

아주대논술

자연계열(약학과)

목차

2026학년도 자연계열 (약학과)	3
문항 1	3
문항 2	8
2025학년도 자연계열 (약학과)	13
문항 1	13
문항 2	16

2026학년도 자연계열 (약학과)

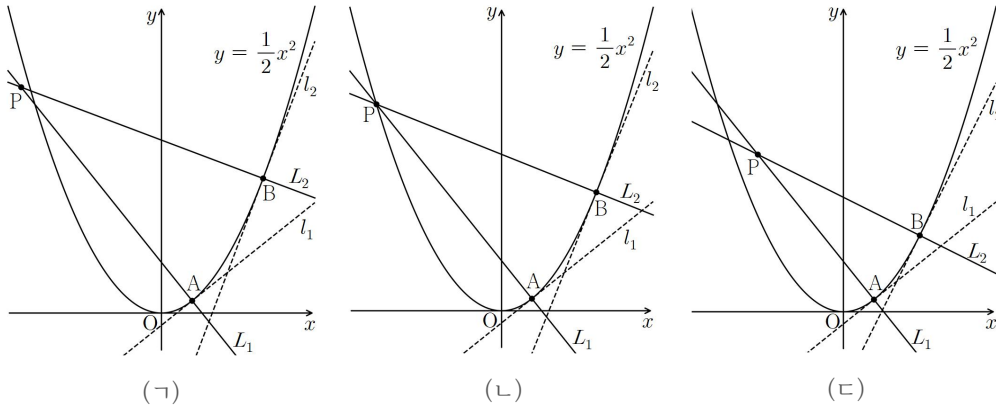
문항 1

[문항 1] [제시문] 을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

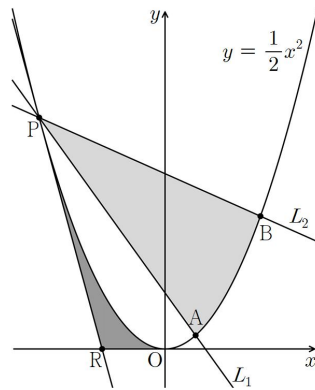
[가] 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 서로 다른 두 점 $A(a, \frac{1}{2}a^2)$, $B(b, \frac{1}{2}b^2)$ 을 생각하자. (단, $0 < a < b$)

곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점 A에서의 접선을 l_1 , 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점 B에서의 접선을 l_2 라 하자. 직선 l_1 에 수직이고 점 A를 지나는 직선을 L_1 , 직선 l_2 에 수직이고 점 B를 지나는 직선을 L_2 라 하고, L_1 과 L_2 의 교점을 P라 하자. 점 A와 점 B의 위치에 따라 점 P의 위치는 [그림 1]과 같이 세 가지 경우로 나뉜다.



[그림 1]

[나] [그림 1]의 (나)과 같이 점 P가 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점인 경우를 생각하자. 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점 P에서의 접선과 x 축의 교점을 R이라 하자. [그림 2]에서와 같이 점 P와 점 R을 지나는 직선과 x 축 및 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하고, 직선 L_1 과 직선 L_2 및 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하자.



[그림 2]

[문제 1-1] (28점) 제시문 (가)에 대한 다음 물음에 답하시오.

- (9점) $a = 3$ 일 때, 점 P의 y 좌표가 가질 수 있는 모든 값의 범위는 $y > \gamma$ 이다. γ 의 값을 구하시오.
- (9점) 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 과 직선 L_1 의 교점 중 점 A가 아닌 점을 H라 하자. 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위의 점 Q와 직선 L_1 사이의 거리의 최댓값을 a 에 관한 식으로 나타내시오. (단, 점 Q의 x 좌표는 점 H의 x 좌표보다 크고 a 보다 작다.)
- (10점) 점 P가 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위에 있도록 하는 a 와 b 사이의 관계식과 모든 a 의 값의 범위를 구하시오.

[문제 1-2] (22점) 점 P 가 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 위에 있을 때, 제시문 (나)에 대한 다음 물음에 답하시오.

- (1) (10점) $a = 1$ 일 때, 삼각형 PAB 의 외접원을 C 라 하자. 원 C 의 반지름의 길이와 원 C 의 방정식을 구하시오.
- (2) (12점) $\lim_{a \rightarrow 0+} \frac{S_2}{S_1}$ 를 조사하시오.

■ 예시 답안

[문제 1-1] (1)

$y' = x$ 이므로, $a = 3$ 일 때 l_1 의 기울기는 3이고 l_2 의 기울기는 b 이다. 따라서 L_1 의 방정식은 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{2}$ 이고 L_2 의 방정식은 $y = -\frac{1}{b}x + \frac{b^2}{2} + 1$ 이다. 직선 L_1 과 L_2 의 교점 P의 x 좌표는 $x = -\frac{3b}{2}(b+3)$ 이다. 따라서,

$$y = \frac{11}{2} - \frac{1}{3}x = \frac{11}{2} + \frac{b}{2}(b+3) = \frac{11 + b^2 + 3b}{2} > \frac{29}{2} \quad (b > a = 3)$$

이다. 그러므로, $\gamma = \frac{29}{2}$ 이다.

[문제 1-1] (2)

직선 L_1 의 방정식은 $y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{2}a^2 + 1$ 이다. 점 H는 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 과 직선 L_1 의 교점 중 점 A가 아닌 점이므로, 점 H의 x 좌표는 방정식 $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{2}a^2 + 1$ 의 해이다. $x \neq a$ 이므로 점 H의 x 좌표는

$$x = -a - \frac{2}{a} \quad \dots \textcircled{1}$$

이다. 곡선 위의 점 $Q\left(q, \frac{1}{2}q^2\right)$ ($-a - \frac{2}{a} < q < a$)에 대하여, 점 Q와 직선 L_1 사이의 거리는

$$d = \frac{\left| \frac{q}{a} + \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}a^2 - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + 1}} = \frac{\left| \frac{a}{2}(q-a)\left(q+a+\frac{2}{a}\right) \right|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{-\frac{a}{2}(q-a)\left(q+a+\frac{2}{a}\right)}{\sqrt{a^2+1}}$$

이다. $f(q) = -\frac{a}{2}(q-a)\left(q+a+\frac{2}{a}\right)$ 라 하자. 그러면 각 양수 a 에 대하여 $f(q)$ 가 최대일 때 거리 d 가 최댓값을 가진다. $f'(q) = -aq - 1$ 이므로 $q = -\frac{1}{a}$ 에서 극댓값을 가진다. 따라서 점 Q와 직선 L_1 사이의 거리는 $q = -\frac{1}{a}$ 일 때 최댓값

$$d = \frac{\frac{a}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{(a^2+1)\sqrt{a^2+1}}{2a}$$

을 가진다.

[문제 1-1] (3)

점 P의 x 좌표를 $t(t < 0)$ 이라 하자. ①에 의해 점 A에 대해 $t = -a - \frac{2}{a}$, 점 B에 대해 $t = -b - \frac{2}{b}$ 를 얻는다. 이로부터 $a + \frac{2}{a} = b + \frac{2}{b}$ 이고, 이를 통분하여 정리하면

$$\frac{(b-a)(ab-2)}{ab} = 0$$

이다. $0 < a < b$ 이므로 $ab = 2$, 즉 $b = \frac{2}{a}$ 이고, $a^2 < ab = 2$ 이므로 $0 < a < \sqrt{2}$ 이다.

[문제 1-2] (1)

두 점 A, B를 지나는 직선은 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이고 선분 AB의 중점이 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ 이므로, 선분 AB의 수직이등분선 m_1 의 방정식은 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{9}{4}$ 이다. 또한, 두 점 A, P를 지나는 직선은 기울기가 -1 이고 선분 AP의 중점이 $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ 이므로, 선분 AP의 수직이등분선 m_2 의 방정식은 $y = x + \frac{7}{2}$ 이다. 두 직선 m_1, m_2 의 교점 $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{4}\right)$ 은 원 C의 중심이다. 반지름의 길이는 $\left(-\frac{3}{4}, \frac{11}{4}\right)$ 과 점 B 사이의 거리이며 $\frac{\sqrt{130}}{4}$ 이다. 따라서 원 C의 방정식은

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{65}{8}$$

이다.

[문제 1-2] (2)① 넓이 S_1 구하기

점 P에서의 접선의 방정식은 $y = -\left(a + \frac{2}{a}\right)x - \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)^2$ 이므로 점 R의 x 좌표는 $x = -\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-(a+\frac{2}{a})}^{-\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})} \left[\frac{1}{2}x^2 + \left(a + \frac{2}{a}\right)x + \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)^2 \right] dx + \int_{-\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})}^0 \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)x^2 + \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)^2 x \right]_{-(a+\frac{2}{a})}^{-\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})} + \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_{-\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a})}^0 = \frac{1}{24}\left(a + \frac{2}{a}\right)^3 \end{aligned}$$

이다.

② 넓이 S_2 구하기

직선 $x = a$ 와 직선 L_2 의 교점을 E라 하면, 점 E의 좌표는 $\left(a, -\frac{a^2}{2} + \frac{2}{a^2} + 1\right)$ 이다.

$$(\text{삼각형 PAE의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \left(-a^2 + \frac{2}{a^2} + 1\right) \times \left(a + a + \frac{2}{a}\right) = \frac{3}{a} + \frac{2}{a^3} - a^3$$

이고

$$\begin{aligned} \left(a \leq x \leq \frac{2}{a} \text{에서 직선 } L_2 \text{와 곡선으로 둘러싸인 넓이}\right) &= \int_a^{\frac{2}{a}} \left(\frac{2}{a^2} + 1 - \frac{a}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= \left[\left(\frac{2}{a^2} + 1\right)x - \frac{a}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_a^{\frac{2}{a}} \\ &= \frac{8}{3a^3} + \frac{5}{12}a^3 - a - \frac{1}{a} \end{aligned}$$

이므로

$$S_2 = \left(\frac{3}{a} + \frac{2}{a^3} - a^3\right) + \left(\frac{8}{3a^3} + \frac{5}{12}a^3 - a - \frac{1}{a}\right) = \frac{14}{3a^3} - \frac{7}{12}a^3 - a + \frac{2}{a}$$

이다. 따라서

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \frac{S_2}{S_1} = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{\frac{14}{3a^3} - \frac{7}{12}a^3 - a + \frac{2}{a}}{\frac{1}{24}\left(a + \frac{2}{a}\right)^3} = 14$$

이다.

■ 채점 기준

문항	채점 기준	배점
1-1 (1)	(1) L_1 과 L_2 의 방정식을 이용하여 교점 P의 x 좌표를 올바르게 구함	4점
	(2) 점 P의 y 좌표에 관한 부등식을 잘 제시함	3점
	(3) 정답을 올바르게 구함	2점
1-1 (2)	(1) 점 H의 x 좌표를 올바르게 구함	2점
	(2) 점 Q와 직선 L_1 사이의 거리가 최대가 되는 상황을 관찰	3점
	(3) 정답을 올바르게 구함	4점
1-1 (3)	(1) 점 P의 x 좌표를 a 와 b 에 대해 각각 표현함	3점
	(2) a 와 b 사이의 관계식을 구함	4점
	(3) a 의 범위를 올바르게 구함	3점
1-2 (1)	(1) 원의 중심을 올바르게 구함	5점
	(2) 반지름의 길이를 올바르게 구함	3점
	(3) 원의 방정식을 올바르게 구함	2점
1-2 (2)	(1) S_1 을 올바르게 구함	4점
	(2) S_2 를 올바르게 구함	4점
	(3) 극한을 올바르게 계산	4점

문항 2

[문항 2] [제시문] 을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y = g(x)$ 가 다음 <조건>을 만족시킨다.

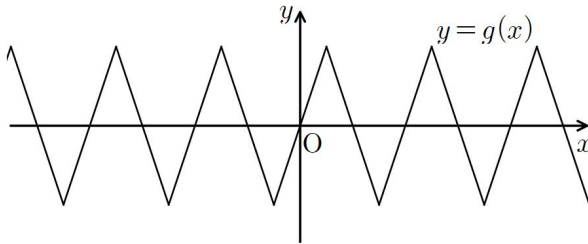
<조건>

자연수 m 에 대하여

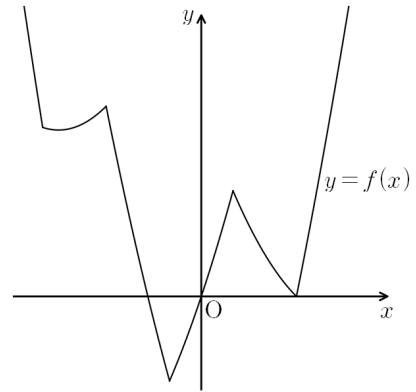
$$\textcircled{1} \quad g(x) = \begin{cases} mx & \left(-\frac{1}{m} \leq x < \frac{1}{m}\right) \\ -mx + 2 & \left(\frac{1}{m} \leq x < \frac{3}{m}\right) \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } g\left(x + \frac{4}{m}\right) = g(x) \text{이다.}$$

양의 실수 a 와 b 에 대하여 $f(x) = ax^2 + bg(x)$ 라 하자. [그림 3]과 [그림 4]는 $a = 1, b = 1, m = 3$ 일 때의 두 함수 $y = g(x)$ 와 $y = f(x)$ 의 그래프의 일부를 나타낸다.



[그림 3]



[그림 4]

[문제 2-1] (30점) $a = 2, b = 16, m = 1$ 일 때, 다음 물음에 답하시오.

- (1) (10점) 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = q$ 의 교점의 개수가 최대가 되도록 하는 모든 정수 q 의 값의 합을 구하시오.
- (2) (10점) 자연수 n 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = f(n-6)$ 의 교점의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^5 a_n$ 의 값을 구하시오.
- (3) (10점) (2)에서 정의한 a_n 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - r)$ 이 수렴할 때, 상수 r 의 값과 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - r)$ 의 값을 구하시오.

[문제 2-2] (10점) $b = 1, m = 3$ 일 때, 모든 양의 실수 p 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = p$ 의 교점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 a 의 최솟값을 구하시오.

[문제 2-3] (10점) $a = 1, b = 1, m = 2$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = cx$ 의 교점의 개수가 최소가 되도록 하는 모든 실수 c 의 값의 범위를 구하시오.

■ 예시 답안

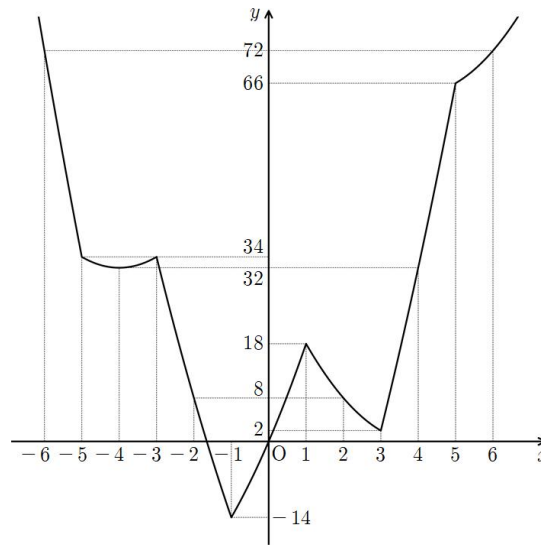
[문제 2-1] (1)

정수 k 에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 16(x - 4k), & 4k - 1 \leq x < 4k + 1 \\ 2x^2 - 16(x - 4k) + 32, & 4k + 1 \leq x < 4k + 3 \end{cases}$$

이다. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점을 지난다. 각 열린구간 $(4k - 1, 4k + 1)$ 에서 $f'(x) = 4x + 16$ 이므로 $x = -4$ 에서 극소이다. 즉, $k = -1$ 일 때 열린구간 $(-5, -3)$ 에서만 극소를 갖고 $k < -1$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 는 감소하며 $k > -1$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다. 같은 방법으로 각 열린구간 $(4k + 1, 4k + 3)$ 에서 $f'(x) = 4x - 16$ 이므로 $x = 4$ 에서 극소이다. 이 경우 $x = 4$ 를 포함하는 구간이 없으므로, $k < 1$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 는 감소하며 $k \geq 1$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다. 따라서 $x \leq -5$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소하고 $x \geq 3$ 이면 함수 $f(x)$ 는 증가한다. $k = -1$ 과 $k = 0$ 인 경우만 살펴보면 충분하다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 [그림 가]와 같다.



[그림 가]

따라서 직선 $y = q$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 다음 표와 같다.

q	...	-14	...	2	...	18	...	32	...	34	...
개수	0	1	2	3	4	3	2	3	4	3	2

따라서 $2 < q < 18$ 과 $32 < q < 34$ 에서 교점의 개수가 최대이다. 이를 만족시키는 정수 q 의 값의 합은 183이다.

[문제 2-1] (2)

[그림 가]에 의하여 $a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 1$ 이다. 따라서 $\sum_{n=1}^5 a_n = 14$ 이다.

[문제 2-1] (3)

[그림 가]에 의하여 a_n 의 값은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	3	3	3	4	1	2	3	4	3	3	2

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이므로 $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - r) = 2 - r$ 이다. 따라서 $r = 2$ 이다. (2)의 a_n 에 의하여 $n \geq 11$ 이면 $b_n = 0$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{10} b_n = \sum_{n=1}^{10} (a_n - 2) = 9$$

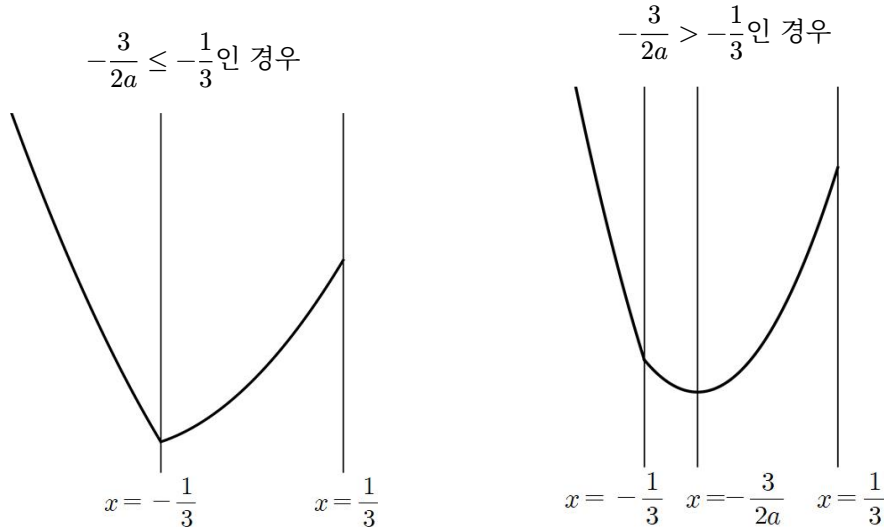
이다.

[문제 2-2]

정수 k 에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3\left(x - \frac{4k}{3}\right), & \frac{4k-1}{3} \leq x < \frac{4k+1}{3} \\ ax^2 - 3\left(x - \frac{4k}{3}\right) + 2, & \frac{4k+1}{3} \leq x < \frac{4k+3}{3} \end{cases}$$

이다. 닫힌구간 $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$ 에서 $f(x) = ax^2 - 3x - 2$ 이므로 $f(-1) = a + 1 > 0$ 이고 이 구간에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다. 닫힌구간 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ 에서 함수 $f(x) = ax^2 + 3x$ 이므로 a 의 값에 따라 닫힌구간 $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ 에서 가능한 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 두 가지뿐이다. ([그림 나])



[그림 나]

따라서 모든 양의 실수 p 에 대하여 직선 $y = p$ 와 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수가 2가 되려면 $x \leq -1$ 에서 함수 $f(x)$ 가 감소하고 $x \geq \frac{1}{3}$ 에서 함수 $f(x)$ 가 증가해야 한다. [문제 2-1]의 (1)과 같은 방법으로 함수의 증가와 감소를 조사하면 각 열린구간 $\left(\frac{4k-1}{3}, \frac{4k+1}{3}\right)$ 에 대하여 $x \leq -\frac{3}{2a}$ 이면 함수 $f(x)$ 는 감소하고 $x \geq -\frac{3}{2a}$ 이면 함수 $f(x)$ 는 증가한다. 또한 각 열린구간 $\left(\frac{4k+1}{3}, \frac{4k+3}{3}\right)$ 에 대하여 $x \leq \frac{3}{2a}$ 이면 함수 $f(x)$ 는 감소하고 $x \geq \frac{3}{2a}$ 이면 함수 $f(x)$ 는 증가한다. 그러므로 $-\frac{3}{2a} \geq -1$ 이고 $\frac{3}{2a} \leq \frac{1}{3}$ 이어야 한다. 따라서 a 의 최솟값은 $\frac{9}{2}$ 이다.

[문제 2-3]

$f(0) = 0$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = cx$ 는 원점에서 만난다. $x \neq 0$ 이면 방정식 $f(x) = cx$ 와 $\frac{f(x)}{x} = c$ 는 같은 해를 가지므로, 함수 $y = \frac{f(x)}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = c$ 의 교점의 개수를 생각하면 된다.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2(x - 2k), & \frac{4k-1}{2} \leq x < \frac{4k+1}{2} \\ x^2 - 2(x - 2k) + 2, & \frac{4k+1}{2} \leq x < \frac{4k+3}{2} \end{cases}$$

이므로

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x + 2 - \frac{4k}{x}, & \frac{4k-1}{2} \leq x < \frac{4k+1}{2} \\ x - 2 + \frac{4k+2}{x}, & \frac{4k+1}{2} \leq x < \frac{4k+3}{2} \end{cases} \quad (x \neq 0)$$

이다. $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 에서 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 라 하면

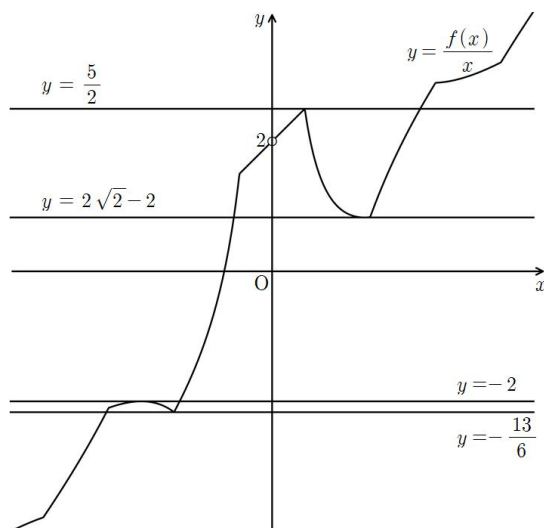
$$g'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{4k}{x^2}, & \frac{4k-1}{2} < x < \frac{4k+1}{2} \\ 1 - \frac{4k+2}{x^2}, & \frac{4k+1}{2} < x < \frac{4k+3}{2} \end{cases}, \quad (x \neq 0)$$

이므로 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{5}{2}$	...	-2	...	$-\frac{3}{2}$	...	$-\frac{1}{2}$	...	(0)
$g'(x)$	+		+	0	-		+		+	
$g(x)$	↗	$-\frac{21}{10}$	↗	-2	↘	$-\frac{13}{6}$	↗	$\frac{3}{2}$	↗	

x	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...	$\sqrt{2}$	...	$\frac{3}{2}$	...
$g'(x)$		+		-	0	+		+
$g(x)$		↗	$\frac{5}{2}$	↘	$2\sqrt{2}-2$	↗	$\frac{5}{6}$	↗

위 표를 이용하여 곡선 $y = g(x)$ 의 그래프를 그리면 [그림 다]와 같다.



[그림 다]

따라서 $c < -\frac{13}{6}$, $-2 < c < 2\sqrt{2}-2$, $c > \frac{5}{2}$ 에서 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = c$ 의 교점은 1개이다. 그러므로 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = cx$ 의 교점의 개수는 원점을 포함하여 $c < -\frac{13}{6}$, $-2 < c < 2\sqrt{2}-2$, $c > \frac{5}{2}$ 에서 2개가 된다.

■ 채점 기준

문항	채점 기준	배점
2-1 (1)	(1) $f(x)$ 의 증감을 이용하여 함수의 성질을 관찰	4점
	(2) q 값에 따른 교점의 개수를 관찰	4점
	(3) 정답을 올바르게 계산	2점
2-1 (2)	(1) $f(x)$ 의 증감을 이용하여([그림 가]) 함수의 성질을 관찰	5점
	(2) $a_1 \sim a_5$ 의 값을 올바르게 계산	5점
2-1 (3)	(1) $r = 2$ 임을 관찰	5점
	(2) 정답을 올바르게 계산	5점
2-2	(1) $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 관찰	2점
	(2) $x \leq -\frac{3}{2a}$ 이면 함수 $f(x)$ 는 감소해야 함을 관찰	3점
	(3) $x \geq \frac{3}{2a}$ 이면 함수 $f(x)$ 는 증가해야 함을 관찰	3점
	(4) 정답을 올바르게 계산	2점
2-3	(1) $x \neq 0$ 이면 방정식 $f(x) = cx$ 와 $\frac{f(x)}{x} = c$ 는 같은 해를 가짐을 관찰	2점
	(2) $\frac{f(x)}{x}$ 의 증감을 이용하여 함수의 성질을 관찰	5점
	(3) 정답을 올바르게 계산	3점

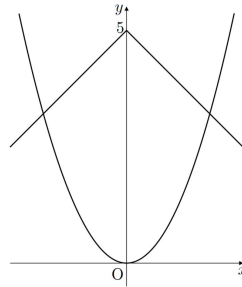
2025학년도 자연계열 (약학과)

문항 1

[문항 1] 【제시문】을 읽고 물음에 답하라.

제시문

[가] 양의 실수 a 에 대하여 두 함수 $f_1(x) = ax^2$, $f_2(x) = \begin{cases} ax + a^2 + 4 & (x < 0) \\ -ax + a^2 + 4 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이 있다. 두 함수 $y = f_1(x)$ 와 $y = f_2(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형을 S 라 하자. 두 함수의 그래프의 교점 중 제1사분면 위의 점을 P 라 하고, 점 P 의 x 좌표를 p 라 하자. 【그림 1】은 $a = 1$ 일 때 두 함수의 그래프를 나타낸다.

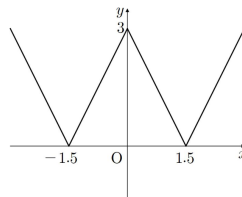


【그림 1】

[나] 함수 $g(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$g(x) = \begin{cases} -2x - 3 & (x < -\frac{3}{2}) \\ 2x + 3 & (-\frac{3}{2} \leq x < 0) \\ -2x + 3 & (0 \leq x < \frac{3}{2}) \\ 2x - 3 & (x \geq \frac{3}{2}) \end{cases}$$

【그림 2】는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프이다.



【그림 2】

[문제 1-1] (30점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하라.

- (1) (10점) p 의 최솟값과 그때의 a 의 값을 구하라.
- (2) (10점) 도형 S 의 넓이를 a 와 p 에 대한 식으로 나타내라.
- (3) (10점) 직선 $y = 4a$ 에 의하여 도형 S 가 넓이가 같은 두 도형으로 나뉠 때, $4p^3 + 3p^2$ 의 값을 구하라.

[문제 1-2] (20점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하라.

- (1) (10점) 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 함수 $y = e^{x+k}$ 의 그래프의 교점의 개수가 3인 모든 실수 k 의 값의 범위를 구하라.
- (2) (10점) 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 원 $(x - c)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ 의 교점의 개수가 3인 실수 c 의 값을 모두 구하라.

■ 예시 답안

[문제 1-1] (1)

점 P는 제1사분면 위의 교점이므로 $p > 0$ 이다. 방정식 $ap^2 = -ap + a^2 + 4$ 를 풀면 다음과 같다.

$$p = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a(a^2 + 4)}}{2a} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(a + \frac{4}{a}\right)}$$

$a > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 대소관계에 의하여, $a + \frac{4}{a} \geq 4$ 이며 등호는 $a = 2$ 일 때 성립한다. 즉,

$$p = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(a + \frac{4}{a}\right)} \geq -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

이다. 그러므로 p 의 최솟값은 $a = 2$ 일 때 $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ 이다.

(2)

점 P는 두 함수의 교점이므로 $ap^2 = -ap + a^2 + 4$ 가 성립한다. 직선 $y = ap^2$ 에 의하여 도형 S 가 나뉘는 부분 중 윗부분과 아랫부분의 넓이를 각각 구하자. $f_1(p) = f_1(-p) = ap^2$ 이므로 $y = ap^2$ 은 두 함수의 교점을 지나고 x 축에 평행한 직선이므로, 도형 S 가 나뉘는 부분 중 윗부분은 밑변의 길이가 $2p$ 이고 높이가 $((a^2 + 4) - ap^2)$ 인 삼각형이다. 따라서 그 넓이는 $p(-ap^2 + a^2 + 4) = ap^2$ 이다.

직선 $y = ap^2$ 에 의하여 도형 S 가 나뉘는 부분 중 아랫부분은 곡선 $y = ax^2$ 과 직선 $y = ap^2$, $x = -p$, $x = p$ 로 둘러싸인 도형이므로 정적분을 이용하여 그 넓이를 구하면 $\int_{-p}^p (ap^2 - ax^2) dx = \frac{4}{3}ap^3$ 이다. 따라서 S 의 넓이는 $\frac{4}{3}ap^3 + ap^2$ 이다.

(3)

[문제 1-1] (1)과 (2)로부터 $p > 1$ 이므로 $\frac{4}{3}ap^3 > ap^2$ 이다. 따라서 직선 $y = ap^2$ 에 의하여 도형 S 가 나뉘는 부분 중 아랫부분의 넓이가 윗부분의 넓이보다 크므로, S 의 넓이를 반으로 나누려면 직선 $y = 4a$ 가 직선 $y = ap^2$ 보다 더 아래에 있어야 한다. 직선 $y = 4a$ 와 곡선 $y = ax^2$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 도형 S 의 넓이의 반이고 직선 $y = 4a$ 와 곡선 $y = ax^2$ 의 교점의 x 좌표는 ± 2 이므로,

$$\int_{-2}^2 (4a - ax^2) dx = \frac{32}{3}a = \frac{2}{3}ap^3 + \frac{ap^2}{2}$$

이다. 따라서 이를 정리하면 $4p^3 + 3p^2 = 64$ 이다.

[문제 1-2] (1)

곡선 $y = e^{x+k}$ 이 $-\frac{3}{2} < x < 0$, $x > \frac{3}{2}$ 에서 각각 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 접하는 경우의 점을 (t, e^{t+k}) 라 두면, $-\frac{3}{2} < t < 0$ 이거나 $t > \frac{3}{2}$ 이다. $-\frac{3}{2} < t < 0$ 이면, $e^{t+k} = 2$ 이고 $e^{t+k} = 2t + 3$ 이므로 $t = -\frac{1}{2}$, $k = \ln 2 + \frac{1}{2}$ 이다. $t > \frac{3}{2}$ 이면 $e^{t+k} = 2$, $e^{t+k} = 2t - 3$ 이므로 $t = \frac{5}{2}$, $k = \ln 2 - \frac{5}{2}$ 이다. 지수함수 $y = e^{x+k}$ 와 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형으로부터 두 함수의 그래프의 교점이 3인 경우는 $\ln 2 - \frac{5}{2} < k < \ln 2 + \frac{1}{2}$ 이다.

(2)

원 $(x - c)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ 가 열린구간 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 에서 각각 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 접하는 경우를 조사해 보자.

먼저 열린구간 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 에서 접하면 $g(x) = 2x + 3$ 이므로 이차방정식 $(x - c)^2 + \left(2x + 3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ 이 중근을 갖는다. 즉, $5x^2 + (6 - 2c)x + c^2 = 0$ 이고 판별식 $D = (6 - 2c)^2 - 20c^2 = 0$ 에서 $c = -\frac{3}{4} \pm \frac{3\sqrt{5}}{4}$ 이다. 이 중 실근의 개수가 3인 것은 $c = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{5}$ 이다.

열린구간 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 에서 접하면 $g(x) = -2x + 3$ 이므로 이차방정식 $(x - c)^2 + \left(-2x + 3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ 이 중근을 갖는다. 즉, $5x^2 - (2c + 6)x + c^2 = 0$ 이고 판별식 $D = (-2c - 6)^2 - 20c^2 = 0$ 에서 $c = \frac{3}{4} \pm \frac{3\sqrt{5}}{4}$ 이다. 이 중 실근의 개수가 3인 것은 $c = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4}$ 이다.

원 $(x - c)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ 가 세 점 $(0, 3)$, $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 중 하나를 지나는 경우도 두 곡선의 교점이 3개다. 이때 c 의 값은 각각 $0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ 이다. 따라서 c 의 값은 $-\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{5}}{4}, -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4}, \frac{3}{2}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$ap^2 = -ap + a^2 + 4$ 임을 관찰	3점
	산술기하평균을 활용함	3점
	a 와 p 의 값을 구함	각 2점
[1-1] (2)	도형 S 의 넓이를 정적분으로 표현하거나 이를 구하기 위한 전략을 세움	5점
	넓이를 바르게 구함	5점
[1-1] (3)	직선 $y = 4a$ 과 $y = ax^2$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 계산하거나 $\int_{-2}^2 (4a - ax^2) dx = \frac{32}{3}a$ 임을 관찰	4점
	(2)에서 구한 S 의 넓이의 반이 된다는 사실로부터 식을 잘 세움	2점
	답을 바르게 구함	4점
[1-2] (1)	$k = \ln 2 + \frac{1}{2}$ 혹은 $k = \ln 2 - \frac{5}{2}$ ($t = -\frac{1}{2}$ 혹은 $t = \frac{5}{2}$)에서 접한다는 사실을 관찰함	각 3점
	$\ln 2 - \frac{5}{2} < k < \ln 2 + \frac{1}{2}$ 인 경우 교점이 3개임을 설명함	4점
[1-2] (2)	접하는 경우 c 의 값을 관찰함	각 2점
	원이 점 $(0, 3)$ 을 지나는 경우를 관찰함	2점
	원이 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 중 하나를 지나는 경우를 관찰함	각 2점

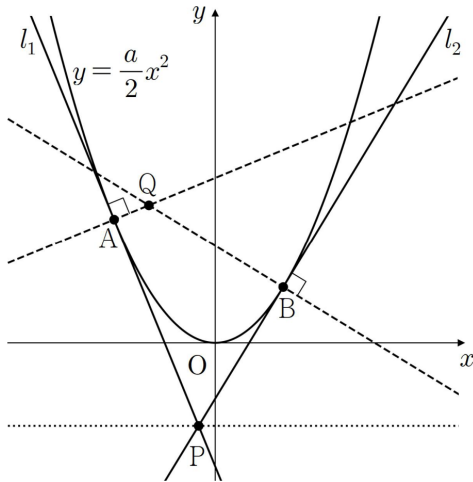
문항 2

[문항 2] [제시문] 을 읽고 물음에 답하라.

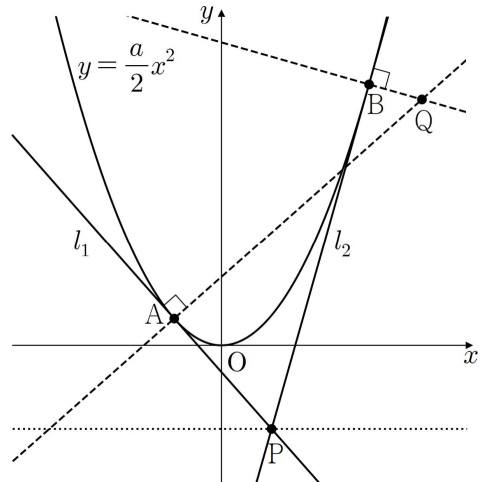
제시문

양의 실수 a 와 실수 p 에 대하여 점 $P(p, -1)$ 에서 함수 $f(x) = \frac{a}{2}x^2$ 의 그래프에 서로 다른 두 접선을 그을 수 있다. 이때 두 접점을 x 좌표가 작은 것부터 차례로 A, B 라 하고 $\theta = \angle APB$ 라 하자. 점 A 를 접점으로 하는 접선을 l_1 , 점 B 를 접점으로 하는 접선을 l_2 라 하자. 점 A 를 지나고 l_1 에 수직인 직선을 m_1 , 점 B 를 지나고 l_2 에 수직인 직선을 m_2 라 하고, m_1 과 m_2 의 교점을 Q 라 하자. (단, $0 < \theta < \pi$)

【그림 3】은 점 Q 의 x 좌표가 점 A 의 x 좌표보다 크고 점 B 의 x 좌표보다 작은 경우를 나타내고, 【그림 4】는 점 Q 의 x 좌표가 점 B 의 x 좌표보다 큰 경우를 나타낸다.



【그림 3】



【그림 4】

[문제 2-1] (12점) 점 Q 의 x 좌표와 y 좌표를 각각 a 와 p 에 대한 식으로 나타내라.[문제 2-2] (16점) $a = 3$ 이고 점 Q 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이라 하자. 다음 물음에 답하라. (단, 점 Q 는 제2사분면 위의 점이다.)

- (1) (6점) p 의 값을 구하라.
- (2) (10점) $\sin \theta$ 의 값을 구하라.

[문제 2-3] (22점) 점 Q 의 x 좌표가 점 B 의 x 좌표보다 크고 $\overline{AB} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$, $\cos \theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ 이라 하자. 다음 물음에 답하라.

- (1) (8점) $\overline{PQ}$ 를 구하라.
- (2) (14점) $\overline{AP} : \overline{BQ} = 3 : \sqrt{13}$ 일 때 삼각형 APB 의 넓이를 구하라.

■ 예시 답안

[문제 2-1]

함수 $f(x) = \frac{a}{2}x^2$ 위의 한 점점의 좌표를 $(t, \frac{a}{2}t^2)$ 이라 하면 $f'(t) = at$ 이므로 점선의 방정식은 $y = at(x - t) + \frac{a}{2}t^2$ 이다. 이때 이 점선이 점 $P(p, -1)$ 를 지나므로 $\frac{a}{2}t^2 - apt - 1 = 0$ 이다. 점 A와 점 B의 x 좌표를 각각 β, γ ($\beta < \gamma$)라 하면, β 와 γ 는 위 이차방정식의 서로 다른 두 실근이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\beta + \gamma = 2p, \quad \beta\gamma = -\frac{2}{a} \quad \dots\dots ①$$

이다. 한편 두 직선 m_1 과 m_2 의 방정식은 각각

$$m_1 : y = -\frac{1}{a\beta}(x - \beta) + \frac{a\beta^2}{2}, \quad m_2 : y = -\frac{1}{a\gamma}(x - \gamma) + \frac{a\gamma^2}{2}$$

이므로 $-\frac{x}{a}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right) + \frac{a}{2}(\beta^2 - \gamma^2) = 0$ 에서 $x = 2ap$ 이다. ①을 이용하면 점 Q의 y 좌표는 다음과 같다.

$$y = -\frac{2ap}{a\beta} + \frac{1}{a} + \frac{a\beta^2}{2} = -\frac{\beta + \gamma}{\beta} + \frac{1}{a} - \frac{\beta^2}{\beta\gamma} = 2ap^2 + \frac{1}{a} + 1$$

그러므로 점 Q의 x 좌표는 $x = 2ap$ 이고 y 좌표는 $y = 2ap^2 + \frac{1}{a} + 1$ 이다.

[문제 2-2] (1)

[문제 2-1]에서 구한 점 Q의 좌표에 $a = 3$ 을 대입하면 점 Q의 좌표는 $(6p, 6p^2 + \frac{4}{3})$ 이다. 점 Q가 곡선 $y = f(x) = \frac{a}{2}x^2$ 위의 점이므로 $6p^2 + \frac{4}{3} = \frac{3}{2}(6p)^2$ 이다. 따라서 $p^2 = \frac{1}{36}$ 이고 $p = \pm\frac{1}{6}$ 이다. 점 Q가 제2사분면 위의 점이므로 $p = -\frac{1}{6}$ 이다.

(2)

점 Q가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이고 제2사분면 위에 있으므로 점 Q와 점 A는 일치한다. 따라서 삼각형 APB는 선분 AP가 빗변인 직각삼각형이다. $a = 3$ 이고 [문제 2-2] (1)에 의해 $p = -\frac{1}{6}$ 이므로 [문제 2-1]의 ①에 대입하여 점 A와 점 B의 x 좌표 β, γ ($\beta < \gamma$)를 계산하면 $\beta = -1$ 이고 $\gamma = \frac{2}{3}$ 이다. 따라서 점 A의 좌표는 $(-1, \frac{3}{2})$ 이고 점 B의 좌표는 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ 이다. [문제 2-2] (1)에 의해 점 P의 좌표는 $(-\frac{1}{6}, -1)$ 이므로 $\overline{AB} = \frac{5\sqrt{5}}{6}$, $\overline{AP} = \frac{5\sqrt{10}}{6}$ 이다. 그러므로 $\sin \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

[문제 2-3] (1)

[그림 4]의 오른쪽 그림에 의해 삼각형 PQA와 PQB는 각각 $\angle A$ 와 $\angle B$ 가 직각인 직각삼각형이므로, 점 P, Q, A, B는 원 위에 있고 선분 PQ는 그 원의 지름이다. 또한, 그 원은 삼각형 APB의 외접원이므로 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = \overline{PQ}$ 이다. $\cos \theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ 이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ 이다. 그러므로

$$\overline{PQ} = \frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \times \frac{13}{3\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{65}}{5}$$

이다.

(2)

두 선분 AQ와 BP의 교점을 T라 하면 삼각형 APT와 QTB는 각각 $\angle A$ 와 $\angle B$ 가 직각인 직각삼각형이다. $\overline{AP} : \overline{BQ} = 3 : \sqrt{13}$ 이므로 양수 k 에 대하여 $\overline{AP} = 3k$, $\overline{BQ} = \sqrt{13}k$ 라 하자. 호 AB에 대한 원주각의 크기는 같으므로 [문제 2-3]의 (1)로부터 $\angle Q$ 의 크기는 θ 임을 알 수 있다. 따라서 삼각형 APT와 QTB는 닮음비가 $3 : \sqrt{13}$ 인 닮은 삼각형이다.

$\overline{PT} \cos \theta = \overline{AP} = 3k$ 이므로 $\overline{PT} = \frac{3\sqrt{13}}{2}k$ 이고, $\overline{PT} \sin \theta = \overline{AT}$ 이므로 $\overline{AT} = \frac{9}{2}k$ 이다. 두 삼각형의 닮음비를

이용하면 $\overline{AT} : \overline{BT} = 3 : \sqrt{13}$ 이므로 $\overline{BT} = \frac{\sqrt{13}}{3}\overline{AT} = \frac{3\sqrt{13}}{2}k$ 이고, 이를 통해 $\overline{BP} = \overline{PT} + \overline{BT} = 3\sqrt{13}k$ 를 얻을 수 있다. 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{PQ}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{BQ}^2$ 이므로 [문제 2-3]의 (1)에서 구한 $\overline{PQ}$ 를 이용하면 $\left(\frac{4\sqrt{65}}{5}\right)^2 = (3\sqrt{13}k)^2 + (\sqrt{13}k)^2$ 이고 이를 정리하면 $k^2 = \frac{8}{25}$ 이다. 그러므로 삼각형 ABP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\overline{AP} \times \overline{BP} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times (3k) \times (3\sqrt{13}k) \times \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{27}{2}k^2 = \frac{108}{25}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1]	두 점 A, B의 x 좌표가 $\frac{a}{2}t^2 - apt - 1 = 0$ 을 만족한다는 것을 관찰	4점
	점 Q의 x 좌표를 올바르게 나타냄	4점
	점 Q의 y 좌표를 올바르게 나타냄	4점
[2-2] (1)	$6p^2 + \frac{4}{3} = \frac{3}{2}(6p)^2$ 임을 나타냄	3점
	점 Q가 제2사분면 위의 점이라는 것으로부터 답을 구함	3점
[2-2] (2)	점 A와 점 B의 좌표를 올바르게 구함	각 3점
	답을 올바르게 구함	4점
[2-3] (1)	네 점 P, Q, A, B는 원 위에 있음을 관찰	4점
	답을 올바르게 구함	4점
[2-3] (2)	삼각형 APT와 QTB가 닮음임을 관찰	4점
	$\overline{AP}$ 와 $\overline{BP}$ 의 길이를 구함	각 3점
	답을 올바르게 구함	4점

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다