x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)x} + e^{-x^3 + \frac{3}{2}ax^2 - \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)x + a}$ 이다.

$$\begin{aligned} p'(x) &= \left(3x^2 - 3ax + \frac{a^2}{2} + 1\right)e^{x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)x} + \left(-3x^2 + 3ax - \frac{a^2}{2} - 1\right)e^{-x^3 + \frac{3}{2}ax^2 - \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)x + a} \\ &= \left(3x^2 - 3ax + \frac{a^2}{2} + 1\right)\left\{e^{x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)x} - e^{-x^3 + \frac{3}{2}ax^2 - \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)x + a}\right\} \end{aligned}$$

이다. 따라서  $p'(x) = 0$ 이 되는  $x$ 를 구하고 증감을 조사하여 최솟값을 구할 수 있다.

$p'(x) = 0$ 이면  $3x^2 - 3ax + \frac{a^2}{2} + 1 = 0$ 이거나  $e^{x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)x} - e^{-x^3 + \frac{3}{2}ax^2 - \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)x + a} = 0$ 이다.

즉  $3x^2 - 3ax + \frac{a^2}{2} + 1 = 0$ 이거나  $x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)x = -x^3 + \frac{3}{2}ax^2 - \left(\frac{a^2}{2} + 1\right)x + a$ 이다.

$a > 2$ 일 때, 이 방정식들을 풀면  $x = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{a^2 - 4}$ ,  $\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$ ,  $\frac{a}{2}$ 를 얻는다.

증감을 조사하면  $x = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$ ,  $\frac{a}{2}$ 에서 극솟값을 가진다.

이때 극솟값을 구하면 모두 같은 값  $2e^{a/2}$ 를 가진다.

$0 < a \leq 2$ 일 때, 이 방정식들을 풀면  $x = \frac{a}{2}$ 를 얻는다.

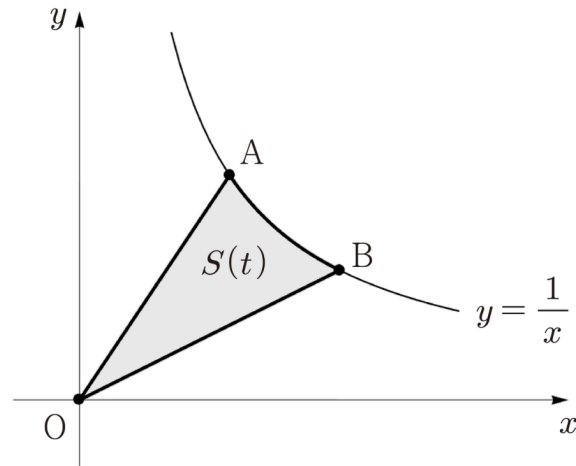
증감을 조사하면  $x = \frac{a}{2}$ 에서 극솟값을 가진다. 이때 극솟값은  $2e^{a/2}$ 이다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 배점 |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f(x) = x(x-a)\left(x - \frac{a}{2}\right)</math>를 구하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>f'(x) = 3x^2 - 3ax + \frac{a^2}{2}</math>를 구하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}a</math>에서 극대임을 기술하면 (+20점)</li> <li>▪ 극댓값 <math>f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{36}a^3</math>을 구하면 (+20점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 70 |
| 1-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>y = x - t</math>로 치환하여 <math>g(x) = x \int_0^x f(y) dy - \int_0^x yf(y) dy</math>를 구하면 (+40점)</li> <li>▪ <math>g'(x) = \int_0^x f(y) dy</math>를 구하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>g''(-a) = -3a^3</math>를 구하면 (+20점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 80 |
| 1-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>h(a-x) = a - h(x)</math>임을 보이면 (+40점)</li> <li>▪ 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여<br/> <math display="block">e^{h(x)} + e^{h(a-x)} = e^{h(x)} + e^{a-h(x)} \geq 2\sqrt{e^{h(x)}e^{a-h(x)}} = 2\sqrt{e^a} (= 2e^{a/2})</math>                     을 보이면 (+30점)</li> <li>▪ 최솟값이 <math>2\sqrt{e^a} (= 2e^{a/2})</math>임을 기술하면 (+10점)</li> </ul> (별해2 채점기준) <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>h(a-x) = a - h(x)</math>임을 보이면 (+40점)</li> <li>▪ 미분을 이용하여 <math>t = \frac{a}{2}</math>에서 <math>q(t) = e^t + e^{a-t}</math>가 최솟값을 가짐을 보이면 (+30점)</li> <li>▪ 최솟값이 <math>2\sqrt{e^a} (= 2e^{a/2})</math>임을 기술하면 (+10점)</li> </ul> (별해3 채점기준) <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ 모범답안처럼 다양한 경우에 대하여 다 조사하지 않고 단순히 <math>x = \frac{a}{2}</math>에서 최솟값이 나온다고 가정하고 답을 구하면 (0점)</li> </ul> | 80 |

**A형 · 문제 2**

[문제 2] 두 번 미분가능한 함수  $f(t)$ 는 모든 실수  $t$ 에 대하여  $0 < f(t) < f(t+1)$ 를 만족시킨다. 곡선  $y = \frac{1}{x}$  위의 두 점  $A\left(f(t), \frac{1}{f(t)}\right), B\left(f(t+1), \frac{1}{f(t+1)}\right)$ 에 대하여, 선분 OA, 선분 OB 및 곡선  $y = \frac{1}{x}$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를  $S(t)$ 라 정의하자. (단, O는 원점이다.)



(2-1)  $S(t)$ 를 구하시오. 또한  $f(t) = e^{t^3}$ 일 때,  $S(2)$ 의 값을 구하시오. (70점)

(2-2) 모든 실수  $t$ 에 대하여  $S(t) = 2$ 이고  $f(0) = 2$ 일 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ 의 값을 구하시오. (80점)

(2-3) 함수  $f(t)$ 는  $f(0) = 2, f'(0) = 3$ 이고 모든 실수  $t$ 에 대하여  $f''(t)f(t) \geq \{f'(t)\}^2$ 을 만족시킨다고 하자.  $S(t)$ 가 상수함수일 때,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. (80점)

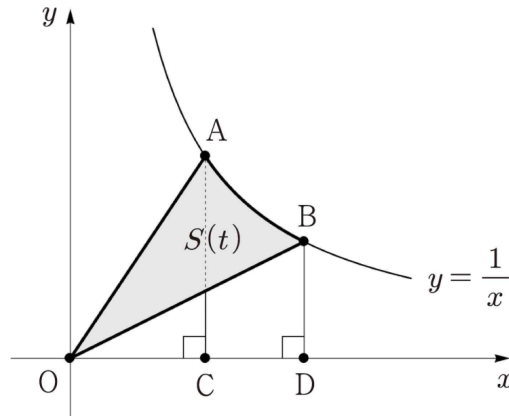
■ 예시 답안

(2-1)

$S(t)$ 는 아래 그림으로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} S(t) &= (\text{삼각형 OAC의 넓이}) + \int_{f(t)}^{f(t+1)} \frac{1}{x} dx - (\text{삼각형 OBD의 넓이}) \\ &= \frac{1}{2} + \ln \frac{f(t+1)}{f(t)} - \frac{1}{2} = \ln \frac{f(t+1)}{f(t)} \end{aligned}$$

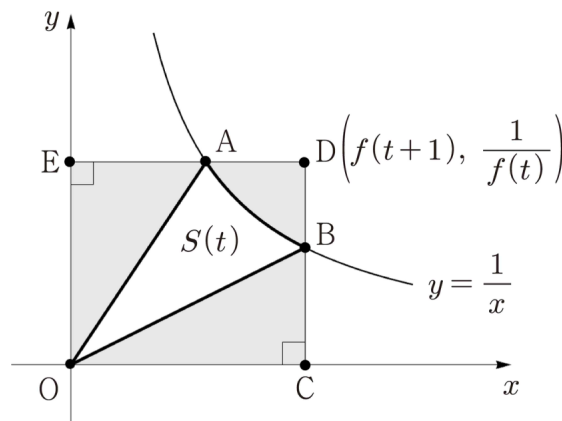
그러므로  $f(t) = e^{t^3}$ 이면,  $S(t) = \ln \frac{e^{(t+1)^3}}{e^{t^3}}$ 이다. 따라서  $S(2) = \ln \frac{e^{27}}{e^8} = 19$ 이다.



(별해)  $S(t)$ 는 아래 그림의 사각형 OCDE의 넓이에서 색칠된 부분의 넓이를 빼면 되므로

$$S(t) = \frac{f(t+1)}{f(t)} - \int_{f(t)}^{f(t+1)} \left\{ \frac{1}{f(t)} - \frac{1}{x} \right\} dx - 1 = \ln f(t+1) - \ln f(t) = \ln \frac{f(t+1)}{f(t)}$$

이다. 그러므로  $f(t) = e^{t^3}$ 이면,  $S(t) = \ln \frac{e^{(t+1)^3}}{e^{t^3}}$ 이다. 따라서  $S(2) = \ln \frac{e^{27}}{e^8} = 19$ 이다.



(2-2)

$S(t) = \ln \frac{f(t+1)}{f(t)} = 2$ 로부터  $\frac{f(t+1)}{f(t)} = e^2$ 을 얻는다.

따라서  $\left\{ \frac{1}{f(n)} \right\}$ 은 첫째항이  $\frac{1}{f(1)} = \frac{1}{2e^2}$ 이고 공비가  $\frac{1}{e^2}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} = \frac{\frac{1}{2e^2}}{1 - \frac{1}{e^2}} = \frac{1}{2(e^2 - 1)}$$

이다.

**(2-3)**

$S(t) = \ln \frac{f(t+1)}{f(t)}$ 이 상수함수이므로,  $0 = S'(t) = \frac{f'(t+1)}{f(t+1)} - \frac{f'(t)}{f(t)}$ 이다.

$g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$ 라 두면  $g(t) = g(t+1)$ 이다. 만일  $g(t)$ 가 상수함수가 아니라면

$g(c) > g(t+1)$  (또는  $g(c) < g(t+1) = g(t)$ )인  $c$ 가 존재한다. (단,  $t < c < t+1$ )

$g(c) > g(t+1)$ 인 경우에는  $\frac{g(t+1) - g(c)}{t+1 - c} < 0$ 이고,

$g(c) < g(t+1) = g(t)$ 인 경우에는  $\frac{g(c) - g(t)}{c - t} < 0$ 이다.

어느 경우이든, 평균값 정리에 의하여  $g'(d) < 0$ 인  $d$ 가 존재한다.

하지만  $g'(t) = \frac{f''(t)f(t) - \{f'(t)\}^2}{\{f(t)\}^2} \geq 0$ 이므로 모순이다.

따라서  $g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$ 가 상수함수이므로 조건  $f(0) = 2$ ,  $f'(0) = 3$ 으로부터  $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{3}{2}$ 이다.

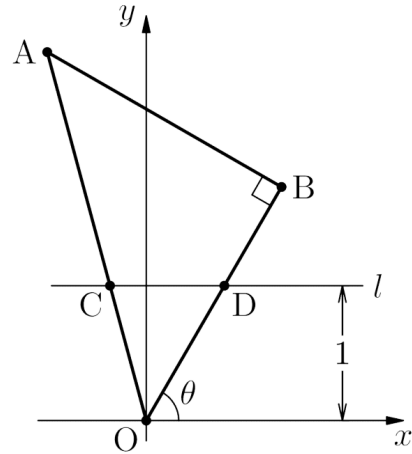
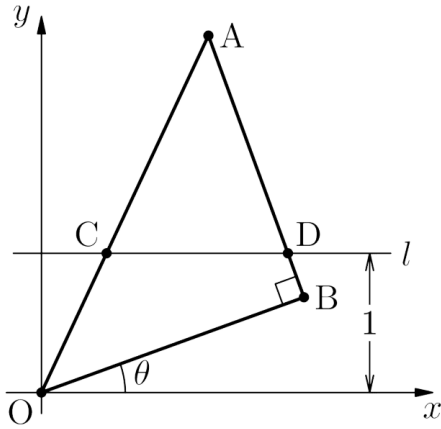
이것을 적분하면  $\ln f(t) = \frac{3t}{2} + C$ 이고  $f(t) = e^{\frac{3t}{2}} e^C$ 이다. 조건으로부터  $2 = f(0) = e^C$ 이므로  $f(t) = 2e^{\frac{3t}{2}}$ 가 되고  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{3}{4}}$ 이다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 배점 |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>S(t) = \ln \frac{f(t+1)}{f(t)}</math> 구하면 (+50점)</li> <li>▪ 답 <math>S(2) = 19</math> 구하면 (+20점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                    | 70 |
| 2-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\frac{f(t+1)}{f(t)} = e^2</math> 구하면 (+20점)</li> <li>▪ 첫째항 <math>\frac{1}{f(1)} = \frac{1}{2e^2}</math> 구하면 (+20점)</li> <li>▪ 공비 <math>\frac{1}{e^2}</math> 구하면 (+20점)</li> <li>▪ 답 <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{2(e^2 - 1)}</math> 구하면 (+20점)</li> </ul>                              | 80 |
| 2-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\frac{f'(t+1)}{f(t+1)} = \frac{f'(t)}{f(t)}</math> 구하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>\frac{f''(t)f(t) - \{f'(t)\}^2}{\{f(t)\}^2} \geq 0</math> 쓰면 (+20점)</li> <li>▪ <math>\frac{f'(t)}{f(t)}</math>가 상수함수임을 보이면 (+30점)</li> <li>▪ 답 <math>f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{3}{4}}</math> 구하면 (+20점)</li> </ul> | 80 |

**A형 · 문제 3**

[문제 3] 그림과 같이 좌표평면에서  $\overline{OA} = 2\sqrt{2}$ ,  $\overline{OB} = \overline{AB} = 2$ 인 직각삼각형  $OAB$ 에 대하여 선분  $OB$ 가  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각이  $\theta$ 이다. (단,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ) 직선  $l: y = 1$ 이 삼각형  $OAB$ 와 만나는 두 점을 왼쪽부터 각각  $C, D$ 라 하자. (단,  $O$ 는 원점이다.)



- (3-1) A의 좌표와 B의 좌표를 각각  $\theta$ 의 식으로 나타내시오. 또한 D가 선분  $OB$  위에 있는 경우  $\theta$ 의 값의 범위를 구하시오. (80점)
- (3-2)  $t = \tan \theta$ 일 때, 선분  $CD$ 의 길이를  $f(t)$ 라 하자. D가 선분  $OB$  위에 있는 경우  $f(t)$ 를 구하고  $f(t)$ 의 최솟값과 최댓값을 각각 구하시오. (80점)
- (3-3) 직선  $l$ 이 나누는 삼각형의 두 영역 중  $l$  위의 영역의 넓이를  $a$ ,  $l$  아래의 영역의 넓이를  $b$ 라 하자.  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때,  $a \times b$ 의 최솟값과 최댓값을 각각 구하시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (3-1)

A와 B의 좌표는 각각  $A\left(2\sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ ,  $B(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ 이다.

D가 선분 OB 위에 있으려면  $2\sin\theta \geq 1$ 이어야 하므로  $\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.

### (3-2)

$\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 인 경우 C의 좌표는  $\left(\cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), 1\right)$ 이며, D의 좌표는  $(\cot\theta, 1)$ 이다.

따라서 선분 CD의 길이는  $\cot\theta - \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ 이다.  $t = \tan\theta$ 로 치환하면  $\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로,  $t \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

그런데  $\cot\theta - \cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\theta} - \frac{1}{\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\tan\theta} - \frac{1}{\frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}}$ 이므로, 선분 CD의 길이  $f(t)$ 는  $f(t) =$

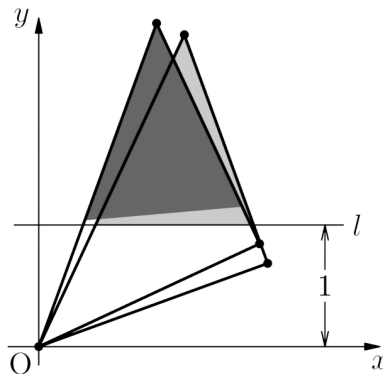
$\frac{1}{t} - \frac{1-t}{1+t}$ 이다. 또한  $t \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ 에서  $f'(t) = \frac{t^2 - 2t - 1}{t^2(1+t)^2} = 0$ 을 풀어  $t = 1 + \sqrt{2}$ 를 얻는다. 따라서  $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq t < 1 +$

$\sqrt{2}$ 에서  $f'(t) < 0$ 이고,  $t > 1 + \sqrt{2}$ 에서  $f'(t) > 0$ 이다.  $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3} - 2 > 1$ ,  $f(1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$ 이고,

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 1$ 이므로  $t \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ 에서  $f(t)$ 의 최솟값은  $f(1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$ 이고, 최댓값은  $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3} - 2$ 이다.

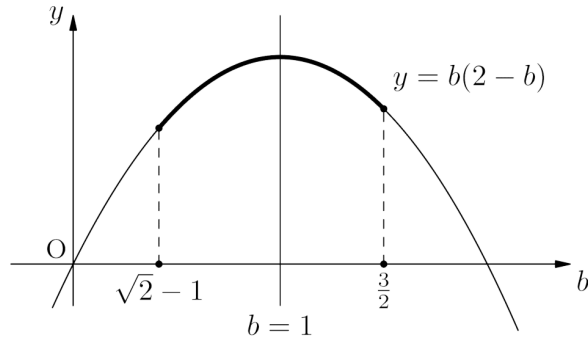
### (3-3)

$a = 2 - b$ 이다.  $g(b) = a \times b = b(2 - b)$ 라 두자.  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ 인 경우,  $\theta$ 가 증가함에 따라 명백히  $a$ 는 증가하고,  $b = 2 - a$ 는 감소한다.

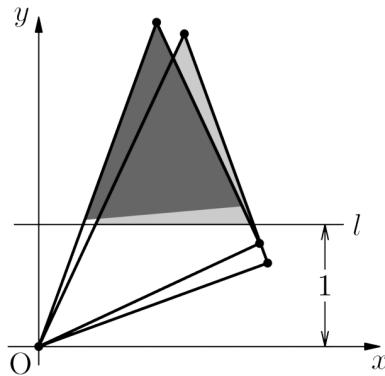


$\theta = 0$ 일 때,  $b = \frac{3}{2}$ 이고,  $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때,  $b = \sqrt{3} - 1$ 이므로  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ 인 경우  $\sqrt{3} - 1 \leq b \leq \frac{3}{2}$ 이다. 또한  $\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 선분 CD의 길이의 최솟값은  $2\sqrt{2} - 2$ 이고, 최댓값은  $2\sqrt{3} - 2$ 이므로 이 경우  $\sqrt{2} - 1 \leq b \leq \sqrt{3} - 1$ 이

다. 따라서  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때,  $\sqrt{2} - 1 \leq b \leq \frac{3}{2}$ 이다.  $1 - (\sqrt{2} - 1) > \frac{3}{2} - 1$ 이므로  $\sqrt{2} - 1 \leq b \leq \frac{3}{2}$ 일 때,  $g(b)$ 의 최댓값은  $g(1) = 1$ , 최솟값은  $g(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1)(3 - \sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 5$ 이다.

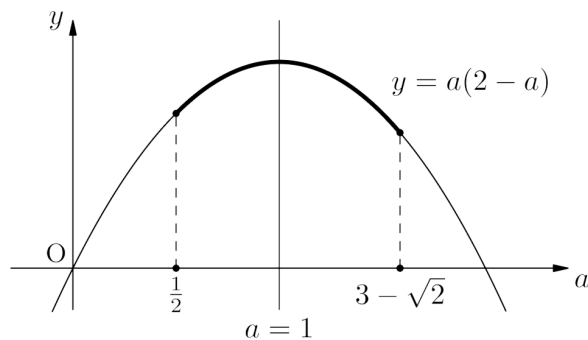


(별해)  $b = 2 - a$ 이다.  $g(a) = a \times b = a(2 - a)$ 라 두자.  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ 인 경우,  $\theta$ 가 증가함에 따라 명백히  $a$ 는 증가한다.



이제  $\theta = 0$ 일 때,  $a = \frac{1}{2}$ 이며,  $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때,  $b = \sqrt{3} - 1$ 이므로  $a = 2 - b = 3 - \sqrt{3}$ 이다.

따라서  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ 에서  $\frac{1}{2} \leq a \leq 3 - \sqrt{3}$ 이다.  $\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 선분 CD의 길이의 최솟값은  $2\sqrt{2} - 2$ 이고, 최댓값은  $2\sqrt{3} - 2$ 이므로  $\sqrt{2} - 1 \leq b \leq \sqrt{3} - 1$ 이고,  $3 - \sqrt{3} \leq a = 2 - b \leq 3 - \sqrt{2}$ 이다. 따라서  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때,  $\frac{1}{2} \leq a \leq 3 - \sqrt{2}$ 이다.  $(3 - \sqrt{2}) - 1 > 1 - \frac{1}{2}$ 이므로  $\frac{1}{2} \leq a \leq 3 - \sqrt{2}$ 일 때,  $g(a)$ 의 최댓값은  $g(1) = 1$ , 최솟값은  $g(3 - \sqrt{2}) = (\sqrt{2} - 1)(3 - \sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 5$ 이다.



## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 배점 |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>A\left(2\sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right)</math>: (+20점)</li> <li>▪ <math>B(2\cos\theta, 2\sin\theta)</math>: (+20점)</li> <li>▪ <math>\frac{\pi}{6} \leq \theta &lt; \frac{\pi}{2}</math> 또는 <math>\theta \geq \frac{\pi}{6}</math>: (+40점)</li> </ul>                                                                                    | 80 |
| 3-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ C의 좌표 <math>\left(\cot\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), 1\right)</math>: (+10점)</li> <li>▪ D의 좌표 <math>(\cot\theta, 1)</math>: (+10점)</li> <li>▪ <math>f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1-t}{1+t}</math>: (+20점)</li> <li>▪ <math>f(t)</math>의 최솟값 <math>f(1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2</math>: (+20점)</li> <li>▪ <math>f(t)</math>의 최댓값은 <math>f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3} - 2</math>: (+20점)</li> </ul> | 80 |
| 3-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}</math>인 경우 <math>\sqrt{3} - 1 \leq b \leq \frac{3}{2}</math> 또는 이와 동등한 식을 보이면: (+30점)</li> <li>▪ <math>\frac{\pi}{6} \leq \theta &lt; \frac{\pi}{2}</math>인 경우 <math>\sqrt{2} - 1 \leq b \leq \sqrt{3} - 1</math> 또는 이와 동등한 식을 보이면: (+30점)</li> <li>▪ 최댓값은 1, 최솟값은 <math>4\sqrt{2} - 5</math>: (+20점)</li> </ul>                                                                | 80 |

**B형 · 문제 1**

[문제 1] 최고차항의 계수가 1인 사차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

제시문

[가]  $f(-1) = 2$

[나] 함수  $|f(x)|$ 는  $x = 0$ 과  $x = 1$ 에서만 미분가능하지 않다.

(1-1)  $f'(0)$ 의 값의 범위를 구하시오. (70점)

(1-2)  $f'(0) = -3$ 일 때,  $e^{|f(x)|}$ 은  $x = 0$ 에서 미분가능하지 않음을 보이시오. (80점)

(1-3) 직선  $y = mx + n$ 이 서로 다른 두 점  $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ 에서 곡선  $y = f(x)$ 에 접하는 경우,  $m$ 이 최소일 때  $f'(0)$ 의 값을 구하시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (1-1)

조건 (나)로부터  $f(x) = x(x-1)(x^2+ax+b)$ 으로 쓸 수 있고, 조건 (가)로부터  $a=b$ 를 얻는다. 즉  $f(x) = x(x-1)(x^2+ax+a)$ 이고, 또한 조건 (나)로부터 방정식  $x^2+ax+a=0$ 은 서로 다른 실근을 가지지 않는다. 따라서  $a^2-4a \leq 0$ 이므로  $0 \leq a \leq 4$ 를 얻는다.

$a=0$ 인 경우  $|f(x)|$ 가  $x=0$ 에서 미분가능하므로  $0 < a \leq 4$ 이다.

한편  $f'(0) = -a$ 이므로  $-4 \leq f'(0) < 0$ 이다.

### (1-2)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{|f(x)|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-f(x)} - 1}{x} = \{e^{-f(x)}\}'(0) = -f'(0) = 3$$

이고

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{|f(x)|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{f(x)} - 1}{x} = \{e^{f(x)}\}'(0) = f'(0) = -3$$

이므로  $e^{|f(x)|}$ 는  $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

### (1-3)

조건으로부터  $x(x-1)(x^2+ax+a) = mx+n+(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ 을 얻고 이로부터

$$-2(\alpha+\beta) = a-1, (\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta = 0, m-2(\alpha+\beta)\alpha\beta = -a$$

를 얻는다. 따라서

$$m = 2(\alpha+\beta)\alpha\beta - a = (1-a)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-a}{2}\right)^2 - a = \frac{(a-1)^3}{8} - a$$

를 얻는다.

또한  $\frac{dm}{da} = \frac{3(a-1)^2}{8} - 1 = 0$ 일 때,  $a = 1 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 이고  $0 < a \leq 4$ 이므로  $m$ 의 최솟값은  $a = 1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 일 때이다.

따라서  $f'(0) = -a = -1 - \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 이다.

### (별해)

조건으로부터  $x(x-1)(x^2+ax+a) = mx+n+(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ 을 얻고 이로부터

$$-2(\alpha+\beta) = a-1, (\alpha+\beta)^2 + 2\alpha\beta = 0, m-2(\alpha+\beta)\alpha\beta = -a$$

를 얻는다. 따라서  $\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = 0$ 에서  $\alpha = (-2 \pm \sqrt{3})\beta$ 인데,  $\alpha = (-2 + \sqrt{3})\beta$ 를 가정해도 좋다. (반대의 경우  $\alpha$ 와  $\beta$ 를 바꾸어 생각하면 된다.)

그렇다면  $a = 1 - 2(\alpha+\beta) = 1 - 2(-1 + \sqrt{3})\beta$ 이고, 따라서

$$m = 2\alpha\beta(\alpha+\beta) - a = 2(-2 + \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3})\beta^3 + 2(-1 + \sqrt{3})\beta - 1$$

이다.  $(-1 + \sqrt{3})\beta = \gamma$ 라고 하면  $\gamma^2 = (4 - 2\sqrt{3})\beta^2$ 이므로  $m = -\gamma^3 + 2\gamma - 1$ 이다.

한편  $0 < a \leq 4$ 에서  $-\frac{3}{2} \leq \gamma < \frac{1}{2}$ 이다. 구간  $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 에서 함수  $g(\gamma) = -\gamma^3 + 2\gamma - 1$ 의 증감을 조사하면,  $\gamma = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ 에서 극소,  $\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}$ 에서 극대이다.

그런데  $g\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$  이므로  $\gamma = -\sqrt{\frac{2}{3}}$  일 때  $m$ 은 최솟값을 가진다.

이때  $a = 1 - 2\gamma = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$  이므로  $f'(0) = -a = -1 - \frac{2\sqrt{6}}{3}$  이다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 배점 |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f(x) = x(x-1)(x^2+ax+a)</math> 구하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>0 &lt; a \leq 4</math> 구하면 (+40점) (<math>0 \leq a \leq 4</math>라고 하면 (+30점만))</li> <li>▪ 답 <math>-4 \leq f'(0) &lt; 0</math> 구하면 (+10점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                | 70 |
| 1-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{ f(x) } - 1}{x} = 3</math> 구하면 (+40점)</li> <li>▪ <math>\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{ f(x) } - 1}{x} = -3</math> 구하면 (+40점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 80 |
| 1-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>x(x-1)(x^2+ax+a) = mx+n+(x-\alpha)^2(x-\beta)^2</math> 구하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>m = \frac{(a-1)^3}{8} - a</math> 구하면 (+40점)</li> <li>▪ 답 <math>f'(0) = -1 - \frac{2\sqrt{6}}{3}</math> 구하면 (+30점)</li> </ul> <p>(별해)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>x(x-1)(x^2+ax+a) = mx+n+(x-\alpha)^2(x-\beta)^2</math> 구하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>m = -\gamma^3 + 2\gamma - 1</math> 구하면 (+40점)</li> <li>▪ 답 <math>f'(0) = -1 - \frac{2\sqrt{6}}{3}</math> 구하면 (+30점)</li> </ul> | 80 |

**B형 · 문제 2**

[문제 2] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x) - f(0) = -\{f(x) - f(0)\}$

(나) 방정식  $f(x) = |x|$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

**(2-1)**  $f(0) = c$ 일 때, 정적분  $\int_{-1}^1 f(x)dx$ 의 값을  $c$ 의 식으로 나타내시오. (70점)

**(2-2)**  $f(0) = 0$ 일 때, 방정식  $f(x) = |x|$ 의 0이 아닌 실근을  $k$ 라 하자.  $k$ 의 값의 범위를 구하시오. (80점)

**(2-3)**  $f(0) \neq 0$ 일 때, 방정식  $f(x) = |x|$ 의 두 실근 중 더 큰 것을  $\beta$ 라 하자.

$\int_{-\beta}^{\beta} \{f(x) - |x|\}dx = 0$ 일 때,  $f(x)$ 를 구하시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (2-1)

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면  $f(0) = c$ 이고, 조건 (가)에 의해 모든 실수  $x$ 에 대하여

$$-x^3 + ax^2 - bx = -x^3 - ax^2 - bx$$

가 성립하므로  $a = 0$ 이다. 즉  $f(x) = x^3 + bx + c$ 임을 알 수 있고,  $f(x) - c = x^3 + bx$ 의 그래프는 원점을 중심으로 대칭이다. 그러므로  $f(x)$ 의 그래프는 점  $(0, c)$ 를 중심으로 대칭이다. 따라서  $\int_{-1}^1 f(x)dx = 2c$ 이다.

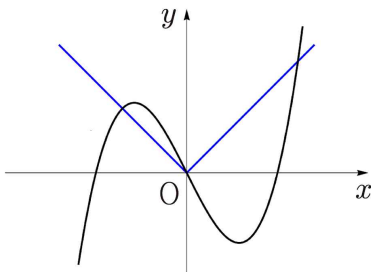
(별해)

위의 풀이에서  $f(x) = x^3 + bx + c$ 이므로 다음을 얻는다.

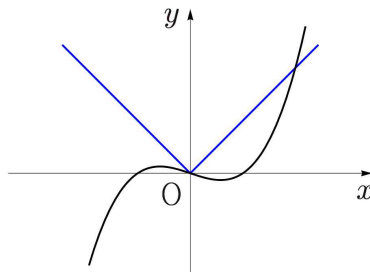
$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 (x^3 + bx + c)dx = \int_{-1}^1 (x^3 + bx)dx + \int_{-1}^1 cdx = 0 + 2c = 2c$$

### (2-2)

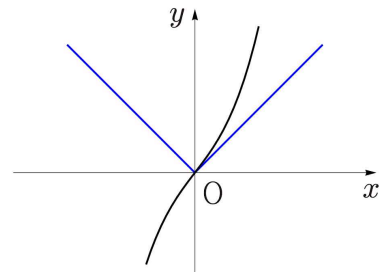
$f(x) = x^3 + bx + c$ 에서  $c = f(0) = 0$ 이므로  $f(x) = x^3 + bx$ 이고, 조건 (나)로부터  $-1 \leq f'(0) < 1$ , 즉  $-1 \leq b < 1$ 이어야 한다. 왜냐하면  $f'(0) < -1$ 이면 방정식  $f(x) = |x|$ 는 3개의 서로 다른 실근을 갖게 되며,  $f'(0) \geq 1$ 이면 단 하나의 실근을 갖게 된다. (아래 그림)



$f'(0) < -1$ 인 경우



$-1 \leq f'(0) < 1$ 인 경우



$f'(0) \geq 1$ 인 경우

그러므로 방정식  $f(x) = |x|$ 의 한 실근은 0이며 나머지 한 실근  $k$ 는 양수이다.

곡선의 식  $y = x^3 + bx$ 와 직선의 식  $y = x (x > 0)$ 을 연립하여 풀면

$$x^3 + (b-1)x = x(x^2 + b-1) = 0$$

에서  $k = \sqrt{1-b}$  ( $-1 \leq b < 1$ )이다. 따라서  $0 < k \leq \sqrt{2}$ 이다.

(별해)

$f(x) = x^3 + bx + c$ 에서  $c = f(0) = 0$ 이므로  $f(x) = x^3 + bx$ 이고, 방정식  $f(x) = |x|$ 를 풀면

$$x > 0 \text{ 일 때: 방정식 } x^3 + bx = x \text{가 실근을 가지면 } b < 1 \text{이고 } x = \sqrt{1-b}$$

$$x < 0 \text{ 일 때: 방정식 } x^3 + bx = -x \text{가 실근을 가지면 } b < -1 \text{이고 } x = -\sqrt{-1-b}$$

이다. 그러므로

(i)  $b < -1$ 이면 방정식  $f(x) = |x|$ 의 근은  $x = 0, x = \sqrt{1-b}, x = -\sqrt{-1-b}$ 이므로 서로 다른 실근의 개수가 3이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

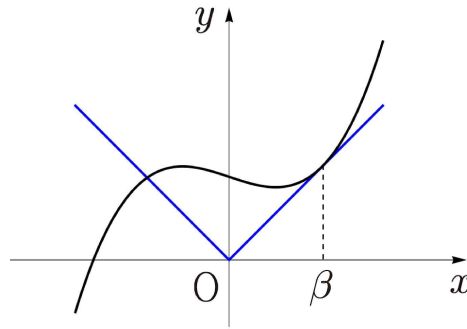
(ii)  $-1 \leq b < 1$ 이면 방정식  $f(x) = |x|$ 의 서로 다른 실근은  $x = 0, x = \sqrt{1-b}$ 이다.

(iii)  $b \geq 1$ 이면 방정식  $f(x) = |x|$ 의 실근은  $x = 0$ 뿐이므로 서로 다른 실근의 개수가 1이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 (ii)로부터  $-1 \leq b < 1$ 이고  $k = \sqrt{1-b}$ 이므로  $k$ 의 범위는  $0 < k \leq \sqrt{2}$ 이다.

### (2-3)

(i)  $f(0) > 0$ 인 경우: 삼차함수의 그래프의 개형을 생각하면 조건 (나)로부터 방정식  $f(x) = |x|$ 의 서로 다른 두 실근 중 하나는 음수이고, 나머지 하나는 양수이다. 그러므로  $\beta > 0$ 이고  $x = \beta$ 에서 곡선  $y = f(x)$ 에 직선  $y = x$ 가 접해야 한다. (아래 그림)



이 경우  $f(\beta) = \beta$ 이고  $f'(\beta) = 1$ 이므로 다음 식을 얻는다.

$$\beta^3 + b\beta + c = \beta \quad \dots\dots (1)$$

$$3\beta^2 + b = 1 \quad \dots\dots (2)$$

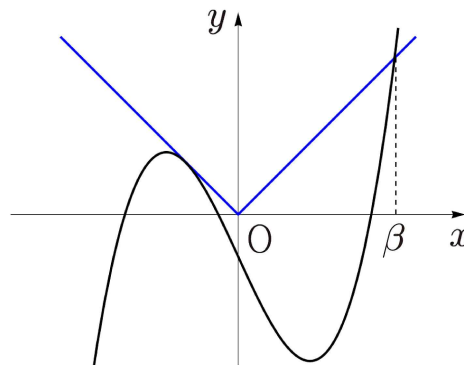
그러므로 식 (2)로부터  $b = 1 - 3\beta^2$ 이고 식 (1)로부터  $c = \beta - \beta^3 - b\beta = 2\beta^3$ 이다.

따라서  $f(x) = x^3 + (1 - 3\beta^2)x + 2\beta^3$ 이고, 그래프의 대칭성을 이용하면

$$\begin{aligned} \int_{-\beta}^{\beta} \{f(x) - |x|\} dx &= \int_{-\beta}^{\beta} f(x) dx - \int_{-\beta}^{\beta} |x| dx = 2\beta f(0) - \beta^2 \\ &= 4\beta^4 - \beta^2 = \beta^2(4\beta^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

이고  $\beta > 0$ 이므로  $\beta = \frac{1}{2}$ 이다. 따라서  $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ 이다.

(ii)  $f(0) < 0$ 인 경우: 삼차함수의 그래프의 개형을 생각하면 방정식  $f(x) = |x|$ 의 서로 다른 두 실근 중 하나는 음수이고, 나머지 하나는 양수이다. 이 중 음의 실근에서 직선  $y = -x$ 가 곡선  $y = f(x)$ 에 접해야 한다. (아래 그림)



이 경우 그래프에 의해  $x \leq \beta$ 일 때,  $f(x) \leq |x|$ 이므로  $\int_{-\beta}^{\beta} \{f(x) - |x|\} dx < 0$ 이고  $f(x)$ 는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii)의 결과를 종합하면  $\int_{-\beta}^{\beta} \{f(x) - |x|\} dx = 0$ 일 때  $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ 이다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 배점 |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>a = 0</math> 또는 “<math>f(x)</math>의 그래프가 점 <math>(0, c)</math>를 중심으로 대칭” (+30점)</li> <li>• <math>\int_{-1}^1 f(x)dx = 2c</math>를 구하면 (+40점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                             | 70 |
| 2-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>-1 \leq f'(0) &lt; 1</math>(또는 <math>-1 \leq b &lt; 1</math>)임을 보이면 (+40점)<br/>(<math>-1 \leq f'(0) \leq 1</math>(또는 <math>-1 \leq b \leq 1</math>)이면 (+30점만))</li> <li>• <math>k = \sqrt{1-b}</math>임을 보이면 (+20점)</li> <li>• <math>k</math>의 범위 <math>0 &lt; k \leq \sqrt{2}</math>를 구하면 (+20점)<br/>(<math>0 \leq k \leq \sqrt{2}</math>라고 하면 (+10점만))</li> </ul> | 80 |
| 2-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f(0) &gt; 0</math>인 경우:<br/><math>f(x) = x^3 + (1 - 3\beta^2)x + 2\beta^3</math>을 구하면 (+20점)<br/><math>\beta = \frac{1}{2}</math>을 구하면 (+30점)</li> <li>• <math>f(0) &lt; 0</math>인 경우:<br/><math>\int_{-\beta}^{\beta} \{f(x) -  x \}dx \neq 0</math>임을 설명하면 (+20점)</li> <li>• <math>f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}</math>을 구하면 (+10점)</li> </ul>         | 80 |

**B형 · 문제 3**

[문제 3] 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) > 0$ 이고  $f(x) = f(-x)$

(나)  $\int_{-1}^1 f(x)dx = C$

$F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ 라 정의하고 상수  $a > 0$ 에 대하여  $g(x) = f(ax)F(x)$ 라 정의하자.

**(3-1)**  $F(x) + F(-x)$ 를  $C$ 의 식으로 나타내시오. (80점)

**(3-2)**  $f(x) = e^{-x^2}$ 일 때, 함수  $g(x)$ 가 구간  $(-1, 1)$ 에서 증가함수이기 위한 양수  $a$ 의 최댓값을  $C$ 의 식으로 나타내시오. (80점)

**(3-3)**  $F(a) = \frac{2}{3}C$ 일 때,  $a \int_{-1}^1 g(x)dx$ 의 값을  $C$ 의 식으로 나타내시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (3-1)

$$F(-x) = \int_{-1}^{-x} f(t)dt = \int_{-1}^{-x} f(-t)dt = \int_x^1 f(t)dt \text{이므로}$$

$$F(x) + F(-x) = \int_{-1}^x f(t)dt + \int_x^1 f(t)dt = \int_{-1}^1 f(t)dt = C \text{이다.}$$

### (3-2)

함수  $g(x)$ 의 증감을 살펴보기 위하여 도함수  $g'(x)$ 의 부호 변화를 살펴보면,

$$g'(x) = af'(ax)F(x) + f(ax)f(x) = -2a^2xe^{-a^2x^2}F(x) + e^{-(a^2+1)x^2} = e^{-a^2x^2}\{e^{-x^2} - 2a^2xF(x)\}$$

이다. 따라서  $g'(x)$ 의 부호는 함수  $h(x) = e^{-x^2} - 2a^2xF(x)$ 의 부호와 같다.

만일  $-1 < x \leq 0$ 이면  $e^{-x^2} - 2a^2xF(x) > 0$ 이므로  $g'(x) > 0$ 이다. 한편

$$h'(x) = -2xe^{-x^2} - 2a^2F(x) - 2a^2xe^{-x^2}$$

은  $x > 0$ 일 때 항상 음수이므로 함수  $h(x)$ 는 구간  $(0, \infty)$ 에서 감소함수이다.

만일  $h(1) \geq 0$ 이라면 구간  $(0, 1)$ 에서  $h(x) > 0$ 이므로  $g'(x) > 0$ 이다.

그리고  $h(1) < 0$ 이면 함수  $h(x)$ 의 값이 음수인 구간이 존재하므로, 함수  $g(x)$ 가 감소함수인 구간이 구간  $(-1, 1)$ 에 존재한다.

이를 종합하면 함수  $g(x)$ 가 구간  $(-1, 1)$ 에서 증가함수일 필요충분조건은  $h(1) \geq 0$ 이다.

즉 함수  $g(x)$ 가 구간  $(-1, 1)$ 에서 증가함수이기 위한 필요충분조건은

$$e^{-1} \geq 2a^2F(1) = 2a^2C$$

이므로,  $a$ 의 최댓값은  $\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2C}} = \frac{1}{\sqrt{2eC}}$ 이다.

### (3-3)

조건 (가) 및 (3-1)에 의하여

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(ax)F(x)dx &= \int_{-1}^1 f(ax)\{C - F(-x)\}dx = C \int_{-1}^1 f(ax)dx - \int_{-1}^1 f(ax)F(-x)dx \\ &= C \int_{-1}^1 f(ax)dx - \int_{-1}^1 f(-ax)F(x)dx = C \int_{-1}^1 f(ax)dx - \int_{-1}^1 f(ax)F(x)dx \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \int_{-1}^1 f(ax)F(x)dx = \frac{C}{2} \int_{-1}^1 f(ax)dx = \frac{C}{2a} \int_{-a}^a f(x)dx = \frac{C}{a} \int_0^a f(x)dx \text{이다.}$$

$$\text{한편 대칭성에 의해 } \int_{-1}^0 f(x)dx = \frac{C}{2} \text{이고}$$

$$\int_0^a f(x)dx = F(a) - \int_{-1}^0 f(x)dx = \frac{2}{3}C - \frac{C}{2} = \frac{C}{6}$$

$$\text{이므로 } \int_{-1}^1 f(ax)F(x)dx = \frac{C^2}{6a} \text{이다. 따라서 } a \int_{-1}^1 g(x)dx = \frac{C^2}{6} \text{이다.}$$

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 배점 |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>F(-x) = \int_x^1 f(t)dt</math>임을 구하면 (+30점)</li> <li>• <math>F(x) + F(-x) = C</math>임을 구하면 (+50점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                    | 80 |
| 3-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>g'(x) = e^{-a^2x^2} \{e^{-x^2} - 2a^2xF(x)\}</math>임을 구하면 (+20점)</li> <li>• <math>x \leq 0</math>일 때, <math>g'(x) &gt; 0</math>를 보이면 (+20점)</li> <li>• <math>x &gt; 0</math>일 때, <math>g'(x) &gt; 0</math>이기 위한 필요충분조건이 <math>e^{-1} \geq 2a^2F(1)</math>임을 설명하면 (+30점)</li> <li>• <math>a</math>의 최댓값 <math>\frac{1}{\sqrt{2eC}}</math>을 구하면 (+10점)</li> </ul> | 80 |
| 3-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\int_{-1}^1 f(ax)F(x)dx = \frac{C}{2} \int_{-1}^1 f(ax)dx</math> 또는 <math>\int_{-1}^1 f(ax)F(x)dx = \frac{C}{a} \int_0^a f(x)dx</math>임을 보이면 (+40점)</li> <li>• <math>\int_0^a f(x)dx = \frac{C}{6}</math>임을 구하면 (+30점)</li> <li>• <math>a \int_{-1}^1 g(x)dx = \frac{C^2}{6}</math>임을 구하면 (+10점)</li> </ul>                                                     | 80 |

# 2024학년도 자연계열 (A형·B형)

## A형 · 문제 1

[문제 1] 실수 전체의 집합에서 다음과 같이 정의되는 함수  $f(x)$ 에 대하여 아래 물음에 각각 답하시오. (단,  $n$ 은 자연수이다.)

$$f(x) = \begin{cases} -\int_0^x \frac{(t+3)(t+1)}{(n+3)(n+1)} dt & (x < 0) \\ \int_0^x \left\{ \frac{t^3}{n^3} - \frac{(t+3)(t+1)}{(n+3)(n+1)} \right\} dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

(1-1)  $x < 0$ 일 때  $f(x)$ 의 극솟값을 구하시오. (70점)

(1-2) 함수  $f(x)$ 의 최솟값을 구하시오. (80점)

(1-3) 곡선  $y = f(x)$  위의 점 중에서 접선의 기울기가 0인 점을 꼭짓점으로 갖는 삼각형의 내각 중에서 가장 큰 각의 크기를  $\theta_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \theta_n$ 을 구하시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (1-1)

$x < 0$ 일 때  $f'(x) = -\frac{(x+3)(x+1)}{(n+3)(n+1)}$ 이므로 다음과 같은 증감표를 얻는다.

|         |            |    |            |    |            |   |
|---------|------------|----|------------|----|------------|---|
| $x$     | ...        | -3 | ...        | -1 | ...        | 0 |
| $f'(x)$ | -          | 0  | +          | 0  | -          |   |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 극소 | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ | 0 |

그러므로  $f(x)$ 는  $x = -3$ 에서 다음과 같은 극솟값을 가진다.

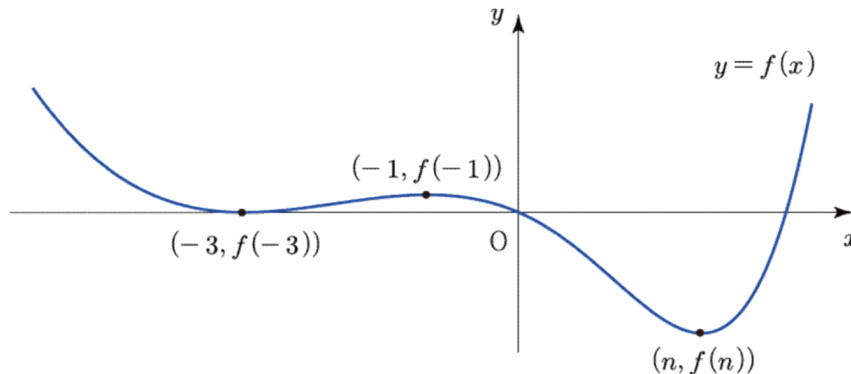
$$f(-3) = -\int_0^{-3} \frac{(t+3)(t+1)}{(n+3)(n+1)} dt = -\frac{1}{(n+3)(n+1)} \left[ \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 3t \right]_0^{-3} = 0$$

### (1-2)

$x < 0$ 에서  $f(x)$ 는 극솟값  $f(-3) = 0$ 과 극댓값  $f(-1)$ 을 가지며  $f(0) = 0$ 이므로 그래프의 개형을 생각하면  $x \leq 0$ 일 때  $f(x) \geq 0$ 이다. 한편  $x > 0$ 에서는

$$f'(x) = \frac{x^3}{n^3} - \frac{(x+3)(x+1)}{(n+3)(n+1)} = \frac{(x-n)\{(n^2+4n+3)x^2 + (4n^2+3n)x + 3n^2\}}{n^3(n+3)(n+1)}$$

이고, 자연수  $n$ 과 양수  $x$ 에 대하여  $\frac{(n^2+4n+3)x^2 + (4n^2+3n)x + 3n^2}{n^3(n+3)(n+1)} > 0$ 인 것이 자명하므로  $x > 0$ 에서  $f'(x) = 0$ 의 해는  $x = n$ 이 유일하다. 또한  $0 < x < n$ 일 때  $f'(x) < 0$ 이므로  $f(x)$ 는 감소하고,  $x > n$ 일 때  $f'(x) > 0$ 이므로  $f(x)$ 는 증가한다. 그러므로  $f(x)$ 는  $x = n$ 에서 극솟값을 가진다. 따라서 실수 전체의 영역에서의 그래프의 개형을 생각하면 다음과 같다.



그러므로  $f(x)$ 의 최솟값은  $f(n) = \int_0^n \left\{ \frac{t^3}{n^3} - \frac{(t+3)(t+1)}{(n+3)(n+1)} \right\} dt = -\frac{n(n+9)}{12(n+1)}$ 이다.

### (1-3)

곡선  $y = f(x)$  위의 점 중에서 접선의 기울기가 0인 점은 방정식  $f'(x) = 0$ 을 풀면 얻을 수 있다. (1-1)의 풀이에서  $x < 0$ 일 때 방정식  $f'(x) = 0$ 을 풀면  $x = -3$  또는  $x = -1$ 이다.

$$f(-1) = -\int_0^{-1} \frac{(t+3)(t+1)}{(n+3)(n+1)} dt = -\frac{1}{(n+3)(n+1)} \left[ \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 3t \right]_0^{-1} = \frac{4}{3(n+3)(n+1)}$$

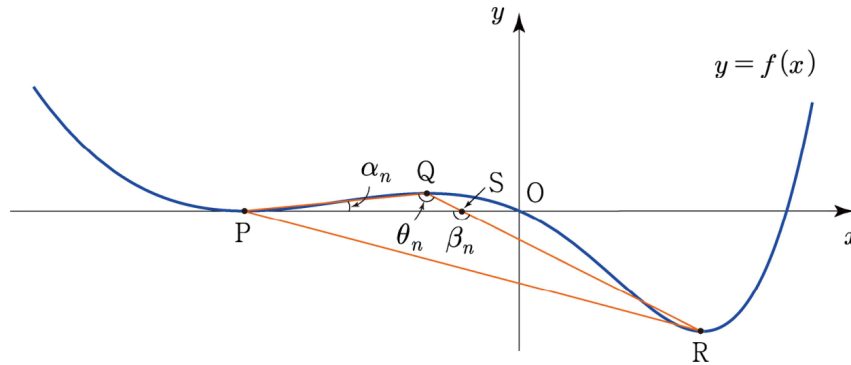
이다. (1-2)의 풀이에서  $x > 0$ 에서 방정식  $f'(x) = 0$ 을 풀면  $x = n$ 이다. 한편

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{3}{(n+3)(n+1)} \neq 0$$

이므로 접선의 기울기가 0인 세 점은 다음과 같다.

$$P(-3, 0), \quad Q(-1, f(-1)), \quad R(n, f(n))$$

또한 두 점 Q와 R을 지나는 직선이  $x$ 축과 만나는 점을 S라 두고  $\alpha_n = \angle QPS$ ,  $\beta_n = \angle PSR$ 이라 하자. (아래 그림 참조)



$$\begin{aligned} \text{이때 } \tan \alpha_n &= \frac{2}{3(n+1)(n+3)} \text{이고 } \tan \beta_n = \frac{f(n) - f(-1)}{n+1} = -\frac{n(n+3)(n+9) + 16}{12(n+3)(n+1)^2} \text{이므로} \\ \tan(\angle PQR) &= \tan(\beta_n - \alpha_n) = \frac{\tan \beta_n - \tan \alpha_n}{1 + \tan \beta_n \tan \alpha_n} \\ &= \frac{-\frac{n(n+3)(n+9) + 16}{12(n+3)(n+1)^2} - \frac{2}{3(n+1)(n+3)}}{1 - \frac{n(n+3)(n+9) + 16}{12(n+3)(n+1)^2} \times \frac{2}{3(n+1)(n+3)}} \\ &< 0 \end{aligned}$$

이다. 따라서  $\angle PQR$ 이 둔각이므로  $\theta_n = \angle PQR$ 이다. 그러므로 다음을 얻는다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan(\angle PQR) = -\frac{1}{12}$$

(참고)  $f(-1) = \frac{4}{3(n+3)(n+1)}$ ,  $f(n) = -\frac{n(n+9)}{12(n+1)}$ 이고

$\overline{PQ}^2 = 4 + \{f(-1)\}^2$ ,  $\overline{QR}^2 = (n+1)^2 + \{f(-1) - f(n)\}^2$ 이다. 따라서  $\overline{PQ} < \overline{QR}$ 이다.

또한  $\overline{PR}^2 = (n+3)^2 + \{f(n)\}^2$ 이므로

$$\overline{PR}^2 - \overline{QR}^2 = 4n + 8 + 2f(-1)f(n) - \{f(-1)\}^2 = 4n + 8 - \frac{2(n^3 + 12n^2 + 27n + 8)}{9(n^4 + 8n^3 + 22n^2 + 24n + 9)}$$

이다. 그런데  $\frac{n^3 + 12n^2 + 27n + 8}{n^4 + 8n^3 + 22n^2 + 24n + 9} < 1$ 이므로  $\overline{PR} > \overline{QR}$ 이다. 따라서 삼각형 PQR에서 가장 길이가 긴 변은  $\overline{PR}$ 이고,  $\theta_n = \angle PQR$ 이다.

(별해) 곡선  $y = f(x)$  위의 점 중에서 접선의 기울기가 0인 점은 방정식  $f'(x) = 0$ 을 풀면 얻을 수 있다. (1-1)의 풀이에서  $x < 0$ 일 때 방정식  $f'(x) = 0$ 을 풀면  $x = -3$  또는  $x = -1$ 이다.

$$f(-1) = -\int_0^{-1} \frac{(t+3)(t+1)}{(n+3)(n+1)} dt = -\frac{1}{(n+3)(n+1)} \left[ \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 3t \right]_0^{-1} = \frac{4}{3(n+3)(n+1)}$$

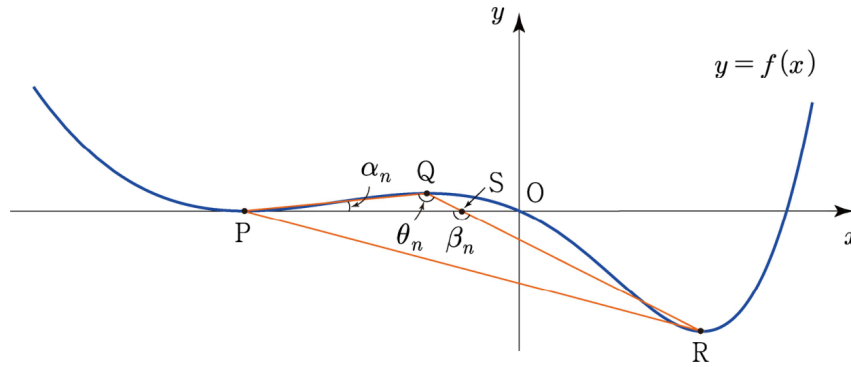
이다. (1-2)의 풀이에서  $x > 0$ 에서 방정식  $f'(x) = 0$ 을 풀면  $x = n$ 이다. 한편

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{3}{(n+3)(n+1)} \neq 0$$

이므로 접선의 기울기가 0인 세 점은 다음과 같다.

$$P(-3, 0), \quad Q(-1, f(-1)), \quad R(n, f(n))$$

또한 두 점 Q와 R을 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 S라 두고  $\alpha_n = \angle QPS$ ,  $\beta_n = \angle PSR$ 이라 하자. (아래 그림 참조)



이때

$$0 < \tan \alpha_n = \frac{2}{3(n+1)(n+3)} < 1$$

이므로  $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{4}$ 이고,

$$-1 < \tan \beta_n = -\frac{n^2 + 11n + 16}{12n^2 + 48n + 36} < 0$$

이므로  $\frac{3\pi}{4} < \beta_n < \pi$ 이다. 그러므로  $\frac{\pi}{2} < \angle PQR = \beta_n - \alpha_n < \pi$ 이다. 따라서  $\angle PQR$ 이 둔각이므로  $\theta_n = \angle PQR$ 이다.

$$\text{또한 } \lim_{n \rightarrow \infty} \tan \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{n^2 + 11n + 16}{12n^2 + 48n + 36} \right) = -\frac{1}{12} \text{이고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3(n+1)(n+3)} = 0 \text{이다. 따라서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan(\angle PQR) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan(\beta_n - \alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan \beta_n - \tan \alpha_n}{1 + \tan \beta_n \tan \alpha_n} = -\frac{1}{12}$$

이다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 배점 |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f'(x) = -\frac{(x+3)(x+1)}{(n+3)(n+1)}</math>를 구하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>x = -3</math>에서만 극솟값을 가짐을 보이면 (+20점)</li> <li>▪ 극솟값 <math>f(-3) = 0</math>을 구하면 (+30점)</li> </ul>                                                                                              | 70 |
| 1-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f'(x) = \frac{x^3}{n^3} - \frac{(x+3)(x+1)}{(n+3)(n+1)}</math>을 구하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>x = n</math>에서 최솟값을 가짐을 보이면 (+30점)</li> <li>▪ 최솟값 <math>f(n) = -\frac{n(n+9)}{12(n+1)} \left( = -\frac{n^3 + 12n^2 + 27n}{12(n+1)(n+3)} \right)</math>을 구하면 (+30점)</li> </ul> | 80 |
| 1-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f(-1) = \frac{4}{3(n+3)(n+1)}</math>을 구하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>\theta_n = \angle PQR</math>임을 보이면 (+10점)</li> <li>▪ <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \theta_n = -\frac{1}{12}</math>을 구하면 (+50점)</li> </ul>                                                      | 80 |

**A형 · 문제 2**

[문제 2] 최고차항의 계수가 1인 사차함수  $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 곡선  $y = f(x)$ 는 서로 다른 두 점  $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ 에서 직선  $y = 2x + 1$ 에 접한다. (단,  $a < b$ )
- (나) 두 점 A와 B 사이의 거리는  $\sqrt{5}$ 이다.
- (다)  $f'(c) = 2$ 를 만족시키는  $c$  ( $a < c < b$ )에 대하여,  $a + b + c = \frac{3}{2}$ 이다.

**(2-1)**  $c$ 의 값을 구하시오. (70점)

**(2-2)**  $a < x < c$ 에서  $f(x)$ 의 역함수가 존재함을 보이고,  $f(a) < x < f(c)$ 인  $x$ 에 대하여  $(f^{-1})'(x)$ 의 최솟값을 구하시오. (80점)

**(2-3)** 곡선  $y = f(x)$  위의 두 변곡점  $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ 를 지나는 직선의 방정식을  $y = L(x)$ 라 하고,  $y = f(x)$ 와  $y = L(x)$ 의 교점의  $x$ 좌표의 최댓값을  $k$ 라 하자. 이때, 점  $P(k + 2f(k), 0)$ 과 곡선  $y = \frac{1}{2}\{f(x) + L(x) + |f(x) - L(x)|\}$  위의 점 Q에 대하여, 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 점 Q의  $x$ 좌표를 구하시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (2-1)

조건 (가)로부터  $f(x) = 2x + 1 + (x - a)^2(x - b)^2$ 으로 쓸 수 있다. 이로부터

$$2 = f'(c) = 2 + 2(c - a)(c - b)(2c - a - b)$$

를 얻고,  $c = \frac{a+b}{2}$ 가 된다. 조건 (나)로부터

$$5 = (b - a)^2 + \{f(b) - f(a)\}^2 = (b - a)^2 + \{2(b - a)\}^2 = 5(b - a)^2$$

을 얻는다. 따라서  $b = a + 1$ 이다. 또한 조건 (다)로부터

$$\frac{3}{2} = a + b + c = a + a + 1 + \frac{a + a + 1}{2} = 3a + \frac{3}{2}$$

이므로  $a = 0, b = 1$ 이고,  $c = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$ 이다.

### (2-2)

$f(x) = x^2(x - 1)^2 + 2x + 1, f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x + 2, f''(x) = 2(6x^2 - 6x + 1)$ 이다.

따라서  $0(=a) < x < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ 일 때  $f''(x) > 0$ 이므로  $f'(x)$ 는 증가하고,

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} < x < \frac{1}{2}(=c)$ 일 때  $f''(x) < 0$ 이므로  $f'(x)$ 는 감소한다. 또한

$f'(0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ 이므로  $a < x < c$ 일 때  $f'(x) > 0$ 이다. 그러므로  $f(x)$ 는  $a < x < c$ 일 때 증가함수가 되어 역함수를 가진다.

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ 로부터  $f(a) < x < f(c)$ 인  $x$ 에 대하여  $(f^{-1})'(x)$ 의 최솟값은  $0(=a) < t < \frac{1}{2}(=c)$ 에서  $f'(t)$ 가 최대일 때이다.  $f'(t)$ 의 최댓값은  $f''(t) = 0$ 을 만족시키는  $t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ 일 때 생긴다. 따라서  $f'(t)$ 의 최댓값은  $f'\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{18 + \sqrt{3}}{9}$ 이고, 답은  $\frac{9}{18 + \sqrt{3}} = \frac{3}{107}(18 - \sqrt{3})$ 이다.

### (2-3)

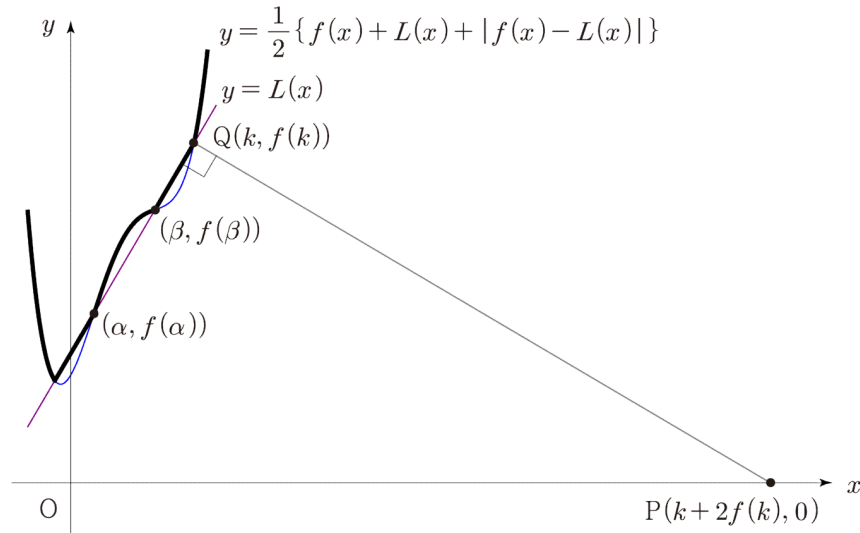
방정식  $f''(x) = 2(6x^2 - 6x + 1) = 0$ 의 두 근이  $\alpha, \beta$ 이므로  $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = \frac{1}{6}$ 이다. 그런데  $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ 이므로, 직선  $y = L(x)$ 의 기울기는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} &= \frac{\beta^4 - \alpha^4 - 2(\beta^3 - \alpha^3) + (\beta^2 - \alpha^2) + 2(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} \\ &= (\beta + \alpha)(\beta^2 + \alpha^2) - 2(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) + \beta + \alpha + 2 \\ &= -(\alpha + \beta)^2 + \alpha + \beta + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

또한 점  $(k, f(k))$ 와 점  $(k + 2f(k), 0)$ 을 지나는 직선의 기울기는  $-\frac{f(k)}{2f(k)} = -\frac{1}{2}$ 이므로 이 직선은 직선  $y = L(x)$ 와 수직이다. 그런데

$$\frac{1}{2}\{f(x) + L(x) + |f(x) - L(x)|\} = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq L(x) \text{일 때}) \\ L(x) & (L(x) \geq f(x) \text{일 때}) \end{cases}$$

이므로 곡선  $y = \frac{1}{2}\{f(x) + L(x) + |f(x) - L(x)|\}$ 는 아래 그림에서 두껍게 표시된 부분이다. (단,  $\alpha < \beta$ 라 하자.)



그러므로 선분 PQ의 길이가 최소가 되도록 하는 점 Q는  $(k, f(k))$ 이다.

방정식  $f(x) = L(x)$ 로부터

$$x^2(x-1)^2 + 2x + 1 = 2(x-\alpha) + f(\alpha) = 2(x-\alpha) + \alpha^2(\alpha-1)^2 + 2\alpha + 1$$

을 얻고, 이를 정리하면  $x^2(x-1)^2 = \alpha^2(\alpha-1)^2$ 이다. 이제  $\alpha(\alpha-1) = -\alpha\beta = -\frac{1}{6}$ 임을 이용하여 인수분해 하면

$$\{x^2 - x - \alpha(\alpha-1)\}\{x^2 - x + \alpha(\alpha-1)\} = \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\left(x^2 - x - \frac{1}{6}\right) = 0$$

이며, 이 방정식의 근을 모두 구하면  $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{6}$ 이고, 이 중에서 가장 큰 것이  $k$ 이므로  $k = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{6}$ 이다.

**참고:**  $f(x) = x^2(x-1)^2 + 2x + 1$ 이고  $\alpha + \beta = 1$ 이므로 직선  $y = L(x)$ 의 기울기를 다음과 같이 계산할 수도 있다.

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} &= \frac{\beta^2(\beta-1)^2 + 2\beta - \alpha^2(\alpha-1)^2 - 2\alpha}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\{\beta(\beta-1) + \alpha(\alpha-1)\}\{\beta(\beta-1) - \alpha(\alpha-1)\} + 2(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\{\beta(\beta-1) + \alpha(\alpha-1)\}\{\beta^2 - \alpha^2 - (\beta - \alpha)\} + 2(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} \\ &= \{\beta(\beta-1) + \alpha(\alpha-1)\}\{\beta + \alpha - 1\} + 2 \\ &= 0 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

(별해)  $g(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + L(x) + |f(x) - L(x)|\}$ 라 하면

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq L(x) \text{일 때}) \\ L(x) & (L(x) \geq f(x) \text{일 때}) \end{cases}$$

이다. 따라서 점 P와 직선  $y = L(x)$  위의 점 R에 대하여 선분 PR의 길이가 최소가 되도록 하는 점 R의  $x$ 좌표를  $d$ 라고 할 때,  $L(d) \geq f(d)$ 이면 (즉  $g(d) = L(d)$ 이면)  $d$ 가 구하는 점 Q의  $x$ 좌표가 된다.

방정식  $f''(x) = 2(6x^2 - 6x + 1) = 0$ 의 두 근이  $\alpha, \beta$ 이므로  $\alpha < \beta$ 임을 가정하면

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \text{이다. 따라서 } f(x) = 2x + 1 + x^2(x-1)^2 \text{에서}$$

$$f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)^2 = 2 + \frac{1}{36} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(\beta) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right)^2 = 2 + \frac{1}{36} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다. 즉

$$L(x) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) + f(\alpha) = 2\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + 2 + \frac{1}{36} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 2x + 1 + \frac{1}{36}$$

이 된다. 따라서

$$f(x) = L(x) \Leftrightarrow x^2(x-1)^2 = \frac{1}{36} \Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\left(x^2 - x - \frac{1}{6}\right) = 0$$

이므로,  $k$ 는 위의 방정식의 가장 큰 근이 되어  $k = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{6}$ 이다.

이제 선분 PR의 길이가 최소가 되도록 하는 점  $R(d, L(d))$ 를 구해보자. 직선 PR과 직선  $y = L(x)$ 가 수직이어야 하므로 직선 PR의 기울기는  $-\frac{1}{2}$ 이다. 따라서

$$\frac{L(d)}{d - k - 2f(k)} = -\frac{1}{2}$$

를 만족한다. 한편  $f(k) = L(k)$ 이므로 이 방정식을 정리하면

$$d + 2L(d) = k + 2L(k)$$

가 얻어진다. 즉,

$$d + 4d + \frac{37}{18} = k + 4k + \frac{37}{18}$$

이므로  $d = k$ 이다. 이때  $g(d) = L(d)$ 이므로, 구하는 점 Q의  $x$ 좌표는  $k = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{6}$ 이다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 배점 |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f(x) = 2x + 1 + (x - a)^2(x - b)^2</math>: (+20점)</li> <li>▪ <math>c = \frac{a+b}{2}</math>를 구하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>b = a + 1</math>를 구하면 (+20점)</li> <li>▪ 답 <math>c = \frac{1}{2}</math>을 구하면 (+10점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 70 |
| 2-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>0(=a) &lt; x &lt; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}</math>일 때 <math>f''(x) &gt; 0</math>을 보이면 (+10점)</li> <li>▪ <math>\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} &lt; x &lt; \frac{1}{2}(=c)</math>일 때 <math>f''(x) &lt; 0</math>을 보이면 (+10점)</li> <li>▪ <math>f'(0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2</math>이므로 <math>f'(x) &gt; 0</math>이 되어 <math>f(x)</math>는 역함수를 가진다. (+20점)</li> <li>▪ <math>f'(t)</math>의 최댓값은 <math>f''(t) = 0</math>을 만족시키는 <math>t = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}</math>일 때임을 설명하면 (+30점)</li> <li>▪ 답 <math>\frac{9}{18+\sqrt{3}} = \frac{3}{107}(18-\sqrt{3})</math>: (+10점)</li> </ul> | 80 |
| 2-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>L(x)</math>의 기울기 2를 구하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>(k, f(k))</math>와 점 <math>(k + 2f(k), 0)</math>을 지나는 직선의 기울기 <math>-\frac{1}{2}</math>을 구하면 (+20점)</li> <li>▪ 방정식 <math>x^2 - x - \frac{1}{6} = 0</math>을 구하면 (+30점)</li> <li>▪ 답 <math>k = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{6}</math>를 구하면 (+10점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 80 |

## A형 · 문제 3

[문제 3] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x) = \int_0^x te^{-(t-x)^2} dt$ 에 대하여  $\int_0^2 e^{-x^2} dx = A$ 라 할 때, 다음 물음에 각각 답하시오.

(3-1)  $f'(2)$ 를  $A$ 의 식으로 나타내시오. (80점)

(3-2)  $0 < x \leq 2$ 에서 함수  $\frac{f(x)}{x}$ 의 최댓값을  $A$ 의 식으로 나타내시오. (80점)

(3-3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)\}^5 f'(x)}{x^{11}}$ 의 값을 구하시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (3-1)

$u = t - x$ 라 두면  $t = x + u$ 이므로 치환적분법을 이용하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x te^{-(t-x)^2} dt = \int_{-x}^0 (x+u)e^{-u^2} du \\ &= x \int_{-x}^0 e^{-u^2} du - \frac{1}{2} \int_{-x}^0 (-2u)e^{-u^2} du \\ &= x \int_{-x}^0 e^{-u^2} du - \frac{1}{2} [e^{-u^2}]_{-x}^0 \\ &= x \int_0^x e^{-u^2} du - \frac{1}{2} (1 - e^{-x^2}) \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$f'(x) = \int_0^x e^{-u^2} du + xe^{-x^2} + \frac{1}{2}e^{-x^2}(-2x) = \int_0^x e^{-u^2} du$$

이다. 따라서  $f'(2) = A$ 이다.

### (3-2)

두 식

$$\begin{aligned} f(x) &= x \int_0^x e^{-u^2} du - \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2}) \\ f'(x) &= \int_0^x e^{-u^2} du \end{aligned}$$

로부터  $f(x) = xf'(x) - \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})$ 을 얻는다. 따라서  $0 < x \leq 2$ 일 때

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\} = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{1}{2x^2}(1 - e^{-x^2}) > 0$$

이므로  $\frac{f(x)}{x}$ 는 이 구간에서 증가한다. 따라서  $0 < x \leq 2$ 일 때  $\frac{f(x)}{x}$ 의 최댓값은  $\frac{f(2)}{2}$ 이고,

식  $f(x) = x \int_0^x e^{-u^2} du - \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})$ 으로부터  $\frac{f(2)}{2} = A - \frac{1}{4}(1 - e^{-4})$ 이다.

### (3-3)

$f(x) = x \int_0^x e^{-u^2} du - \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})$ 이고,  $f'(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f'(x)}{x} - \frac{\frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})}{x^2} \right\}$$

이다.  $f'(0) = 0$ ,  $f''(x) = e^{-x^2}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = f''(0) = 1$$

이고

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{\frac{1}{2}(e^t - 1)}{t} = \frac{1}{2} \quad (\Leftarrow t = -x^2)$$

이다. 따라서  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)\}^5 f'(x)}{x^{11}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{x^2} \right\}^5 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \frac{1}{32}$ 이다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 배점 |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f(x) = x \int_0^x e^{-u^2} du - \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})</math> 또는<br/> <math>f(x) = x \int_{-x}^0 e^{-u^2} du + \int_{-x}^0 ue^{-u^2} du</math> 또는<br/> <math>f(x) = x \int_{-x}^0 e^{-u^2} du - \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})</math>를 구하면 (+40점)</li> <li>▪ <math>f'(x) = \int_0^x e^{-u^2} du \left( = \int_{-x}^0 e^{-u^2} du \right)</math>를 구하면 (+30점)</li> <li>▪ 답 <math>f'(2) = A</math>를 구하면 (+10점)</li> </ul>                                                           | 80 |
| 3-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\frac{d}{dx} \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\} = \frac{1}{2x^2}(1 - e^{-x^2})</math>을 구하면 (+40점)</li> <li>▪ <math>\frac{d}{dx} \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\} &gt; 0</math>을 보이면 (+10점)</li> <li>▪ 답 <math>A - \frac{1}{4}(1 - e^{-4})</math>을 구하면 (+30점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                            | 80 |
| 3-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}</math>을 구하면 (+30점)</li> <li>▪ <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 1</math>을 구하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)\}^5 f'(x)}{x^{11}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{x^2} \right\}^5 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x}</math>: (+20점)</li> <li>▪ <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)\}^5 f'(x)}{x^{11}} = \frac{1}{32}</math>을 구하면 (+20점)</li> </ul> | 80 |

**B형 · 문제 1**

[문제 1] 모든 항이 자연수인 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $a_n < 10$ 이면  $a_{n+1} = 2a_n$

(나)  $a_n \geq 10$ 이고  $a_n$ 이 짝수이면  $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + n + 1$

(다)  $a_n \geq 10$ 이고  $a_n$ 이 홀수이면  $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{2}$

(1-1)  $a_2$ 가 홀수인 경우  $a_2$ 의 최솟값을 구하고, 이때 가능한  $a_1$ 의 값을 모두 구하시오. (70점)

(1-2)  $a_2$ 와  $a_3$ 이 모두 10 이하의 짝수인 경우  $a_1$ 의 최댓값을 구하시오. (80점)

(1-3)  $a_6 = 12$ 인 경우  $a_4$ 의 최솟값과 최댓값을 각각 구하시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (1-1)

$a_1 < 10$ 이면 조건 (가)에 의해  $a_2$ 가 짝수이므로 주어진 조건에 위배되어  $a_1 \geq 10$ 임을 알 수 있다.  $a_1 = 10$ 일 때는 조건 (나)에 의해  $a_2 = 7$ 이고,  $a_1$ 이 12 이상의 짝수이면  $a_2$ 는 7보다 크다. 따라서 조건 (나)에 의해 만들어지는  $a_2$ 의 최솟값은 7이다. 또한  $a_1 = 11$ 일 때는  $a_2 = 6$ 인데 이 수는 홀수가 아니므로 조건에 맞지 않는다.  $a_1 = 13$ 일 때는  $a_2 = 7$ 이고,  $a_1$ 이 15 이상의 홀수이면  $a_2$ 는 7보다 크다. 그러므로 조건 (다)에 의해 만들어지는  $a_2$ 의 최솟값은 7이다. 결국  $a_2$ 의 최솟값은 7이고, 이때  $a_1 = 10$  또는  $a_1 = 13$ 이다.

### (별해)

(i)  $a_1 < 10$ 인 경우: 조건 (가)에 의해  $a_2$ 가 짝수이므로 주어진 조건에 위배되어  $a_1 \geq 10$ 임을 알 수 있다.

(ii)  $a_1$ 이 10 이상의 짝수인 경우:  $a_2 = \frac{a_1}{2} + 2$ 이고  $a_2$ 가 홀수이므로 다음과 같은 표를 얻는다.

|       |    |    |    |     |
|-------|----|----|----|-----|
| $a_1$ | 10 | 14 | 18 | ... |
| $a_2$ | 7  | 9  | 11 | ... |

(iii)  $a_1$ 이 10 이상의 홀수인 경우:  $a_2 = \frac{a_1 + 1}{2}$ 이고  $a_2$ 가 홀수이므로 다음과 같은 표를 얻는다.

|       |    |    |    |     |
|-------|----|----|----|-----|
| $a_1$ | 13 | 17 | 21 | ... |
| $a_2$ | 7  | 9  | 11 | ... |

따라서  $a_2$ 의 최솟값은 7이고, 이때  $a_1 = 10$  또는  $a_1 = 13$ 이다.

### (1-2)

$a_1 = 19$ 일 때, 조건 (나)와 (다)를 이용하면  $a_2 = 10$ ,  $a_3 = 8$ 이고, 이 경우 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

$a_1 = 20$ 일 때는  $a_2 = 12 > 10$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다. 또한  $a_1$ 이 20보다 큰 짝수인 경우에도 같은 이유로 주어진 조건을 만족시키지 않음을 알 수 있다.

$a_1 = 21$ 일 때는  $a_2 = 11 > 10$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다. 또한  $a_1$ 이 21보다 큰 홀수인 경우에도 같은 이유로 주어진 조건을 만족시키지 않음을 알 수 있다.

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는  $a_1$ 의 최댓값은 19이다.

### (별해)

(i)  $a_2$ 가 10 미만의 짝수일 때: 조건을 따져보면 아래 표를 얻으며  $a_3 \leq 10$ 이어야 하므로 처음 두 줄, 즉  $a_2 = 2$  또는  $a_2 = 4$ 일 때만 문제의 조건을 만족시킨다.

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|-------|-------|-------|
| 1     | 2     | 4     |
| 2     | 4     | 8     |
|       | 6     | 12    |
|       | 8     | 16    |

(ii)  $a_2 = 10$ 일 때: 조건을 따져보면 다음과 같은 표를 얻는다.

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|-------|-------|-------|
| 5     | 10    | 8     |
| 16    | 10    | 8     |
| 19    | 10    | 8     |

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는  $a_1$ 의 최댓값은 19이다.

**참고:** (1-2)에 대한 가능한 모든 경우는 다음과 같이 5가지가 있다.

| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|-------|-------|-------|
| 1     | 2     | 4     |
| 2     | 4     | 8     |
| 5     | 10    | 8     |
| 16    | 10    | 8     |
| 19    | 10    | 8     |

(1-3)

$a_6 = 12$ 일 때  $a_5$ 로 가능한 것은 다음과 같이 3가지 경우가 있다.

(i) 조건 (가)에 의해  $a_5 < 10$ 이고  $12 = a_6 = 2a_5$ 에서  $a_5 = 6$

(ii) 조건 (나)에 의해  $a_5 \geq 10$ 이고  $a_5$ 가 짝수이며  $12 = a_6 = \frac{a_5}{2} + 5 + 1$ 에서  $a_5 = 12$

(iii) 조건 (다)에 의해  $a_5 \geq 10$ 이고  $a_5$ 가 홀수이며  $12 = a_6 = \frac{a_5 + 1}{2}$ 에서  $a_5 = 23$

또한 이와 같은 방식으로 가능한  $a_5, a_4$ 를 모두 찾으면 다음과 같은 표를 완성할 수 있다.

(표에서 왼쪽에 있는 수를 얻기 위해 오른쪽에 있는 수에 적용한 조건이 (가), (나), (다) 중 어느 것인지 함께 표시하였다.)

| $a_6$ | $a_5$  | $a_4$  | $a_3$ 의 예 | $a_2$ 의 예 | $a_1$ 의 예 |
|-------|--------|--------|-----------|-----------|-----------|
| 12    | 6 (가)  | 3 (가)  | 없음        |           |           |
|       |        | 11 (다) |           |           |           |
|       | 12 (나) | 6 (가)  | 11 (다)    | 21 (다)    | 41 (다)    |
|       |        | 14 (나) |           |           |           |
|       |        | 23 (다) |           |           |           |
|       | 23 (다) | 36 (나) |           |           |           |
|       |        | 45 (다) | 89 (다)    | 177 (다)   | 353 (다)   |

표에서  $a_6, a_5, a_4$ 는 가능한 모든 경우를 표시하였으며,  $a_3, a_2, a_1$ 은 가능한 경우 중 하나를 표시하였다. (단,  $a_4$ 가 최소 또는 최대가 아닌 경우는 표시하지 않았다.) 이 표에서

(i) 만일  $a_4 = 3$ 이면, 이 수가 홀수이므로 조건 (가)에 의해 이 수가 만들어질 수는 없고,  $a_3 \geq 10$ 이다. 만일 조건 (나)로부터  $a_4 = 3$ 이 만들어지려면  $\frac{a_3}{2} = -1$ , 즉  $a_3 = -2$ 여야 하는데, 이는  $a_n$ 의 각 항이 자연수라는 조건에 위배된다. ( $a_3 \geq 10$ 인 조건에도 위배된다.) 또한 조건 (다)로부터  $a_4 = 3$ 이 만들어지려면  $a_3 = 5$ 여야 하는데 이는  $a_3 \geq 10$ 인 조건에 위배된다. 따라서  $a_4 = 3$ 일 수 없다.

(ii) 표에서  $a_4 = 6$ 인 경우  $a_3, a_2, a_1$ 로 가능한 여러 경우가 있지만, 예를 들어 조건 (다)에서

$$a_n = 2a_{n+1} - 1$$

임을 이용하여 순차적으로  $a_3, a_2, a_1$ 의 값을 점점 크게 택할 수 있다. (이 경우 표에 나타난 것처럼, 계산되는  $a_3, a_2, a_1$ 의 값은 모두 10 이상의 홀수이다.)

(iii) 표에서  $a_4 = 45$ 인 경우에도 조건 (다)에서

$$a_n = 2a_{n+1} - 1$$

임을 이용하여 순차적으로  $a_3, a_2, a_1$ 의 값을 점점 크게 택할 수 있다. (이 경우 표에 나타난 것처럼, 계산되는  $a_3, a_2, a_1$ 의 값은 모두 10 이상의 홀수이다.)

따라서 (i), (ii), (iii)의 결과를 종합하면  $a_4$ 의 최솟값은 6이고 최댓값은 45이다.

참고: (1-3)에 대한 가능한 모든 경우는 다음과 같이 49가지가 있다.

| $a_6$ | $a_5$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_6$ | $a_5$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 12    | 6     | 11    | 14    | 7     | 10    | 12    | 12    | 23    | 38    | 70    | 136   |
|       |       |       |       |       | 13    |       |       |       |       |       | 139   |
|       |       |       |       | 22    | 40    |       |       |       |       | 75    | 146   |
|       |       |       |       |       | 43    |       |       |       |       |       | 149   |
|       |       |       | 27    | 50    | 53    |       |       |       | 45    | 84    | 164   |
|       |       |       |       |       | 53    |       |       |       |       |       | 167   |
|       | 6     | 11    | 21    | 36    | 68    |       |       |       |       | 89    | 174   |
|       |       |       |       |       | 71    |       |       |       |       |       | 177   |
|       |       |       |       | 41    | 78    |       |       |       |       | 122   | 240   |
|       |       |       |       |       | 81    |       |       |       |       |       | 243   |
|       |       |       | 6     | 16    | 8     |       |       |       | 64    | 127   | 250   |
|       |       |       |       |       | 28    |       |       |       |       |       | 253   |
|       |       |       |       | 21    | 31    |       |       |       |       | 136   | 268   |
|       |       |       |       |       | 38    |       |       |       |       |       | 271   |
|       | 12    | 6     | 11    | 21    | 41    |       |       |       | 71    | 141   | 278   |
|       |       |       |       |       | 22    |       |       |       |       |       | 281   |
|       |       |       |       | 7     | 13    |       |       |       |       | 158   | 312   |
|       |       |       |       |       | 25    |       |       |       |       |       | 315   |
|       |       |       | 14    | 34    | 64    |       |       |       | 82    | 163   | 322   |
|       |       |       |       |       | 67    |       |       |       |       |       | 325   |
|       |       |       |       | 39    | 74    |       |       |       |       | 172   | 340   |
|       |       |       |       |       | 77    |       |       |       |       |       | 343   |
|       |       |       | 27    | 48    | 92    |       |       |       | 89    | 177   | 350   |
|       |       |       |       |       | 95    |       |       |       |       |       | 353   |
|       |       |       | 53    | 102   | 105   |       |       |       |       |       | 353   |
|       |       |       |       |       | 105   |       |       |       |       |       | 353   |

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 배점    |    |     |    |     |       |   |   |    |     |       |    |    |    |     |       |   |   |    |     |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|----|-----|----|-----|-------|---|---|----|-----|-------|----|----|----|-----|-------|---|---|----|-----|----|
| 1-1   | <ul style="list-style-type: none"><li><math>a_1 \geq 10</math>임을 보이면 (+20점)</li><li><math>a_1 = 10</math>일 때 <math>a_2 = 7</math>이고, <math>a_1</math>이 12 이상의 짝수이면 <math>a_2 &gt; 7</math>: (+20점)</li><li><math>a_1 = 13</math>일 때 <math>a_2 = 7</math>이고, <math>a_1</math>이 15 이상의 홀수이면 <math>a_2 &gt; 7</math>: (+20점)</li><li><math>a_2</math>의 최솟값 7을 구하면 (+10점)</li></ul> <p>(별해)</p> <ul style="list-style-type: none"><li><math>a_1 \geq 10</math>임을 보이면 (+20점)</li><li><math>a_1</math>이 10 이상의 짝수인 경우 다음과 같은 표를 얻으면 (+20점)</li></ul> <table><tr><td><math>a_1</math></td><td>10</td><td>14</td><td>18</td><td>...</td></tr><tr><td><math>a_2</math></td><td>7</td><td>9</td><td>11</td><td>...</td></tr></table> <ul style="list-style-type: none"><li><math>a_1</math>이 10 이상의 홀수인 경우 다음과 같은 표를 얻으면 (+20점)</li></ul> <table><tr><td><math>a_1</math></td><td>13</td><td>17</td><td>21</td><td>...</td></tr><tr><td><math>a_2</math></td><td>7</td><td>9</td><td>11</td><td>...</td></tr></table> <ul style="list-style-type: none"><li><math>a_2</math>의 최솟값 7을 구하면 (+10점)</li></ul> | $a_1$ | 10 | 14  | 18 | ... | $a_2$ | 7 | 9 | 11 | ... | $a_1$ | 13 | 17 | 21 | ... | $a_2$ | 7 | 9 | 11 | ... | 70 |
| $a_1$ | 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 14    | 18 | ... |    |     |       |   |   |    |     |       |    |    |    |     |       |   |   |    |     |    |
| $a_2$ | 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 9     | 11 | ... |    |     |       |   |   |    |     |       |    |    |    |     |       |   |   |    |     |    |
| $a_1$ | 13                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 17    | 21 | ... |    |     |       |   |   |    |     |       |    |    |    |     |       |   |   |    |     |    |
| $a_2$ | 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 9     | 11 | ... |    |     |       |   |   |    |     |       |    |    |    |     |       |   |   |    |     |    |
| 1-2   | <ul style="list-style-type: none"><li><math>a_1 = 19</math>일 때 <math>a_2 = 10</math>, <math>a_3 = 8</math>임을 보이면 (+30점)</li><li><math>a_1</math>이 20 이상의 짝수일 때 주어진 조건을 만족시키지 않음을 보이면 (+20점)</li><li><math>a_1</math>이 21 이상의 홀수일 때 주어진 조건을 만족시키지 않음을 보이면 (+20점)</li><li><math>a_1</math>의 최댓값 19를 구하면 (+10점)</li></ul> <p>(별해)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 80    |    |     |    |     |       |   |   |    |     |       |    |    |    |     |       |   |   |    |     |    |

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 배점    |       |       |   |   |   |   |   |   |  |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|---|---|---|---|---|---|--|
|       | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>a_2 &lt; 10</math>일 때: 아래 표의 결과를 찾으면 (+20점) <table border="1"> <thead> <tr> <th><math>a_1</math></th><th><math>a_2</math></th><th><math>a_3</math></th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr> <td>2</td><td>4</td><td>8</td></tr> </tbody> </table> </li> <li><math>a_2 = 10</math>일 때 <math>a_3 = 8</math>, <math>a_1</math>의 값으로 5, 16이 가능함을 보이면 (+20점)</li> <li><math>a_2 = 10</math>일 때 <math>a_3 = 8</math>, <math>a_1</math>의 값으로 19가 가능함을 보이면 (+30점)</li> <li><math>a_1</math>의 최댓값 19를 구하면 (+10점)</li> </ul> | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | 1 | 2 | 4 | 2 | 4 | 8 |  |
| $a_1$ | $a_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $a_3$ |       |       |   |   |   |   |   |   |  |
| 1     | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 4     |       |       |   |   |   |   |   |   |  |
| 2     | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 8     |       |       |   |   |   |   |   |   |  |
| 1-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li><math>a_5</math>로 가능한 값 6, 12, 23을 찾으면 (+30점)</li> <li><math>a_4 = 3</math>일 수 없음을 설명하면 (+10점)</li> <li><math>a_5 = 12</math>일 때 <math>a_4 = 6</math>이 가능함을 보이면 (+10점)</li> <li><math>a_5 = 23</math>일 때 <math>a_4 = 45</math>가 가능함을 보이면 (+10점)</li> <li><math>a_4</math>의 최솟값 6을 구하면 (+10점)</li> <li><math>a_4</math>의 최댓값 45를 구하면 (+10점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                    | 80    |       |       |   |   |   |   |   |   |  |

**B형 · 문제 2**

[문제 2] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f(x) = (1 + |x|^3)^{-2}$ 에 대하여 함수  $g(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \int_x^{x+4} f(t)dt$$

(2-1)  $f'(x) < 0$ 을 만족시키는 실수  $x$ 의 값의 범위를 구하시오. 또한  $f''(x) < 0$ 을 만족시키는 실수  $x$ 의 값의 범위를 구하시오. (70점)

(2-2) 함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리시오. 또한 함수  $g(x)$ 가  $x = a$ 에서 최댓값을 가질 때,  $a$ 의 값을 구하시오. (80점)

(2-3) (2-2)의  $a$ 에 대하여  $\int_0^a t^3 f(t)dt = S$ 라고 할 때,  $g(a) - 4S$ 의 값을 구하시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (2-1)

$$f(x) = \begin{cases} (1+x^3)^{-2} & (x \geq 0) \\ (1-x^3)^{-2} & (x < 0) \end{cases} \text{ 이므로 } f'(x) = \begin{cases} -6x^2(1+x^3)^{-3} & (x > 0) \\ 6x^2(1-x^3)^{-3} & (x < 0) \end{cases} \text{ 이다. 한편}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{(1+x^3)^2} - 1 \right\} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} \left\{ \frac{-2x^3 - x^6}{(1+x^3)^2} \right\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{(1-x^3)^2} - 1 \right\} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} \left\{ \frac{2x^3 - x^6}{(1-x^3)^2} \right\} = 0$$

이므로  $f'(0) = 0$ 이다. 따라서  $f'(x) < 0$ 을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위는  $x > 0$ 이다.

한편  $x > 0$ 이면

$$f''(x) = -12x(1+x^3)^{-3} + 54x^4(1+x^3)^{-4} = 6x(1+x^3)^{-4}(-2+7x^3)$$

이고,  $x < 0$ 이면

$$f''(x) = 12x(1-x^3)^{-3} + 54x^4(1-x^3)^{-4} = 6x(1-x^3)^{-4}(2+7x^3)$$

이며,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left( -\frac{1}{x} \right) \times 6x^2(1+x^3)^{-3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} \times 6x^2(1-x^3)^{-3} = 0$$

이므로  $f''(0) = 0$ 이다. 따라서

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x^3 < \frac{2}{7} \text{ 또는 } -\frac{2}{7} < x^3 < 0$$

이다. 그러므로  $f''(x) < 0$ 을 만족시키는  $x$ 의 값의 범위는  $-\sqrt[3]{\frac{2}{7}} < x < 0$  또는

$0 < x < \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ 이다.

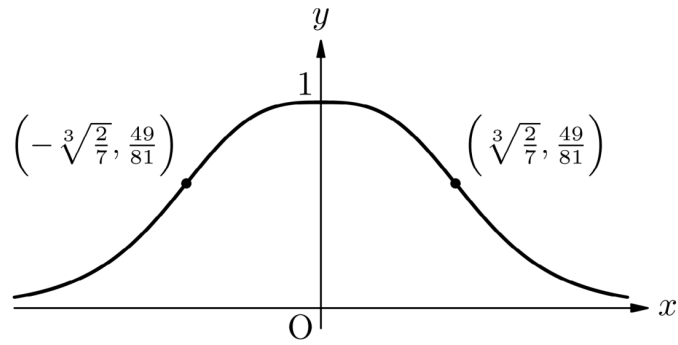
### (2-2)

함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 정의되며,  $f(x) > 0$ 이므로 그래프는  $x$ 축 위쪽에 있다. 또한  $f(x) = f(-x)$ 이므로 그래프는  $y$ 축에 대하여 대칭이고  $f(0) = 1$ 이므로  $y$ 축과의 교점은  $(0, 1)$ 이다. 한편 (2-1)의 결과를 이용하면 다음과 같은 증감표를 얻는다.

|          |     |                          |     |    |     |                         |     |
|----------|-----|--------------------------|-----|----|-----|-------------------------|-----|
| $x$      | ... | $-\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ | ... | 0  | ... | $\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ | ... |
| $f'(x)$  | +   | +                        | +   | 0  | -   | -                       | -   |
| $f''(x)$ | +   | 0                        | -   | 0  | -   | 0                       | +   |
| $f(x)$   | ↗   | 변곡점                      | ↗   | 극대 | ↘   | 변곡점                     | ↘   |

즉, 함수  $f(x)$ 는  $x < 0$ 일 때 증가하고,  $x > 0$ 일 때 감소하며, 구간  $\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)$ 에서 위로 볼록하다. 또한

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로 그래프의 점근선은  $x$ 축이다. 따라서 함수  $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

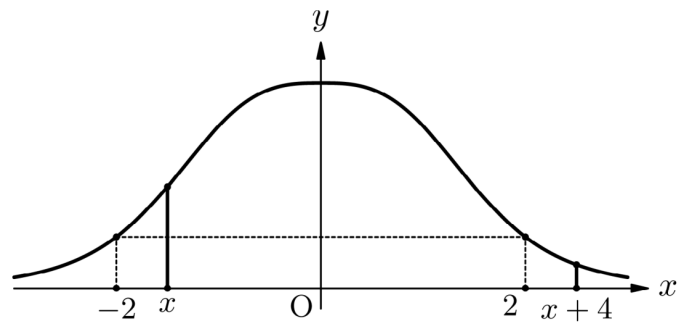
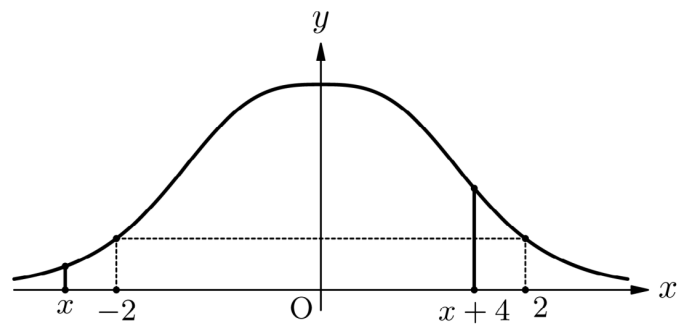


한편 함수  $g(x) = \int_x^{x+4} f(t)dt$ 의 도함수는  $g'(x) = f(x+4) - f(x)$ 이다. 따라서

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x+4) = f(x) \Leftrightarrow 1 + |x|^3 = 1 + |x+4|^3 \Leftrightarrow |x| = |x+4| \Leftrightarrow x = -2$$

에서,  $x < -2$ 이면  $f(x+4) > f(x)$ 이고,  $x > -2$ 이면  $f(x+4) < f(x)$ 이다.

(아래 그림 참고)



그러므로  $g'(x)$ 는  $x < -2$ 일 때 양수이고,  $x > -2$ 일 때 음수이다. 즉  $g(x)$ 는  $x < -2$ 일 때 증가하고  $x > -2$ 일 때 감소하므로, 함수  $g(x)$ 는  $x = -2$ 일 때 최댓값을 가진다. 즉  $a = -2$ 이다.

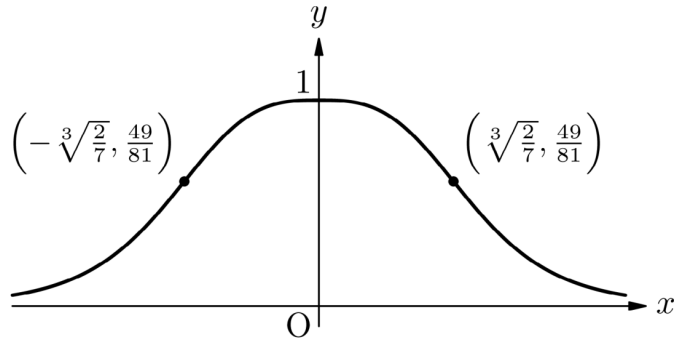
#### (별해)

함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 정의되며,  $f(x) > 0$ 이므로 그래프는  $x$ 축 위쪽에 있다. 또한  $f(x) = f(-x)$ 이므로 그래프는  $y$ 축에 대하여 대칭이고  $f(0) = 1$ 이므로  $y$ 축과의 교점은  $(0, 1)$ 이다. 한편 (2-1)의 결과를 이용하면 다음과 같은 증감표를 얻는다.

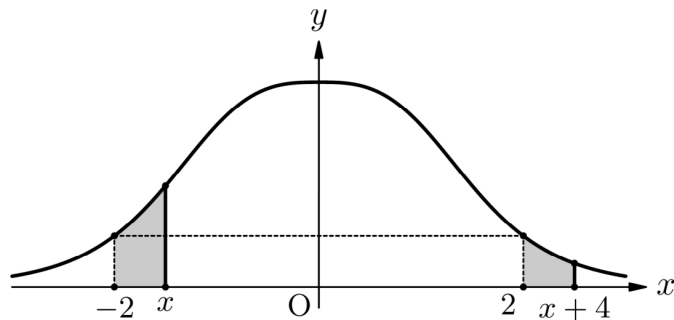
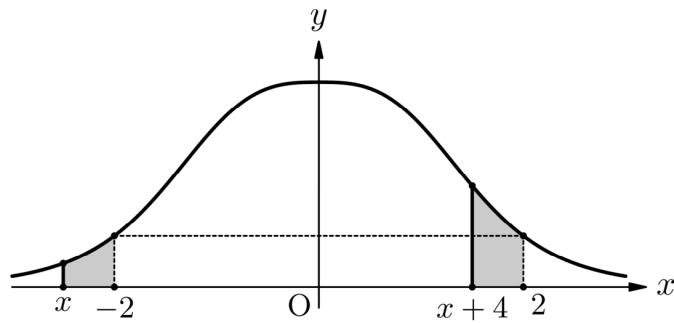
|          |     |                          |     |    |     |                         |     |
|----------|-----|--------------------------|-----|----|-----|-------------------------|-----|
| $x$      | ... | $-\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ | ... | 0  | ... | $\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ | ... |
| $f'(x)$  | +   | +                        | +   | 0  | -   | -                       | -   |
| $f''(x)$ | +   | 0                        | -   | 0  | -   | 0                       | +   |
| $f(x)$   | ↗   | 변곡점                      | ↘   | 극대 | ↘   | 변곡점                     | ↘   |

즉, 함수  $f(x)$ 는  $x < 0$ 일 때 증가하고,  $x > 0$ 일 때 감소하며, 구간  $\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)$ 에서 위로 볼록하다. 또한

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로 그래프의 점근선은  $x$ 축이다. 따라서 함수  $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



한편 함수  $g(x)$ 는 구간  $[x, x+4]$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 의 아래 영역의 넓이와 같다. 아래 그림과 같이  $x < -2$ 이면 구간  $[x, -2]$ 에서의  $y=f(x)$  아래의 넓이가 구간  $[x+4, 2]$ 에서의 넓이보다 작음을 알 수 있다. 따라서 구간  $[x, x+4]$ 에서의  $y=f(x)$  아래의 넓이는 구간  $[-2, 2]$ 에서의  $y=f(x)$  아래의 넓이보다 작다. 같은 방법으로  $x > -2$ 이면 구간  $[-2, x]$ 에서의  $y=f(x)$  아래의 넓이가 구간  $[2, x+4]$ 에서의 넓이보다 크므로, 구간  $[x, x+4]$ 에서의  $y=f(x)$  아래의 넓이는 구간  $[-2, 2]$ 에서의  $y=f(x)$  아래의 넓이보다 작다.



이로부터  $x \neq -2$ 이면  $g(x) = \int_x^{x+4} f(t)dt < \int_{-2}^2 f(t)dt = g(-2)$ 임을 알 수 있고, 함수  $g(x)$ 는  $x = -2$ 일 때 최댓값을 가진다. 즉  $a = -2$ 이다.

**(참고)**

함수  $g(x) = \int_x^{x+4} f(t)dt$ 의 도함수는  $g'(x) = f(x+4) - f(x)$ 이다. 한편

$$\begin{aligned} f(x+4) - f(x) &= \frac{1}{(1+|x+4|^3)^2} - \frac{1}{(1+|x|^3)^2} = \frac{(1+|x|^3)^2 - (1+|x+4|^3)^2}{(1+|x|^3)^2(1+|x+4|^3)^2} \\ &= \frac{(|x|^3 - |x+4|^3)(2+|x|^3+|x+4|^3)}{(1+|x|^3)^2(1+|x+4|^3)^2} \end{aligned}$$

이고,  $\frac{2+|x|^3+|x+4|^3}{(1+|x|^3)^2(1+|x+4|^3)^2} > 0$ 이므로,

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow |x|^3 > |x+4|^3 \Leftrightarrow x < -2$$

이다. 즉  $g(x)$ 는  $x < -2$ 일 때 증가하고  $x > -2$ 일 때 감소하므로, 함수  $g(x)$ 는  $x = -2$ 일 때 최댓값을 가진다. 즉  $a = -2$ 이다.

(2-3)

$f(t) = f(-t)$ 임을 이용하면

$$g(a) = g(-2) = \int_{-2}^2 f(t)dt = 2 \int_{-2}^0 f(t)dt = -2 \int_0^{-2} f(t)dt$$

이다. 또한

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{-2} \frac{t^3}{(1-t^3)^2} dt = \int_0^{-2} \frac{1}{3} t \times \frac{3t^2}{(1-t^3)^2} dt = \left[ \frac{1}{3} t(1-t^3)^{-1} \right]_0^{-2} - \frac{1}{3} \int_0^{-2} \frac{1}{1-t^3} dt \\ &= -\frac{2}{27} - \frac{1}{3} \int_0^{-2} \frac{1}{(1-t^3)^2} dt + \frac{1}{3} \int_0^{-2} \frac{t^3}{(1-t^3)^2} dt = -\frac{2}{27} - \frac{1}{3} \int_0^{-2} f(t)dt + \frac{1}{3} S \\ &= -\frac{2}{27} + \frac{1}{6} g(a) + \frac{1}{3} S \end{aligned}$$

이므로  $g(a) - 4S = \frac{4}{9}$ 이다.

(별해)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a t^3 f(t)dt = \int_0^{-2} \frac{t^3}{(1-t^3)^2} dt = \int_0^{-2} \frac{t^3 - 1}{(1-t^3)^2} dt + \int_0^{-2} \frac{1}{(1-t^3)^2} dt \\ &= - \int_0^{-2} \frac{1}{1-t^3} dt - \frac{1}{2} g(a) = - \left[ \frac{t}{1-t^3} \right]_0^{-2} + \int_0^{-2} \frac{t \times 3t^2}{(1-t^3)^2} dt - \frac{1}{2} g(a) \\ &= \frac{2}{9} + 3S - \frac{1}{2} g(a) \end{aligned}$$

이므로  $g(a) - 4S = \frac{4}{9}$ 이다.

■ 채점 기준

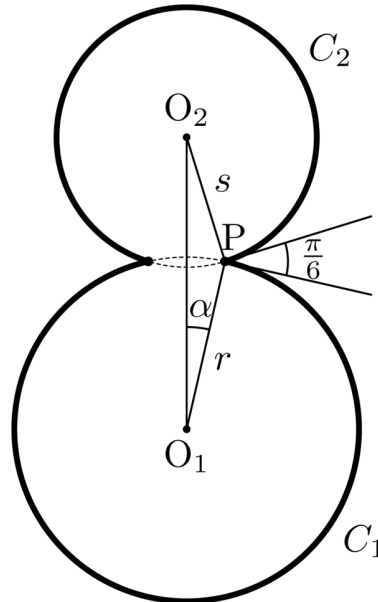
| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 배점 |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>x \neq 0</math>일 때 <math>f'(x)</math>을 구하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>f'(0) = 0</math>을 구하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>f'(x) &lt; 0</math>이면 <math>x &gt; 0</math>: (+10점)</li> <li>▪ <math>x \neq 0</math>일 때 <math>f''(x)</math>을 구하면 (+20점)</li> <li>▪ <math>f''(0) = 0</math>을 구하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>f''(x) &lt; 0</math>이면 <math>-\sqrt[3]{\frac{2}{7}} &lt; x &lt; 0</math> 또는 <math>0 &lt; x &lt; \sqrt[3]{\frac{2}{7}}</math>: (+10점)</li> </ul> | 70 |
| 2-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>y = f(x)</math>의 점근선을 설명하면 (+10점)</li> <li>▪ 증감, 볼록성, 점근선을 이용하여 <math>y = f(x)</math>의 그래프를 그리면 (+20점)</li> <li>▪ <math>g'(x)</math>는 <math>x &lt; -2</math>일 때 양수이고, <math>x &gt; -2</math>일 때 음수임을 설명하면 (+30점)</li> <li>▪ <math>a = -2</math>임을 구하면 (+20점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                  | 80 |
| 2-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>g(a) = -2 \int_0^{-2} f(t)dt</math> 또는 <math>g(a) = 2 \int_0^2 f(t)dt</math>임을 보이면 (+20점)</li> <li>▪ <math>S = -\frac{2}{27} - \frac{1}{3} \int_0^{-2} \frac{1}{1-t^3} dt</math>: (+30점)</li> <li>▪ <math>g(a) - 4S = \frac{4}{9}</math>를 구하면 (+30점)</li> </ul>                                                                                                                                                                                          | 80 |

**B형 · 문제 3**

[문제 3] 그림과 같이 좌표평면에 중심이  $O_1, O_2$ 이고 반지름의 길이가  $r, s$ 인 두 원  $C_1, C_2$ 가 있다. 두 점  $O_1, O_2$  사이의 거리는 1이다. (단,  $0 < r < 1, 0 < s < 1$ )

$C_1$ 과  $C_2$ 의 교점 중 하나를  $P$ 라 할 때, 점  $P$ 에서 두 원의 접선이 이루는 예각이  $\frac{\pi}{6}$ 이다.

$\angle PO_1O_2 = \alpha$ 라 하고, 굵은 선으로 표시된 8모양의 도형의 길이를  $f(\alpha)$ 라 하자.



(3-1)  $\angle PO_2O_1$ 의 크기를  $\alpha$ 의 식으로 나타내고  $\alpha$ 의 범위를 구하시오. 또한  $f(\alpha)$ 를 구하시오. (80점)

(3-2) 위의 그림에서  $C_2$  중 굵은 선으로 표시된 8모양의 호의 길이를  $g(\alpha)$ 라 할 때,  $a < g'(\alpha) < b$ 이다.  $a$ 의 최댓값과  $b$ 의 최솟값을 각각 구하시오. (80점)

(3-3)  $f(\alpha)$ 가 최소가 되도록 하는  $\alpha$ 의 값을 구하시오. (80점)

## ■ 예시 답안

### (3-1)

$\angle PO_2O_1 = \beta$ 라 하자. 원  $C_1$ 의 점 P에서의 접선과 선분  $PO_1$ 이 서로 수직이며, 원  $C_2$ 의 점 P에서의 접선과 선분  $PO_2$ 가 서로 수직이므로  $\angle O_1PO_2 = \frac{5\pi}{6}$ 이다. 따라서  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ 이므로,  $\angle PO_2O_1 = \beta = \frac{\pi}{6} - \alpha$ 이다. 그리고  $\alpha > 0, \beta > 0$ 이므로  $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ 이다.

또한, 삼각형  $O_1O_2P$ 에 사인법칙을 적용하면

$$\frac{s}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \frac{5\pi}{6}} = 2$$

이므로  $s = 2 \sin \alpha, r = 2 \sin \beta$ 이다.

그러므로 구하는 길이 중  $C_1$ 에 속하는 부분의 길이는  $2(\pi - \alpha)r = 4(\pi - \alpha) \sin \beta$ 이고,  $C_2$ 에 속하는 부분의 길이는  $2(\pi - \beta)s = 4(\pi - \beta) \sin \alpha$ 이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$f(\alpha) = 4(\pi - \alpha) \sin \beta + 4(\pi - \beta) \sin \alpha = 4(\pi - \alpha) \sin \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) + 4 \left( \frac{5\pi}{6} + \alpha \right) \sin \alpha$$

### (별해)

$\angle PO_2O_1 = \beta$ 라 하자. 삼각형  $O_1O_2P$ 에서 연립방정식

$$\begin{cases} r \sin \alpha = s \sin \beta \\ r \cos \alpha + s \cos \beta = 1 \end{cases}$$

을 얻고,  $s$ 를 소거하면  $r \sin \alpha \cos \beta + r \cos \alpha \sin \beta = \sin \beta$ 가 된다. 이 식의 좌변에 삼각함수의 덧셈정리를 적용하면  $r \sin(\alpha + \beta) = \sin \beta$ 이며,  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ 임을 이용하면  $r = 2 \sin \beta$ 이다.

비슷한 방법으로 연립방정식의  $r$ 을 소거하여 계산하면  $s = 2 \sin \alpha$ 이다. 따라서 다음을 얻는다.

$$f(\alpha) = 4(\pi - \alpha) \sin \beta + 4(\pi - \beta) \sin \alpha = 4(\pi - \alpha) \sin \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) + 4 \left( \frac{5\pi}{6} + \alpha \right) \sin \alpha$$

### (3-2)

$g(\alpha) = 4(\pi - \beta) \sin \alpha = 4 \left( \frac{5\pi}{6} + \alpha \right) \sin \alpha$ 이고,  $g'(\alpha) = 4 \left\{ \sin \alpha + \left( \frac{5\pi}{6} + \alpha \right) \cos \alpha \right\}$ ,  
 $g''(\alpha) = 4 \left\{ 2 \cos \alpha - \left( \frac{5\pi}{6} + \alpha \right) \sin \alpha \right\}$ 이다. 그런데  $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ 이므로  $2 \cos \alpha > \sqrt{3}$ 이고,  
 $\left( \frac{5\pi}{6} + \alpha \right) \sin \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이다. 그러므로

$$g''(\alpha) = 4 \left\{ 2 \cos \alpha - \left( \frac{5\pi}{6} + \alpha \right) \sin \alpha \right\} > 4 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right) > 0$$

이고,  $g'(\alpha)$ 는 증가함수이다. 그런데  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} g'(\alpha) = \frac{10\pi}{3}$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} g'(\alpha) = 2 + 2\sqrt{3}\pi$ 이므로  $a$ 의 최댓값은  $\frac{10\pi}{3}$ 이고  $b$ 의 최솟값은  $2 + 2\sqrt{3}\pi$ 이다.

### (3-3)

$f(\alpha) = 4(\pi - \alpha) \sin \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) + 4 \left( \frac{5\pi}{6} + \alpha \right) \sin \alpha = g \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) + g(\alpha)$ 이다. 따라서,

$f'(\alpha) = -g' \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) + g'(\alpha)$ 이다. 그런데 (3-2)로부터  $g'(\alpha)$ 는 증가함수이다. 따라서

$0 < x < \frac{\pi}{6}, 0 < y < \frac{\pi}{6}$ 일 때  $g'(x) = g'(y)$ 이면  $x = y$ 이다. 그러므로,

$f'(\alpha) = g'(\alpha) - g' \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) = 0$ 이기 위해서는  $\alpha = \frac{\pi}{6} - \alpha$ 이어야 한다. 즉,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ 에서

$f'(\alpha) = 0$ 인 곳은  $\alpha = \frac{\pi}{12}$ 뿐이다. 또한 (3-2)로부터  $g''(\alpha) > 0$ 이므로,  
 $f''\left(\frac{\pi}{12}\right) = g''\left(\frac{\pi}{12}\right) + g''\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ 이고,  $\alpha = \frac{\pi}{12}$ 에서  $f(\alpha)$ 는 최솟값을 갖는다.

(별해)

$$f(\alpha) = 4\left\{(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right)\sin\alpha\right\} = 4\left\{(\alpha - \pi)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right)\sin\alpha\right\}$$

이다. 또한

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) &= 4\left\{\left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right)\sin\alpha + (\pi - \alpha)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\right\} \\ &= 4\left\{(\alpha - \pi)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right)\sin\alpha\right\} \\ &= f(\alpha) \end{aligned}$$

이다. 따라서  $f\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) = f\left(\frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right)\right) = f\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right)$ 이므로 곡선  $y = f(\alpha)$ 의 그래프는 직선  $\alpha = \frac{\pi}{12}$ 를 중심으로 대칭이다. 그러므로

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{12} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{12}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{12} - h\right) - f\left(\frac{\pi}{12}\right)}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{12} - h\right) - f\left(\frac{\pi}{12}\right)}{-h} = -f'\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

이고  $2f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$ , 즉  $f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$ 이다. 이제  $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ 일 때

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 4\left\{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + (\alpha - \pi)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\alpha + \left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right)\cos\alpha\right\} \\ f''(\alpha) &= 4\left\{2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - (\alpha - \pi)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\alpha - \left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right)\sin\alpha\right\} \\ &\geq 4\left\{2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \pi\sin\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} - \pi\sin\frac{\pi}{6}\right\} \\ &= 4\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 4(2\sqrt{3} - \pi) > 0 \end{aligned}$$

이므로 함수  $f'(\alpha)$ 는 구간  $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 에서 증가하고, 방정식  $f'(\alpha) = 0$ 의 해는 단 하나만 존재하며, 이는  $\alpha = \frac{\pi}{12}$ 이다. 또한  $0 < \alpha < \frac{\pi}{12}$ 일 때  $f'(\alpha) < 0$ 이고  $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{6}$ 일 때  $f'(\alpha) > 0$ 이다. 즉,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{12}$ 일 때  $f(\alpha)$ 는 감소하고  $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{6}$ 일 때  $f(\alpha)$ 는 증가한다. 따라서  $\alpha = \frac{\pi}{12}$ 에서  $f(\alpha)$ 는 최솟값을 갖는다.

## ■ 채점 기준

| 하위 문항 | 채점 기준                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 배점 |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3-1   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>\angle PO_2O_1 = \frac{\pi}{6} - \alpha</math>를 얻으면 (+20점)</li> <li>▪ <math>0 &lt; \alpha &lt; \frac{\pi}{6}</math>을 얻으면 (+20점)</li> <li>▪ <math>f(\alpha) = 4(\pi - \alpha) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + 4\left(\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) \sin \alpha</math> (+40점)</li> </ul>                                                                                                                                                   | 80 |
| 3-2   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>g'(\alpha) = 4\left\{\sin \alpha + \left(\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) \cos \alpha\right\}</math> (+10점)</li> <li>▪ <math>g''(\alpha) = 4\left\{2 \cos \alpha - \left(\frac{5\pi}{6} + \alpha\right) \sin \alpha\right\}</math> (+10점)</li> <li>▪ <math>g''(\alpha) &gt; 0</math>임을 보이면 (+40점)</li> <li>▪ <math>a</math>의 최댓값은 <math>\frac{10\pi}{3}</math> (+10점)</li> <li>▪ <math>b</math>의 최솟값은 <math>2 + 2\sqrt{3}\pi</math> (+10점)</li> </ul> | 80 |
| 3-3   | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <math>f(\alpha) = g\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + g(\alpha)</math> (+30점)</li> <li>▪ <math>g'(\alpha)</math>는 증가함수임을 언급하면 (+10점)</li> <li>▪ <math>f'(\alpha) = g'(\alpha) - g'\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = 0</math>이기 위해서는 <math>\alpha = \frac{\pi}{6} - \alpha</math> (+30점)</li> <li>▪ <math>\alpha = \frac{\pi}{12}</math>에서 <math>f(\alpha)</math>는 최솟값 (+10점)</li> </ul>                                                            | 80 |

# 써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

## 4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

## 상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

## 일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

## 간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

## 이용 안내

|       |                 |
|-------|-----------------|
| 무료 체험 | 회원가입 시 3회 무료 분석 |
| 개인 플랜 | 월 9,900원        |
| 교사 플랜 | 월 29,900원       |

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다