

숙명여대논술

자연계

목차

2026학년도 자연계열(약학부 제외)	3
문항 1	3
문항 2	6
문항 3	9
2025학년도 자연계열(약학부 제외)	12
문항 1	12
문항 2	15
문항 3	18
2024학년도 자연계열	20
문항 1	20
문항 2	23
문항 3	27

2026학년도 자연계열(약학부 제외)

문항 1

제시문

<가> 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

<나> 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

<다> 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 그 명제 또는 명제의 결론을 부정하면 모순이 생긴다는 것을 보여도 된다. 이와 같이 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

제시문 <가>, <나>, <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

- 1-1. 이차함수 $y = x^2 + a$ 와 무리함수 $y = \sqrt{x+1}$ 이 열린구간 $(1, 3)$ 에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오.
- 1-2. 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능한 함수라고 하자. 함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 있는 모든 실수 x 에 대하여 $|f'(x)| < 1$ 을 만족시킬 때, $f(c) = 2c$ 인 c 의 개수가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 하나 이하로 존재함을 귀류법을 이용하여 증명하시오.

■ 예시 답안

1-1.

$f(x) = x^2 + a - \sqrt{x+1}$ 라고 하면 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이다. 제시문 <가>(사잇값 정리)에 의해 $f(1)f(3) < 0$ 이면 $f(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다. 즉, 이차함수 $y = x^2 + a$ 와 무리함수 $y = \sqrt{x+1}$ 이 열린구간 $(1, 3)$ 에서 만난다.

$f(1) = a + 1 - \sqrt{2}$ 이고 $f(3) = a + 7$ 이므로 $f(1)f(3) < 0$ 에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$(a + 1 - \sqrt{2})(a + 7) < 0$$

그러므로 실수 a 의 값의 범위는 $-7 < a < \sqrt{2} - 1$ 이다.

참고로 열린구간 $(1, 3)$ 에서 도함수 $f'(x)$ 는 다음을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{4x\sqrt{x+1} - 1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \end{aligned}$$

따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$f(1) < 0, f(3) > 0$$

1-2.

귀류법을 사용하기 위해 $f(c_1) = 2c_1$ 이고 $f(c_2) = 2c_2$ 인 서로 다른 c_1, c_2 가 구간 $[0, 1]$ 에 존재한다고 가정하자. 여기서 $c_1 \neq c_2$ 이므로 $c_1 < c_2$ 라고 하자. 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[c_1, c_2]$ 에서 연속이고 열린구간 (c_1, c_2) 에서 미분가능하므로 제시문 <나>(평균값 정리)에 의해

$$\frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 (c_1, c_2) 에서 적어도 하나 존재한다. 위의 식으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$f'(c) = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} = \frac{2c_2 - 2c_1}{c_2 - c_1} = 2$$

그런데 c 는 열린구간 $(0, 1)$ 에 있고 $f'(c) = 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 있는 모든 실수 x 에 대하여 $|f'(x)| < 1$ 이라는 사실에 모순이다. 그러므로 $f(c) = 2c$ 인 c 의 개수가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 하나 이하로 존재한다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1 1-2	■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다. ① <1-1>에서 이차함수와 무리함수가 연속함수임을 이해한다. ② <1-1>에서 사잇값 정리를 이해하고 활용할 수 있다. ③ <1-1>에서 이차부등식을 정확히 풀 수 있다. ④ <1-2>에서 명제의 부정을 정확히 기술할 수 있다. ⑤ <1-2>에서 평균값 정리를 이해할 수 있다. ⑥ <1-2>에서 귀류법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.	
	위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우	1등급
	위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우	2등급
	위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우	3등급
	위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우	4등급
	위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)	5등급
	위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우	6등급
	위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우	7등급
	위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우	8등급
	위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	9등급

문항 2

제시문

<라> 두 직선 $l: y = mx + n, l': y = m'x + n'$ 에 대하여 l 과 l' 이 서로 수직인 조건은 다음과 같다.

$$mm' = -1$$

거꾸로 $mm' = -1$ 이면 l 과 l' 은 서로 수직이다.

<마> 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

제시문 <라>와 <마>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

자연수 n 에 대하여 이차함수 $y = nx^2$ 위의 점 $P_n(a_n, b_n)$ 을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선이 점 $(0, 1)$ 을 지난다고 가정하자. (단, $a_n > 0$ 이다.)

2-1. a_n 과 b_n 을 각각 구하시오.

2-2. 이차함수 $y = nx^2$ 과 x 축 및 이차함수 $y = nx^2$ 위의 점 $P_n(a_n, b_n)$ 에서의 접선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 A_n 이라고 하자. 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{a_n}$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

2-1.

이차함수 $y = nx^2$ 위의 점 $P_n(a_n, b_n)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$$y = 2na_n(x - a_n) + na_n^2$$

이고, 이차함수 $y = nx^2$ 위의 점 $P_n(a_n, b_n)$ 을 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2na_n}(x - a_n) + na_n^2$$

으로 주어진다. 또한 이 직선은 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{1}{2n} + na_n^2$$

을 만족시킨다. 따라서

$$a_n^2 = \frac{2n - 1}{2n^2}$$

을 얻고, 이를 이용하면

$$a_n = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2n - 1}{2}}, \quad b_n = \frac{2n - 1}{2n}$$

을 얻는다.

2-2.

점 $P_n(a_n, b_n)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - na_n^2 = 2na_n(x - a_n)$$

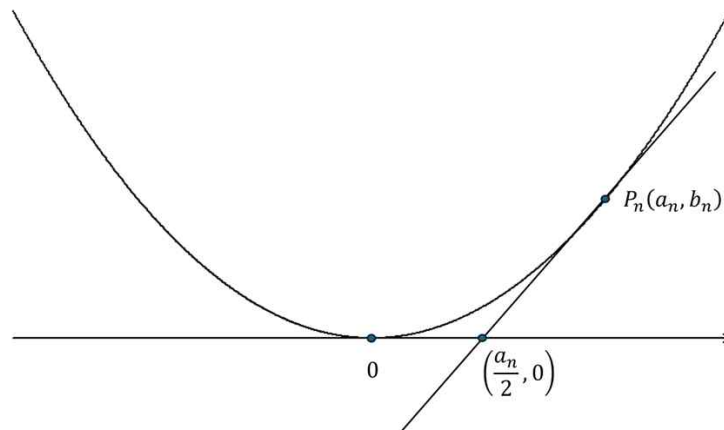
이다. x 축과의 교점을 구하기 위해 $y = 0$ 을 대입하면

$$-na_n^2 = 2na_nx - 2na_n^2$$

을 얻는다. 따라서

$$x = \frac{a_n}{2} > 0$$

이다.



이를 이용하여, 이차함수 $y = nx^2$ 과 x 축 및 이차함수 $y = nx^2$ 위의 점 $P_n(a_n, b_n)$ 에서의 접선으로 둘러싸인 영역의 넓이 A_n 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 A_n &= \int_0^{\frac{a_n}{2}} nx^2 dx + \int_{\frac{a_n}{2}}^{a_n} \{nx^2 - (2na_n x - na_n^2)\} dx \\
 &= \int_0^{a_n} nx^2 dx - \int_{\frac{a_n}{2}}^{a_n} (2na_n x - na_n^2) dx \\
 &= \frac{na_n^3}{3} - na_n \left\{ a_n^2 - \left(\frac{a_n}{2} \right)^2 \right\} + na_n^2 \frac{a_n}{2} \\
 &= na_n^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{na_n^3}{12} \\
 &= \frac{n}{12} \frac{1}{n^3} \left(\sqrt{\frac{2n-1}{2}} \right)^3
 \end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{12n^2} \frac{2n-1}{2} \sqrt{\frac{2n-1}{2}}}{\frac{1}{n} \sqrt{\frac{2n-1}{2}}} = \frac{1}{12}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다. ① <2-1>에서 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다. ② <2-1>에서 접선에 수직인 직선의 방정식을 구할 수 있다. ③ <2-1>에서 a_n과 b_n을 정확히 구할 수 있다. ④ <2-2>에서 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다. ⑤ <2-2>에서 주어진 영역의 넓이를 적분을 이용하여 구할 수 있다. ⑥ <2-2>에서 수열의 극한값을 구할 수 있다.	
2-1	위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우	1등급
2-2	위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우	2등급
	위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우	3등급
	위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우	4등급
	위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)	5등급
	위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우	6등급
	위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우	7등급
	위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우	8등급
	위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	9등급

문항 3

제시문

<바> 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일대응이면 Y 의 각 원소 y 에 대하여 $y = f(x)$ 인 X 의 원소 x 가 오직 하나 존재한다. 이때 Y 의 각 원소 y 에 $y = f(x)$ 인 X 의 원소 x 를 대응시키면 Y 를 정의역, X 를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 함수를 함수 f 의 역함수라 하고, 기호로

$$f^{-1}: Y \rightarrow X, x = f^{-1}(y)$$

와 같이 나타낸다.

<사> 실수 전체의 집합에서 정의된 삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)가 역함수를 갖기 위한 조건은 다음과 같다.

1. $a > 0$ 이면 도함수 $f'(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 $f'(x) \geq 0$ 을 만족시킨다.
2. $a < 0$ 이면 도함수 $f'(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 $f'(x) \leq 0$ 을 만족시킨다.

제시문 <바>와 <사>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

함수 $f(x) = x^3 + 2x + 4$ 는 실수 전체의 집합에서 정의된 삼차함수이다.

- 3-1. 삼차함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재함을 보이고, 역함수 f^{-1} 에 대하여 $f^{-1}(t^2 + 5t + 1) = t - 1$ 을 만족시키는 실수 t 의 값을 모두 구하시오.
- 3-2. 삼차함수 $f(x)$ 의 역함수 f^{-1} 에 대하여 $f^{-1}(t^2 + 2) + f^{-1}(t^2 - 2) = 0$ 을 만족시키는 실수 t 의 값을 모두 구하시오.

■ 예시 답안

3-1.

도함수 $f'(x) = 3x^2 + 2$ 는 $f'(x) \geq 0$ 을 만족시킨다. 그러므로 제시문 <사>에 따르면 $f(x)$ 는 역함수를 갖는다. 문제에서 $f^{-1}(t^2 + 5t + 1) = t - 1$ 이므로 $t^2 + 5t + 1 = f(t - 1)$ 이 성립한다. 여기에서 우변의 $f(t - 1)$ 을 주어진 $f(x)$ 를 이용하여 계산하면

$$f(t - 1) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$$

를 얻는다. 그러므로

$$t^3 - 3t^2 + 5t + 1 = t^2 + 5t + 1$$

이 되고, 이것을 풀면 $t^2(t - 4) = 0$ 이다. 그러므로 $t = 0$ 또는 $t = 4$ 이다.

3-2.

$f^{-1}(t^2 + 2) = a$, $f^{-1}(t^2 - 2) = b$ 라고 하면 $f(a) = t^2 + 2$, $f(b) = t^2 - 2$ 이다. 첫 번째 식에서 두 번째 식을 빼면

$$f(a) - f(b) = 4 \quad (1)$$

이다. 식 (1)의 좌변을 계산하면

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= (a^3 + 2a + 4) - (b^3 + 2b + 4) \\ &= a^3 - b^3 + 2(a - b) \end{aligned} \quad (2)$$

이다. 한편 $f^{-1}(t^2 + 2) + f^{-1}(t^2 - 2) = 0$ 은 $a + b = 0$ 이다. 이를 식 (2)에 대입하면

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a^3 - (-a)^3 + 2(a - (-a)) \\ &= 2a^3 + 4a \end{aligned}$$

이다. 이것과 식 (1)로부터 $a^3 + 2a = 2$ 를 얻는다. 그러므로

$$f(a) = a^3 + 2a + 4 = 6$$

이다. 또한 $f(a) = t^2 + 2$ 이므로 $t^2 = 4$ 이다. 따라서 $t = \pm 2$ 이다.

■ 다른 풀이

함수 $f(x)$ 에 $-x$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x^3 - 2x + 4 \\ &= -f(x) + 8 \end{aligned} \quad (3)$$

이다. 문제의 조건 $f^{-1}(t^2 + 2) + f^{-1}(t^2 - 2) = 0$ 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f^{-1}(t^2 + 2) = -f^{-1}(t^2 - 2)$$

이것과 식 (3)을 이용하면

$$\begin{aligned} t^2 + 2 &= f(-f^{-1}(t^2 - 2)) \\ &= -f(f^{-1}(t^2 - 2)) + 8 \\ &= -t^2 + 2 + 8 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $2t^2 = 8$ 이고 $t = \pm 2$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다. ① <3-1>에서 도함수를 이용하여 역함수의 존재를 보일 수 있다. ② <3-1>에서 역함수를 이용하여 삼차방정식을 세울 수 있다. ③ <3-1>에서 삼차방정식의 해를 구할 수 있다. ④ <3-2>에서 역함수의 정의를 사용하여 $f(y) = t^2 + 2$, $f(z) = t^2 - 2$로 표현할 수 있다. ⑤ <3-2>에서 $f(y) - f(z) = 4$를 구할 수 있다. ⑥ <3-2>에서 삼차방정식과 이차방정식을 풀 수 있다.	
3-1	위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우	1등급
3-2	위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우	2등급
	위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우	3등급
	위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우	4등급
	위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)	5등급
	위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우	6등급
	위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우	7등급
	위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우	8등급
	위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	9등급

2025학년도 자연계열(약학부 제외)

문항 1

제시문

[가]

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

[나]

다항식의 곱셈 공식을 이용하면 여러 가지 식의 값을 쉽게 구할 수 있다.

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

[다]

함수 $y = f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면, 최대·최소 정리에 따라 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 이때 이 구간에서 $f(x)$ 의 극댓값, 극솟값, $f(a), f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이 된다.

제시문 <가>, <나>, <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

- 1-1.** 이차방정식 $x^2 + (\ln k)x - (\ln k + 2) = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라고 할 때, 두 실근 α, β 의 차가 최소가 되는 실수 k 의 값을 구하시오.
- 1-2.** 삼차함수 $f(x) = (x^2 - 1)(x + 3k)$ 의 극댓값과 극솟값의 합이 최대가 되는 실수 k 의 값과 그때 극댓값과 극솟값의 합을 구하시오. (단, $-1 \leq k \leq 1$)

■ 예시 답안

1-1

주어진 이차방정식의 판별식은

$$D = (\ln k)^2 + 4(\ln k + 2) = (\ln k + 2)^2 + 4 > 0$$

이므로 이차방정식은 항상 서로 다른 두 실근을 가진다. 또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = -\ln k, \quad \alpha\beta = -(\ln k + 2)$$

이다. 따라서 두 근 α, β 의 차의 제곱은

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\ln k)^2 + 4\ln k + 8 = (\ln k + 2)^2 + 4$$

이고, $\ln k = -2$, 즉 $k = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ 일 때, 최소이다.

따라서 두 근의 차가 최소가 되는 실수 k 의 값은 $k = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ 이다.

1-2

도함수 $f'(x) = 2x(x + 3k) + x^2 - 1 = 3x^2 + 6kx - 1$ 이다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식

$$D/4 = 9k^2 + 3 > 0$$

이므로 $f'(x) = 0$ 은 항상 서로 다른 두 실근을 가진다.

$f'(x) = 0$ 의 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라고 하면 $f'(x) = 0$ 의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = -2k, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{3}$$

이다. 따라서

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4k^2 + \frac{2}{3},$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = -8k^3 - 2k$$

삼차함수 $f(x)$ 의 삼차항의 계수가 1로 양수이고 $\alpha < \beta$ 이므로 $f(\alpha)$ 는 극댓값, $f(\beta)$ 는 극솟값이다.

따라서

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= \alpha^3 + \beta^3 + 3k(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha + \beta) - 6k \\ &= -8k^3 - 2k + 12k^3 + 2k + 2k - 6k \\ &= 4k^3 - 4k \end{aligned}$$

여기서 $g(k) = 4k^3 - 4k$ 라고 하면, $g'(k) = 4(3k^2 - 1)$ 이므로 $g'(k) = 0$ 에서 $k = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

k	-1	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$g'(k)$		+	0	-	0	+	
$g(k)$	0	$\nearrow$	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\frac{8\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	0

따라서 $k = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때 $f(\alpha) + f(\beta)$ 를 최대로 하고 최댓값은 $g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1 1-2	① <1-1>, <1-2>에서 근과 계수의 관계를 정확히 이해한다. ② <1-1>에서 곱셈 공식을 활용할 수 있다. ③ <1-1>에서 두 실근의 차의 최솟값을 구할 수 있다. ④ <1-2>에서 도함수의 근과 계수와의 관계를 활용할 수 있다. ⑤ <1-2>에서 곱셈 공식을 활용할 수 있다. ⑥ <1-2>에서 최댓값을 구할 수 있다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	

문항 2

제시문

[라]

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 A 는

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

[마]

함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 a, b, c 를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

[바]

점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

제시문 <라>, <마>, <바>를 읽고, 다음 조건을 만족시키는 a_n 에 대하여 문제에 답하시오.

자연수 n 에 대하여 $a_1 = 1$ 이고 $a_n < a_{n+1}$ 이다. 함수 $f(x) = \frac{2x}{e^2 - 1}e^{x^2}$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x = a_n, x = a_{n+1}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 A_n 이 $A_n = e^{2n-1}$ 이다.

2-1. 함수 $f(x)$ 의 a_1 부터 a_n 까지의 정적분을 이용하여 a_n 을 구하시오.

2-2. x 축, y 축에 모두 접하고 중심이 점 (a_n, a_n) 인 원이 직선 $y = \left(\tan \frac{1}{n}\right)x$ 와 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n 이라 하자. 선분 P_nQ_n 의 길이를 l_n 이라 할 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n^2$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

2-1

함수 $f(x)$ 의 a_1 부터 a_n 까지의 정적분은

$$\int_{a_1}^{a_n} \frac{2x}{e^2 - 1} e^{x^2} dx = \int_{a_1}^{a_2} \frac{2x}{e^2 - 1} e^{x^2} dx + \int_{a_2}^{a_3} \frac{2x}{e^2 - 1} e^{x^2} dx + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{2x}{e^2 - 1} e^{x^2} dx = e + e^3 + \cdots + e^{2n-3}$$

$$\frac{1}{e^2 - 1} (e^{a_n^2} - e) = \sum_{k=1}^{n-1} e^{2k-1} = \frac{1}{e^2 - 1} (e^{2n-1} - e)$$

따라서 $a_n^2 = 2n - 1$, 즉 $a_n = \sqrt{2n - 1}$ 이다.

2-2

점 (a_n, a_n) 과 직선 $\left(\tan \frac{1}{n}\right)x - y = 0$ 사이의 거리를 d_n 으로 놓으면

$$d_n = \frac{\left| \left(\tan \frac{1}{n}\right)a_n - a_n \right|}{\sqrt{\tan^2 \frac{1}{n} + 1}}$$

이다. 한편 $l_n = 2\sqrt{a_n^2 - d_n^2}$ 이므로,

$$l_n^2 = 4(a_n^2 - d_n^2)$$

$$= 4 \left(a_n^2 - \frac{a_n^2 \left(\tan \frac{1}{n} - 1 \right)^2}{1 + \tan^2 \frac{1}{n}} \right)$$

이다. 이때 삼각함수의 성질에 의하여 $1 + \tan^2 \frac{1}{n} = \sec^2 \frac{1}{n}$ 이므로

$$4 \left(a_n^2 - \frac{a_n^2 \left(\tan \frac{1}{n} - 1 \right)^2}{1 + \tan^2 \frac{1}{n}} \right) = 4a_n^2 \left(1 - \frac{\left(\tan \frac{1}{n} - 1 \right)^2}{\sec^2 \frac{1}{n}} \right) = 8a_n^2 \left(\frac{\tan \frac{1}{n}}{\sec^2 \frac{1}{n}} \right) = 8a_n^2 \left(\sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \right)$$

이다.

또한 $a_n = \sqrt{2n - 1}$ 이므로

$$l_n^2 = 8(2n - 1) \left(\sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \right)$$

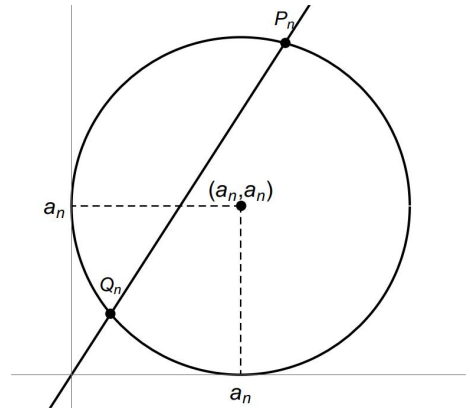
이다.

이때, $t = \frac{1}{n}$ 이라 하면, $n \rightarrow \infty$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 8(2n - 1) \left(\sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} 8 \left(\frac{2}{t} - 1 \right) (\sin t \cos t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} 8(2 - t) \frac{\sin t}{t} \cos t = 16$$

이다.



■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1 2-2	① <2-1>에서 정적분을 계산할 수 있다. ② <2-1>에서 등비수열의 합을 구할 수 있다. ③ <2-1>에서 정적분의 성질을 이용하여 a_n 을 구할 수 있다. ④ <2-2>에서 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. ⑤ <2-2>에서 선분의 길이 l_n 을 구할 수 있다. ⑥ <2-2>에서 삼각함수의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	

문항 3

제시문

[사]

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다. 이것을 사잇값의 정리라고 한다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a)$ 와 $f(b)$ 의 부호가 서로 다르면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 a 와 b 사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다.

[아]

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이므로 어떤 명제가 참임을 증명할 때에는 그 대우가 참임을 증명해도 된다.

제시문 <사>, <아>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. 방정식 $x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^2 + x - 1 = 0$ 이 열린구간 $(-2, 1)$ 에서 적어도 두 개의 실근을 가짐을 보이시오. (단, n 은 자연수)

3-2. 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, $f(a) > 0, f(b) > 0$ 이다. 다음 명제의 대우를 말하고 그것이 참임을 증명하시오.

방정식 $f(x) = 0$ 이 열린구간 (a, b) 에서 실근을 갖지 않는다면 열린구간 (a, b) 의 모든 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이다.

■ 예시 답안

3-1

$f(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^2 + x - 1$ 라 하자. $f(0) = -1 < 0$ 이다. 한편,

$$f(-2) = (-2)^{2n} + (-2)^{2n-1} + \dots + (-2)^2 + (-2) - 1 = \frac{(-2)^{2n+1} - (-2)}{-2 - 1} - 1 = \frac{2}{3} \times 4^n - \frac{5}{3}$$

이고, n 은 자연수이므로 $f(-2) \geq \frac{2}{3} \times 4 - \frac{5}{3} = 1 > 0$ 이다. 또한 $f(1) = 2n - 1 > 0$ 이다.

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 -2 와 0 사이에 적어도 하나의 실근을 갖고, 0 과 1 사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다. 그러므로 열린구간 $(-2, 1)$ 에서 적어도 두 개의 실근을 갖는다.

3-2

주어진 명제의 대우는

‘열린구간 (a, b) 의 어떤 x 에 대하여 $f(x) \leq 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 (a, b) 에서 실근을 갖는다.’이다.

조건에 의하여 $f(c) \leq 0$ 인 실수 c 가 a 와 b 사이에 존재한다.

만약 $f(c) = 0$ 이면 $x = c$ 는 방정식 $f(x) = 0$ 의 근이다.

만약 $f(c) < 0$ 이면 $f(a) > 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 a 와 c 사이에 적어도 하나의 실근을 갖고 또한 $f(b) > 0$ 이므로 c 와 b 사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다. 따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 (a, b) 에서 실근을 갖는다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1	① <3-1>에서 사잇값의 정리를 정확히 이해한다.	
	② <3-1>에서 등비수열의 합을 구할 수 있다.	
	③ <3-1>에서 사잇값의 정리를 활용하여 두 개의 실근을 가짐을 증명할 수 있다.	
	④ <3-2>에서 명제의 대우를 바르게 말할 수 있다.	
	⑤ <3-2>에서 명제의 가정을 두 가지 경우로 나누어 설명할 수 있다.	
	⑥ <3-2>에서 사잇값의 정리를 활용하여 명제가 참임을 증명할 수 있다.	
	1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우	
	2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우	
3-2	3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우	
	4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우	
	5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)	
	6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우	
	7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우	
	8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우	
	9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	

2024학년도 자연계열

문항 1

제시문

[가]

● 함수 $f(x)$ 가 열린구간 (a, b) 에서 $f''(x) < 0$ 이면 그 구간에서 $f'(x)$ 는 감소한다. 이때,

1) 열린구간 (a, b) 에 속하는 어떤 실수 c_1 에 대하여 $f'(c_1) > 0$ 이면, 열린구간 (a, c_1) 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (a, c_1) 에서 증가한다.

2) 열린구간 (a, b) 에 속하는 어떤 실수 c_2 에 대하여 $f'(c_2) < 0$ 이면, 열린구간 (c_2, b) 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (c_2, b) 에서 감소한다.

● <롤의 정리>

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능할 때, $f(a) = f(b)$ 이면 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

[나]

①

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ 을 만족시킬 때, 열린구간 (a, b) 에서 $f''(x) < 0$ 이면, 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이다.

● 함수 $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x$ 에 대하여, 부등식

$$\int_0^1 h(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx \quad \dots\dots (1)$$

가 성립함을 보이자. 함수 $F(x) = g(x) - h(x)$ 는 $F(0) = 0$, $F(1) = 0$ 이고, 열린구간 $(0, 1)$ 에서 $F''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$ 이다. 그러면 명제 ①에 의하여 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $F(x) \geq 0$ 이므로 이 구간에서 $h(x) \leq g(x)$ 이고 부등식 (1)이 성립한다.

제시문 <가>와 <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 제시문 <가>를 이용하여, 제시문 <나>에 있는 명제 ①이 참임을 증명하시오.

1-2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (a, b) 에서 $f''(x) < 0$ 을 만족시킨다. 이때,

$$(b-a)\{f(a) + f(b)\} \leq 2 \int_a^b f(x)dx$$

임을 보이시오.

■ 예시 답안

1-1

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 열린구간 (a, b) 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 (a, b) 에서 미분 가능하다. 또한 $f(a) = f(b) = 0$ 이므로 <롤의 정리>에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다. 그런데 함수 $f(x)$ 가 열린구간 (a, b) 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 이 구간에서 $f'(x)$ 는 감소한다. 따라서 $f'(c) = 0$ 을 만족시키는 c 가 열린구간 (a, b) 에서 오직 하나만 존재한다. 한편 열린구간 (a, b) 에서 $f'(x)$ 는 감소하고 $f'(c) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증감은 다음과 같다.

(i) 열린구간 (a, c) 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.

(ii) 열린구간 (c, b) 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

또한 $f(a) = 0$ 이므로 (i)에 의하여 열린구간 (a, c) 에서 $f(x) > 0$ 이고, $f(b) = 0$ 이므로 (ii)에 의하여 열린구간 (c, b) 에서 $f(x) > 0$ 이다. 따라서 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 $f(x) \geq 0$ 이다.

1-2

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여, 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 두 점 $(a, f(a))$ 와 $(b, f(b))$ 를 지나 는 일차함수 $h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ 의 그래프를 생각하자.

이때, 함수 $F(x) = f(x) - h(x)$ 는 $F(a) = 0$, $F(b) = 0$ 을 만족시킨다.

열린구간 (a, b) 에서 $F''(x) = f''(x) - h''(x) = f''(x) < 0$ 이므로

명제 ①에 의하여 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $F(x) \geq 0$ 이다.

따라서 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $\int_a^b F(x)dx = \int_a^b \{f(x) - h(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b h(x)dx \geq 0$ 이므로 $\int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$ 이다.

한편

$$\begin{aligned} \int_a^b h(x)dx &= \int_a^b \left\{ \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x^2 - a \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + f(a)x \right]_a^b \\ &= \frac{1}{2}(b - a)\{f(a) + f(b)\} \end{aligned}$$

이고, $(b - a)\{f(a) + f(b)\} \leq 2 \int_a^b f(x)dx$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1 1-2	① 제시문 <가>와 <나>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다. ② 제시문 <가>와 <나>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다. ③ <1-1>에서는 주어진 함수 $f(x)$에 대하여 <롤의 정리>를 적절히 이용하였는지를 평가한다. ④ <1-1>에서는 주어진 함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $f'(x)$, 이계도함수 $f''(x)$의 관계를 적절히 이용하였는지를 평가한다. ⑤ <1-2>에서는 문제를 해결하기 위하여, 필요한 함수를 적절히 도출하였는지를 평가한다. ⑥ <1-2>에서 주어진 부등식을 보일 수 있는지를 평가한다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 4와 5 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	

문항 2

제시문

[다]

함수 $y = f(x)$ 의 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여

$$f(x+p) = f(x)$$

를 만족시키는 0이 아닌 상수 p 가 존재할 때, 함수 $y = f(x)$ 를 주기함수라 하고 상수 p 중에서 최소인 양수를 그 함수의 주기라고 한다.

두 주기함수의 곱의 정적분을 생각해보자. 예를 들어, 연속함수 $G(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $G(x+\pi) = G(x)$ 를 만족시킬 때, 임의의 자연수 n 에 대하여

$$a = \int_0^{2\pi} G(x) \sin x dx, \quad b = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} G(x) \sin x dx$$

라 하면, $a = b = 0$ 임을 다음과 같이 보일 수 있다.

$x - 2n\pi = t$ 로 놓으면, $\frac{dx}{dt} = 1$ 이고

$$b = \int_0^{2\pi} G(t+2n\pi) \sin(t+2n\pi) dt = \int_0^{2\pi} G(t) \sin t dt = a$$

이다. 이제 정적분의 성질을 이용하여 적분 구간을 나누면

$$a = \int_0^{2\pi} G(x) \sin x dx = \int_0^{\pi} G(x) \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} G(x) \sin x dx \quad \dots\dots (1)$$

이다. 이때, $\int_{\pi}^{2\pi} G(x) \sin x dx$ 의 값을 구하기 위해, $x - \pi = u$ 로 놓으면 $\frac{dx}{du} = 1$ 이고

$$\int_{\pi}^{2\pi} G(x) \sin x dx = \int_0^{\pi} G(u+\pi) \sin(u+\pi) du = - \int_0^{\pi} G(u) \sin u du$$

이다. 따라서 (1)에 의하여 $a = 0$ 이다.

[라]

$\int_{-1}^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$ 의 값을 생각해보자.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = -[\ln(1 + e^{-x})]_{-1}^1 = -\ln \frac{1 + e^{-1}}{1 + e} = 1$$

이다. 한편,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

이다.

제시문 <다>와 <라>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 연속함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = g(x)$ 를 만족시키고, 연속함수 $h(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $h(x+2) = h(x)$ 를 만족시키고

$$h(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 1) \\ 2-x & (1 \leq x < 2) \end{cases}$$

이다. 정적분 $\int_0^2 g(x)h(x)dx$ 의 값을 A 라 할 때, 임의의 자연수 n 에 대하여 정적분

$$\int_{2n}^{2(n+1)} g(x)h(x)dx, \quad \int_0^1 g(x)dx$$

의 값을 각각 구하시오.

2-2. 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이고 $f(x)f(-x) = 1$ 을 만족시킬 때, 정적분

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\{f(x)\}^4 + 1} dx$$

의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

2-1

정적분 $\int_{2n}^{2(n+1)} g(x)h(x)dx$ 에서 $x - 2n = t$ 로 놓으면, $\frac{dx}{dt} = 1$ 이고

$$\int_{2n}^{2(n+1)} g(x)h(x)dx = \int_0^2 g(t+2n)h(t+2n)dt = \int_0^2 g(t)h(t)dt = A$$

이다.

이제 정적분의 성질을 이용하여 적분 구간을 나누면

$$A = \int_0^2 g(x)h(x)dx = \int_0^1 xg(x)dx + \int_1^2 (2-x)g(x)dx \quad \dots (1)$$

이다. 이때 $\int_1^2 (2-x)g(x)dx$ 의 값을 구하기 위해, $x - 1 = t$ 로 놓으면, $\frac{dx}{dt} = 1$ 이고

$$\int_1^2 (2-x)g(x)dx = \int_0^1 (1-t)g(t+1)dt = \int_0^1 (1-t)g(t)dt$$

이다.

따라서 (1)에 의하여 $A = \int_0^2 g(x)h(x)dx = \int_0^1 xg(x)dx + \int_0^1 (1-x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$ 이다.

2-2

정적분 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\{f(x)\}^4 + 1} dx$ 에서 $f(x) = \frac{1}{f(-x)}$ 이므로

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\{f(x)\}^4 + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\left\{\frac{1}{f(-x)}\right\}^4 + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{\{f(-x)\}^4}{\{f(-x)\}^4 + 1} dx$$

이다.

$-x = t$ 로 놓으면, $\frac{dx}{dt} = -1$ 이고

$$\int_{-1}^1 \frac{\{f(-x)\}^4}{\{f(-x)\}^4 + 1} dx = - \int_1^{-1} \frac{\{f(t)\}^4}{\{f(t)\}^4 + 1} dt = \int_{-1}^1 \frac{\{f(t)\}^4}{\{f(t)\}^4 + 1} dt$$

이다.

따라서

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\{f(x)\}^4 + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{\{f(x)\}^4}{\{f(x)\}^4 + 1} dx \quad \dots (2)$$

이고,

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\{f(x)\}^4 + 1} + \frac{\{f(x)\}^4}{\{f(x)\}^4 + 1} \right] dx = \int_{-1}^1 \frac{\{f(x)\}^4 + 1}{\{f(x)\}^4 + 1} dx = 2$$

이다.

(2)에 의하여 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\{f(x)\}^4 + 1} dx = 1$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1 2-2	① 제시문 <다>와 <라>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다. ② 제시문 <다>와 <라>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다. ③ <2-1>에서는 정적분 $\int_{2n}^{2(n+1)} g(x)h(x)dx$의 값을 정확히 도출하였는지를 평가한다. ④ <2-1>에서는 정적분 $\int_0^1 g(x)dx$의 값을 정확히 도출하였는지를 평가한다. ⑤ <2-2>에서는 문제에서 주어진 함수의 조건을 풀이에 적절히 활용하는지를 평가한다. ⑥ <2-2>에서는 주어진 정적분의 값을 정확히 구할 수 있는지를 평가한다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 4와 5 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	

문항 3

제시문

[마]

● <이차방정식의 근과 계수의 관계>

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

이다.

[바]

② 이차방정식 $F(x) = 0$ 의 두 근이 유리수이면 방정식 $F'(x) = 0$ 의 근은 유리수이다.

a, b 는 실수이고 $a \leq \frac{1}{4}$ 일 때, 삼차함수 $f(x) = (x^2 + x + a)(x - b)$ 를 생각해보자. 이때,

$$x^2 + x + a = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1-4a}{4}$$

이다. 따라서 두 방정식 $f(x) = 0, f'(x) = 0$ 은 각각

$$\left\{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1-4a}{4}\right\} \left\{\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(b + \frac{1}{2}\right)\right\} = 0, \quad \dots\dots (1)$$

$$3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(b + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1-4a}{4} = 0 \quad \dots\dots (2)$$

이 된다. 이제

$$x + \frac{1}{2} = t, b + \frac{1}{2} = u, \frac{1-4a}{4} = v^2 \quad \dots\dots (3)$$

으로 놓으면, x 에 대한 삼차방정식 (1)은 t 에 대한 삼차방정식

$$(t^2 - v^2)(t - u) = 0 \quad \dots\dots (4)$$

이 된다. 이때, 방정식 (4)의 근 u 와 $\pm v$ 가 유리수이면 (3)에 의해 b 는 유리수가 되고 $1 - 4a = 4v^2$ 이므로 x 에 대한 삼차방정식 $f(x) = 0$ 의 세 근 $\frac{-1 \pm 2v}{2}, b$ 는 유리수이다. 이때, 방정식 (4)의 좌변을 t 에 대하여 미분한 후, 방정식

$$3t^2 - 2ut - v^2 = 0 \quad \dots\dots (5)$$

을 생각하면, 방정식 (5)는 (3)에 의해 방정식 (2)와 같다. t 에 대한 이차방정식 (5)의 근은

$$\frac{u \pm \sqrt{u^2 + 3v^2}}{3} \quad \dots\dots (6)$$

이다.

제시문 <마>와 <바>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. b 가 자연수일 때, 삼차함수 $g(x) = x(x-1)(x-b)$ 에 대하여 방정식 $g'(x) = 0$ 의 두 근이 동시에 정수가 될 수 없음을 제시문 <마>를 이용하여 보이시오.

3-2. 제시문 <바>에 있는 명제 ②가 참임을 증명하시오. 또한 t 에 대한 삼차방정식 (4)에서 $u = 1$ 일 때, 제시문 <바>에 있는 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 세 방정식

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \quad f''(x) = 0$$

의 모든 근이 유리수가 되게 하는 4 이하의 자연수 v 를 식 (6)을 이용하여 모두 찾고, 이에 대응하는 삼차함수

$$f(x) = (x^2 + x + a)(x - b)$$

를 각각 구하시오.

■ 예시 답안

3-1

b 가 자연수일 때, 삼차함수 $g(x) = x(x-1)(x-b) = x^3 - (b+1)x^2 + bx$ 에 대하여

$g'(x) = 3x^2 - 2(b+1)x + b$ 이다.

이차방정식 $g'(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 <이차방정식의 근과 계수의 관계>에 의해

$$\alpha + \beta = \frac{2}{3}(b+1), \alpha\beta = \frac{b}{3} \quad \cdots (1)$$

이다.

α, β 가 모두 정수라 가정하면, b 가 자연수이므로 (1)에 의해 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 자연수이며,

$$2(b+1) = 3(\alpha + \beta) \quad \cdots (2)$$

$$b = 3\alpha\beta \quad \cdots (3)$$

이다.

3은 2와 서로소이므로 (2)에 의해 $b+1$ 은 3의 배수이고, (3)에 의해 b 는 3의 배수이다.

이는 모순이므로 방정식 $g'(x) = 0$ 의 두 근이 동시에 정수가 될 수 없다.

3-2

이차함수 $F(x) = a(x-r)(x-s)$ 에 대해 $F'(x) = a(2x-r-s)$ 이다.

이차방정식 $F(x) = 0$ 의 두 근 r, s 가 유리수이면, 방정식 $F'(x) = 0$ 의 근 $\frac{r+s}{2}$ 는 유리수이다.

$u = 1$ 일 때, 제시문 <바>에 있는 식 (6)은 $\frac{1 \pm \sqrt{1+3v^2}}{3}$ 이다.

(i) $v = 1$ 이면 $\frac{1 \pm \sqrt{1+3v^2}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3}$ 이므로, 제시문 <바>에 있는 t 에 대한 방정식 (5)의 두 근은 유리수가 된다.

그런데 제시문 <바>에 있는 (3)에서 $x = t - \frac{1}{2}$ 이므로, 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근은 유리수가 된다.

한편, 제시문 <바>에 있는 (3)에 의해 $1 = b + \frac{1}{2}, 1 = \frac{1-4a}{4}$ 이므로 $a = -\frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $v = 1$ 에 대응하는 $f(x) = 0, f'(x) = 0$ 의 모든 근이 유리수가 되게 하는 삼차함수는

$$f(x) = \left(x^2 + x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{이다.}$$

이때, 명제 ②에 의해 방정식 $f''(x) = 0$ 의 근도 유리수이다.

(ii) $v = 2$ 이면 $\frac{1 \pm \sqrt{1+3v^2}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$ 이므로, 제시문 <바>에 있는 t 에 대한 방정식 (5)의 두 근은 무리수가 된다.

그런데 제시문 <바>에 있는 (3)에서 $x = t - \frac{1}{2}$ 이므로, 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근은 무리수가 된다.

따라서 $v = 2$ 에 대응하는 $f'(x) = 0$ 의 모든 근이 유리수가 되게 하는 삼차함수 $f(x) = (x^2 + x + a)(x - b)$ 는 존재하지 않는다.

(iii) $v = 3$ 이면 $\frac{1 \pm \sqrt{1+3v^2}}{3} = \frac{1 \pm 2\sqrt{7}}{3}$ 이므로, 제시문 <바>에 있는 t 에 대한 방정식 (5)의 두 근은 무리수가 된다.

그런데 제시문 <바>에 있는 (3)에서 $x = t - \frac{1}{2}$ 이므로, 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근은 무리수가 된다.

따라서 $v = 3$ 에 대응하는 $f'(x) = 0$ 의 모든 근이 유리수가 되게 하는 삼차함수 $f(x) = (x^2 + x + a)(x - b)$ 는 존재하지 않는다.

(iv) $v = 4$ 이면 $\frac{1 \pm \sqrt{1+3v^2}}{3} = \frac{1 \pm 7}{3}$ 이므로, 제시문 <바>에 있는 t 에 대한 방정식 (5)의 두 근은 유리수가 된다.

그런데 제시문 <바>에 있는 (3)에서 $x = t - \frac{1}{2}$ 이므로, 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근은 유리수가 된다.
 한편, 제시문 <바>에 있는 (3)에 의해 $1 = b + \frac{1}{2}$, $16 = \frac{1-4a}{4}$ 이므로 $a = -\frac{63}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ 이다.
 따라서 $v = 4$ 에 대응하는 $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ 의 모든 근이 유리수가 되게 하는 삼차함수는
 $f(x) = \left(x^2 + x - \frac{63}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ 이다. 이때 명제 ②에 의해 방정식 $f''(x) = 0$ 의 근도 유리수이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1 3-2	① 제시문 <마>와 <바>의 핵심 내용을 정확하게 파악한다. ② 제시문 <마>와 <바>에서 논의된 과정을 문제에 적용하여 설명한다. ③ <3-1>에서는 삼차함수의 도함수를 구한 다음, 근과 계수의 관계를 알맞게 활용하였는지를 평가한다. ④ <3-1>에서는 주어진 문제를 적절히 해결할 수 있는지를 평가한다. ⑤ <3-2>에서는 명제 ②를 정확히 증명하였는지를 평가한다. ⑥ <3-2>에서는 주어진 조건을 만족시키는 삼차함수를 알맞게 도출하였는지를 평가한다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 4와 5 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다