

숙명여대논술

자연계(약학부)

목차

2026학년도 자연계열(약학부)	3
문항 1	3
문항 2	6
문항 3	9
2025학년도 자연계열(약학부)	12
문항 1	12
문항 2	15
문항 3	18

2026학년도 자연계열(약학부)

문항 1

제시문

[가] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

[나] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

[다] 어떤 명제가 참임을 증명할 때, 그 명제 또는 명제의 결론을 부정하면 모순이 생긴다는 것을 보여도 된다. 이와 같이 증명하는 방법을 귀류법이라고 한다.

제시문 <가>, <나>, <다>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

- 1-1. 이차함수 $y = x^2 + a$ 와 무리함수 $y = \sqrt{x+1}$ 이 열린구간 $(1, 3)$ 에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하시오.
- 1-2. 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능한 함수라고 하자. 함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 있는 모든 실수 x 에 대하여 $|f'(x)| < 1$ 을 만족시킬 때, $f(c) = 2c$ 인 c 의 개수가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 하나 이하로 존재함을 귀류법을 이용하여 증명하시오.

■ 예시 답안

1-1.

$f(x) = x^2 + a - \sqrt{x+1}$ 라고 하면 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이다. 제시문 <가>(사잇값 정리)에 의해 $f(1)f(3) < 0$ 이면 $f(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다. 즉, 이차함수 $y = x^2 + a$ 와 무리함수 $y = \sqrt{x+1}$ 이 열린구간 $(1, 3)$ 에서 만난다.

$f(1) = a + 1 - \sqrt{2}$ 이고 $f(3) = a + 7$ 이므로 $f(1)f(3) < 0$ 에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$(a + 1 - \sqrt{2})(a + 7) < 0$$

그러므로 실수 a 의 값의 범위는 $-7 < a < \sqrt{2} - 1$ 이다.

참고로 열린구간 $(1, 3)$ 에서 도함수 $f'(x)$ 는 다음을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{4x\sqrt{x+1} - 1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \end{aligned}$$

따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$f(1) < 0, f(3) > 0$$

1-2.

귀류법을 사용하기 위해 $f(c_1) = 2c_1$ 이고 $f(c_2) = 2c_2$ 인 서로 다른 c_1, c_2 가 구간 $[0, 1]$ 에 존재한다고 가정하자. 여기서 $c_1 \neq c_2$ 이므로 $c_1 < c_2$ 라고 하자. 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[c_1, c_2]$ 에서 연속이고 열린구간 (c_1, c_2) 에서 미분가능하므로 제시문 <나>(평균값 정리)에 의해

$$\frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} = f'(c)$$

인 c 가 열린구간 (c_1, c_2) 에서 적어도 하나 존재한다. 위의 식으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$f'(c) = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{c_2 - c_1} = \frac{2c_2 - 2c_1}{c_2 - c_1} = 2$$

그런데 c 는 열린구간 $(0, 1)$ 에 있고 $f'(c) = 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 있는 모든 실수 x 에 대하여 $|f'(x)| < 1$ 이라는 사실에 모순이다. 그러므로 $f(c) = 2c$ 인 c 의 개수가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 하나 이하로 존재한다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1 1-2	■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다. ① <1-1>에서 이차함수와 무리함수가 연속함수임을 이해한다. ② <1-1>에서 사잇값 정리를 이해하고 활용할 수 있다. ③ <1-1>에서 이차부등식을 정확히 풀 수 있다. ④ <1-2>에서 명제의 부정을 정확히 기술할 수 있다. ⑤ <1-2>에서 평균값 정리를 이해할 수 있다. ⑥ <1-2>에서 귀류법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.	
	위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우	1등급
	위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우	2등급
	위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우	3등급
	위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우	4등급
	위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)	5등급
	위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우	6등급
	위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우	7등급
	위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우	8등급
	위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	9등급

문항 2

제시문

[라] 두 함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이다. 함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 원점에 대해 대칭이므로 $\sin(-x) = -\sin x$ 이고, 함수 $y = \cos x$ 의 그래프는 y 축에 대해 대칭이므로 $\cos(-x) = \cos x$ 이다. 두 함수 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 의 그래프는 2π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 즉, 임의의 실수 x 에 대하여

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2n\pi) = \cos x \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

가 성립한다.

[마] 첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$1. r \neq 1 \text{ 일 때, } S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ 이고,}$$

$$2. r = 1 \text{ 일 때, } S_n = na \text{ 이다.}$$

제시문 <라>와 <마>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

함수 $f(x) = e^{-x}$ 은 실수 전체의 집합에서 정의된 지수함수이다.

- 2-1. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 부등식 $\sin x \leq \frac{1}{2}$ 을 풀고, 해당하는 x 의 값의 범위에 대하여 함수 $f(x)$ 의 정적분의 값을 구하시오.
- 2-2. $0 \leq x \leq 100\pi$ 일 때, 부등식 $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ 에 해당하는 x 의 값의 범위에 대하여 함수 $f(x)$ 의 정적분의 값이 $(e^{\frac{5\pi}{6}} - e^{\frac{\pi}{6}})k$ 가 되는 실수 k 의 값을 구하시오.

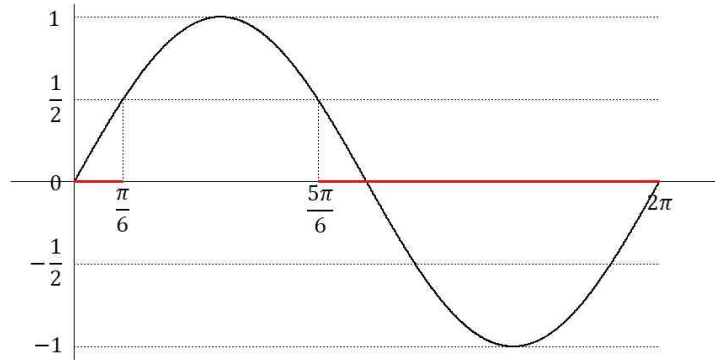
■ 예시 답안

2-1.

$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 이므로, $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 부등식 $\sin x \leq \frac{1}{2}$ 의 해는 아래 그림에서 표시된 것과 같이

$$\left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right\} \cup \left\{x \mid \pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2\pi\right\}$$

가 된다.



그러므로 $f(x)$ 의 정적분의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-x} dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{2\pi} e^{-x} dx &= [-e^{-x}]_0^{\frac{\pi}{6}} + [-e^{-x}]_{\frac{5\pi}{6}}^{2\pi} \\ &= 1 - e^{-\frac{\pi}{6}} + e^{-\frac{5\pi}{6}} - e^{-2\pi} \end{aligned}$$

2-2.

아래 그림에서 보는 것과 같이 $0 \leq x \leq 100\pi$ 에서 $\sin x = -\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 첫 번째 x 는 $\pi + \frac{\pi}{6}$ 이다. 사인함수는 주기가 2π 인 주기함수이므로 아래 그림에서 보는 것과 같이 $\sin x = -\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 홀수 번째 x 의 값은

$$x = (2n-1)\pi + \frac{\pi}{6} \quad (n = 1, 2, \dots, 50)$$

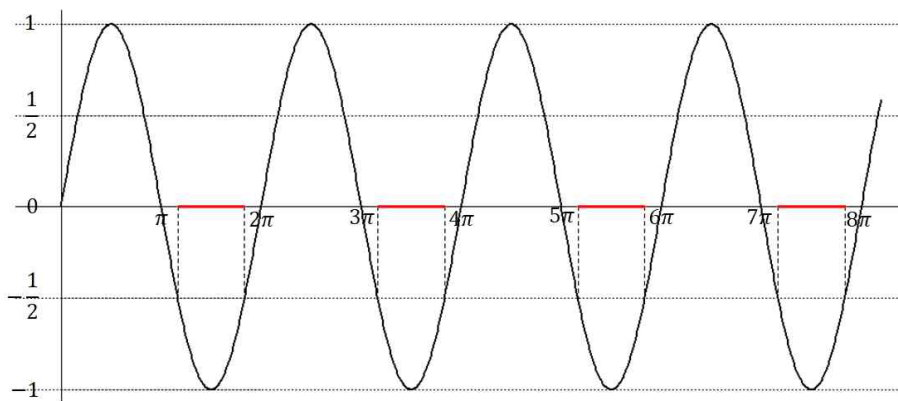
이다. 마찬가지로 짝수 번째 x 의 값은

$$x = 2n\pi - \frac{\pi}{6} \quad (n = 1, 2, \dots, 50)$$

이다. 따라서

$$A_n = \left\{x \mid (2n-1)\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2n\pi - \frac{\pi}{6}\right\}$$

이라고 하면, $0 \leq x \leq 100\pi$ 일 때, 부등식 $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ 의 해는 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{50}$ 로 표시할 수 있다.



해당하는 x 의 값의 범위에 대하여 함수 $f(x)$ 의 정적분의 값은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{50} \int_{(2n-1)\pi+\frac{\pi}{6}}^{2n\pi-\frac{\pi}{6}} e^{-x} dx &= \sum_{n=1}^{50} [-e^{-x}]_{(2n-1)\pi+\frac{\pi}{6}}^{2n\pi-\frac{\pi}{6}} \\ &= \sum_{n=1}^{50} [e^{-\{(2n-1)\pi+\frac{\pi}{6}\}} - e^{-(2n\pi-\frac{\pi}{6})}] \\ &= (e^{\frac{5\pi}{6}} - e^{\frac{\pi}{6}}) \sum_{n=1}^{50} e^{-2n\pi} \end{aligned}$$

여기서 $\sum_{n=1}^{50} e^{-2n\pi}$ 는 첫째항이 $e^{-2\pi}$, 공비가 $e^{-2\pi}$ 인 등비수열의 50항까지의 합이다. 제시문 <마>에 의해

$$\sum_{n=1}^{50} e^{-2n\pi} = \frac{e^{-2\pi}((e^{-2\pi})^{50} - 1)}{e^{-2\pi} - 1} = \frac{e^{-2\pi}(1 - e^{-100\pi})}{1 - e^{-2\pi}}$$

이다. 그러므로

$$k = \frac{e^{-2\pi}(1 - e^{-100\pi})}{1 - e^{-2\pi}}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다. ① <2-1>에서 삼각함수를 포함한 부등식을 풀 수 있다. ② <2-1>에서 해당하는 x의 값의 범위에 대하여 함수 $f(x)$의 정적분으로 표현할 수 있다. ③ <2-1>에서 정적분의 값을 계산할 수 있다. ④ <2-2>에서 삼각함수를 포함한 부등식을 풀 수 있다. ⑤ <2-2>에서 해당하는 x의 값의 범위에 대하여 함수 $f(x)$의 정적분으로 표현할 수 있다. ⑥ <2-2>에서 등비수열의 합을 이용하여 정적분의 값을 계산할 수 있다.	
2-1	위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우	1등급
2-2	위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우	2등급
	위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우	3등급
	위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우	4등급
	위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)	5등급
	위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우	6등급
	위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우	7등급
	위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우	8등급
	위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	9등급

문항 3

제시문

[바] 함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일대응이면 Y 의 각 원소 y 에 대하여 $y = f(x)$ 인 X 의 원소 x 가 오직 하나 존재한다. 이때 Y 의 각 원소 y 에 $y = f(x)$ 인 X 의 원소 x 를 대응시키면 Y 를 정의역, X 를 공역으로 하는 새로운 함수를 정의할 수 있다. 이 함수를 함수 f 의 역함수라 하고, 기호로

$$f^{-1}: Y \rightarrow X, x = f^{-1}(y)$$

와 같이 나타낸다.

[사] 지수함수 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수를 갖는다. 이때 로그의 정의에 의하여

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

이므로, $x = \log_a y$ 에서 x 와 y 를 서로 바꾸면 지수함수 $y = a^x$ 의 역함수

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

를 얻는다. 이 함수를 a 를 밑으로 하는 로그함수라고 하며 다음과 같은 성질을 갖는다.

1. 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고 치역은 실수 전체의 집합이다.
2. $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
3. 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지나고, y 축을 점근선으로 갖는다.

특히, a 가 자연상수 $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 인 경우에 자연로그라 하고, $y = \ln x$ 로 나타낸다.

제시문 <바>와 <사>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

함수 $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라고 하자.

3-1. $x > 0$ 에 대하여 $f(x) > x$ 임을 보이시오.

3-2. $y = g(x)$ 의 그래프를 그리시오.

■ 예시 답안

3-1.

주어진 함수

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$$

의 정의역은 다음과 같다.

$$\{x \mid -1 < x < 1\}$$

이제 두 함수의 차 $f(x) - x$ 를 $h(x)$ 라 두자. 즉,

$$h(x) = f(x) - x$$

이다. 함수 $h(x)$ 를 미분하면

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - 1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) - 1 \\ &= \frac{x^2}{1-x^2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $0 < x < 1$ 에서

$$h'(x) > 0$$

이므로 $h(x)$ 는 증가함수이다. 또한 $h(0) = 0$ 이므로 $x > 0$ 에 대하여

$$h(x) > h(0) = 0$$

을 만족시킨다. 따라서 $x > 0$ 에 대하여

$$f(x) > x$$

가 성립한다.

3-2.

$y = f(x)$ 의 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭하여 얻을 수 있다. $y = f(x)$ 의 그래프를 그리기 위해 함수의 증감을 확인하면 다음과 같다. 정의역 $\{x \mid -1 < x < 1\}$ 에서

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} > 0$$

이다. 한편

$$f''(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

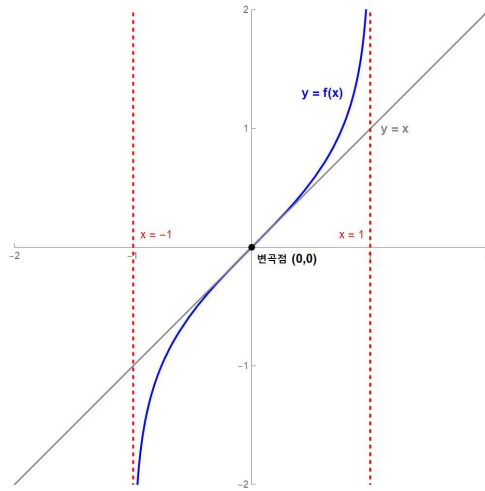
이다. 이로부터 점 $(0, 0)$ 은 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점임을 알 수 있다. 또한

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

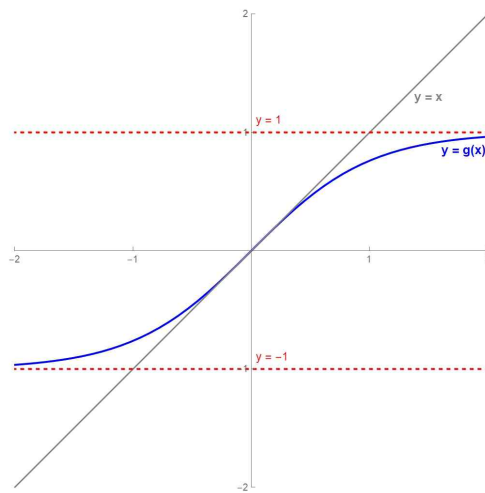
이다. 따라서 두 직선 $x = 1$ 과 $x = -1$ 이 점근선이 된다. 그리고

$$f'(0) = 1$$

이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에서 $y = x$ 에 접한다. 이제 이를 이용하여 그래프를 그리면 다음과 같다.



직선 $y = x$ 에 관하여 대칭하면 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프를 다음과 같이 얻을 수 있다.



■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-1 3-2	■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다. ① <3-1>에서 $f(x)$의 정의역을 구할 수 있다. ② <3-1>에서 도함수를 이용하여 $h(x) = f(x) - x$가 증가함수임을 보일 수 있다. ③ <3-1>에서 $h(x) > h(0) = 0$을 이용하여 $f(x) > x$임을 보일 수 있다. ④ <3-2>에서 이계도함수를 이용하여 변곡점을 구할 수 있다. ⑤ <3-2>에서 주어진 함수의 점근선을 구할 수 있다. ⑥ <3-2>에서 $y = x$에 대한 대칭성을 이용하여 역함수의 그래프를 그릴 수 있다.	
	위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우	1등급
	위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우	2등급
	위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우	3등급
	위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우	4등급
	위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)	5등급
	위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우	6등급
	위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우	7등급
	위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우	8등급
	위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우	9등급

2025학년도 자연계열(약학부)

문항 1

제시문

[가] 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

[나] 함수 $y = f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면, 최대·최소 정리에 따라 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 이때 이 구간에서 $f(x)$ 의 극댓값, 극솟값, $f(a), f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이 된다.

제시문 <가>, <나>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

- 1-1. 이차방정식 $x^2 - (e^k - 2)x - 2e^k + 1 = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$ 이 최소가 되는 실수 k 의 값과 그때 $\alpha^3 + \beta^3$ 의 값을 구하시오.
- 1-2. 삼차함수 $f(x) = (x^2 - 1)(x + 3k)$ 의 극댓값과 극솟값의 합이 최대가 되는 실수 k 의 값과 그때 극댓값과 극솟값의 합을 구하시오. (단, $-\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}$)

■ 예시 답안

1-1

주어진 이차방정식의 판별식

$$D = e^{2k} - 4e^k + 4 + 8e^k - 4 = e^{2k} + 4e^k > 0$$

이므로 이차방정식은 항상 서로 다른 두 실근을 가진다. 또한 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = e^k - 2, \quad \alpha\beta = 1 - 2e^k$$

이다. 따라서

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = (e^k - 2)^3 - 3(1 - 2e^k)(e^k - 2) \quad \dots\dots ①$$

이다. 이때 $t = e^k$ ($t > 0$)라고 두고, $f(t) = (t - 2)^3 - 3(1 - 2t)(t - 2)$ 라 하자.

$$f'(t) = 3(t - 2)^2 + 6(t - 2) - 3(1 - 2t) = 3t^2 - 3 = 3(t + 1)(t - 1)$$

이므로 $f'(t) = 0$ 에서 $t = \pm 1$ 이다.

t	0	...	1	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	-4	$\nearrow$

따라서 $t = 1$, 즉 $k = 0$ 일 때, $\alpha^3 + \beta^3$ 의 최솟값은 $f(1) = -4$ 이다.

(별해) ①로부터 $g(k) = (e^k - 2)^3 - 3(1 - 2e^k)(e^k - 2)$ 라 하면,

$$g'(k) = e^k \{ 3(e^k - 2)^2 + 6(e^k - 2) - 3(1 - 2e^k) \} = 3e^k(e^k + 1)(e^k - 1) = 0$$

이므로 $g'(k) = 0$ 에서 $k = 0$ 이다.

k	...	0	...
$g'(k)$	-	0	+
$g(k)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

따라서 $k = 0$ 일 때, $\alpha^3 + \beta^3$ 의 최솟값은 $g(0) = -4$ 이다.

1-2

도함수 $f'(x) = 2x(x + 3k) + x^2 - 1 = 3x^2 + 6kx - 1$ 이다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식

$$D/4 = 9k^2 + 3 > 0$$

이므로 $f'(x) = 0$ 은 항상 서로 다른 두 실근을 가진다.

$f'(x) = 0$ 의 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라고 하면 $f'(x) = 0$ 의 근과 계수의 관계에서

$$\alpha + \beta = -2k, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{3}$$

이다. 따라서

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4k^2 + \frac{2}{3},$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = -8k^3 - 2k$$

삼차함수 $f(x)$ 의 삼차항의 계수가 1로 양수이고 $\alpha < \beta$ 이므로 $f(\alpha)$ 는 극댓값, $f(\beta)$ 는 극솟값이다. 따라서

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= \alpha^3 + \beta^3 + 3k(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha + \beta) - 6k \\ &= -8k^3 - 2k + 12k^3 + 2k + 2k - 6k \\ &= 4k^3 - 4k \end{aligned}$$

여기서 $g(k) = 4k^3 - 4k$ 라고 하면, $g'(k) = 4(3k^2 - 1)$ 이므로 $g'(k) = 0$ 에서 $k = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

k	$-\sqrt{3}$	$\dots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\dots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\dots$	$\sqrt{3}$
$g'(k)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(k)$	$-8\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\frac{8\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$8\sqrt{3}$

따라서 $k = \sqrt{3}$ 일 때 $f(\alpha) + f(\beta)$ 를 최대로 하고 최댓값은 $g(\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
1-1 1-2	① <1-1>, <1-2>에서 근과 계수의 관계를 정확히 이해한다. ② <1-1>에서 곱셈 공식을 활용할 수 있다. ③ <1-1>에서 $\alpha^3 + \beta^3$의 최솟값과 실수 k의 값을 구할 수 있다. ④ <1-2>에서 도함수의 근과 계수의 관계를 활용할 수 있다. ⑤ <1-2>에서 곱셈 공식을 활용할 수 있다. ⑥ <1-2>에서 최댓값을 구할 수 있다. 1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

문항 2

제시문

[다] 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이므로 어떤 명제가 참임을 증명할 때에는 그 대우가 참임을 증명해도 된다.

[라] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 c 가 a 와 b 사이에 적어도 하나 존재한다. 이것을 사잇값의 정리라고 한다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a)$ 와 $f(b)$ 의 부호가 서로 다르면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 a 와 b 사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다.

제시문 <다>, <라>를 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, $f(a) > 0, f(b) > 0$ 이다. 다음 명제의 대우를 말하고 그것이 참임을 증명하시오.

방정식 $f(x) = 0$ 이 열린구간 (a, b) 에서 실근을 갖지 않는다면 열린구간 (a, b) 의 모든 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이다.

2-2. 양수 k 에 대하여 삼차방정식 $x^3 - 2x = k$ 가 닫힌구간 $[-k, k]$ 에서 실근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위를 구하시오.

■ 예시 답안

2-1

주어진 명제의 대우는

‘열린구간 (a, b) 의 어떤 x 에 대하여 $f(x) \leq 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 (a, b) 에서 실근을 갖는다.’이다.

조건에 의하여 $f(c) \leq 0$ 인 실수 c 가 a 와 b 사이에 존재한다.

만약 $f(c) = 0$ 이면 $x = c$ 는 방정식 $f(x) = 0$ 의 근이다.

만약 $f(c) < 0$ 이면 $f(a) > 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 a 와 c 사이에 적어도 하나의 실근을 갖고, 또한 $f(b) > 0$ 이므로 c 와 b 사이에 적어도 하나의 실근을 갖는다. 따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 (a, b) 에서 실근을 갖는다.

2-2

$f(x) = x^3 - 2x$ 라 하면 방정식 $f(x) = k$ 의 근은 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = k$ 의 교점의 x 좌표이다.

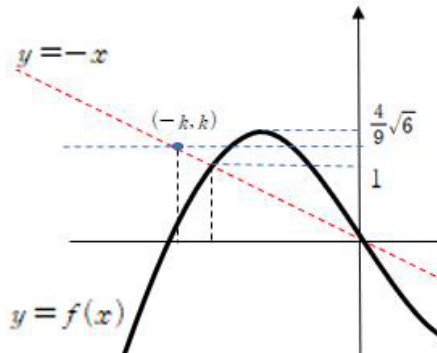
$f'(x) = 3x^2 - 2$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서 $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다.

x		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		$\frac{\sqrt{6}}{3}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{9}\sqrt{6}$	$\searrow$	$-\frac{4}{9}\sqrt{6}$	$\nearrow$

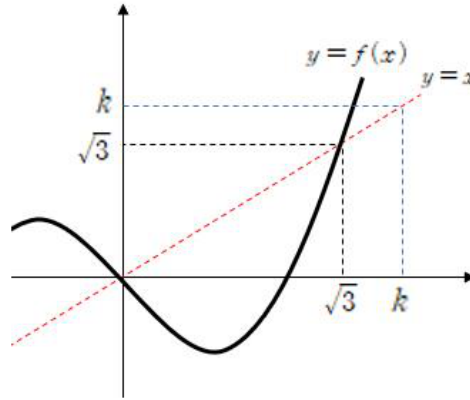
$0 < k \leq 1$ 인 경우에는 $f(-k) - k = -k^3 + k = k(1 - k^2) \geq 0$ 이므로 $f(-k) \geq k$ 이다. $f(0) = 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(x) = k$ 는 구간 $[-k, 0]$ 에서 실근을 갖는다.

$1 < k \leq \frac{4}{9}\sqrt{6}$ 인 경우에는 $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{4}{9}\sqrt{6} > k$ 이므로 $f(x) = k$ 는 구간 $\left[-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right]$ 에서 실근을 갖는다. 또

$-k < -1 < -\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로 $f(x) = k$ 는 구간 $[-k, 0]$ 에서 실근을 갖는다.



한편, $k > \frac{4}{9}\sqrt{6}$ 인 경우에는 방정식 $f(x) = k$ 는 $x < \sqrt{2}$ 인 근을 갖지 않는다. 따라서 방정식 $f(x) = k$ 가 닫힌 구간 $[\sqrt{2}, k]$ 에서 실근을 가져야 한다. 함수 $f(x)$ 는 $[\sqrt{2}, k]$ 에서 증가하고 $f(\sqrt{2}) = 0$ 이므로 $f(k) \geq k$ 가 되어야 한다. 이 부등식을 풀면 $k^3 - 3k \geq 0$ 이므로 $k \geq \sqrt{3}$ 이다.



모든 경우를 고려하면 구하는 k 의 값의 범위는 $0 < k \leq \frac{4}{9}\sqrt{6}$ 또는 $k \geq \sqrt{3}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
2-1	① <2-1>에서 명제의 대우를 바르게 말할 수 있다. ② <2-1>에서 명제의 가정을 두 가지 경우로 나누어 설명할 수 있다. ③ <2-1>에서 사잇값의 정리를 활용하여 명제가 참임을 증명할 수 있다. ④ <2-2>에서 함수의 그래프의 개형을 파악한다. ⑤ <2-2>에서 k 의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 설명할 수 있다. ⑥ <2-2>에서 사잇값의 정리를 활용하여 실근을 갖는 k 의 값의 범위를 구할 수 있다.
2-2	1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우 2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우 3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우 4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우 5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외) 6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우 7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우 8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우 9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

문항 3

제시문

[마] 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 A 는

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

[바] 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 a, b, c 를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

[사] 점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

[아] 자연수 n 에 대한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 증명할 때, 다음 두 가지를 증명하면 된다.

(i) $n = 1$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면, $n = k + 1$ 일 때도 명제 $p(n)$ 이 성립한다.

자연수에 대한 어떤 명제가 참임을 증명하는 이와 같은 방법을 수학적 귀납법이라고 한다.

제시문 <마>, <바>, <사>, <아>를 읽고, 다음 조건을 만족시키는 a_n 에 대하여 문제에 답하시오.

자연수 n 에 대하여 $a_1 = 1$ 이고 $a_n < a_{n+1}$ 이다. 함수 $f(x) = \frac{2x}{e^2 - 1} e^{x^2}$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x = a_n, x = a_{n+1}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 A_n 이 $A_n = e^{2n-1}$ 이다.

3-1. x 축, y 축에 모두 접하고 중심이 점 (a_n, a_n) 인 원이 직선 $y = \left(\tan \frac{1}{n}\right)x$ 와 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n 이라 하자. 선분 $P_n Q_n$ 의 길이를 l_n 이라 할 때 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n^2$ 의 값을 구하시오.

3-2. 모든 자연수 n 에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$\sum_{m=1}^{n^2} \frac{1}{a_m} \geq n$$

■ 예시 답안

3-1

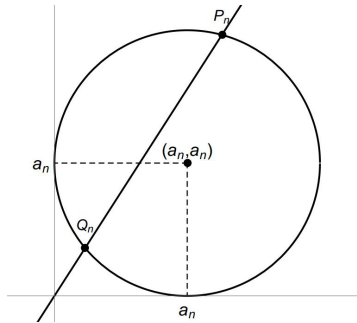
함수 $f(x)$ 의 a_1 부터 a_n 까지의 정적분은

$$\begin{aligned}\int_{a_1}^{a_n} \frac{2x}{e^2-1} e^{x^2} dx &= \int_{a_1}^{a_2} \frac{2x}{e^2-1} e^{x^2} dx + \int_{a_2}^{a_3} \frac{2x}{e^2-1} e^{x^2} dx + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{2x}{e^2-1} e^{x^2} dx \\ &= e + e^3 + \cdots + e^{2n-3} \\ \frac{1}{e^2-1} (e^{a_n^2} - e) &= \sum_{k=1}^{n-1} e^{2k-1} = \frac{1}{e^2-1} (e^{2n-1} - e)\end{aligned}$$

따라서 $a_n^2 = 2n - 1$, 즉 $a_n = \sqrt{2n-1}$ 이다.

점 (a_n, a_n) 과 직선 $(\tan \frac{1}{n})x - y = 0$ 사이의 거리를 d_n 으로 놓으면

$$d_n = \frac{|(\tan \frac{1}{n})a_n - a_n|}{\sqrt{\tan^2 \frac{1}{n} + 1}}$$



이다. 한편 $l_n = 2\sqrt{a_n^2 - d_n^2}$ 이므로,

$$l_n^2 = 4(a_n^2 - d_n^2) = 4 \left(a_n^2 - \frac{a_n^2 (\tan \frac{1}{n} - 1)^2}{1 + \tan^2 \frac{1}{n}} \right)$$

이다. 이때 삼각함수의 성질에 의하여 $1 + \tan^2 \frac{1}{n} = \sec^2 \frac{1}{n}$ 이므로

$$4 \left(a_n^2 - \frac{a_n^2 (\tan \frac{1}{n} - 1)^2}{1 + \tan^2 \frac{1}{n}} \right) = 4a_n^2 \left(1 - \frac{(\tan \frac{1}{n} - 1)^2}{\sec^2 \frac{1}{n}} \right) = 8a_n^2 \left(\frac{\tan \frac{1}{n}}{\sec^2 \frac{1}{n}} \right) = 8a_n^2 \left(\sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \right)$$

이다. 또한 $a_n = \sqrt{2n-1}$ 이므로

$$l_n^2 = 8(2n-1) \left(\sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \right)$$

이다. 이때, $t = \frac{1}{n}$ 이라 하면, $n \rightarrow \infty$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} l_n^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 8(2n-1) \left(\sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} 8 \left(\frac{2}{t} - 1 \right) (\sin t \cos t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} 8(2-t) \frac{\sin t}{t} \cos t = 16\end{aligned}$$

이다.

3-2

$a_n = \sqrt{2n-1}$ 이므로 주어진 부등식은

$$\sum_{m=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \geq n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이다.

$n = 1$ 일 때 $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq 1$ 이므로 $\textcircled{2}$ 가 성립한다.

$n = k$ 일 때 부등식 $\sum_{m=1}^{k^2} \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \geq k$ 가 성립한다고 가정하자.

위 부등식의 양변에 $\frac{1}{\sqrt{2k^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)^2-1}}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{k^2} \frac{1}{\sqrt{2m-1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)^2-1}} \\ & \geq k + \frac{1}{\sqrt{2k^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)^2-1}} \end{aligned}$$

여기에서,

$$\sum_{m=1}^{k^2} \frac{1}{\sqrt{2m-1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)^2-1}} = \sum_{m=1}^{(k+1)^2} \frac{1}{\sqrt{2m-1}}$$

이고

$\frac{1}{\sqrt{2k^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2k^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2(k+1)^2-1}}$ 의 항의 개수는 $2k+1$ 이므로

$$\sum_{m=1}^{(k+1)^2} \frac{1}{a_m} \geq k + \frac{2k+1}{\sqrt{2(k+1)^2-1}} = k + \sqrt{\frac{4k^2+4k+1}{2k^2+4k+1}} = k + \sqrt{1 + \frac{2k^2}{2k^2+4k+1}} \geq k+1$$

이므로 $n = k+1$ 일 때도 ②가 성립한다. 따라서 모든 자연수 n 에서 주어진 부등식이 성립한다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준
	① <3-1>에서 정적분의 성질을 이용하여 a_n 을 구할 수 있다. ② <3-1>에서 선분의 길이 l_n 을 구할 수 있다. ③ <3-1>에서 삼각함수의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있다. ④ <3-2>에서 주어진 부등식을 이해할 수 있다. ⑤ <3-2>에서 $n = k$ 에서 $n = k+1$ 이 되는 과정을 설명할 수 있다. ⑥ <3-2>에서 수학적 귀납법을 이용하여 부등식을 증명할 수 있다.
3-1	1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
3-2	2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
	3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
	4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
	5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
	6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
	7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
	8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
	9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다