

숭실대논술

자연계

목차

2026학년도 자연계열	3
문제 1	3
문제 2	5
문제 3	7
문제 4	9
 2025학년도 자연계열	 11
문제 1	11
문제 2	13
문제 3	15
문제 4	18
 2024학년도 자연계열	 20
문제 1	20
문제 2	23
문제 3	26
문제 4	28

2026학년도 자연계열

문제 1

※ 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

제시문

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

[출처: 수학 「이차방정식의 근과 계수의 관계」]

직선 $\ell : y = mx + m$ ($0 < m < 1$)과 원 $C : x^2 + y^2 = 1$ 의 교점 중 x 좌표가 더 큰 점을 P , 직선 ℓ 과 y 축의 교점을 Q , 좌표가 $(0, 1)$ 인 점을 R 이라고 하자.

점 P 와 직선 $y = 1$ 사이의 거리를 $f(m)$, 삼각형 PQR 의 넓이를 $g(m)$ 이라고 할 때, $\lim_{m \rightarrow 1^-} \frac{f(m)}{g(m)}$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

원 C 와 직선 ℓ 의 교점은 연립방정식

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = mx + m \end{cases}$$

의 해이다. 따라서 점 P 의 x 좌표는 다음 이차방정식

$$x^2 + (mx + m)^2 = 1 \Rightarrow (m^2 + 1)x^2 + 2m^2x + m^2 - 1 = 0$$

의 두 근 중에서 더 큰 값이다. 이때 원 C 와 직선 ℓ 의 한 교점이 $(-1, 0)$ 이므로, 방정식의 한 근은 $\alpha = -1$ 이고 근과 계수의 관계에 의해 다른 근 β 는 $\alpha\beta = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}$ 을 만족시킨다. 따라서 $\beta = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$ 이고 $\alpha = -1 < \beta$ 이므로

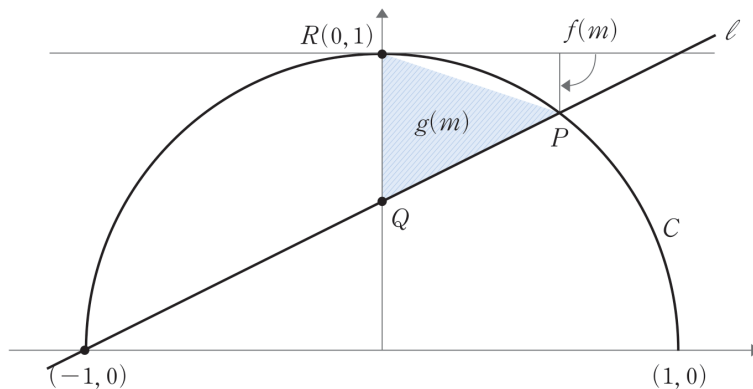
점 P 의 x 좌표는 $\frac{1 - m^2}{1 + m^2}$ 이다. 또한 점 P 는 직선 ℓ 위의 점이므로 P 의 y 좌표는 $\frac{2m}{1 + m^2}$ 이고,

점 P 와 직선 $y = 1$ 사이의 거리 $f(m)$ 은 $f(m) = 1 - \frac{2m}{1 + m^2} = \frac{(1 - m)^2}{1 + m^2}$ 이다.

한편 점 Q 의 좌표는 $(0, m)$ 이므로, 삼각형 PQR 의 밑변을 QR 로 두면, 삼각형 PQR 의 넓이 $g(m)$ 은 아래와 같다.

$$g(m) = \frac{1}{2} \times (1 - m) \times \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2} \right) = \frac{(1 - m)^2(1 + m)}{2(1 + m^2)}$$

그러므로 $\lim_{m \rightarrow 1^-} \frac{f(m)}{g(m)} = \lim_{m \rightarrow 1^-} \frac{2}{1 + m} = 1$ 이다.



■ 채점 기준

채점 기준	배점
원과 직선 ℓ 의 식을 이용하여 두 교점을 올바르게 계산하고, 추가 조건을 이해하여 P, Q 의 좌표를 계산할 수 있다.	15점
P, Q, R 의 좌표를 이용하여 함수 $f(m), g(m)$ 의 식을 정확하게 묘사하고, 이로부터 좌극한의 값을 계산할 수 있다.	10점

문제 2

※ 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

제시문

두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 를 이은 선분 AB 를 $m : n (m > 0, n > 0)$ 으로 내분하는 점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \right)$$

[출처: 수학 「선분의 내분점과 외분점」]

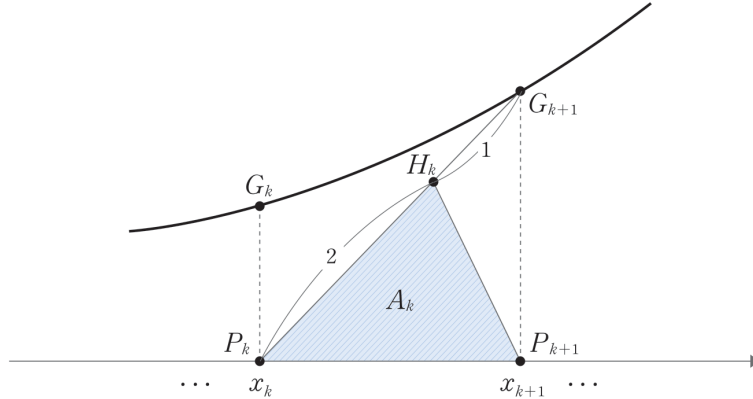
수열 $\{x_k\}$ 는 첫째항이 0, 공차가 $\frac{1}{n}$ 인 등차수열이다(단, n 은 자연수). 점 $P_k(x_k, 0)$ 과 함수 $f(x) = |2x - 1| e^{2x}$ 의 그래프 위의 점 $G_{k+1}(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ 에 대하여 점 H_k 는 선분 $P_k G_{k+1}$ 을 2 : 1로 내분하는 점이라고 하자.

삼각형 $P_k H_k P_{k+1}$ 의 넓이를 A_k 라고 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

등차수열 $\{x_k\}$ 의 일반항은 $x_k = \frac{k-1}{n}$ 이므로 P_k 의 좌표는 $\left(\frac{k-1}{n}, 0\right)$ 이고 G_{k+1} 의 좌표는 $\left(\frac{k}{n}, f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ 이다.
따라서 H_k 의 좌표는 내분점의 정의에 의하여 다음과 같다.

$$\left(\frac{2 \cdot \frac{k}{n} + \frac{k-1}{n}}{3}, \frac{2f\left(\frac{k}{n}\right) + 0}{3}\right) = \left(\frac{3k-1}{3n}, \frac{2}{3}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$



삼각형 $P_k H_k P_{k+1}$ 의 밑변을 선분 $P_k P_{k+1}$ 라고 하면 밑변의 길이는 $\frac{1}{n}$ 이고 높이는 H_k 의 y 좌표인 $\frac{2}{3}f\left(\frac{k}{n}\right)$ 이다.

따라서 $A_k = \frac{1}{3n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{3n}\left|\frac{2k}{n} - 1\right|e^{\frac{2k}{n}}$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ 이다.

한편, 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $\frac{1}{3}f(x)$ 는 연속이므로, 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여 아래 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k &= \int_0^1 \frac{1}{3}f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{3}|2x-1|e^{2x}dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{1/2} (1-2x)e^{2x}dx + \frac{1}{3} \int_{1/2}^1 (2x-1)e^{2x}dx \end{aligned}$$

부분적분법으로 $\int (1-2x)e^{2x}dx$ 를 나타내면 다음과 같다.

$$\int (1-2x)e^{2x}dx = \frac{1}{2}(1-2x)e^{2x} + \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}(1-2x)e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} = (1-x)e^{2x}$$

이를 활용하여 아래와 같이 답을 얻는다.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k &= \frac{1}{3}[(1-x)e^{2x}]_0^{1/2} + \frac{1}{3}[(x-1)e^{2x}]_{1/2}^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{e}{2} - 1 + 0 + \frac{e}{2}\right) = \frac{e-1}{3} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

채점 기준	배점
수열 x_k 와 함수 $f(x)$, 내분점의 정의를 이용하여 점 H_k 의 좌표를 계산하고, P_k, G_{k+1}, H_k 의 좌표를 이용하여 삼각형의 넓이 A_k 의 식을 정확하게 묘사할 수 있다.	10점
급수의 합 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 을 정적분으로 바꾸어 올바르게 계산할 수 있다.	15점

문제 3

※ 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

제시문

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 N 항까지의 합 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$ 을 합의 기호 $\sum$ 를 사용하여 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

[출처: 수학 I 「수열의 합」]

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_{2n-1} = 0, a_{2n} - a_n = n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 만족시킨다. 이때 $\sum_{n=1}^{128} a_n$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

급수의 제 k 항까지의 부분합 $\sum_{n=1}^k a_n$ 을 S_k 라 하자. 그러면 $a_{2n-1} = 0$ 이고 $a_{2n} = a_n + n$ 이므로 부분합을 홀수 항의 합과 짝수항의 합으로 나누어 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_{128} &= \sum_{n=1}^{128} a_n = \sum_{n=1}^{64} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{64} a_{2n} = \sum_{n=1}^{64} (a_n + n) = S_{64} + \frac{64 \cdot 65}{2} \\ S_{64} &= \sum_{n=1}^{64} a_n = \sum_{n=1}^{32} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{32} a_{2n} = \sum_{n=1}^{32} (a_n + n) = S_{32} + \frac{32 \cdot 33}{2} \\ &\vdots \\ S_2 &= S_1 + \frac{1 \cdot 2}{2} \end{aligned}$$

위 식의 좌변과 우변을 각각 더하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_{128} &= S_1 + \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \cdots + \frac{32 \cdot 33}{2} + \frac{64 \cdot 65}{2} \\ &= 0 + 1 + 3 + 10 + 36 + 136 + 528 + 2080 \\ &= 2794 \end{aligned}$$

■ 채점 기준

채점 기준	배점
수열의 두 조건을 이용하여 $S_{128} = S_{64} + \frac{64 \cdot 65}{2}$ 로 계산할 수 있다.	12.5점
비슷한 방법으로 $S_{64}, S_{32}, S_{16}, \dots, S_2, S_1$ 사이의 관계를 구하여 S_{128} 의 값을 구할 수 있다.	12.5점

문제 4

※ 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

제시문

함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 원소 x 에 공역 Y 의 원소 y 가 대응할 때, 이것을 기호로 $y = f(x)$ 와 같이 나타낸다. 이때 $f(x)$ 를 x 에서의 함수값이라 하고, 함수값 전체의 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$ 를 함수 f 의 치역이라고 한다.

[출처: 수학 「함수」]

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : A \rightarrow A$ 의 개수를 구하시오.

- ① 집합 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(f(x)) = f(x)$
- ② 집합 A 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) \leq 3$

■ 예시 답안

$a = f(b)$ 라 가정하면 조건 ①에 의해 $f(a) = f(f(b)) = f(b) = a$ 이다.

따라서 함수 f 는 치역에서 항등함수이다.

또한 조건 ②에 의하여 치역은 집합 $\{1, 2, 3\}$ 의 부분집합이어야 한다.

따라서 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

1) 치역의 원소가 1개인 경우

이 경우 함수 f 는 상수함수이며 치역은 $\{1\}$, $\{2\}$ 또는 $\{3\}$ 중 하나가 된다.

따라서 해당 조건을 만족시키는 함수의 개수는 3이다.

2) 치역의 원소가 2개인 경우

예를 들어, f 의 치역이 $\{1, 2\}$ 라 가정하면 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ 이어야 한다.

한편 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ 은 각각 1 또는 2이므로 이 경우 함수 f 의 개수는 $2^4 = 16$ 개이다.

치역이 $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ 인 경우도 마찬가지이므로, 해당 조건을 만족시키는 함수의 개수는 $16 \cdot 3 = 48$ 이다.

3) 치역의 원소가 3개인 경우

치역이 $\{1, 2, 3\}$ 이므로 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ 이고 $f(4)$ 와 $f(5)$, $f(6)$ 은 각각 1, 2 또는 3이 될 수 있다.

따라서 해당 조건을 만족시키는 함수의 개수는 $3^3 = 27$ 이다.

그러므로 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수는 $3 + 48 + 27 = 78$ 이다.

■ 채점 기준

채점 기준	배점
주어진 조건으로부터, 치역에서 $f(a) = a$ 라는 조건을 올바르게 유도할 수 있다.	10점
함수의 치역의 모양에 따라 경우를 올바르게 나누고, 각 경우에 해당하는 경우의 수를 정확하게 계산할 수 있다.	15점

2025학년도 자연계열

문제 1

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

제시문

- 두 사건 A, B 가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 와 사건 B 가 일어나는 경우의 수를 각각 m, n 이라고 하면 사건 A 또는 사건 B 가 일어나는 경우의 수는 $m + n$ 이다.
- 두 사건 A, B 에 대하여 사건 A 와 사건 B 가 일어나는 경우의 수를 각각 m, n 이라고 하면 사건 A 와 사건 B 가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m \times n$ 이다.

[출처: 수학 「경우의 수」]

다음 조건을 모두 만족시키는 사차식 $f(x)$ 의 개수를 구하시오.

- 1) $f(x) = g(x)h(x)$ 이다. (단, $g(x)$ 와 $h(x)$ 는 모두 상수가 아니고 최고차항의 계수가 1인 다항식이다.)
- 2) 함수 $g(x)$ 는 $x = b$ 에서 최솟값을 가지며, 이때 $0 \leq b \leq 1$ 이고 $1 \leq g(b) \leq 2$ 이다.
- 3) $g(x)$ 의 계수는 모두 정수이다.
- 4) 방정식 $h(x) = 0$ 의 모든 해는 0보다 크고 11보다 작은 정수이다.

■ 예시 답안

조건 1)과 2)에 의하여, $g(x)$ 는 이차식이다. 따라서 $h(x)$ 도 이차식이다.

(a) $g(x)$ 의 개수

$g(x) = (x - b)^2 + c = x^2 - 2bx + b^2 + c$ 로 나타낼 수 있다. 이때 $1 \leq c \leq 2$ 이다.

$g(x)$ 의 계수가 모두 정수이기 위해서는 $b = 0$, $b = \frac{1}{2}$ 또는 $b = 1$ 이어야 한다.

$b = 0$ 이면 $g(x) = x^2 + c$ 이고 $c = 1$ 또는 $c = 2$ 이다.

$b = \frac{1}{2}$ 이면 $g(x) = x^2 - x + \frac{1}{4} + c$ 이다. 모든 계수가 정수이고 $1 \leq c \leq 2$ 이면 $c = \frac{7}{4}$ 이다.

$b = 1$ 이면 $g(x) = x^2 - 2x + 1 + c$ 이고 $c = 1$ 또는 $c = 2$ 이다.

따라서 위의 조건을 만족시키는 다항식 $g(x)$ 의 개수는 5개이다.

(b) $h(x)$ 의 개수

다항식 $g(x)$ 가 이차식이므로 $h(x) = 0$ 은 이차방정식이다.

만약 $h(x) = 0$ 이 중근을 갖는다면 조건 4)를 만족시키는 $h(x)$ 의 개수는 10개이다.

만약 $h(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖는다면, 조건 4)를 만족시키는 $h(x)$ 의 개수는 ${}_{10}C_2 = 45$ 개이다.

종합하면 $h(x)$ 의 개수는 55개이다.

방정식 $g(x) = 0$ 의 모든 근은 허근이므로, 다항식 $g(x)$ 와 $h(x)$ 는 서로 중복되지 않는다.

따라서 위 조건을 모두 만족시키는 다항식 $f(x) = g(x)h(x)$ 의 개수는 $5 \times 55 = 275$ 개다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	사차식 $f(x)$ 가 이차식 $g(x)$ 와 $h(x)$ 의 곱으로 주어진다는 사실을 파악하고 조건을 활용하여 각각의 개수를 구한 후 $f(x)$ 의 개수를 구할 수 있다.	25점

* 부분점수 있음

문제 2

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

제시문

- 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 어떤 구간에서
 - (i) $f''(x) > 0$ 이면 곡선 $y = f(x)$ 는 그 구간에서 아래로 볼록하다.
 - (ii) $f''(x) < 0$ 이면 곡선 $y = f(x)$ 는 그 구간에서 위로 볼록하다.
- 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

[출처: 미적분 「도함수의 활용」, 「정적분의 활용」]

함수 $f(x) = e^{-x}|\cos x|$ 의 그래프 위의 세 점 $A(0, f(0)), B(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})), C(\pi, f(\pi))$ 가 주어져 있다. 이때 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 AB로 둘러싸인 도형과 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 BC로 둘러싸인 도형의 넓이의 합을 구하시오.

■ 예시 답안

구하는 넓이는 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이와, 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 BC로 둘러싸인 부분의 넓이를 더한 것과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \cos x & (0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \\ -e^{-x} \cos x & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi) \end{cases} \quad \text{이므로 다음과 같이 경우를 나누어 보자.}$$

(a) $0 < x < \frac{\pi}{2}$

이 구간에서 $f''(x) = 2e^{-x} \sin x > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하다. 점 A와 점 B를 지나는 직선의 방정식을 $y = g(x)$ 라고 하면 $f(0) = g(0)$ 이고 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 이므로, 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 $g(x) \geq f(x)$ 가 성립한다.

따라서 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - f(x))dx$ 이다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$ 는 밑변의 길이가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 높이가 1인 직각삼각형의 넓이이므로 $\frac{\pi}{4}$ 와 같다.

부분적분법으로부터 $\int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C$ 이고, 따라서

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = -\left[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$$

그러므로 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - f(x))dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$ 이다.

(b) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

이 구간에서 $f''(x) = -2e^{-x} \sin x < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하다. 점 B와 점 C를 지나는 직선의 방정식을 $y = h(x)$ 라고 하면 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 이고 $f(\pi) = h(\pi)$ 이므로, 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 에서 $f(x) \geq h(x)$ 가 성립한다.

따라서 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 BC로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(x) - h(x))dx$ 이다.

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(x)dx$ 는 밑변의 길이가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 높이가 $e^{-\pi}$ 인 직각삼각형의 넓이이므로 $\frac{\pi e^{-\pi}}{4}$ 와 같다.

닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 에서 $f(x) = -e^{-x} \cos x$ 이므로

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\pi} \text{ 이고,}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(x) - h(x))dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\pi} - \frac{\pi e^{-\pi}}{4} \text{ 이다.}$$

그러므로 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - f(x))dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(x) - h(x))dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi e^{-\pi}}{4} - \frac{1}{2}e^{-\pi} - \frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2	이계도함수를 활용하여 함수의 그래프와 선분의 관계를 파악한 후 부분적분법을 이용하여 곡선과 선분으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	25점

* 부분점수 있음

문제 3

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

제시문

함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이라고 한다.

- (i) 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 정의되어 있다.
- (ii) 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

[출처: 수학II 「함수의 연속」]

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 아래와 같이 주어져 있다.

$$f(x) = \begin{cases} x & (x < -1) \\ x + 3 & (x \geq -1) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + ax + c & (x < 0) \\ x^2 + bx + c & (x \geq 0) \end{cases}$$

이때 다음 문항에 답하시오.

- (1) 함수 $f(x)g(x)$ 와 $g(f(x))$ 가 모든 실수 x 에서 연속일 때, a 와 c 를 각각 b 에 대한 식으로 나타내시오.
- (2) 함수 $f(x)g(x)$, $g(f(x))$, $f(g(x) + 3)$ 이 모든 실수 x 에서 연속일 때, 실수 b 의 값의 범위를 구하시오.

■ 예시 답안

(1)

함수 $f(x)g(x)$ 와 $g(f(x))$ 는 $x \neq -1$ 일 때 항상 연속이다.

$f(x)g(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속이기 위해서는 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)g(x)$ 여야 한다.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)g(x) = -(1-a+c)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)g(x) = 2(1-a+c)$ 이므로 $1-a+c = 0$ 이다.

$g(f(x))$ 가 $x = -1$ 에서 연속이기 위해서는 $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(f(x))$, 즉 $g(-1) = g(2)$ 이어야 하므로

$1-a = 4+2b$, 즉 $a = -2b-3$ 이다.

$1-a+c = 0$ 이므로 $c = -2b-4$ 이다.

(2)

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이 아니므로, $f(g(x)+3)$ 이 연속이기 위해서는 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)+3 < -1$ 이거나 $g(x)+3 \geq -1$ 이어야 한다. 그런데 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \infty$ 이므로 $g(x)+3 < -1$ 일 수는 없다.

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)+3 \geq -1$, 즉 $g(x) \geq -4$ 이어야 한다.

문항 (1)로부터 함수 $g(x)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - (2b+3)x - (2b+4) & (x < 0) \\ x^2 + bx - (2b+4) & (x \geq 0) \end{cases}$$

정의역이 $x \leq 0$ 인 함수 $g_-(x) = x^2 - (2b+3)x - (2b+4)$ 와, 정의역이 $x \geq 0$ 인 함수 $g_+(x) = x^2 + bx - (2b+4)$ 를 생각하자.

(a) 함수 $g_-(x)$ 가 $x < 0$ 에서 최솟값을 갖는 경우

$g_-(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표 $b + \frac{3}{2}$ 이 0보다 작으므로 $b < -\frac{3}{2}$ 이고, 함수 $g_-(x)$ 는 $x = b + \frac{3}{2}$ 일 때 최솟값을 갖는다.

또한 함수 $g_+(x)$ 는 $x = -\frac{b}{2}$ 에서 최솟값을 갖는다.

따라서 $g(x) \geq -4$ 이기 위해서는

$$g_-\left(b + \frac{3}{2}\right) = -b^2 - 5b - \frac{25}{4} \geq -4 \Rightarrow -\frac{9}{2} \leq b \leq -\frac{1}{2},$$

$$g_+\left(-\frac{b}{2}\right) = -\frac{b^2}{4} - 2b - 4 \geq -4 \Rightarrow -8 \leq b \leq 0 \text{이어야 한다.}$$

종합하면 $b < -\frac{3}{2}$, $-\frac{9}{2} \leq b \leq -\frac{1}{2}$, $-8 \leq b \leq 0$ 이 동시에 성립해야 한다.

따라서 함수 $g_-(x)$ 가 $x < 0$ 에서 최솟값을 갖는 경우 주어진 조건을 만족시키는 b 의 범위는 $-\frac{9}{2} \leq b < -\frac{3}{2}$ 이다.

(b) 함수 $g_-(x)$ 가 $x = 0$ 에서 최솟값을 갖는 경우

$g_-(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표 $b + \frac{3}{2}$ 이 0보다 크거나 같으므로 $b \geq -\frac{3}{2}$ 이다.

i) $b > 0$ 일 경우 함수 $g_+(x)$ 역시 $x = 0$ 에서 최솟값을 갖는다.

이때 함수 $g(x)$ 의 최솟값은 $-2b-4$ 이며, 이 값이 -4 보다 크거나 같을 조건은 $b \leq 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 b 는 존재하지 않는다.

ii) $-\frac{3}{2} \leq b \leq 0$ 일 경우 함수 $g_+(x)$ 는 $x = -\frac{b}{2}$ 에서 최솟값을 가지고, $g_+\left(-\frac{b}{2}\right) \geq -4$ 일 조건은 $-8 \leq b \leq 0$ 이다.

따라서 함수 $g_-(x)$ 가 $x = 0$ 에서 최솟값을 갖는 경우 주어진 조건을 만족시키는 b 의 범위는 $-\frac{3}{2} \leq b \leq 0$ 이다.

(a), (b)로부터 $-\frac{9}{2} \leq b < -\frac{3}{2}$ 또는 $-\frac{3}{2} \leq b \leq 0$ 이므로, 구하는 실수 b 의 범위는 $-\frac{9}{2} \leq b \leq 0$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	함수의 연속 조건을 이용하여 a 와 c 를 b 에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	10점
(2)	함수 $f(g(x) + 3)$ 가 연속임을 이용하여 함수 $g(x)$ 의 최솟값에 대한 조건 및 b 의 범위를 구할 수 있다.	15점

* 부분점수 있음

문제 4

다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

제시문

미분가능한 함수 $f(x)$ 에서 $f'(a) = 0$ 이고, $x = a$ 의 좌우에서

- (i) $f'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이다.
- (ii) $f'(x)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이다.

[출처: 수학II 「도함수의 활용」]

다음 조건을 모두 만족시키는 컵의 겉넓이의 최솟값을 구하시오. (단, 컵의 두께는 무시한다)

- 1) 컵은 뚜껑이 없는 원기둥 모양이다.
- 2) 부피 54π 의 물을 넣었을 때, 컵의 높이와 수면의 높이의 차이가 3보다 크거나 같아야 한다.
(단, 수면은 컵의 밑면과 평행하다고 가정한다)

■ 예시 답안

컵의 높이를 h , 반지름을 r 라고 하자. 주어진 조건을 만족시키면서 컵의 겉넓이가 최소가 되기 위해서는, 물을 54π 만큼 넣었을 때 컵의 높이와 수면의 높이의 차이가 정확히 3이어야 한다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$\pi r^2(h - 3) = 54\pi$$

이때 $h = 3 + \frac{54}{r^2}$ 이고, 문제의 조건으로부터 컵의 겉넓이 A 는 다음과 같이 주어진다.

$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \left(3 + \frac{54}{r^2}\right) \quad (r > 0)$$

$$A'(r) = 2\pi r + 6\pi - \frac{108\pi}{r^2} = \frac{2\pi(r^3 + 3r^2 - 54)}{r^2} = \frac{2\pi(r - 3)(r^2 + 6r + 18)}{r^2}$$

로부터 $A'(3) = 0$ 이고, 함수 $A(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	3	...
$A'(r)$		-	0	+
$A(r)$		$\searrow$	63π	$\nearrow$

그러므로 $r = 3$ 일 때 겉넓이가 최소가 되고 이때 컵의 겉넓이는 $A(3) = 63\pi$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4	부피의 조건으로부터 컵의 겉넓이의 식을 구하고 이를 미분하여 최솟값을 구할 수 있다.	25점

* 부분점수 있음

2024학년도 자연계열

문제 1

【문제 1】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

제시문

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ 일 때, α 와 β 를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt$$

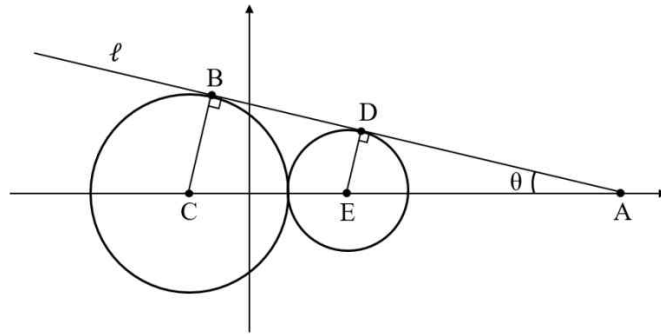
[출처 : 미적분 「적분법」]

$0 < t < 1$ 에 대하여 $(-1, 0)$ 과 $(t, 0)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원과, $(t, 0)$ 과 $(1, 0)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이 있다. 이 두 원에 동시에 접하고 기울기가 음수인 접선을 ℓ 이라고 하자.

이때 다음 문항에 답하시오.

- (1) 직선 ℓ 의 방정식을 구하시오.
- (2) 직선 ℓ 의 y 절편을 $f(t)$ 라고 할 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(t) dt$ 를 구하시오.

■ 예시 답안



큰 원은 반지름이 $\frac{1+t}{2}$ 이고 중심의 좌표는 $C\left(\frac{t-1}{2}, 0\right)$ 이다. 작은 원은 반지름이 $\frac{1-t}{2}$ 이고 중심의 좌표는 $E\left(\frac{t+1}{2}, 0\right)$ 이다.

(1)

x 축과 직선 ℓ , 그리고 각 원의 반지름으로 이루어지는 두 삼각형 ABC 와 ADE 는 닮음비가 $\frac{1+t}{2} : \frac{1-t}{2}$ 인 직각삼각형이다. 그런데 직선 ℓ 의 x 절편을 x_0 라 하면, 삼각형 ABC 의 빗변 AC 의 길이는 $x_0 + \frac{1-t}{2}$, 삼각형 ADE 의 빗변 AE 의 길이는 $x_0 - \frac{t+1}{2}$ 이다.

그러므로

$$\left(x_0 + \frac{1-t}{2}\right) : \left(x_0 - \frac{t+1}{2}\right) = \frac{1+t}{2} : \frac{1-t}{2}$$

가 성립하고, 따라서

$$(t+1)(2x_0 - (t+1)) = (1-t)(2x_0 + (1-t)) \Rightarrow x_0 = \frac{t^2+1}{2t}$$

이다.

또한 ℓ 의 기울기를 a 라 하면, $\overline{AE} = \frac{1-t}{2t}$ 이고 $\overline{DE} = \frac{1-t}{2}$ 이므로, $\angle DAE = \theta$ 일 때

$$\sin \theta = \frac{\frac{1-t}{2}}{\frac{1-t}{2t}} = t, \quad a = -\tan \theta = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \text{ 이다.}$$

그러므로 직선 ℓ 의 방정식은

$$y = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \left(x - \frac{t^2+1}{2t}\right) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}x + \frac{t^2+1}{2\sqrt{1-t^2}}$$

이다.

(2)

직선 ℓ 의 y 절편이 $f(t) = \frac{t^2+1}{2\sqrt{1-t^2}}$ 이므로

$$\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} f(t) dt = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{t^2+1}{2\sqrt{1-t^2}} dt$$

이고, $t = \sin \theta$ 로 치환하면 $\frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} f(t) dt &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{(\sin^2 \theta + 1) \cos \theta}{2\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/4} (\sin^2 \theta + 1) d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/4} (3 - \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \left[3\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{\pi - 2 + \sqrt{3}}{16}
 \end{aligned}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	지름의 끝점을 이용하여 두 원의 정보를 구하고, 이로부터 두 원에 접하는 직선의 방정식을 올바르게 구하였다.	15
(2)	직선의 y 절편으로 정의되는 함수에 대한 정적분을 치환적분을 이용하여 올바르게 계산하였다.	10

문제 2

【문제 2】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

제시문

미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때, 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{또는} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

[출처 : 미적분 「여러 가지 미분법」]

정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 인 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 아래와 같이 주어져 있다.

$$f(x) = 1 - |x - 2n - 1| \quad (2n \leq x < 2n + 2, \ n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$g(x) = x^2 + kx + 1 \quad (\text{단, } k > 1)$$

함수 $h(x)$ 가 함수 $g(x)$ 의 역함수이고 $u(x) = h(x) - f(x)$ (단, $x \geq 1$) 일 때, 다음 문항에 답하시오.

- (1) 양의 정수 n 에 대하여 $2n \leq x \leq 2n + 2$ 일 때 함수 $u(x)$ 의 증가와 감소를 조사하시오.
- (2) 함수 $u(x)$ 의 그래프와 x 축이 1001개의 서로 다른 점에서 만나도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하시오.

■ 예시 답안

(1)

$x > 0$ 일 때 $g'(x) = 2x + k > 1$ 이 성립한다.

함수 $g(x)$ 의 미분계수가 항상 양수이므로 $x > 1$ 에서 함수 $g(x)$ 의 역함수 $h(x)$ 의 미분계수가 항상 존재한다.
 이때 $h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$ 이므로 $0 < h'(x) < 1$ 이다.

함수 $f(x)$ 는 $2n \leq x \leq 2n+2$ 일 때 다음과 같이 주어진다.

$$f(x) = \begin{cases} x - 2n & (2n \leq x < 2n+1) \\ -x + 2n+2 & (2n+1 \leq x \leq 2n+2) \end{cases}$$

$2n < x < 2n+1$ 또는 $2n+1 < x < 2n+2$ 일 때 함수 $f(x)$ 가 미분가능하므로 함수 $u(x)$ 역시 $2n < x < 2n+1$ 또는 $2n+1 < x < 2n+2$ 일 때 미분가능하고, 이때 도함수 $u'(x)$ 는 다음과 같다.

$$u'(x) = \begin{cases} h'(x) - 1 & (2n < x < 2n+1) \\ h'(x) + 1 & (2n+1 < x < 2n+2) \end{cases}$$

$h'(x) - 1 < 0$, $h'(x) + 1 > 0$ 이므로 $u(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$2n$	...	$2n+1$	...	$2n+2$
$u'(x)$	존재하지 않음	-	존재하지 않음	+	존재하지 않음
$u(x)$	$h(2n)$	$\searrow$	$h(2n+1) - 1$	$\nearrow$	$h(2n+2)$

(2)

$1 < x < 2$ 일 때 $u'(x) = h'(x) + 1 > 0$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $u(x)$ 는 증가한다.

또한 $u(1) = -1$, $u(2) = h(2) > 0$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $u(x)$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만나게 된다.
 n 이 양의 정수일 때 문항 (1)의 증감표에 의하여 함수 $u(x)$ 는 $2n \leq x \leq 2n+1$ 에서 감소하고 $2n+1 \leq x \leq 2n+2$ 에서 증가하며, $u(2n) = h(2n) > 0$ 이고 $u(2n+2) = h(2n+2) > 0$ 이다.

따라서 $2n \leq x \leq 2n+2$ 에서 함수 $u(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수는 다음과 같이 주어진다.

- (a) $u(2n+1) = h(2n+1) - 1 > 0$: 교점의 개수는 0개이다.
- (b) $u(2n+1) = h(2n+1) - 1 = 0$: 교점의 개수는 1개이다.
- (c) $u(2n+1) = h(2n+1) - 1 < 0$: 교점의 개수는 2개이다.

함수 $h(x)$ 는 증가함수이므로, $h(2n+1) < h(2n+3)$ 이다. 따라서, 구간 $[2n, 2n+2]$ 에서 경우 (a) 또는 (b)가 발생하면, 다음 구간 $[2n+2, 2n+4]$ 에서는 반드시 경우 (a)가 발생한다.

그러므로 함수 $u(x)$ 의 그래프와 x 축이 1001개의 점에서 만나기 위해서는 $1 < x < 2$ 에서 한 번 만나고, 경우 (c)가 정확히 500번 발생하여야 한다. 즉 다음이 성립하여야 한다.

$$\begin{aligned} h(2 \cdot 1 + 1) &< 1, \\ h(2 \cdot 2 + 1) &< 1, \\ &\vdots \\ h(2 \cdot 500 + 1) &< 1, \\ h(2 \cdot 501 + 1) &> 1 \end{aligned}$$

함수 $h(x)$ 는 증가함수이므로 $h(1001) < 1$, $h(1003) > 1$ 이 성립하면 충분하다.

$$\begin{aligned} h(1001) < 1 &\iff g(h(1001)) = 1001 < g(1), \\ h(1003) > 1 &\iff g(h(1003)) = 1003 > g(1) \end{aligned}$$

이므로 $1001 < g(1) < 1003$, 즉 $1001 < k+2 < 1003$ 이 성립해야 한다. 따라서 구하는 실수 k 의 값의 범위는
 $999 < k < 1001$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	정의역에서 일대일대응이 되는 이차함수의 역함수와 절댓값으로 정의된 함수의 미분계수를 계산하고, 두 함수의 차로 정의되는 함수의 증가와 감소 정보를 정확히 묘사하였다.	25
(2)	정의된 함수의 그래프의 x 절편의 개수를 각 구간에서 바르게 판단하고, 이로부터 k 의 정보를 올바르게 유도하였다.	15

문제 3

【문제 3】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

제시문

함수 $f(x)$ 가 실수 a 에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이라고 한다.

- (i) 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 정의되어 있다.
- (ii) 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재한다.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

[출처 : 수학II 「함수의 연속」]

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 아래와 같이 주어져 있다.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & (x \leq 0) \\ 1 - ax^2 & (x > 0) \end{cases} \quad (\text{단, } a \text{는 상수}), \quad g(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{2} & (x \leq 0) \\ -x - \frac{1}{4} & (x > 0) \end{cases}$$

합성함수 $f(g(x))$ 는 연속이라고 하자.

이때 한 변이 x 축 위에 있고, 함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하시오.

■ 예시 답안

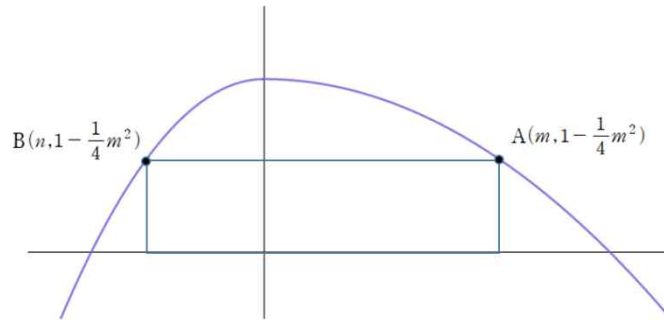
합성함수 $f(g(x))$ 는 다음과 같다.

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1 - a\left(-x + \frac{1}{2}\right)^2 & x \leq 0 \\ 1 - \left(-x - \frac{1}{4}\right)^2 & x > 0 \end{cases}$$

이 함수가 $x = 0$ 에서 연속이기 위해서는 좌극한, 우극한과 함숫값이 일치해야 한다. 따라서

$$1 - \frac{a}{2^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x)) = f(g(0)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) = 1 - \frac{1}{4^2}$$

이어야 하므로, $a = \frac{1}{4}$ 이다.



직사각형의 오른쪽 변의 x 좌표를 m 이라고 하자. 이때 직사각형의 오른쪽 위 꼭짓점은 $A\left(m, 1 - \frac{1}{4}m^2\right)$ 이 된다. 직사각형의 왼쪽 위 꼭짓점은 $B\left(n, 1 - \frac{1}{4}m^2\right)$ 이고 이 점은 곡선 $y = 1 - x^2$ 위에 있으므로 다음 식이 성립한다.

$$1 - n^2 = 1 - \frac{1}{4}m^2$$

따라서 $n = -\frac{m}{2}$ 이고 직사각형의 넓이는 다음과 같다.

$$S(m) = \left(1 - \frac{m^2}{4}\right)\left(m + \frac{m}{2}\right) = \frac{3}{2}m - \frac{3}{8}m^3$$

$S'(m) = \frac{3}{2} - \frac{9}{8}m^2$ ($0 < m < 2$)이고 함수 $S(m)$ 의 증감표는 다음과 같다.

m	$0 < m < \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	...
$S'(m)$	+	0	-
$S(m)$	↗	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	↘

따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	연속성을 통하여 함수의 계수를 계산하고, 주어진 성질을 만족하는 직사각형의 넓이를 함수로 표현하고 미분하여 최댓값을 구할 수 있다.	25

문제 4

【문제 4】 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

제시문

- 서로 다른 n 개에서 r ($0 \leq r \leq n$) 개를 택하는 순열의 수는

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- 서로 다른 n 개에서 r ($0 \leq r \leq n$) 개를 택하는 조합의 수는

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

[출처 : 수학 「경우의 수」]

다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 세려고 한다.

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad f \circ f \text{ 는 항등함수}$$

이를 위하여 학생 A는 다음과 같은 방법을 제시하였다.

(가) $f(a) = b$ 이면 $f(b) = a$ 여야 한다.

(나) 그러므로 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 모든 원소를 두 개씩 세 쌍으로 나누는 경우의 수를 구하면 된다.

(다) 따라서 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 15 \times 6 \times 1 = 90$ 개이다.

이때 다음 문항에 답하시오.

- 학생 A의 방법에서 잘못된 점을 모두 찾아서 설명하시오.
- 위의 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오.

■ 예시 답안

(1)

학생 A의 방법에서 첫 번째 잘못된 점은, $f(i) = i$ 인 값 i 가 있을 가능성을 고려하지 않고 과정 (나)에서 원소를 두 개씩 세 쌍으로 나누는 경우만 고려한 것이다. $f(i) = j$ 일 때 $i \neq j$ 이면 두 개씩 쌍을 이루어야 하지만, $i = j$ 인 경우는 다른 원소와 쌍을 이루지 않는다.

두 번째 잘못된 점은, 두 개씩 세 쌍이 이루어지는 경우의 수는 쌍을 택하는 순서와 무관해야 하는데, 과정 (다)에서 쌍의 순서를 고려하여 계산한 것이다.

(2)

$f(i) = j$ 이고 $i \neq j$ 인 원소 i 의 개수는 짝수이므로 $f(i) = i$ 인 원소 i 의 개수 역시 짝수이다.

(a) $f(i) = j$ 이고 $i \neq j$ 인 원소 i 가 없는 경우 (즉 $f(i) = i$ 인 원소 i 가 6개인 경우):

모든 i 에 대해 $f(i) = i$ 인 함수의 개수는 1개이다.

(b) $f(i) = j$ 이고 $i \neq j$ 인 원소 i 가 2개인 경우 (즉 $f(i) = i$ 인 원소 i 가 4개인 경우):

두 원소의 쌍을 하나 만드는 경우의 수, 즉 ${}_6C_2 = 15$ 개의 함수가 존재한다.

(c) $f(i) = j$ 이고 $i \neq j$ 인 원소 i 가 4개인 경우 (즉 $f(i) = i$ 인 원소 i 가 2개인 경우):

두 원소의 쌍을 하나 만들고 나머지 4개의 원소 중 두 번째 쌍을 만든 다음, 두 쌍을 순서대로 나열하는 경우의 수로 나누어 주어야 한다.

이때 함수 f 의 개수는 $\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{2!} = \frac{15 \times 6}{2} = 45$ 이다.

(d) $f(i) = j$ 이고 $i \neq j$ 인 원소 i 가 6개인 경우 (즉 $f(i) = i$ 인 원소 i 가 없는 경우):

정의역의 6개의 원소를 두 개씩 세 쌍으로 나누는 경우의 수를 구하면 된다.

이때 함수 f 의 개수는 $\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = \frac{15 \times 6 \times 1}{6} = 15$ 이다.

종합하면 다음과 같다.

$f(i) \neq i$ 인 원소 i 의 개수	$f(i) = i$ 인 원소 i 의 개수	함수 f 의 개수
0	6	1
2	4	15
4	2	45
6	0	15

따라서 구하는 함수 f 의 개수는 $1 + 15 + 45 + 15 = 76$ 개이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	학생 A의 방법 중 잘못된 점 두 가지를 지적할 수 있다.	10
(2)	주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 나누어 각각 조합의 수로 계산할 수 있다.	15

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다