

아주대논술

자연계열

목차

2026학년도 자연계열 (오전·오후)	3
오전 · 문항 1	3
오전 · 문항 2	7
오후 · 문항 1	11
오후 · 문항 2	15
 2025학년도 자연계열 (오전·오후)	 19
오전 · 문항 1	19
오전 · 문항 2	22
오후 · 문항 1	25
오후 · 문항 2	29
 2024학년도 자연계열 (오전·오후)	 33
오전 · 문항 1	33
오전 · 문항 2	36
오후 · 문항 1	39
오후 · 문항 2	42

2026학년도 자연계열 (오전·오후)

오전 · 문항 1

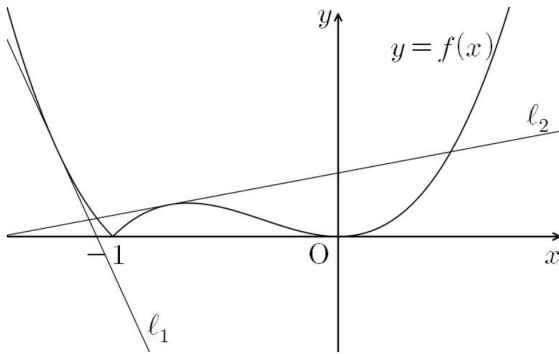
[문항 1] [제시문] 을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

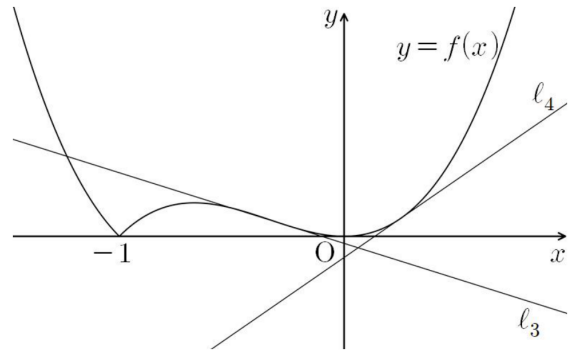
[가] 함수 $y = f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x+1) & (x \geq -1) \\ -x^2(x+1) & (x < -1) \end{cases}$$

양의 실수 t ($t \neq 1$)에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1-t, f(-1-t))$ 에서의 접선을 ℓ_1 , 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1+t, f(-1+t))$ 에서의 접선을 ℓ_2 , 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-t, f(-t))$ 에서의 접선을 ℓ_3 , 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선을 ℓ_4 라 하자. 직선 ℓ_1 과 ℓ_2 의 교점의 x 좌표를 $a(t)$ 라 하고 직선 ℓ_3 과 ℓ_4 의 교점을 Q 라 하자. 직선 ℓ_3 과 x 축이 만나는 점을 R , 직선 ℓ_4 과 x 축이 만나는 점을 V 라 하고 삼각형 QVR 의 넓이를 $S(t)$ 라 하자. [그림 1]과 [그림 2]는 $t = \frac{1}{4}$ 일 때를 나타낸다.



[그림 1]

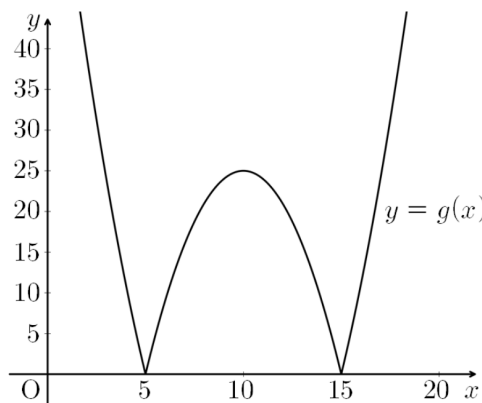


[그림 2]

[나] 음이 아닌 정수 p 와 q 에 대하여 함수 $y = g(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x) = \begin{cases} q^2 - (x-p)^2 & (p-q < x < p+q) \\ (x-p)^2 - q^2 & (x \leq p-q \text{ 또는 } x \geq p+q) \end{cases}$$

[그림 3]은 $p = 10, q = 5$ 인 경우를 나타낸다.



[그림 3]

[다] 함수 $y = h(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$h(x) = \begin{cases} -5x - 10 & (x < -2) \\ 2x + 4 & (-2 \leq x < 0) \\ -2x + 4 & (0 \leq x < 2) \\ 5x - 10 & (x \geq 2) \end{cases}$$

[문제 1-1] (20점) 제시문 (가)에 대한 다음 물음에 답하시오.

- (1) (10점) $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t)$ 를 조사하시오.
 (2) (10점) $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)}{t^k}$ 의 값이 0이 아닌 실수이기 위한 실수 k 의 값과 그 극한값을 구하시오.

[문제 1-2] (18점) 제시문 (나)에 대한 다음 물음에 답하시오.

- (1) (8점) $p = 3, q = 4$ 일 때, 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = 20$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.
 (2) (10점) $p = 10, q = 5$ 일 때, 다음 <조건>을 만족시키는 직선의 개수를 구하시오.

<조건>

- ① 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $P(6, 9)$ 를 지난다.
 ② 곡선 $y = g(x)$ 와 만나는 점의 개수가 3 이상이고, 이들 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 점 P 를 포함하여 두 개 이상이다.

[문제 1-3] (12점) 양수 m 에 대하여 함수 $y = m|x|$ 의 그래프와 제시문 (다)의 함수 $y = h(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 $A(m)$ 이라 하자. $A(m)$ 이 최소일 때, m 의 값을 구하시오. (단, $0 < m < 5$)

■ 예시 답안

[문제 1-1] (1)

$x > -1$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + 2x$ 이고 $x < -1$ 에서 $f'(x) = -3x^2 - 2x$ 이므로 양수 t 에 대하여

$$\ell_1 : y = -(3(t+1)^2 - 2(t+1))(x + (t+1)) + (t+1)^3 - (t+1)^2$$

$$\ell_2 : y = (3(t-1)^2 + 2(t-1))(x - (t-1)) + (t-1)^3 + (t-1)^2$$

이다. 두 직선의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x = a(t) = -\frac{5t^2 + 1}{3t^2 + 1}$$

이다. 따라서 $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = -\frac{5}{3}$ 이다.

[문제 1-1] (2)

충분히 작은 양수 t 에 대하여

$$\ell_3 : y = (3t^2 - 2t)(x + t) - t^3 + t^2$$

$$\ell_4 : y = (3t^2 + 2t)(x - t) + t^3 + t^2$$

이다. 직선 ℓ_3 와 x 축의 교점은 $R\left(-\frac{2t^2 - t}{3t - 2}, 0\right)$, 직선 ℓ_4 와 x 축의 교점은 $V\left(\frac{2t^2 + t}{3t + 2}, 0\right)$, 직선 ℓ_3 과 ℓ_4 의 교점은 $Q(t^2, 3t^4 - t^2)$ 이다. 따라서

$$S(t) = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{2t^2 + t}{3t + 2} + \frac{2t^2 - t}{3t - 2} \right) (3t^4 - t^2) \right| = \frac{2t^3(3t^2 - 1)^2}{4 - 9t^2}$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)}{t^k} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2t^3(3t^2 - 1)^2}{t^k(4 - 9t^2)}$$

이다. 위 극한값이 0이 아닌 실숫값으로 존재하기 위한 k 의 값은 3이고 $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)}{t^k} = \frac{1}{2}$ 이다.

[문제 1-2] (1)

$p = 3$, $q = 4$ 이므로 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = 20$ 는 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 7$ 에서 만난다. 이 구간에서 $g(x) = (x - 3)^2 - 16$ 이므로

$$(x - 3)^2 - 16 = 20 \implies (x - 3)^2 = 36 \implies x = -3 \text{ 또는 } x = 9$$

이다. 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = 20$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 B 라 하면

$$\begin{aligned} B &= \int_{-3}^{-1} (20 - ((x - 3)^2 - 16)) dx + \int_{-1}^7 (20 - (16 - (x - 3)^2)) dx + \int_7^9 (20 - ((x - 3)^2 - 16)) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 27x \right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 13x \right]_{-1}^7 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 27x \right]_7^9 \\ &= \frac{352}{3} \end{aligned}$$

이다.

[문제 1-2] (2)

점 $P(6, 9)$ 와 점 $(5, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y = 9x - 45$ 이고, 점 $P(6, 9)$ 와 점 $(15, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $y = -x + 15$ 이다. 이를 통해 점 $P(6, 9)$ 를 지나는 직선 중 기울기가 9보다 크거나 -1보다 작은 직선과 곡선 $y = g(x)$ 의 교점의 개수는 2인 것을 알 수 있다. 따라서 점 $P(6, 9)$ 를 지나는 직선 중 직선의 기울기가 -1 이상 9 이하인 직선과 곡선 $y = g(x)$ 의 교점의 개수는 3 이상이다.

직선 $y = 9x - 45$ 와 곡선 $y = g(x)$ 의 교점은 $(5, 0)$, $(6, 9)$, $(24, 171)$ 이고, 직선 $y = -x + 15$ 와 곡선 $y = g(x)$ 의 교점은 $(4, 11)$, $(6, 9)$, $(15, 0)$ 이다. x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 교점을 고려하므로 정수 x 를 생각하

자. $x < 4$ 일 때 점 $P(6, 9)$ 와 점 $(x, g(x))$ 를 지나는 직선의 기울기는 -1 보다 작고, $x > 24$ 일 때 점 $P(6, 9)$ 와 $(x, g(x))$ 를 지나는 직선의 기울기는 9 보다 크다. 따라서 $4 \leq x < 6$ 또는 $6 < x \leq 24$ 인 경우 교점의 개수가 3 이상이면서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 교점의 개수가 2 이상이다. 이를 만족하는 x 는 20 개다.

x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 교점의 개수가 3 인 직선은 세 점 $(5, 0)$, $(6, 9)$, $(24, 171)$ 을 지나는 직선 $y = 9x - 45$ 와 세 점 $(4, 11)$, $(6, 9)$, $(15, 0)$ 을 지나는 직선 $y = -x + 15$ 뿐이다. 따라서 중복된 두 직선을 고려하면, <조건>을 만족시키는 직선의 개수는 18 이다.

[문제 1-3]

함수 $y = m|x|$ 의 그래프와 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다. 함수 $y = m|x|$ 의 그래프와 함수 $y = h(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형에서 $x \geq 0$ 인 부분의 넓이를 $T(m)$ 이라 하면 $A(m) = 2T(m)$ 이므로 $T(m)$ 이 최소일 때 $A(m)$ 도 최소이다.

함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 y 축의 교점을 C , 함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점을 D , $0 \leq x < 2$ 에서 직선 $y = mx$ 와 $y = 4 - 2x$ 의 교점을 P , $x \geq 2$ 에서 직선 $y = mx$ 와 $y = 5x - 10$ 의 교점을 Q 라 하자. 점 P 의 좌표는 $\left(\frac{4}{m+2}, \frac{4m}{m+2}\right)$ 이고 점 Q 의 좌표는 $\left(\frac{10}{5-m}, \frac{10m}{5-m}\right)$ 이다. $T(m)$ 은 삼각형 COD 의 넓이와 삼각형 ODQ 의 넓이의 합에서 삼각형 ODP 의 넓이의 2 배를 뺀 것과 같으므로

$$T(m) = 4 + \frac{10m}{5-m} - \frac{8m}{m+2}$$

이다.

$$T'(m) = \frac{50}{(5-m)^2} - \frac{16}{(m+2)^2} = \frac{2(17m^2 + 180m - 100)}{(5-m)^2(m+2)^2}$$

이고 $T'(m)$ 의 분모는 $0 < m < 5$ 에서 양수이므로, $T(m)$ 은 $17m^2 + 180m - 100 = 0$ 을 만족하는 m 에서 최솟값을 갖는다. 따라서

$$m = \frac{-90 + 70\sqrt{2}}{17}$$

이다.

■ 채점 기준

문항	채점 기준	배점
1-1 (1)	(1) 직선 ℓ_1 과 ℓ_2 를 올바르게 구함	4점
	(2) 교점의 x 좌표를 올바르게 구함	4점
	(3) 극한값을 올바르게 구함	2점
1-1 (2)	(1) 점 R 과 V 의 좌표를 올바르게 구함	4점
	(2) 삼각형의 넓이 $S(t)$ 를 올바르게 구함	2점
	(3) k 값과 극한값을 올바르게 구함	4점
1-2 (1)	(1) $y = 20$ 과 $y = g(x)$ 의 교점을 올바르게 구함	2점
	(2) 각 구간별 적분식을 올바르게 나타냄	3점
	(3) 각 적분을 올바르게 계산	3점
1-2 (2)	(1) 교점의 개수가 3 이상인 상황(기울기)을 관찰	3점
	(2) $4 \leq x < 6$ 또는 $6 < x \leq 24$ 에서 <조건>을 만족시킬 수 있음	3점
	(3) 중복된 직선의 개수를 제외하여 개수를 올바르게 구함	4점
1-3	(1) $h(x)$ 와 $y = m x $ 의 교점을 올바르게 구함	2점
	(2) $T(m)$ 을 올바르게 계산	3점
	(3) $T'(m)$ 을 올바르게 계산	3점
	(4) $A(m)$ 이 최소가 되는 m 의 값을 올바르게 계산	4점

오전 · 문항 2

[문항 2] [제시문] 을 읽고 물음에 답하시오.

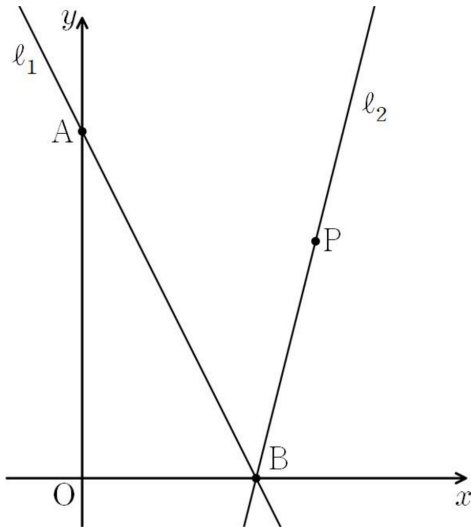
제시문

[가] 양의 실수 c 에 대하여 점 B의 좌표를 $(c, 0)$ 이라 하고, $0 \leq t \leq 4$ 인 실수 t 에 대하여 다음과 같이 정의된 두 함수 $f(t), g(t)$ 를 생각하자.

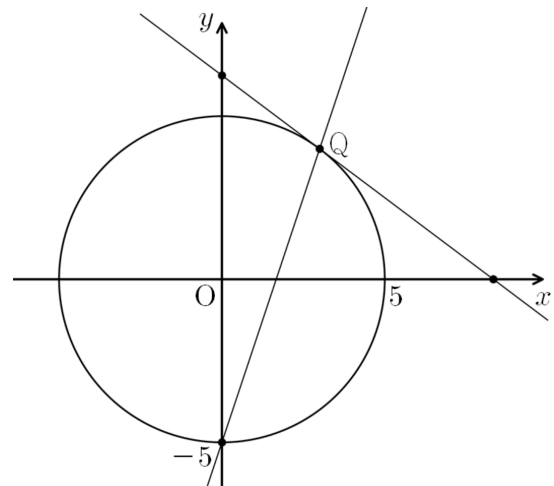
$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}t - 2 & (0 \leq t \leq 2) \\ -\frac{5}{2} + \sin 2\pi t & (2 < t \leq 4) \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 4 & (0 \leq t \leq 3) \\ 4 + \sin 2\pi t & (3 < t \leq 4) \end{cases}$$

점 B를 지나고 기울기가 $f(t), g(t)$ 인 직선을 각각 ℓ_1, ℓ_2 라 하자. 점 A는 직선 ℓ_1 과 y 축의 교점이고, 제1사분면 위의 점 P는 직선 ℓ_2 위에 있다. 삼각형 ABP의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하자.

[그림 4]는 $c = \sqrt{5}, t = 0$, 점 P의 x 좌표가 3일 때를 나타낸다.



[그림 4]



[그림 5]

[나] 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원 C 를 생각하자. 양수 $m (m \neq 1)$ 에 대하여 점 $(0, -5)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선이 원 C 와 만나는 점 중 x 좌표가 0이 아닌 것을 Q라 하자. 원 C 위의 점 Q에서의 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(m)$ 이라 하자. [그림 5]는 $m = 3$ 일 때 원 C 위의 점 Q에서의 접선 및 그 접선이 좌표축과 만나는 점들을 나타낸다.

[문제 2-1] (30점) 제시문 (가)에 대한 다음 물음에 답하시오. (단, $0 \leq t \leq 4$)

- (1) (8점) $c = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 일 때, $\overline{AB} = 5$ 가 되는 t 의 값을 모두 구하시오.
- (2) (10점) $\overline{BP} = s$ 라 하자. $c = \sqrt{5}, t = 0$ 일 때, $\lim_{s \rightarrow 0^+} R$ 을 조사하시오.
- (3) (12점) 두 직선 ℓ_1 과 ℓ_2 가 이루는 예각의 크기의 최솟값을 θ 라 할 때, $\tan \theta$ 의 값을 구하시오.

[문제 2-2] (20점) 제시문 (나)에 대한 다음 물음에 답하시오.

- (1) (8점) 점 $(0, -5)$ 를 지나고 기울기가 각각 $2, 5\sqrt{3} - 8$ 인 직선이 원 C 와 만나는 점 중 x 좌표가 0이 아닌 것을 각각 Q_1, Q_2 라 할 때, 점 $(0, -5)$ 를 포함하지 않는 호 Q_1Q_2 의 길이를 구하시오.
- (2) (12점) $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S(m)}{m^\alpha}$ 의 값이 0이 아닌 실수이기 위한 실수 α 의 값과 그 극한값을 구하시오.

■ 예시 답안

[문제 2-1] (1)

점 B의 좌표가 $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, 0\right)$ 이고 점 A는 직선 ℓ_1 과 y 축의 교점이므로 직선 ℓ_1 의 기울기 $f(t)$ 가 -3 일 때 $\overline{AB} = 5$ 임을 알 수 있다. $0 \leq t \leq 2$ 인 실수 t 에서 $-\frac{1}{4}t - 2 > -3$ 이므로 $-\frac{5}{2} + \sin 2\pi t = -3$ 을 만족시키는 t 의 값을 $2 < t \leq 4$ 범위에서 모두 구하면 된다. 따라서 $t = \frac{31}{12}, t = \frac{35}{12}, t = \frac{43}{12}, t = \frac{47}{12}$ 이다.

[문제 2-1] (2)

각 ABP의 크기를 β 라 하자. $t = 0$ 일 때, 점 A, B, P의 좌표는 각각 $(0, 2\sqrt{5}), (\sqrt{5}, 0), \left(\sqrt{5} + \frac{s}{\sqrt{17}}, \frac{4s}{\sqrt{17}}\right)$ 이므로

$$\tan \beta = \frac{(-2) - 4}{1 + (-2) \times 4} = \frac{6}{7},$$

$$\sin \beta = \frac{6}{\sqrt{85}},$$

$$\overline{AP} = \sqrt{\left(\sqrt{5} + \frac{s}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(2\sqrt{5} - \frac{4s}{\sqrt{17}}\right)^2}$$

임을 알 수 있다. 사인법칙에 의해

$$R = \frac{\overline{AP}}{2 \sin \beta} = \frac{\sqrt{85}}{12} \sqrt{\left(\sqrt{5} + \frac{s}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(2\sqrt{5} - \frac{4s}{\sqrt{17}}\right)^2}$$

이다. 따라서

$$\lim_{s \rightarrow 0+} R = \frac{\sqrt{85}}{12} \lim_{s \rightarrow 0+} \sqrt{\left(\sqrt{5} + \frac{s}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(2\sqrt{5} - \frac{4s}{\sqrt{17}}\right)^2} = \frac{5\sqrt{85}}{12}$$

이다.

[문제 2-1] (3)

(2)에서 정의된 β 에 대해

$$\tan \beta = \frac{f(t) - g(t)}{1 + f(t)g(t)} \quad (0 \leq t \leq 4)$$

이다.

① $0 \leq t \leq 2$ 인 경우

$$\tan \beta = \frac{\left(-\frac{1}{4}t - 2\right) - 4}{1 + \left(-\frac{1}{4}t - 2\right) \times 4} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{17}{t+7}\right)$$

이다. 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서

$$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{17}{t+7}\right) \geq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{17}{2+7}\right) = \frac{13}{18}$$

이므로 $\tan \beta \geq \frac{13}{18}$ 이다.

② $2 < t \leq 3$ 인 경우

$$\tan \beta = \frac{\left(-\frac{5}{2} + \sin 2\pi t\right) - 4}{1 + \left(-\frac{5}{2} + \sin 2\pi t\right) \times 4} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{17}{9 - 4 \sin 2\pi t}\right)$$

이고

$$4 \sin 2\pi t \geq 4 \sin\left(2\pi \times \frac{11}{4}\right) = -4$$

이므로 $\tan \beta \geq \frac{15}{26}$ 이다.

③ $3 < t \leq 4$ 인 경우

$$\tan \beta = \frac{\left(-\frac{5}{2}\right) - 4}{1 + \left(-\frac{5}{2} + \sin 2\pi t\right) \times (4 + \sin 2\pi t)} = \frac{\frac{13}{2}}{-\sin^2 2\pi t - \frac{3}{2} \sin 2\pi t + 9}$$

이고

$$-\sin^2 2\pi t - \frac{3}{2} \sin 2\pi t + 9 = -\left(\sin 2\pi t + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{153}{16} \leq \frac{153}{16}$$

이므로 $\tan \beta \geq \frac{104}{153}$ 이다.

①, ②, ③으로부터 $\tan \beta > 0$ 이므로 β 는 예각임을 알 수 있다. 각 ABP의 크기 β 의 최솟값이 θ 이므로 $\tan \theta = \frac{15}{26}$ 이다.

[문제 2-2] (1)

점 $(0, -5)$ 를 지나고 기울기 m 이 $2, 5\sqrt{3} - 8$ 인 직선을 각각 L_1, L_2 라 하자. 두 직선이 이루는 예각의 크기를 α 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{2 - (5\sqrt{3} - 8)}{1 + 2(5\sqrt{3} - 8)} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이다. 따라서 $\angle Q_1 O Q_2 = \frac{\pi}{3}$ 이고 호의 길이는 $5 \times \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$ 이다.

[문제 2-2] (2)

점 $(0, -5)$ 를 지나고 기울기 m 인 직선의 방정식은 $y = mx - 5$ 이므로 점 Q 의 좌표는 $\left(\frac{10m}{1+m^2}, \frac{5(m^2-1)}{1+m^2}\right)$

이다. 원 C 위의 점 Q 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{10m}{1+m^2}x + \frac{5(m^2-1)}{1+m^2}y = 25$$

이고,

$$S(m) = \frac{1}{2} \times \frac{5(1+m^2)}{2m} \times \frac{5(1+m^2)}{m^2-1} = \frac{25(m^2+1)^2}{4m(m^2-1)}$$

이다. 따라서 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S(m)}{m^\alpha}$ 이 0이 아닌 실수로 존재하기 위한 α 의 값은 1이고 이때의 극한값은 $\frac{25}{4}$ 이다.

■ 채점 기준

문항	채점 기준	배점
2-1 (1)	(1) 기울기 $f(t)$ 가 -3 임을 관찰하여 $-\frac{5}{2} + \sin 2\pi t = -3$ 을 쓴 경우	4점
	(2) 이를 이용하여 t 구함	4점
2-1 (2)	(1) 점 A와 P의 좌표를 구함	2점
	(2) $\tan \beta$ 를 구하고 $\sin \beta$ 를 구함	4점
	(3) R 을 구하고 극한값을 올바르게 구함	4점
2-1 (3)	(1) $0 \leq t \leq 2$ 인 경우 $\tan \beta$ 의 최솟값을 올바르게 구함	3점
	(2) $2 < t \leq 3$ 인 경우 $\tan \beta$ 의 최솟값을 올바르게 구함	3점
	(3) $3 < t \leq 4$ 인 경우 $\tan \beta$ 의 최솟값을 올바르게 구함	4점
	(4) 답을 올바르게 구함	2점
2-2 (1)	(1) 두 직선이 이루는 각 α 를 올바르게 구함	4점
	(2) 원주각의 성질을 이용하여 $\angle Q_1 O Q_2$ 을 구하고 호의 길이를 구함	4점
2-2 (2)	(1) 접점 Q를 구하여 접선의 방정식을 올바르게 구함	4점
	(2) 삼각형의 넓이 $S(m)$ 을 올바르게 구함	4점
	(3) α 와 극한값을 올바르게 구함	4점

오후 · 문항 1

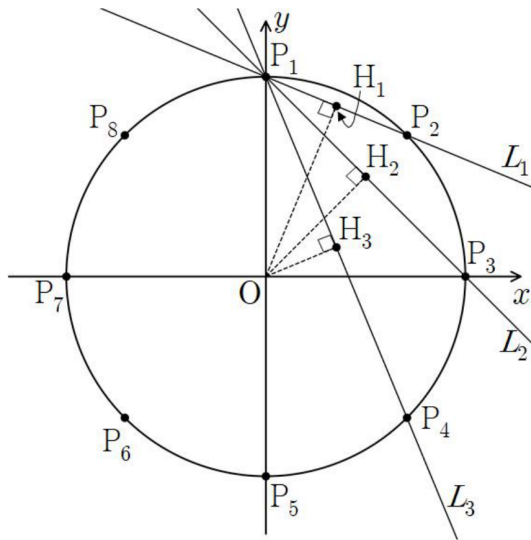
[문항 1] [제시문] 을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

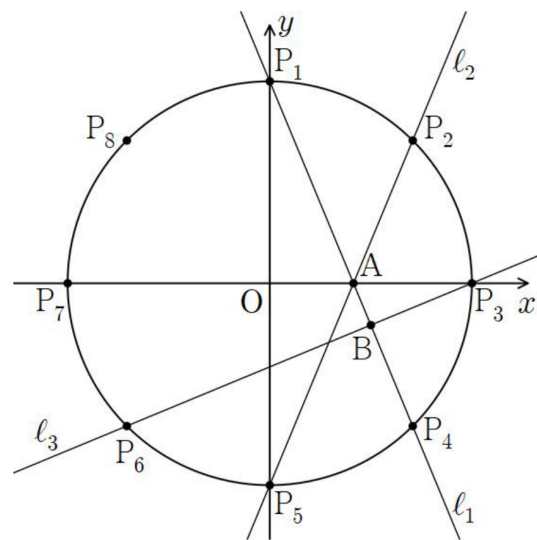
[가] 8 이상의 자연수 n 에 대하여 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C 위의 점 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 을 생각하자. 이때 점 P_1 의 좌표는 $(0, 1)$ 이고 점 $P_1, P_2, \dots, P_n, P_1$ 을 차례로 이어서 만든 도형은 정 n 각형을 이룬다. 점 P_1 과 P_2 를 지나는 직선을 L_1 , 점 P_1 과 P_3 을 지나는 직선을 L_2 , 점 P_1 과 P_4 을 지나는 직선을 L_3 이라 하자. 이때 원점에서 직선 L_1, L_2, L_3 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3 이라 하자.

점 P_1 과 P_4 를 지나는 직선을 ℓ_1 , 점 P_2 과 P_5 를 지나는 직선을 ℓ_2 , 점 P_3 과 P_6 을 지나는 직선을 ℓ_3 이라 하자. 직선 ℓ_1 과 ℓ_2 의 교점을 A , 직선 ℓ_1 과 ℓ_3 의 교점을 B 라 하자.

[그림 1]과 [그림 2]는 $n = 8$ 일 때를 나타낸다.



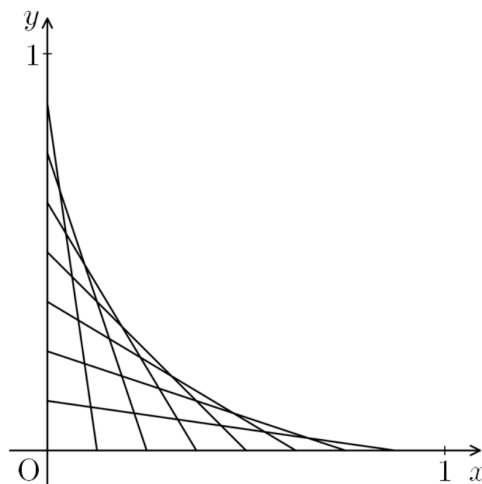
[그림 1]



[그림 2]

[나] 3 이상의 자연수 n 에 대하여 점 $\left(\frac{j}{n}, 0\right)$ 과 점 $\left(0, \frac{n-j}{n}\right)$ 를 지나는 직선을 m_j 라 하자. (단, j 는 n 보다 작은 자연수이다.) 직선 m_1 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 s_1 , 직선 m_{i-1} 과 m_i 및 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 s_i 라 하자. (단, $i = 2, \dots, n-1$)

[그림 3]은 $n = 8$ 일 때를 나타낸다.



[그림 3]

[문제 1-1] (25점) 제시문 (가)에 대한 다음 물음에 답하시오.

- (1) (5점) $n = 8$ 일 때, 세 점 H_1, H_2, H_3 을 지나는 원의 방정식을 구하시오.
- (2) (8점) $n = 10$ 일 때, 자연수 k 에 대하여 점 $\left(0, 1 - 3\left(\frac{2}{9}\right)^k\right)$ 에서 세 직선 L_1, L_2, L_3 에 내린 수선의 발을 모두 지나는 원의 넓이를 S_k 라 할 때 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ 를 조사하시오.
- (3) (12점) $n = 12$ 일 때, 사각형 P_2ABP_3 의 넓이를 구하시오.

[문제 1-2] (25점) 제시문 (나)에 대한 다음 물음에 답하시오.

- (1) (10점) $n = 16$ 일 때, 직선 m_8 과 직선 m_j ($j = 1, \dots, 7, 9, \dots, 15$)의 교점의 x 좌표를 각각 p_j 라 하자. $\sum_{j=1}^7 p_j + \sum_{j=9}^{15} p_j$ 의 값을 구하시오.
- (2) (15점) 3 이상의 자연수 n 에 대하여 $T_n = \sum_{j=1}^{n-1} s_j$ 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ 을 조사하시오.

■ 예시 답안

[문제 1-1] (1)

삼각형 OH_1P_1 , OH_2P_1 , OH_3P_1 은 모두 빗변이 OP_1 인 직각삼각형이므로, 점 H_1, H_2, H_3 은 지름이 $\overline{OP_1}$ 인 원 위에 있다. 따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

이다.

[문제 1-1] (2)

점 Q 의 좌표를 $\left(0, 1 - 3\left(\frac{2}{9}\right)^k\right)$ 라 하자. [문제 1-1]의 (1)과 같은 방법으로 점 Q 에서 직선 L_1, L_2, L_3 에 내린 수선의 발을 지나는 원은 지름이 $\overline{QP_1}$ 인 원이다. 따라서

$$S_k = \pi \left(\frac{1}{2} \times 3\left(\frac{2}{9}\right)^k \right)^2 = \frac{9}{4} \left(\frac{4}{81} \right)^k \pi$$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의해

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{\frac{1}{9}\pi}{1 - \frac{1}{81}} = \frac{9}{77}\pi$$

이다.

[문제 1-1] (3)

점 A 의 좌표는 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ 이므로 원점, 점 A , 점 P_3 은 한 직선 위에 있다. 삼각형 P_2AP_3 의 넓이 T_1 은 삼각형 OP_3P_2 의 넓이에서 삼각형 OAP_2 의 넓이를 뺀 것과 같다. $\overline{OA} = \sqrt{3} - 1$ 이므로

$$T_1 = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} (2 - \sqrt{3})$$

이다. 점 B 의 좌표는 $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$ 이므로 $\overline{OB} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다. 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

이다. 삼각형 ABP_3 의 넓이 T_2 는 삼각형 OBP_3 의 넓이에서 삼각형 OBA 의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}}{3} \sin \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}}{3} (\sqrt{3} - 1) \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{6} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} (2 - \sqrt{3}) = \frac{9 - 5\sqrt{3}}{12}$$

이다. 사각형 P_2ABP_3 의 넓이는 T_1 과 T_2 의 합이므로 $\frac{15 - 8\sqrt{3}}{12}$ 이다.

[문제 1-2] (1)

직선 m_8 과 m_j 의 교점의 x 좌표를 p_j 라 하자. 직선 m_8 의 방정식은 $x + y = \frac{1}{2}$, $1 \leq k \leq 7$ 인 자연수 k 에 대해 직선 m_{8-k} 의 방정식은 $\frac{1}{8-k}x + \frac{1}{8+k}y = \frac{1}{16}$, 직선 m_{8+k} 의 방정식은 $\frac{1}{8+k}x + \frac{1}{8-k}y = \frac{1}{16}$ 이다. 이로부터 $p_{8-k} = \frac{8-k}{32}$ 이고 $p_{8+k} = \frac{8+k}{32}$ 이다. 따라서 $p_{8-k} + p_{8+k} = \frac{1}{2}$ 이므로 모든 교점의 x 좌표의 합은

$$(p_1 + \cdots + p_7) + (p_9 + \cdots + p_{15}) = (p_1 + p_{15}) + (p_2 + p_{14}) + \cdots + (p_7 + p_9) = \frac{7}{2}$$

이다.

[문제 1-2] (2)

직선 m_i 와 m_{i-1} 의 교점은 연립방정식

$$\begin{cases} \frac{1}{i}x + \frac{1}{n-i}y = \frac{1}{n} \\ \frac{1}{i-1}x + \frac{1}{n-i+1}y = \frac{1}{n} \end{cases}$$

의 해이므로 교점의 y 좌표는 $\frac{(n-i+1)(n-i)}{n^2}$ 이다. 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2n} \frac{n-1}{n} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2n} \frac{(n-i+1)(n-i)}{n^2} \\ &= \frac{n-1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n^2 - 2ni + i^2 + n - i) - (n^2 - n) \right) \\ &= \frac{n-1}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{6}$ 이다.

■ 채점 기준

문항	채점 기준	배점
1-1 (1)	(1) 점 H_1, H_2, H_3 은 지름이 $\overline{OP_1}$ 인 원 위에 있음을 관찰	3점
	(2) 원의 방정식을 올바르게 구함	2점
1-1 (2)	(1) 원의 지름이 $\overline{QP_1}$ 임을 관찰	2점
	(2) S_k 를 올바르게 구함	3점
	(3) 등비급수의 합을 올바르게 구함	3점
1-1 (3)	(1) $\overline{OA}$ 와 $\overline{OB}$ 를 올바르게 구함	4점
	(2) 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\sin \frac{\pi}{12}$ 를 올바르게 계산	2점
	(3) T_1 과 T_2 를 구하여 답을 올바르게 계산함	6점 / 각 3점
1-2 (1)	(1) $1 \leq j \leq 7$ 일 때 p_j 를 구함	4점
	(2) $9 \leq j \leq 15$ 일 때 p_j 를 구함	4점
	(3) 답을 올바르게 계산함	2점
1-2 (2)	(1) s_1 을 올바르게 계산	2점
	(2) 교점의 y 좌표를 올바르게 계산	4점
	(3) T_n 의 식을 올바르게 구함	6점
	(4) 극한을 올바르게 계산함	3점

※ 원문에는 문제 1-1 (3)의 채점 기준이 다음과 같이 한 번 더 제시되어 있다.

문항	채점 기준	배점
1-1 (3)	(1) $\overline{OA}$ 와 $\overline{OB}$ 를 올바르게 구함	4점
	(2) 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\sin \frac{5}{12}\pi$ 를 올바르게 계산	2점
	(3) T_1 과 T_2 를 구하여 답을 올바르게 계산함	6점 / 각 3점

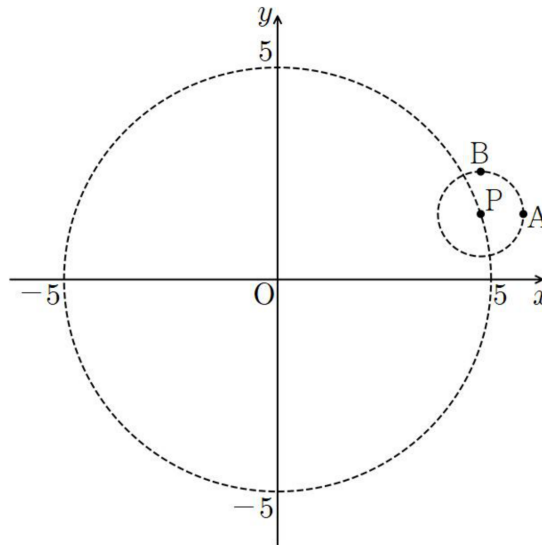
오후 · 문항 2

[문항 2] [제시문] 을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] 3보다 큰 자연수 k 에 대하여, 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\frac{k}{2}$ 인 원 C 를 생각하자. 양의 실수 t 에 대하여 점 $P\left(\frac{k}{2}\cos t, \frac{k}{2}\sin t\right)$ 는 원 C 위의 점이고, 점 P 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 두 점 $A\left(\frac{k}{2}\cos t + \sin 5t, \frac{k}{2}\sin t + \cos 5t\right)$, $B\left(\frac{k}{2}\cos t + \cos 5t, \frac{k}{2}\sin t + \sin 5t\right)$ 를 생각하자. $\overline{AB}$ 의 길이가 최대가 되도록 하는 가장 작은 양의 실수 t 의 값을 t_1 이라 하자.

[그림 1]은 $k = 10$, $t = \frac{\pi}{10}$ 일 때 원 C 와 점 A , B , P 를 나타낸다.



[그림 1]

[나] 일반적으로 $a < x < b$ 이고 $c < y < d$ 이면 $a - d < x - y < b - c$ 가 성립한다. 따라서 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모두 증가하고 $f(\beta) < g(\alpha)$ 이면 이 구간의 모든 x 에 대해 $f(x) < g(x)$ 이다.

[문제 2-1] (7점) $k = 7$ 일 때, 점 A 와 원점 사이의 거리의 최솟값을 r 이라 하자. $\overline{OA} = r$ 을 만족시키는 t 의 개수를 m , $\overline{OB} = r$ 을 만족시키는 t 의 개수를 n 이라 할 때, mn 의 값을 구하시오. (단, $0 \leq t \leq 2\pi$)

[문제 2-2] (18점) $k = 10$, $t = t_1$ 일 때, 직선 AB 가 원 C 와 만나는 두 점을 Q , T 라 하자. 다음 물음에 답하시오.

- (1) (8점) $\overline{QT}^2 = a\left(b - \sin \frac{3}{c}\pi\right)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 자연수이다.)
- (2) (10점) 삼각형 OQT 의 넓이를 S_1 , 삼각형 OQT 를 포함하는 부채꼴 OQT 의 넓이를 S_2 라 할 때, $S_2 - S_1$ 의 값을 구하시오.

[문제 2-3] (25점) 다음 물음에 답하시오.

- (1) (10점) 직선 OB 의 기울기를 $h(t)$ 라 하자. 함수 $h(t)$ 가 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 증가하도록 하는 3보다 큰 자연수 k 의 최솟값을 구하시오.
- (2) (15점) 좌표평면 위를 움직이는 점 B 의 좌표 (x, y) 에 대하여 $\frac{dy}{dx}$ 가 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 인 모든 t 에 대하여 정의되도록 하는 10보다 큰 자연수 k 의 최솟값을 구하시오.

※ 대소 비교에 다음 표를 활용하여도 무방함.

t	$\frac{16}{80}\pi$	$\frac{17}{80}\pi$	$\frac{18}{80}\pi$	$\frac{19}{80}\pi$	$\frac{20}{80}\pi$	$\frac{21}{80}\pi$	$\frac{22}{80}\pi$	$\frac{23}{80}\pi$	$\frac{24}{80}\pi$
$\sin t$	0.5878	0.6191	0.6494	0.6788	0.7071	0.7343	0.7604	0.7853	0.8090
$\sin 5t$	0	-0.1951	-0.3827	-0.5556	-0.7071	-0.8315	-0.9239	-0.9808	-1
$\cos t$	0.8090	0.7853	0.7604	0.7343	0.7071	0.6788	0.6494	0.6191	0.5878
$\cos 5t$	-1	-0.9808	-0.9239	-0.8315	-0.7071	-0.5556	-0.3827	-0.1951	0

■ 예시 답안

[문제 2-1]

삼각함수의 덧셈정리를 이용하면

$$\begin{aligned}\overline{OA}^2 &= \left(\frac{7}{2}\cos t + \sin 5t\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\sin t + \cos 5t\right)^2 \\ &= \frac{49}{4}(\cos^2 t + \sin^2 t) + (\sin^2 5t + \cos^2 5t) + 7(\cos t \sin 5t + \sin t \cos 5t) = \frac{49}{4} + 1 + 7 \sin 6t\end{aligned}$$

이므로 점 A와 원점 사이의 거리의 최솟값은 $\sin 6t = -1$ 일 때 $r = \sqrt{\frac{49}{4} + 1 - 7} = \frac{5}{2}$ 이다. 따라서 $t = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}, \dots, \frac{\pi}{4} + \frac{5}{3}\pi$ 일 때 $\overline{OA} = r$ 이므로 $m = 6$ 이다. 같은 방식으로 계산하면 $\overline{OB}^2 = \frac{49}{4} + 1 + 7 \cos 4t$ 이므로, $\cos 4t = -1$ 이 되는 $t = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \pi, \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi$ 일 때 $\overline{OB} = r$ 이고 $n = 4$ 이다. 그러므로 $mn = 24$ 이다.

[문제 2-2] (1)

실수 t 에 대하여

$$(\sin 5t - \cos 5t)^2 = 1 - (\sin 5t \cos 5t + \cos 5t \sin 5t) = 1 - \sin(5t + 5t) = 1 - \sin 10t$$

이므로 $\overline{AB}^2 = 2(\sin 5t - \cos 5t)^2 = 2(1 - \sin 10t)$ 이다. $\overline{AB}$ 의 길이가 최대가 되려면 $\sin 10t = -1$ 이어야 한다. 따라서 $t_1 = \frac{3}{20}\pi$ 이고, 이때 $\overline{AB}$ 는 지름이므로 점 $P(5 \cos t_1, 5 \sin t_1)$ 은 직선 AB 위에 있다. 점 P는 원 C 위의 점이므로 두 교점 중 한 점의 좌표는 $(5 \cos t_1, 5 \sin t_1)$ 이며, 이 점을 Q라 하자.

$$\text{직선 AB의 기울기} = \frac{(5 \sin t_1 + \sin 5t_1) - (5 \sin t_1 + \cos 5t_1)}{(5 \cos t_1 + \cos 5t_1) - (5 \cos t_1 + \sin 5t_1)} = -1$$

이므로 $T\left(5 \cos\left(\frac{\pi}{2} - t_1\right), 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} - t_1\right)\right)$ 이다. 따라서 $\angle TOQ = \frac{\pi}{5}$ 이다. 삼각형 OQT에 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{QT}^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 5 \times \cos \frac{\pi}{5} = 50 \left(1 - \cos \frac{\pi}{5}\right)$$

이다. $\cos \frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin \frac{3}{10}\pi$ 이므로 $a = 50, b = 1, c = 10$ 이다. 그러므로 $a + b + c = 61$ 이다.

[문제 2-2] (2)

$\overline{OT} = \overline{OQ} = 5$ 이고 $\angle TOQ = \frac{\pi}{5}$ 이므로, $S_1 = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \sin \frac{\pi}{5} = \frac{25}{2} \sin \frac{\pi}{5}, S_2 = \frac{1}{2} \times 5^2 \times \frac{\pi}{5} = \frac{5}{2}\pi$ 이다. 따라서, $S_2 - S_1 = \frac{5}{2}\pi - \frac{25}{2} \sin \frac{\pi}{5}$ 이다.

[문제 2-3] (1)

$B\left(\frac{k}{2}\cos t + \cos 5t, \frac{k}{2}\sin t + \sin 5t\right)$ 를 이용하면 $h(t) = \frac{\frac{k}{2}\sin t + \sin 5t}{\frac{k}{2}\cos t + \cos 5t}$ 이다. 몫의 미분법과 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}h'(t) &= \frac{\left(\frac{k}{2}\cos t + 5\cos 5t\right)\left(\frac{k}{2}\cos t + \cos 5t\right) - \left(\frac{k}{2}\sin t + \sin 5t\right)\left(-\frac{k}{2}\sin t - 5\sin 5t\right)}{\left(\frac{k}{2}\cos t + \cos 5t\right)^2} \\ &= \frac{\frac{k^2}{4} + 5 + 3k \cos 4t}{\left(\frac{k}{2}\cos t + \cos 5t\right)^2}\end{aligned}$$

이다. 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $\frac{k^2}{4} + 5 + 3k \cos 4t$ 는 $t = \frac{\pi}{4}$ 에서 최솟값 $\frac{k^2}{4} + 5 - 3k$ 를 갖는다. $k \leq 2$ 또는 $k \geq 10$ 에서 $\frac{k^2}{4} + 5 - 3k \geq 0$ 이며, 이때 함수 $h(t)$ 는 증가한다. 따라서 3보다 큰 가장 작은 자연수 k 는 10이다.

[문제 2-3] (2)

매개변수로 나타낸 함수의 미분법에 따르면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{k}{2} \cos t + 5 \cos 5t}{-\frac{k}{2} \sin t - 5 \sin 5t}$$

이다. $g(t) = \frac{k}{2} \sin t + 5 \sin 5t$ 라 하자. k 가 10보다 큰 자연수이고 문제에 주어진 표를 이용하면 $g\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$ 임을 알 수 있으므로 $\frac{dy}{dx}$ 가 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의되기 위한 필요충분조건은 $g(t) > 0$ 이다. 따라서 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $g(t) > 0$ 또는 $\frac{k}{2} \sin t > -5 \sin 5t$ 임을 보이면 된다. $10 < k \leq 12$ 인 경우

$$\frac{k}{2} \sin \frac{3}{10}\pi \leq 6 \sin \frac{3}{10}\pi < -5 \sin \left(5 \times \frac{3}{10}\pi\right)$$

이므로 $g\left(\frac{3}{10}\pi\right) < 0$ 이다.

$k = 13$ 이라 하자. $0 < t \leq \frac{\pi}{5}$ 이면 $\frac{13}{2} \sin t > 0 \geq -5 \sin 5t$ 이다. 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{5}, \frac{3}{10}\pi\right]$ 에서 $\frac{13}{2} \sin t$ 와 $-5 \sin 5t$ 는 증가한다.

$$-5 \sin \left(5 \times \frac{\pi}{4}\right) < \frac{13}{2} \sin \frac{\pi}{5}, \quad -5 \sin \left(5 \times \frac{21}{80}\pi\right) < \frac{13}{2} \sin \frac{\pi}{4}, \quad -5 \sin \left(5 \times \frac{11}{40}\pi\right) < \frac{13}{2} \sin \frac{21}{80}\pi,$$

$$-5 \sin \left(5 \times \frac{23}{80}\pi\right) < \frac{13}{2} \sin \frac{11}{40}\pi, \quad -5 \sin \left(5 \times \frac{3}{10}\pi\right) < \frac{13}{2} \sin \frac{23}{80}\pi$$

이므로, 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{21}{80}\pi\right], \left[\frac{21}{80}\pi, \frac{11}{40}\pi\right], \left[\frac{11}{40}\pi, \frac{23}{80}\pi\right], \left[\frac{23}{80}\pi, \frac{3}{10}\pi\right]$ 에서 모두 $\frac{k}{2} \sin t > -5 \sin 5t$ 이다. $\frac{k}{2} \sin \frac{3}{10}\pi > -5 \sin \left(5 \times \frac{3}{10}\pi\right)$ 이고 열린구간 $\left(\frac{3}{10}\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $\frac{13}{2} \sin t$ 는 증가하고 $-5 \sin 5t$ 는 감소하므로 $\frac{k}{2} \sin t > -5 \sin 5t$ 이다. 그러므로 <조건>을 만족하는 k 의 최솟값은 13이다.

■ 채점 기준

문항	채점 기준	배점
2-1	(1) $\overline{OA}^2$ 과 $\overline{OB}^2$ 를 올바르게 계산	3점
	(2) m, n 과 정답을 올바르게 구함	4점 / 각 2점
2-2 (1)	(1) t_1 의 값을 올바르게 구함	2점
	(2) $\angle TOQ$ 를 올바르게 구함	2점
	(3) 코사인 법칙을 이용하여 답을 올바르게 구함	4점
2-2 (2)	(1) S_1 을 올바르게 구함	5점
	(2) S_2 를 올바르게 구함	5점
2-3 (1)	(1) $h'(t)$ 를 올바르게 구함	4점
	(2) 이차부등식을 풀어서 $h'(t) \geq 0$ 인 조건을 올바르게 구함	4점
	(3) 정답을 올바르게 구함	2점
2-3 (2)	(1) 매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 올바르게 구함	3점
	(2) $\frac{dy}{dx}$ 가 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의되기 위한 필요충분조건을 제시함	2점
	(3) $10 < k \leq 12$ 는 성립하지 않음을 관찰	4점
	(4) $k = 13$ 는 성립함을 관찰	6점

2025학년도 자연계열 (오전·오후)

오전 · 문항 1

【문항 1】 【제시문】 을 읽고 물음에 답하라.

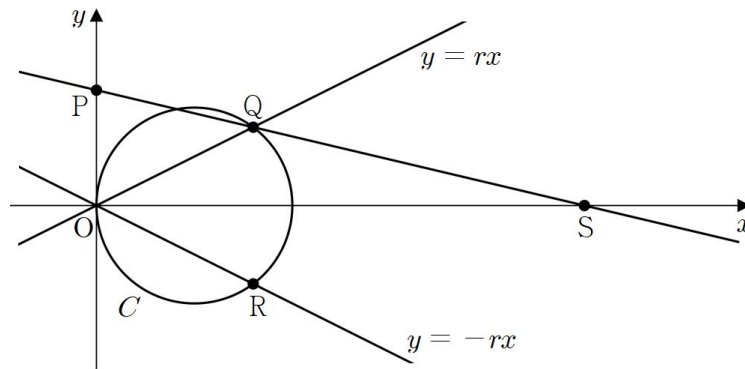
제시문

【가】 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 에 대하여 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ 일 때 도함수 $g'(t)$ 가 α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt$$

【나】 C 는 중심이 $(c, 0)$ 이고 반지름의 길이가 c 인 원이며, 점 P 의 좌표는 $(0, \sqrt{r})$ 이다. 원점을 지나는 두 직선 $y = rx$ 와 $y = -rx$ 를 생각하자. 【그림 1】과 같이 직선 $y = rx$ 과 원 C 의 교점 중 원점이 아닌 점을 Q , 직선 $y = -rx$ 과 원 C 의 교점 중 원점이 아닌 점을 R , 직선 PQ 과 x 축의 교점을 S 라 하자.

(단, $0 < c < 1$ 이고 $0 < r < \frac{1}{4}$)



【그림 1】

【문제 1-1】 (30점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하라.

- (1) (10점) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin x - \sin^3 x - \sin^4 x}{\cos^4 x} dx$ 의 값을 구하라.
- (2) (10점) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + 2 \sin x)^{10} \sin x \cos x dx$ 의 값을 구하라.
- (3) (10점) $\int_1^2 \frac{x^2 e^x - 1}{x^2 e^x + x} dx$ 의 값을 구하라.

【문제 1-2】 (20점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하라.

- (1) (10점) $\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\overline{QR}}{r} = 3$ 일 때 c 의 값을 구하라.
- (2) (10점) 자연수 n 에 대하여 $c = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 일 때, 점 S 의 x 좌표를 $h(r)$ 이라 하자. $\lim_{r \rightarrow 0+} h(r) = \frac{1}{2048}$ 인 n 의 값을 구하라.

■ 예시 답안

[문제 1-1] (1)

$1 + \sin x - \sin^3 x - \sin^4 x = (1 + \sin^2 x)(1 - \sin^2 x) + \sin x(1 - \sin^2 x) = \cos^2 x(1 + \sin x + \sin^2 x)$ 이므로,

$$\frac{1 + \sin x - \sin^3 x - \sin^4 x}{\cos^4 x} = \frac{1 + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = (2 \sec^2 x - 1) + \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

이다. $\cos x = t$ 라 하면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ 이고, 치환적분법에 의하여 주어진 적분은 다음과 같다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \sec^2 x - 1) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = [2 \tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t^2} dt = \left(2 - \frac{\pi}{4}\right) + \left[\frac{1}{t}\right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 + \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$$

(2)

$1 + 2 \sin x = t$ 라 하면, $\frac{dt}{dx} = 2 \cos x$ 이므로 치환적분법을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + 2 \sin x)^{10} \sin x \cos x dx &= \frac{1}{4} \int_1^2 t^{10} (t-1) dt = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{12} t^{12} - \frac{1}{11} t^{11} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{48} (2^{12} - 1) - \frac{1}{44} (2^{11} - 1) = \frac{6827}{176} \end{aligned}$$

(3)

$\frac{x^2 e^x - 1}{x^2 e^x + x} = \frac{e^x - \frac{1}{x^2}}{e^x + \frac{1}{x}}$ 이다. $e^x + \frac{1}{x} = t$ 라 하면 $\frac{dt}{dx} = e^x - \frac{1}{x^2}$ 이므로 치환적분법을 적용하면 다음과 같다.

$$\int_1^2 \frac{x^2 e^x - 1}{x^2 e^x + x} dx = \int_1^2 \frac{e^x - \frac{1}{x^2}}{e^x + \frac{1}{x}} dx = \int_{e+1}^{e^2+\frac{1}{2}} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_{e+1}^{e^2+\frac{1}{2}} = \ln \frac{2e^2 + 1}{2e + 2}$$

[문제 1-2] (1)

원 C 의 방정식은 $x^2 - 2cx + y^2 = 0$ 이고 점 Q 의 x 좌표를 구하기 위해 $x^2 - 2cx + r^2 x^2 = 0$ 을 풀면, $x = \frac{2c}{1+r^2}$ 이므로 점 Q 의 좌표는 $\left(\frac{2c}{1+r^2}, \frac{2cr}{1+r^2}\right)$ 이다. 같은 방법으로 점 R 의 좌표는 $\left(\frac{2c}{1+r^2}, -\frac{2cr}{1+r^2}\right)$ 이다.

이때 $\overline{QR} = \frac{4cr}{1+r^2}$ 이므로

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\overline{QR}}{r} = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{4cr}{r(1+r^2)} = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{4c}{1+r^2} = 4c$$

이며, $\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\overline{QR}}{r} = 3$ 로부터, $c = \frac{3}{4}$ 이다.

(2)

(1)에서 구한 두 점 P, Q 의 좌표로부터 두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$y = \frac{\frac{2cr}{1+r^2} - \sqrt{r}}{\frac{2c}{1+r^2} - \sqrt{r}} x + \sqrt{r} = \frac{2cr - \sqrt{r}(1+r^2)}{2c} x + \sqrt{r}$$

이 직선이 점 $S(h(r), 0)$ 을 지나므로 $h(r) = \frac{-2c\sqrt{r}}{2cr - \sqrt{r}(1+r^2)} = \frac{2c}{1+r^2 - 2c\sqrt{r}}$ 이고 $\lim_{r \rightarrow 0+} h(r) = 2c$ 이다. $c =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이므로 $2c = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2048}$ 이다. 따라서 $n = 12$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	주어진 적분을 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$ 정도로 간단히 정리함	3점
	각각의 부정적분을 올바르게 구함	3점
	답을 올바르게 구함	4점
[1-1] (2)	치환적분법을 활용하여 주어진 적분식을 올바르게 변형함	5점
	답을 올바르게 구함	5점
[1-1] (3)	치환적분법을 활용하여 주어진 적분식을 올바르게 변형함	5점
	답을 올바르게 구함	5점
[1-2] (1)	점 Q와 점 R의 좌표를 구하기 위한 방정식을 올바르게 세움	3점
	$\overline{QR} = \frac{4cr}{1+r^2}$ 임을 관찰	3점
	답을 올바르게 구함	4점
[1-2] (2)	$h(r)$ 을 올바르게 구함	4점
	극한이 $2c$ 임을 관찰함	3점
	답을 올바르게 구함	3점

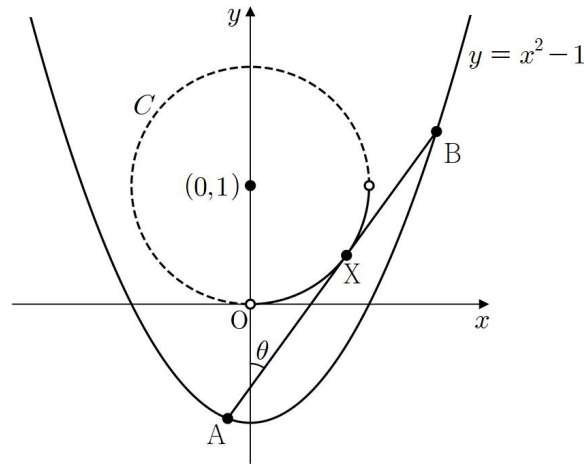
오전 · 문항 2

[문항 2] [제시문] 을 읽고 물음에 답하라.

제시문

점 $P(0, p)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 C 라 하고, 원 C 가 곡선 $y = x^2 - 1$ 과 만나지 않는다고 하자. (단, $p > \frac{1}{4}$)

원 C 위의 점 $X(a, b)$ 에 대하여 $a > 0$ 이고 $p - 1 < b < p$ 이다. 원 C 위의 점 X 에서의 접선과 곡선 $y = x^2 - 1$ 의 서로 다른 두 교점을 각각 A, B 라 하고, 직선 AB 가 y 축과 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자. 이때 $t = \frac{1}{\sin \theta}$ 이라 두고 $\overline{AB}^2$ 을 t 에 대한 식으로 나타낸 것을 $f(t)$ 라 하자. 【그림 2】는 $p = 1$ 일 때 원 C 와 선분 AB 를 나타낸 예이다.



【그림 2】

[문제 2-1] (20점) 다음 물음에 답하라.

- (1) (8점) 점 X 의 좌표를 θ 와 p 에 관한 식으로 나타내라.
- (2) (12점) $f(t)$ 를 구하라.

[문제 2-2] (20점) $f(t) = 12$ 일 때, 다음 물음에 답하라.

- (1) (10점) $p = 1$ 일 때, 점 X 의 좌표를 구하라.
- (2) (10점) 곡선 $y = x^2 - 1$ 위의 점 $Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ 에서의 접선과 직선 AB 가 평행할 때 p 의 값을 구하라.

[문제 2-3] (10점) $f(t_1) = f(t_2)$ 인 서로 다른 실수 t_1 과 t_2 가 존재하는 모든 p 의 값의 범위를 구하라.
(단, $1 < t_1 < t_2$)

■ 예시 답안

[문제 2-1] (1)

직선 AB와 y 축의 교점을 점 T라 하고, 점 X에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle TPX = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 $\overline{HX} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$, $\overline{HP} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ 이다. $a = \overline{HX}$, $b = \overline{OP} - \overline{HP}$ 이므로 $a = \cos \theta$, $b = p - \sin \theta$ 이다.

(2)

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $t = \frac{1}{\sin \theta} > 1$ 이다. 점 $P(0, p)$, 점 $X(\cos \theta, p - \sin \theta)$ 에 대하여 점 X에서 원 C에 접하는 접선의 방정식은 $y = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}x - \frac{1}{\sin \theta} + p$ 이다. 이 접선이 곡선 $y = x^2 - 1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $(\sin \theta)x^2 - (\cos \theta)x - (1 + p)\sin \theta + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α, β 를 갖는다. 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 $(\alpha + \beta)^2 = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = t^2 - 1$, $\alpha\beta = \frac{1}{\sin \theta} - (1 + p) = t - 1 - p$ 이다. $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = t^2 - 1 - 4(t - 1 - p) = t^2 - 4t + 4p + 3$ 이므로 다음이 성립한다.

$$f(t) = \overline{AB}^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = (\alpha - \beta)^2(1 + (\alpha + \beta)^2) = t^2(t^2 - 4t + 4p + 3)$$

[문제 2-2] (1)

$p = 1$, $f(t) = 12$ 에 의해 $f(t) = t^2(t^2 - 4t + 7) = 12$ 이고, 이를 정리하면 $(t - 2)(t + 1)(t^2 - 3t + 6) = 0$ 이다. $t > 1$, $t^2 - 3t + 6 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ 이므로 $t = 2$ 이다. $t = \frac{1}{\sin \theta} = 2$ 에서 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 이고 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 이다. [문제 2-1] (1)에 의하여 점 X의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이다.

(2)

점 $Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ 에서의 $y = x^2 - 1$ 에 대한 접선의 기울기가 1이다. 직선 AB의 기울기는 $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ 이고, 점 Q에서의 접선과 직선 AB가 평행하므로 $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이다. $\theta = \frac{\pi}{4}$ 일 때, $t = \sqrt{2}$ 이므로 $f(\sqrt{2}) = 2(2 - 4\sqrt{2} + 3 + 4p) = 12$ 에서 $p = \frac{1}{4} + \sqrt{2}$ 이다.

[문제 2-3]

$f(t) = t^2(t^2 - 4t + 4p + 3)$ 이고 $f'(t) = 2t(2t^2 - 6t + 4p + 3)$ 이므로 $p < \frac{3}{8}$ 이면 다음이 성립한다.

$$f'(t) = 4t \left(t - \frac{3 - \sqrt{3 - 8p}}{2} \right) \left(t - \frac{3 + \sqrt{3 - 8p}}{2} \right)$$

$\alpha = \frac{3 - \sqrt{3 - 8p}}{2}$, $\beta = \frac{3 + \sqrt{3 - 8p}}{2}$ 라 하면 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

t	...	0	...	α	...	β	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

$\beta > 1$ 이므로 사차함수의 그래프의 개형에 의해 $f(t_1) = f(t_2)$ 인 서로 다른 실수 t_1 과 t_2 가 존재한다. $p \geq \frac{3}{8}$ 이면 $t > 1$ 에서 $f'(t) > 0$ 이므로 사차함수의 그래프의 개형에 의해 $f(t_1) = f(t_2)$ 인 서로 다른 실수 t_1 과 t_2 가 존재하지 않는다. 따라서 $\frac{1}{4} < p < \frac{3}{8}$ 이다.

■ 채점 기준

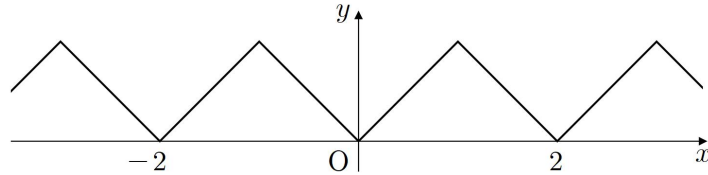
하위 문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	$a = \cos \theta$ 를 올바르게 구함	4점
	$b = p - \sin \theta$ 를 올바르게 구함	4점
[2-1] (2)	점 X에서 원 C에 접하는 접선의 방정식 $y = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}x - \frac{1}{\sin \theta} + p$ 를 올바르게 구함	4점
	$(\alpha + \beta)^2 = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = t^2 - 1$, $\alpha\beta = \frac{1}{\sin \theta} - (1 + p) = t - 1 - p$ 임을 관찰함	4점
	$f(t)$ 를 올바르게 구함	4점
[2-2] (1)	풀어야 하는 방정식이 방정식 $t^4 - 4t^3 + 7t^2 - 12 = 0$ 임을 구함	2점
	$\theta = \frac{\pi}{6}$ 또는 $t = 2$ 를 관찰함	4점
	점 X의 좌표 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 를 올바르게 구함	4점
[2-2] (2)	점 Q에서의 접선의 기울기 1을 올바르게 구함	3점
	$\theta = \frac{\pi}{4}$ 또는 $t = \sqrt{2}$ 을 관찰함	4점
	$p = \frac{1}{4} + \sqrt{2}$ 를 올바르게 구함	3점
[2-3]	$f'(t)$ 를 올바르게 구함	2점
	$f'(t)$ 로부터 $f(t)$ 의 개형을 관찰함	4점
	$\frac{1}{4} < p < \frac{3}{8}$ 을 올바르게 구함	4점

오후 · 문항 1

[문항 1] [제시문] 을 읽고 물음에 답하라.

제시문

[가] 함수 $F(x)$ 는 【그림 1】과 같이 $-1 \leq x < 1$ 일 때 $F(x) = |x|$ 이고 모든 실수 x 에 대하여 $F(x+2) = F(x)$ 이다.



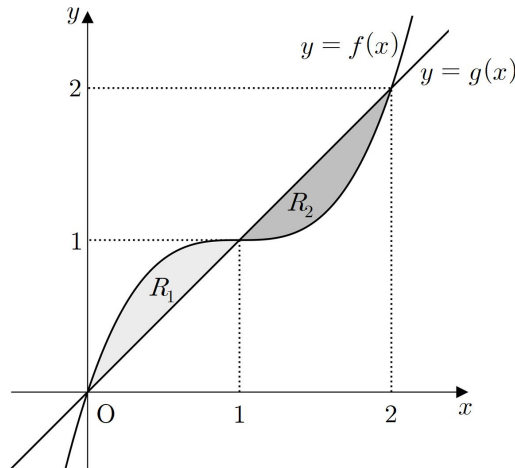
【그림 1】

[나] <조건>을 만족하는 두 연속함수 $f(x), g(x)$ 를 생각하자.

< 조건 >

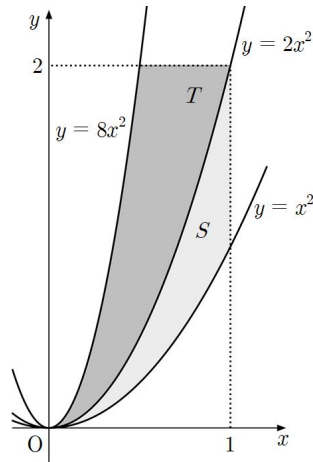
- ① $f(0) = g(0) = 0$ 이다.
- ② 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 두 양의 실근 α, β 가 존재하고, 열린구간 $(0, \alpha)$ 에서 $f(x) > g(x)$ 이고 열린구간 (α, β) 에서 $f(x) < g(x)$ 이다. (단, $\alpha < \beta$)

두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프와 두 직선 $x = 0, x = \alpha$ 로 둘러싸인 도형을 R_1 , 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프와 두 직선 $x = \alpha, x = \beta$ 로 둘러싸인 도형을 R_2 라 하고, 도형 R_1 과 R_2 의 넓이를 각각 r_1, r_2 라 하자. 【그림 2】는 $f(x) = (x-1)^3 + 1, g(x) = x$ 일 때 도형 R_1 과 R_2 를 나타낸다.



【그림 2】

[다] 연속함수 $h(x)$ 가 $h(0) = 0$ 이고 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다고 하자. 양의 실수 a 에 대하여 두 함수 $y = h(x), y = 2h(x)$ 의 그래프와 직선 $x = a$ 로 둘러싸인 도형을 S 라 하고, $0 < k < \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ 인 실수 k 에 대하여 두 함수 $y = \frac{1}{k^3}h(x), y = 2h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 2h(a)$ 로 둘러싸인 도형을 T 라 하자. 【그림 3】은 $h(x) = x^2, k = \frac{1}{2}, a = 1$ 일 때 도형 S 와 T 를 나타낸다.



【그림 3】

[문제 1-1] (30점) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 다음 물음에 답하라.

- (1) (10점) 함수 $y = (F(x))^2$ 의 그래프와 직선 $y = x - c$ 의 교점의 개수가 2인 상수 c 의 값을 모두 구하라.
(단, $0 \leq c < 2$)
- (2) (10점) <조건>을 만족하는 함수 $y = F(x)$ 와 일차함수 $y = bx$ 에 대하여 극한 $\lim_{b \rightarrow 0+} \frac{b^m r_1}{r_2}$ 이 0이 아닌 실수가 되는 자연수 m 의 값과 그때의 극한값을 구하라.
- (3) (10점) <조건>을 만족하는 두 함수 $y = x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ 과 $y = p^2x$ 에 대하여 $r_1 = r_2$ 인 p 의 값을 구하라.
(단, $0 < p < \frac{1}{4}$)

[문제 1-2] (20점) 제시문 (다)를 읽고 다음 물음에 답하라.

- (1) (10점) 함수 $h(x) = \ln(2x + 1)$ 에 대하여 $a = \frac{1}{2}$ 일 때, S 의 넓이를 구하라.
- (2) (10점) 함수 $h(x) = x^3$ 일 때 모든 양의 실수 a 에 대하여 S 의 넓이와 T 의 넓이가 같다. 실수 k 의 값을 구하라.

■ 예시 답안

[문제 1-1] (1)

$-1 \leq x \leq 1$ 일 때 $(F(x))^2 = x^2$ 이다. 따라서 $c = 0$ 일 때, 함수 $y = (F(x))^2$ 의 그래프와 직선 $y = x - c$ 는 두 점에서 만난다. $0 < c < 2$ 이라 하자. 함수 $y = (F(x))^2$ 의 그래프와 직선 $y = x - c$ 의 교점의 개수가 2가 되려면, 열린구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $y = x^2$ 의 그래프와 직선 $y = x - c$ 가 접해야 한다. 그 접점을 (a, a^2) 이라 두면 접선의 방정식은 $y = 2a(x - a) + a^2$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$ 이고, 접선의 방정식은 $y = x - \frac{1}{4}$ 이다. 따라서 $c = \frac{1}{4}$ 이다. $0 < c < \frac{1}{4}$ 일 때 함수 $y = (F(x))^2$ 의 그래프와 직선 $y = x - c$ 는 세 점에서 만나고, $\frac{1}{4} < c < 2$ 일 때 한 점에서 만난다. 따라서 답은 $0, \frac{1}{4}$ 이다.

(2)

함수 $y = F(x)$ 와 $y = bx$ 가 <조건>을 만족하므로, $0 < b < \frac{1}{3}$ 이다. 함수 $y = F(x)$ 의 그래프와 직선 $y = bx$ 의 원점이 아닌 교점 중 x 좌표가 가장 작은 두 점의 좌표는 $\left(\frac{2}{1+b}, \frac{2b}{1+b}\right)$ 와 $\left(\frac{2}{1-b}, \frac{2b}{1-b}\right)$ 이다. 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 $y = F(x)$ 의 그래프와 직선 $y = bx$, x 축에 의하여 생기는 여러 삼각형의 넓이로부터 $r_1 = \frac{1-b}{1+b}$, $r_2 = \frac{4b^2}{1-b^2}$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{b \rightarrow 0+} \frac{b^m r_1}{r_2} = \lim_{b \rightarrow 0+} \frac{b^m (1-b)^2}{4b^2} = \lim_{b \rightarrow 0+} \frac{b^{m-2} (1-b)^2}{4}$$

이므로 이 극한이 0이 아닌 실수를 극한값으로 가지려면, $m = 2$ 이다. 이때, $\lim_{b \rightarrow 0+} \frac{b^2 r_1}{r_2} = \frac{1}{4}$ 이다.

(3)

두 곡선 $y = x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, $y = p^2 x$ 의 원점이 아닌 두 교점의 x 좌표는 방정식 $x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - p^2 x = 0$ 의 서로 다른 두 양의 실근이다. 따라서 두 교점의 x 좌표는 $\frac{1}{2} - p$, $\frac{1}{2} + p$ 이다. $r_1 = r_2$ 이므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}-p} \left(x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - p^2 x\right) dx = \int_{\frac{1}{2}-p}^{\frac{1}{2}+p} \left(p^2 x - x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) dx$$

이고 이를 정리하면 $\int_0^{\frac{1}{2}+p} \left(x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - p^2 x\right) dx = 0$ 이다. 즉,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}+p} \left(x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - p^2 x\right) dx &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + p\right)^4 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + p\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - p^2\right)\left(\frac{1}{2} + p\right)^2 \\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2} + p\right)^3 \left(3\left(\frac{1}{2} + p\right) - 4 + 6\left(\frac{1}{2} - p\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

이다. $0 < p < \frac{1}{4}$ 이므로 $3\left(\frac{1}{2} + p\right) - 4 + 6\left(\frac{1}{2} - p\right) = 0$ 이고 이를 풀면 $p = \frac{1}{6}$ 이다.

[문제 1-2] (1)

도형 S 의 넓이를 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(2x+1) dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du \quad (u = 2x+1 \text{로 치환}) \\ &= \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 1 du = \ln 2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2)

곡선 $y = x^3$, 직선 $x = a$, x 축으로 둘러싸인 도형을 W_1 , 곡선 $y = \frac{1}{k^3}x^3$, 직선 $y = 2a^3$, y 축으로 둘러싸인 도형을 W_2 라 하자. 도형 W_1 과 W_2 의 넓이를 각각 w_1, w_2 라 쓰자. 도형 S 의 넓이는 $\int_0^a (2x^3 - x^3) dx = \int_0^a x^3 dx = w_1$ 이 되어 $w_1 = \frac{a^4}{4}$ 이다. 도형 S 의 넓이와 T 의 넓이가 같으므로 네 직선 $x = a, y = 2a^3, x = 0, y = 0$ 으로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 생각하면 $3w_1 + w_2 = 2a^4$ 이다. 따라서 $w_2 = \frac{5}{4}a^4$ 이다.

곡선 $y = \frac{1}{k^3}x^3$ 과 직선 $y = 2a^3$ 의 교점의 x 좌표를 β 라 하면, $w_2 + \int_0^\beta \frac{1}{k^3}x^3 dx = 2a^3\beta$ 가 성립하고 $w_2 = \frac{5}{4}a^4$ 으로부터 $\frac{5}{4}a^4 + \frac{\beta^4}{4k^3} = 2a^3\beta$ 이다. 한편 $\beta = ak\sqrt[3]{2}$ 이므로 $\frac{5}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^4k\sqrt[3]{2} = 2a^4k\sqrt[3]{2}$ 이다. $a > 0$ 이므로 양변에 a^4 을 나누어 k 를 구하면 $k = \frac{5}{6\sqrt[3]{2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{12}$ 이다.

■ 채점 기준

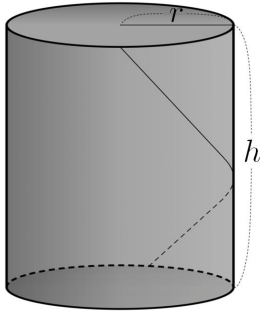
하위 문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$c = 0$ 일 때 함수의 그래프를 관찰함	3점
	$c = \frac{1}{4}$ 일 때 함수의 그래프를 관찰함	4점
	$\frac{1}{4} < c < 2$ 인 경우와 $0 < c < \frac{1}{4}$ 인 경우에 관찰함	3점
[1-1] (2)	r_1, r_2 를 올바르게 구함	4점
	$m = 2$ 임을 관찰함	3점
	극한값의 결과가 $\frac{1}{4}$ 임을 관찰함	3점
[1-1] (3)	x 좌표 $\frac{1}{2} - p, \frac{1}{2} + p$ 를 올바르게 구함	2점
	$r_1 = r_2$ 를 이용하여 적분식을 올바르게 구함	3점
	적분식을 계산하여 답을 올바르게 구함	5점
[1-2] (1)	적분식을 올바르게 구함	5점
	적분식을 계산하여 답을 올바르게 구함	5점
[1-2] (2)	$y = \frac{1}{k^3}x^3$ 과 직선 $y = 2a^3$ 의 교점의 x 좌표 β 를 k 에 대한 식으로 올바르게 구함	2점
	S 의 넓이(w_1)를 a 에 대한 식으로 올바르게 구함	3점
	적분식을 계산하여 답을 올바르게 구함	5점

오후 · 문항 2

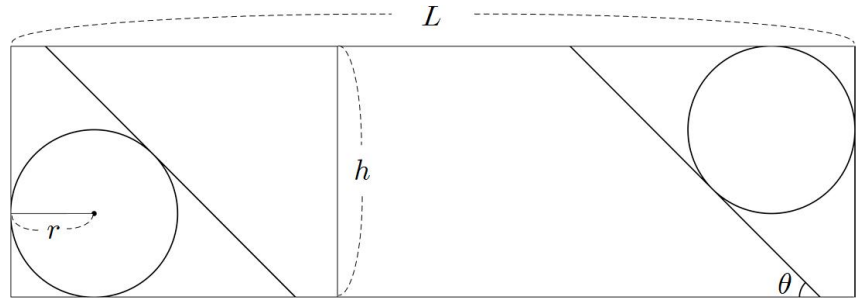
[문항 2] [제시문] 을 읽고 물음에 답하라.

제시문

【가】 밑면의 반지름의 길이가 $r = 10$ 이고 높이가 $h = 30$ 인 원기둥의 옆면을 【그림 4】와 같이 자르면 밑면의 길이가 20π , 높이가 30인 평행사변형을 얻는다. 이때 평행사변형의 내각 중 크지 않은 각의 크기를 θ 라 하자. 이 평행사변형과 반지름의 길이가 r 인 두 밑면을 【그림 5】와 같이 가로 길이가 L 이고 세로 길이가 30인 직사각형 R 에 서로 포개지는 부분이 없도록 그려 넣었다고 하자. 각 원은 옆면을 잘라 얻은 평행사변형의 한 변과 접하고 직사각형 R 의 두 변과 접하도록 한다.

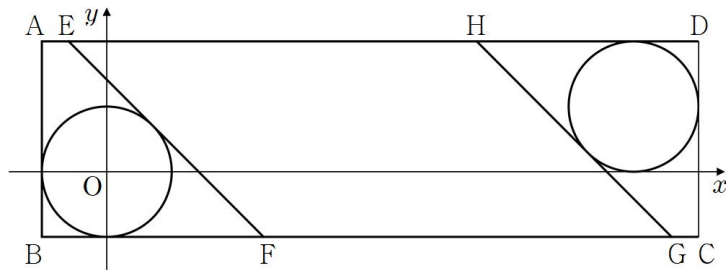


【그림 4】



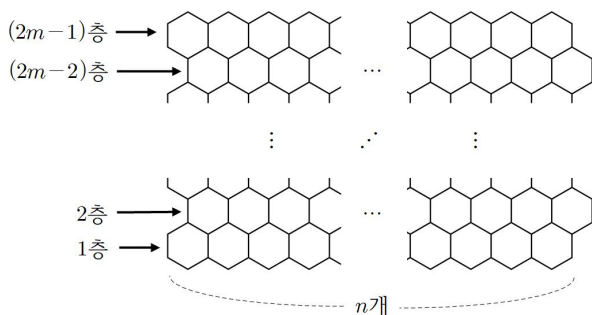
【그림 5】

【그림 5】를 【그림 6】과 같이 좌표평면 위에 나타내고, 직사각형 R 의 네 꼭짓점을 각각 A, B, C, D라 하고 평행사변형의 네 꼭짓점을 각각 E, F, G, H라 하자.

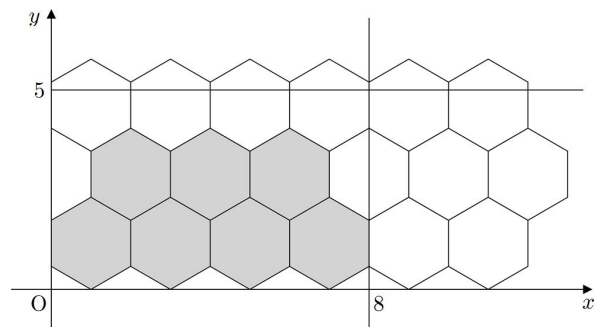


【그림 6】

【나】 두 자연수 m 과 n 에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 인 정육각형을 【그림 7】과 같이 가로 방향으로 n 개씩 $(2m-1)$ 개의 층이 있도록 빈틈없이 ‘별집 모양’으로 그린 그림이 있다. 이 그림을 모든 정육각형의 각 꼭짓점의 x 좌표와 y 좌표가 각각 음이 아닌 실수가 되도록 좌표평면 위에 나타냈다. 이때 1층 맨 왼쪽에 있는 정육각형의 한 꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$ 이고 한 변은 y 축 위에 있도록 한다. 【그림 8】은 $n = 6$ 이고 $m = 2$ 일 때의 ‘별집 모양’ 그림을 좌표평면 위에 나타낸 예이다.



【그림 7】



【그림 8】

두 자연수 k 와 ℓ 에 대하여 모든 꼭짓점의 x 좌표가 닫힌구간 $[0, k]$ 에 속하고 y 좌표가 닫힌구간 $[0, \ell]$ 에 속하는 정육각형의 개수를 X 라 하고, 이러한 정육각형의 층의 개수를 M 이라 하자. 예를 들어 【그림 8】에서 $k = 8$ 이고 $\ell = 5$ 일 때 $X = 7$ 이고 $M = 2$ 이다.

[문제 2-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하라.

- (1) (10점) $\theta = \frac{\pi}{4}$ 일 때, L 의 값을 구하라.
- (2) (10점) L 의 최솟값을 구하라.

[문제 2-2] (30점) $m = n = 50$ 일 때, 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하라. (단, $1.73 < \sqrt{3} < 1.74$)

- (1) (5점) $k = 10, \ell = 6$ 일 때 X 의 값을 구하라.
- (2) (15점) $k \geq 3$ 일 때, $M = \frac{\ell}{2} + 1$ 인 짝수 ℓ 의 최솟값을 구하라.
- (3) (10점) [문제 2-2] (2)에서 구한 값 ℓ 에 대하여, $X > \frac{k\ell}{4}$ 인 짝수 k 의 최솟값을 구하라.

■ 예시 답안

[문제 2-1] (1)

【그림 6】에서 왼쪽 원과 선분 EF와의 접점을 P라 하자. $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이므로 P와 원의 중심을 연결한 직선은 점 B를 지나고 삼각형 BFP는 직각이등변삼각형이다. $\overline{FP} = b$ 라 하자. 원과 접선의 성질에 의하여 $\overline{BF} = b + 10$ 이다. 직각이등변삼각형의 삼각비에 의하여 $b + 10 = b\sqrt{2}$ 이고 $b = 10 + 10\sqrt{2}$ 이다. 따라서, $L = \overline{BF} + \overline{AE} + \overline{FG} = (b + 10) + (b - 20) + 20\pi = 10 + 20\sqrt{2} + 20\pi$ 이다.

(2)

【그림 6】에서 왼쪽 원의 중심이 원점에 있다고 하고 이 원과 선분 EF와의 접점을 P라 하자. 점 P의 좌표는 $(10 \sin \theta, 10 \cos \theta)$ 이고 이 점에서 접선의 방정식은 $y = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}x + \frac{10}{\cos \theta}$ 이다. 점 E의 좌표는 $(c, 20)$ 이고 점 F의 좌표를 $(b, -10)$ 이라 두자. 이때 두 점 E와 F는 이 직선 위에 있으므로 $b = \frac{10(1 + \cos \theta)}{\sin \theta}$, $c = \frac{10 - 20 \cos \theta}{\sin \theta}$ 를 만족한다. 이때 $\overline{BF} = b + 10$ 이고 $\overline{AE} = 10 + c$ 이고

$$L = \overline{BF} + \overline{AE} + \overline{FG} = b + c + 20 + 20\pi = \frac{20 - 10 \cos \theta}{\sin \theta} + 20 + 20\pi$$

이다. L 의 최솟값을 구하기 위해 몫의 미분법을 이용하면

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{10(\sin \theta)^2 - (20 - 10 \cos \theta) \cos \theta}{(\sin \theta)^2} = \frac{10 - 20 \cos \theta}{(\sin \theta)^2}$$

이고 $\frac{dL}{d\theta} = 0$ 를 만족하면 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 이므로 이때 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 따라서 구하는 L 의 최솟값은 $10\sqrt{3} + 20\pi + 20$ 이다.

[문제 2-2] (1)

【그림 8】에 의하여 세려고 하는 정육각형은 1, 2, 3층에 있음을 알 수 있다. 각 층의 정육각형의 개수는 각각 5, 4, 5이다. 따라서 $X = 14$ 이다.

(2)

j 층의 정육각형의 꼭짓점 중 y 좌표가 가장 큰 꼭짓점의 y 좌표를 a_j 라고 하면 $a_{j+1} = a_j + \sqrt{3}$ ($j \leq 98$)이다. $a_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $a_j = \frac{4\sqrt{3}}{3} + (j-1)\sqrt{3}$ 이다. $a_M = M\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $M\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \ell$ 이어야 한다. $M = \frac{\ell}{\sqrt{3}} + 1$ 이므로 $\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}} + 1\right)\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \ell$ 을 풀면 $\frac{16\sqrt{3} + 24}{3} \leq \ell$ 이다. $1.73 < \sqrt{3} < 1.74$ 로부터, $17 < \frac{16\sqrt{3} + 24}{3} < 18$ 이다. 따라서 가장 작은 짝수 ℓ 의 값은 18이다.

(3)

k 가 짝수이므로 홀수층에는 $\frac{k}{2}$ 개가 있고 짝수층에는 $\left(\frac{k}{2} - 1\right)$ 개가 있다. 따라서 두 개의 연속된 층에는 $(k-1)$ 개의 정육각형이 있다. (2)에서 구한 값 $\ell = 18$ 이므로 $M = 10$ 이고 두 개의 연속된 층이 5개 있다. $X = 5(k-1)$ 이므로 $5k - 5 > \frac{18k}{4}$ 이다. 그러므로 $k > 10$ 이고 이를 만족하는 짝수 k 의 최솟값은 12이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	$\theta = \frac{\pi}{4}$ 로부터 접선의 방정식을 올바르게 구하거나 직각이등변삼각형의 성질을 올바르게 이용함	3점
	$\overline{BF}$, $\overline{AE}$ 를 올바르게 구함	4점
	답을 올바르게 구함	3점
[2-1] (2)	L 을 θ 에 대한 식으로 올바르게 구함	5점
	$\theta = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 임을 관찰함	3점
	답을 올바르게 구함	2점
[2-2] (1)	층수를 관찰함	2점
	답을 올바르게 구함	3점
[2-2] (2)	M 층의 정육각형의 꼭짓점 중 y 좌표가 가장 큰 꼭짓점의 y 좌표(a_M)을 관찰함	4점
	부등식 $\left(\frac{\ell}{2} + 1\right)\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \ell$ 을 올바르게 세움	4점
	$\sqrt{3}$ 의 근사값을 활용하여 $\frac{16\sqrt{3} + 24}{3}$ 의 값의 범위를 올바르게 구함	4점
	답을 올바르게 구함	3점
[2-2] (3)	홀수층과 짝수층의 정육각형의 개수를 관찰함	3점
	$5k - 5 > \frac{18k}{4}$ 임을 관찰함	3점
	답을 올바르게 구함	4점

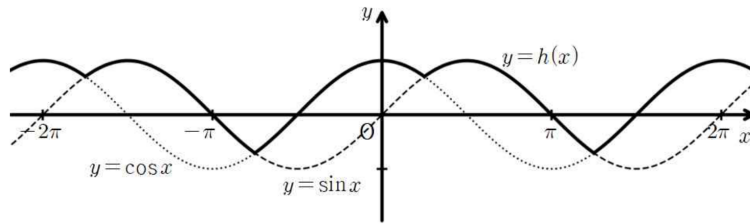
2024학년도 자연계열 (오전·오후)

오전 · 문항 1

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

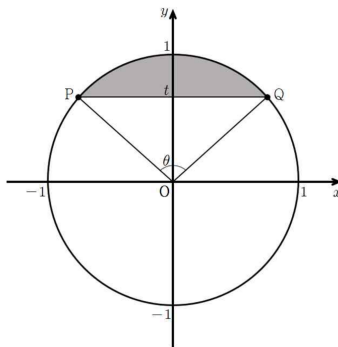
제시문

[가] 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 의 값을 $f(x)$ 의 값과 $g(x)$ 의 값 중 작지 않은 값으로 정의하자. 예를 들어 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ 이면 $y = h(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

[나] $0 \leq t \leq 1$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $y = t$ 과 원 $C: x^2 + y^2 = 1$ 이 만나는 점을 x 좌표가 크지 않은 순서대로 P와 Q라 하고 각 POQ의 크기를 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라 하자. 이때 $t = 1$ 이면 점 P와 점 Q는 같은 점이며 $\theta = 0$ 이다. [그림 2]의 색칠된 도형과 같이 원 C가 선분 PQ에 의하여 나뉘는 두 부분 중 윗부분의 도형을 생각하자. 이 도형의 넓이를 $A(\theta)$ 라 하고 둘레의 길이를 $B(\theta)$ 라 하자. (단, 각의 크기의 단위는 라디안이다.)



[그림 2]

[문제 1-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하시오.

- (1) (8점) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2$ 이고 $g(x) = \log_2 x$ 일 때, 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 $h(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.
- (2) (12점) $f(x) = \sin 2x$ 이고 $g(x) = \frac{3}{4} \cos x$ 일 때, 열린구간 $(-\pi, \pi)$ 에서 함수 $h(x)$ 가 극솟값을 갖는 x 의 값 중 가장 큰 값을 α 라 하자. $\tan \alpha$ 의 값을 구하시오.

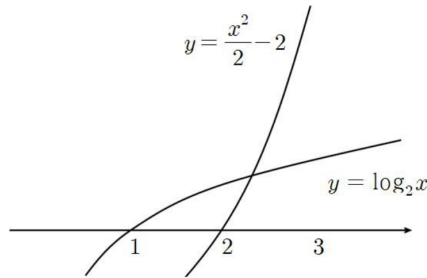
[문제 1-2] (30점) 제시문 (나)를 읽고 물음에 답하시오.

- (1) (8점) $t = \frac{1}{3}$ 일 때, $\sin \theta$ 의 값을 구하시오.
- (2) (10점) $\int_0^\pi A(\theta) d\theta$ 의 값을 구하시오.
- (3) (12점) $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{B(\theta)}{\sin \theta}$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

[문제 1-1] (1)

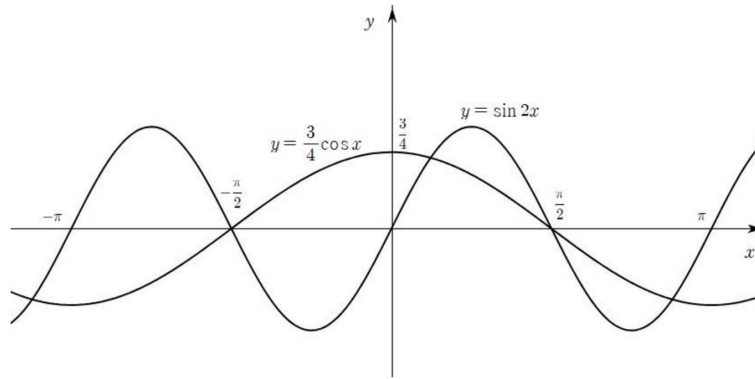
두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$g(3) < 2 < f(3)$ 이므로 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최댓값은 $h(3) = f(3) = \frac{5}{2}$ 이다. $f(2) = 0 < g(2) = 1$ 이므로 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $h(2) = g(2) = 1$ 이다.

(2)

두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 열린구간 $(-\pi, \pi)$ 에서 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 교점 중 x 좌표가 가장 큰 값이 α 이고 $\sin 2\alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha$ 이다. 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 $\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ 이므로 $2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha$ 이다. $\cos \alpha \neq 0$ 이므로 $\sin \alpha = \frac{3}{8}$ 이다. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 이므로 $\tan \alpha = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$ 이다.

[문제 1-2] (1)

점 P와 점 Q는 원 C 위의 점이므로 두 점의 x 좌표를 구하면 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 와 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이다. 즉, $\overline{PQ} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 이다. 따라서 삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2} \overline{PQ} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{9}$ 이다. 한편 삼각형 OPQ는 두 변의 길이가 1이고 그 끼인각의 크기가 θ 인 삼각형이므로 삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2} \sin \theta$ 이다. 따라서 $\sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ 이다.

(2)

$0 < \theta < \pi$ 일 때, 반지름이 1이고 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴의 넓이는 $\frac{\theta}{2}$ 이고, 길이가 1인 두 변의 끼인각의 크기가 θ 인 삼각형 POQ의 넓이는 $\frac{\sin \theta}{2}$ 이므로 $A(\theta) = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin \theta}{2}$ 이다. $\theta = 0$ 일 때 $A(0) = 0$ 이고, $\theta = \pi$ 일 때 $A(\pi) = \frac{\pi}{2}$ 이다. 따라서 닫힌구간 $[0, \pi]$ 에서 $A(\theta) = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin \theta}{2}$ 이다. 그러므로

$$\int_0^{\pi} A(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\theta - \sin \theta) d\theta = \left[\frac{\theta^2}{4} + \frac{\cos \theta}{2} \right]_0^{\pi} = \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{4} - 1$$

이다.

(3)

선분 PQ의 중점을 점 R이라 하면 각 ROQ의 크기는 $\frac{\theta}{2}$ 이고 삼각형 ROQ의 빗변의 길이가 1이므로 $\overline{RQ} = \sin \frac{\theta}{2}$ 이다. 따라서 $\overline{PQ} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$ 이고 $B(\theta) = \theta + 2 \sin \frac{\theta}{2}$ 이며

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{B(\theta)}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta + \overline{PQ}}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta}{\sin \theta} + \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} = 1 + 1 = 2$$

이다.

(별해) 반지름이 1이고 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴의 호의 길이는 θ 이므로 $B(\theta) = \theta + \overline{PQ}$ 이다. 한편 $0 < \theta < \pi$ 일 때, 삼각형 OPQ에 코사인법칙을 적용하면 $\overline{PQ} = \sqrt{2 - 2 \cos \theta}$ 이다. 따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{B(\theta)}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta + \overline{PQ}}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta}{\sin \theta} + \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{PQ}}{\sin \theta}$$

이다.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{PQ}}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{2(1 - \cos \theta)}}{\sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\sin \theta \sqrt{1 + \cos \theta}} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos \theta}} = 1$$

이므로 $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{B(\theta)}{\sin \theta} = 2$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1]	두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프를 관찰하여 최댓값을 올바르게 구함	4점
(1)	두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프를 관찰하여 최솟값을 올바르게 구함	4점
[1-1]	x 좌표가 α 일 때 두 곡선의 교점임을 관찰	4점
(2)	$\sin \alpha$ 또는 $\cos \alpha$ 의 값을 올바르게 구함	4점
	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 임을 관찰하여 답을 올바르게 구함	4점

하위 문항	채점 기준	배점
[1-2]	삼각형 OPQ의 넓이 또는 $\overline{PQ}$ 를 올바르게 구함	4점
(1)	삼각함수의 정의를 이해하여 답을 올바르게 구함	4점
[1-2]	부채꼴 또는 삼각형의 넓이를 이용하여 $A(\theta)$ 를 올바르게 구함	6점
(2)	정적분을 계산하여 답을 올바르게 구함	4점
[1-2]	선분 PQ 또는 호 PQ의 길이 구함	4점
(3)	$B(\theta)$ 를 구하고 구하고자 하는 극한을 올바르게 표현함	4점
	삼각함수의 극한을 이해하여 답을 올바르게 구함	4점

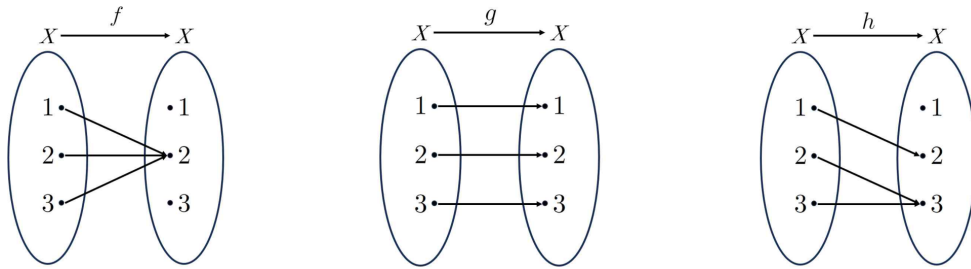
오전 · 문항 2

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

제시문

공집합이 아닌 집합 X 에 대하여 정의역과 공역이 같은 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 있다. 이때 f 가 상수함수이면 f 를 ‘1-상수함수’, $f \circ f$ 가 상수함수이면 f 를 ‘2-상수함수’, $f \circ f \circ f$ 가 상수함수이면 f 를 ‘3-상수함수’라 하자. 이와 같은 방법으로 자연수 n 에 대하여 ‘ n -상수함수’를 정의하자.

예를 들어 $X = \{1, 2, 3\}$ 일 때 [그림 3]과 같은 대응으로 정의된 세 함수 f, g, h 를 생각하자. 함수 f 는 상수함수이므로 모든 자연수 n 에 대하여 n -상수함수이다. 함수 g 는 항등함수이므로 모든 자연수 n 에 대하여 n -상수함수가 아니고, 함수 $h \circ h$ 는 함숫값이 3인 상수함수이므로 h 는 2-상수함수이다.



[그림 3]

[문제 2-1] (20점) $X = \{n \mid n \text{은 자연수}\}$ 일 때 물음에 답하시오.

- (1) (8점) 함수 $f: X \rightarrow X$ 는 $f(3) = 3$ 인 2-상수함수이다. 자연수 n 에 대하여 $a_n = (f \circ f \circ f)(n)$ 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{2024} a_n$ 의 값을 구하시오.
- (2) (12점) 자연수 k 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 는 $f(n) = \begin{cases} n+3 & (n < k) \\ k+3 & (n \geq k) \end{cases}$ 라 하자. f 가 2-상수함수는 아니면서 3-상수함수가 되도록 하는 k 를 모두 구하시오. (단, $k > 1$)

[문제 2-2] (15점) 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 일 때, 다음 <조건>을 만족시키는 4-상수함수 $f: X \rightarrow X$ 를 모두 구하시오.

<조건>

- ① $(f \circ f \circ f \circ f)(1) = 4$
 ② $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$

[문제 2-3] (15점) 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 일 때, 명제 ‘어떤 자연수 n 에 대하여 함수 $g: X \rightarrow X$ 는 n -상수함수이다.’가 참이 되도록 하는 함수 $g: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오.

■ 예시 답안

[문제 2-1] (1)

$f(3) = 3$ 이므로 $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(3) = 3$ 이다. f 가 2-상수함수이므로 모든 $n \in X$ 에 대하여 $(f \circ f)(n) = 3$ 이다. 따라서 모든 $n \in X$ 에 대하여 $a_n = (f \circ f \circ f)(n) = f((f \circ f)(n)) = f(3) = 3$ 이다. 그러므로 $\sum_{n=1}^{2024} a_n = 3 \times 2024 = 6072$ 이다.

(2)

자연수 m, n 에 대하여 $m > n$ 이면 $f(m) \geq f(n)$ 이다. 그러므로 함수 $f(n)$ 은 $n = 1$ 에서 최솟값을 갖는다. 같은 방법으로 합성함수 $(f \circ f)(n)$ 은 $n = 1$ 에서 최솟값을 갖고, $(f \circ f \circ f)(n)$ 은 $n = 1$ 에서 최솟값을 갖는다. 함수 f 는 상수함수가 아니어야 하므로 $f(1) = 4$ 이다. f 는 2-상수함수가 아니므로 $k > 4$ 이고 $(f \circ f)(1) = 7$ 이다. 함수 f 는 3-상수함수이므로 $k \leq 7$ 이어야 한다. 그러므로 가능한 k 의 값은 5, 6, 7이다.

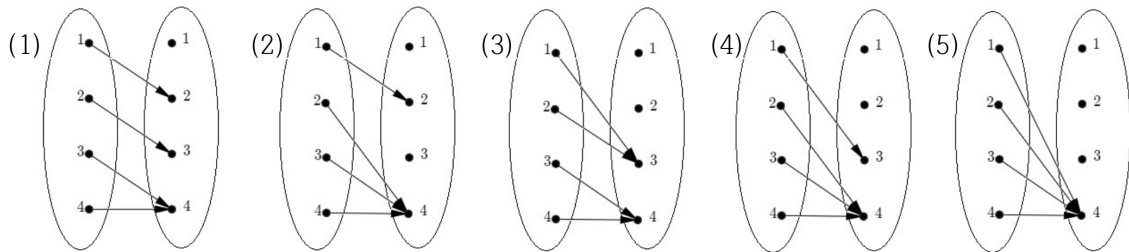
[문제 2-2]

함수 $f: X \rightarrow X$ 는 4-상수함수이고 $(f \circ f \circ f \circ f)(1) = 4$ 이므로 <조건>의 ①에 의하여 $f(4) = 4$ 이다. 만약 $f(x) = x$ 를 만족하는 $x \in \{1, 2, 3\}$ 가 존재하면 $f \circ f \circ f$ 의 치역에는 x 와 4가 모두 포함되어 상수함수가 아니다.

$x = 1, 2, 3$ 일 때 $f(x) \neq x$ 이며, <조건>의 ②에 의하여 $x = 1, 2, 3$ 일 때 $x < f(x)$ 이다. 즉, $f(3) = 4$ 가 된다. 따라서, $f(1)$ 과 $f(2)$ 로 가능한 값은 다음과 같다.

- $f(1) = 2$ 이면 $f(2)$ 는 3 또는 4이다.
- $f(1) = 3$ 이면 $f(2)$ 는 3 또는 4이다.
- $f(1) = 4$ 이면 $f(2) = 4$ 이다.

이를 종합하면, 주어진 조건을 만족하는 함수는 아래와 같이 모두 다섯 경우가 있다.



(1)은 3-상수함수이고 (2)~(4)는 2-상수함수이며 (5)는 1-상수함수이다. 따라서 이들은 모두 4-상수함수이다.

[문제 2-3]

어떤 함수가 일대일대응이면 그 함수를 여러 번 합성한 함수도 일대일대응이므로 상수함수가 될 수 없다. 따라서 일대일대응이 아닌 함수만 살펴봐도 충분하다. 일대일대응인 경우는 치역의 원소의 개수가 3이므로 치역의 원소의 개수가 1과 2인 경우를 확인해보자.

(i) 치역의 원소의 개수가 1인 경우는 1-상수함수이므로 이러한 함수 g 에 대하여 주어진 명제는 참이며, 이러한 함수의 개수는 3이다.

(ii) 치역의 원소의 개수가 2인 경우 치역을 $\{a, b\}$ 라 하고 치역에 속하지 않는 X 의 원소를 c 라 하자.

- 함수 g 에 대하여 $g(a) \neq g(b)$ 라 하자. $g(a) = a, g(b) = b$ 또는 $g(a) = b, g(b) = a$ 이면 함수 g 는 여러 번 합성해도 합숫값으로 a 와 b 를 가지므로 이러한 함수 g 에 대하여 주어진 명제는 참이 아니다.
- 함수 g 에 대하여 $g(a) = g(b)$ 라 하자. 치역이 $\{a, b\}$ 이므로, $g(a) = g(b) = a, g(c) = b$ 이거나 $g(a) = b, g(b) = b, g(c) = a$ 이다. 두 함수 모두 2-상수함수로 이 함수들에 대하여 주어진 명제는 참이다.

지역의 원소의 개수가 2인 경우는 3가지이므로 이러한 함수의 개수는 6이다.

따라서, 총 $3 + 6 = 9$ 개의 함수가 주어진 명제를 참이 되도록 한다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	모든 n 에 대하여 $(f \circ f)(n) = 3$ 임을 관찰	3점
	모든 n 에 대하여 $a_n = 3$ 임을 관찰	3점
	합의 기호를 이해하고 답을 올바르게 구함	2점
[2-1] (2)	자연수 m, n 에 대하여 $m > n$ 이면 $f(m) \geq f(n)$ 임을 관찰	4점
	$k > 4$ 임을 관찰	4점
	$k \leq 7$ 임을 관찰하고 답을 올바르게 구함	4점

하위 문항	채점 기준	배점
[2-2]	조건을 잘 이해하고 $f(3)$ 과 $f(4)$ 에 대하여 의미 있는 관찰	4점
	조건을 잘 이해하고 $f(1)$ 과 $f(2)$ 에 대하여 의미 있는 관찰	8점
	조건을 만족하는 답을 올바르게 구함	3점

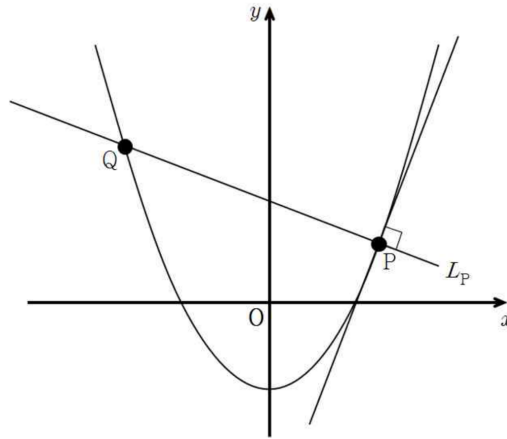
하위 문항	채점 기준	배점
[2-3]	명제가 거짓이 되도록 하는 $g(x)$ 의 성질에 대한 의미 있는 관찰	5점
	명제가 참이 되도록 하는 $g(x)$ 의 성질에 대한 의미 있는 관찰	5점
	$g(x)$ 의 성질을 이해하여 답을 올바르게 구함	5점

오후 · 문항 1

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

제시문

[가] 곡선 $C : y = x^2 - 1$ 과 C 위의 x 좌표가 양수인 점 $P(t, t^2 - 1)$ 이 있다. [그림 1]과 같이 곡선 C 위의 점 P 에서의 접선에 수직이며 점 P 를 지나는 직선을 L_P 라 하고, 곡선 C 와 직선 L_P 의 교점 중 P 가 아닌 점을 Q 라 하자.



[그림 1]

곡선 C 와 직선 L_P 로 둘러싸인 도형의 $x \geq 0$ 인 부분의 넓이를 $S(t)$ 라 하자. 직선 L_P 과 x 축이 이루는 예각의 크기를 θ (라디안)라 하면 $t = \frac{1}{2 \tan \theta}$ 이다. 따라서 $S(t)$ 를 θ 에 대한 함수로 나타낼 수 있다.

[나] 선분 PQ 위의 점 중에서 점 $P(t, t^2 - 1)$ 과의 거리가 1인 점을 R 이라 하고, 점 R 의 x 좌표와 y 좌표를 매개변수 t 로 나타낸 함수를 각각 $x(t)$, $y(t)$ 라 하자.

[문제 1-1] (27점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하시오.

- (1) (6점) $S(t)$ 를 t 에 대한 다항식으로 나타내시오.
- (2) (8점) $t = 1$ 일 때, θ 에 대한 $S(t)$ 의 순간변화율을 구하시오.
- (3) (13점) $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하시오.

[문제 1-2] (23점) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 물음에 답하시오.

- (1) (10점) 함수 $x(t)$ 와 $y(t)$ 를 구하시오.
- (2) (13점) 시각 t 에서 점 R 의 위치를 $(x(t), y(t))$ 라 하자. 시각 $t = 1$ 에서 $t = s$ 까지 점 R 이 움직인 거리를 $l(s)$ 라 할 때, $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{l(s) - l(2)}{s^2 - 4}$ 의 값을 구하시오. (단, $s > 1$)

■ 예시 답안

[문제 1-1] (1)

직선 L_P 의 방정식은 $y = -\frac{x}{2t} + t^2 - \frac{1}{2}$ 이므로 구하는 영역의 넓이는

$$S(t) = \int_0^t \left(-\frac{x}{2t} + t^2 - \frac{1}{2} - x^2 + 1 \right) dx = \frac{2}{3}t^3 + \frac{t}{4}$$

이다.

(2)

$t = \frac{1}{2 \tan \theta} = \frac{\cot \theta}{2}$ 이므로 합성함수의 미분법에 의하여 $S'(t) \times \frac{dt}{d\theta} = \left(2t^2 + \frac{1}{4} \right) \times \left(-\frac{\csc^2 \theta}{2} \right)$ 이다. $t = 1$ 일

때 $\tan \theta = \frac{1}{2}$ 이고 $\csc \theta = \sqrt{5}$ 이므로, 구하는 값은 $-\frac{45}{8}$ 이다.

(별해) $t = \frac{1}{2 \tan \theta}$ 이므로 θ 에 대한 함수로 나타낸 $S(t)$ 를 $f(\theta)$ 라 하면,

$$S(t) = f(\theta) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2 \tan \theta} \right)^3 + \frac{1}{8 \tan \theta} = \frac{1}{12} \cot^3 \theta + \frac{1}{8} \cot \theta$$

이므로 $f'(\theta) = -\frac{1}{8} \csc^2 \theta (2 \cot^2 \theta + 1)$ 이다. $t = 1$ 일 때 $\tan \theta = \frac{1}{2}$ 이고 $\cot \theta = 2$, $\csc \theta = \sqrt{5}$ 이므로, 구하는 값은 $-\frac{45}{8}$ 이다.

(3)

직선 L_P 와 곡선 C 의 교점의 x 좌표를 구하면 $-t - \frac{1}{2t}$, t 이다. 따라서 점 Q 의 x 좌표는 $-t - \frac{1}{2t}$ 이다. 점 P 의 x 좌표와 점 Q 의 x 좌표의 차를 c 라 하면 $c = 2t + \frac{1}{2t} = \frac{1}{\tan \theta} + \tan \theta$ 이다. $\cos \theta = \frac{c}{PQ}$ 이므로

$$\overline{PQ} = \frac{c}{\cos \theta} = \left(\frac{1}{\tan \theta} + \tan \theta \right) \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos^2 \theta}$$

이다. $a = \sin \theta$ 라 하면 θ 는 예각이므로 $0 < a < 1$ 이다. 따라서 $\overline{PQ} = \frac{1}{a(1-a^2)}$ 이고 $0 < a < 1$ 에서 $a(1-a^2)$

의 최댓값을 가질 때 $\overline{PQ}$ 는 최솟값을 가진다. $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 에서 $a(1-a^2)$ 는 최댓값 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ 를 갖는다. 그러므로 $\overline{PQ}$

의 최솟값은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이다.

[문제 1-2] (1)

점 R 을 $(t+a, t^2-1+b)$ 라 두자. 두 점 P, R 은 직선 L_P 위에 있으므로 L_P 의 기울기는 $\frac{b}{a} = -\frac{1}{2t}$ 이다. 또한

점 P 와 점 R 의 거리가 1이므로 $1 = a^2 + b^2 = a^2 \left(1 + \frac{1}{4t^2} \right)$ 이다. 이때 t 는 양수이고 점 R 의 x 좌표는 t 보다 작

아야 하므로 $a = -\frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}$ 이다. 따라서 점 R 의 x 좌표와 y 좌표를 매개변수 t 로 나타낸 함수

는 $x(t) = t - \frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}$, $y(t) = t^2 - 1 + \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}$ 이다.

(2)

$$x'(t) = 1 - \frac{2}{(\sqrt{4t^2 + 1})^3} \text{이고 } y'(t) = 2t - \frac{4t}{(\sqrt{4t^2 + 1})^3} = 2t \left(1 - \frac{2}{(\sqrt{4t^2 + 1})^3} \right) \text{이므로}$$

$$l(s) = \int_1^s \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_1^s \left(\sqrt{1 + 4t^2} - \frac{2}{4t^2 + 1} \right) dt$$

이다. 정적분과 미분의 관계에 의하여

$$l'(s) = \frac{d}{ds} l(s) = \frac{d}{ds} \int_1^s \left(\sqrt{1 + 4t^2} - \frac{2}{4t^2 + 1} \right) dt = \sqrt{1 + 4s^2} - \frac{2}{4s^2 + 1}$$

이다. 따라서

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{l(s) - l(2)}{s^2 - 4} = \lim_{s \rightarrow 2} \left(\frac{1}{s + 2} \right) \left(\frac{l(s) - l(2)}{s - 2} \right) = \frac{1}{4} l'(2) = \frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{34}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	직선 L_P 의 방정식을 구함	2점
	$S(t)$ 의 식을 적음	2점
	정적분을 올바르게 계산함	2점
[1-1] (2)	합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구함	3점
	θ 가 예각임을 이용하여 필요한 삼각함수의 값을 올바르게 구함	3점
	도함수와 삼각함수의 값을 이용하여 답을 올바르게 구함	2점
[1-1] (3)	Q의 x 좌표 혹은 점 P, Q의 x 좌표의 차를 올바르게 구함	4점
	$\overline{PQ}$ 를 θ 에 관한 식으로 표현	4점
	$\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구함	5점

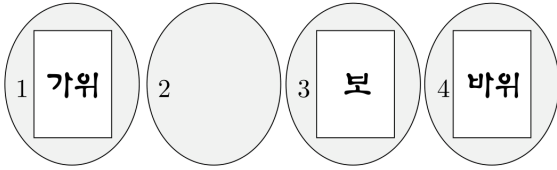
하위 문항	채점 기준	배점
[1-2] (1)	a 와 b 가 만족하는 관계식을 구함(L_P 를 활용하여 점 R의 위치를 올바르게 표현)	5점
	$x(t)$ 와 $y(t)$ 를 올바르게 구함	5점
[1-2] (2)	$x'(t)$ 와 $y'(t)$ 를 올바르게 구함	4점
	$l(s)$ 를 적분식으로 나타냄	2점
	$l'(2)$ 의 값을 올바르게 구함	4점
	극한을 이해하여 정답을 올바르게 구함	3점

오후 · 문항 2

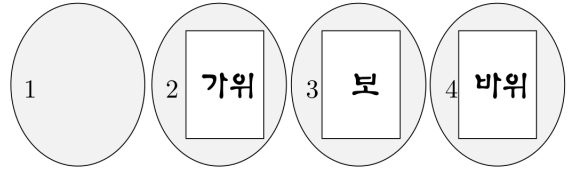
[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

제시문

[가] 서로 다른 세 장의 카드 ‘가위카드’, ‘바위카드’, ‘보카드’와 1번에서 n 번($n \geq 3$)까지 차례대로 번호가 적혀있는 n 개의 자리가 있다. 이 카드 세 장을 서로 다른 자리에 한 장씩 놓는 것을 ‘카드배열’이라 하고 어떤 두 카드의 자리 번호의 차가 1이면 두 카드는 ‘이웃한다’고 하자. 예를 들어 $n = 4$ 일 때, [그림 2]와 [그림 3]의 카드배열은 서로 다른 배열이다. [그림 2]의 카드배열에서 보카드와 바위카드는 이웃하고 가위카드와 보카드는 이웃하지 않는다.

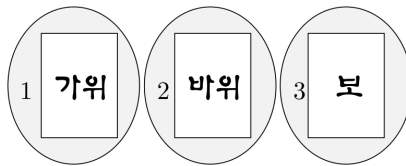


[그림 2]



[그림 3]

[나] $n = 3$ 일 때, 카드의 이름을 차례로 써서 카드배열을 나타내자. 예를 들어 [그림 4]의 카드배열은 (가위/바위/보)로 나타낸다.



[그림 4]

$n = 3$ 이고 정의역과 공역이 모두 $\{1, 2, 3\}$ 인 함수 f 가 주어졌을 때, 다음 <규칙>을 따르는 카드배열을 ‘ f -카드배열’이라 하자. 가위카드는 보카드를 이기고 보카드는 바위카드를 이기며 바위카드는 가위카드를 이긴다.

<규칙>

- ① 1번 자리에 놓인 카드를 이기는 카드는 자리 번호가 $f(1)$ 이하이다.
- ② 2번 자리에 놓인 카드를 이기는 카드는 자리 번호가 $f(2)$ 이하이다.
- ③ 3번 자리에 놓인 카드를 이기는 카드는 자리 번호가 $f(3)$ 이하이다.

예를 들어 함수 $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 2$ 이면 (바위/보/가위)는 f -카드배열이다. (가위/보/바위)는 가위카드가 놓인 자리 번호가 1이므로 바위카드의 자리 번호는 $f(1) = 2$ 이하이어야 하는데 그렇지 않으므로 f -카드배열이 아니다.

[문제 2-1] (15점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하시오.

- (1) (5점) $n = 7$ 일 때, 카드배열의 개수를 구하시오.
- (2) (5점) $n = 9$ 일 때, 다음을 만족시키는 카드배열의 개수를 구하시오.

(가위카드의 자리 번호) < (바위카드의 자리 번호) < (보카드의 자리 번호)

- (3) (5점) $n = 11$ 일 때, 가위카드와 보카드가 이웃하는 카드배열의 개수를 구하시오.

[문제 2-2] (35점) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 물음에 답하시오.

- (1) (10점) 함수 $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 3$ 일 때, f -카드배열을 모두 구하시오.
- (2) (12점) $g(1) = 2$ 이고 g -카드배열이 존재하도록 하는 함수 $g : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 을 모두 구하시오.
- (3) (13점) 명제 ‘모든 카드배열이 h -카드배열이다.’가 참이 되도록 하는 함수 $h : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ 을 모두 구하시오. (단, $n = 3$)

■ 예시 답안

[문제 2-1] (1)

일곱 개의 자리에서 세 자리를 고른 후에 카드 세 장을 차례로 나열하는 경우의 수이므로 ${}_7P_3 = 210$ 이다.

(2)

아홉 개의 자리에서 세 자리를 고르는 경우의 수와 같으므로 ${}_9C_3 = 84$ 이다.

(3)

두 카드가 이웃하기 위해서는 두 카드의 자리 번호는 1과 2, 2와 3, ..., 10과 11 이렇게 열 가지 중 하나이어야 한다. 가위/보 또는 보/가위를 배치한 후에 ‘바위’를 남은 아홉 자리 중 한 자리에 배치하면 된다. 따라서 답은 $10 \times 2 \times 9 = 180$ 이다.

[문제 2-2] (1)

1번 자리에 임의의 카드 한 장을 놓으면 그 카드를 이기는 카드는 반드시 2번 자리에 놓아야 하고, $f(2) = 3$ 이므로 2번 자리의 카드를 이기는 카드는 남은 3번 자리에 놓으면 $f(3) = 3$ 이므로 f -카드배열이다. 따라서 (가위/바위/보), (바위/보/가위), (보/가위/바위) 이렇게 3개의 f -카드배열이 있다.

(2)

$g(2) \neq 3$ 일 때 g -카드배열 (A/B/C)가 존재한다고 하자. $g(2) \neq 3$ 이므로 B를 이기는 카드는 A이다. $g(1) = 2$ 이므로 A를 이기는 카드는 B가 되어 모순이다. 따라서 $g(2) \neq 3$ 일 때 g -카드배열은 존재하지 않는다. $g(2) = 3$ 이면 $g(3)$ 의 값에 관계없이 (가위/바위/보)는 g -카드배열이다. 따라서 답은

- $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 1$
- $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 2$
- $g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 3$

이다.

(3)

$h(1) \neq 3$ 이면 (가위/보/바위)가 h -카드배열이 아니다. 그러므로 $h(1) = 3$ 이다. $h(2) \neq 3$ 이면 (보/가위/바위)가 h -카드배열이 아니다. 그러므로 $h(2) = 3$ 이다. $h(3) = 1$ 이면 (보/바위/가위)가 h -카드배열이 아니다. 따라서 $h(1) = 3, h(2) = 3$ 이고 $h(3) = 2$ 또는 $h(3) = 3$ 이다.

(i) $h(1) = 3, h(2) = 3, h(3) = 2$ 이면 임의의 카드배열을 생각하자. $h(1) = 3, h(2) = 3$ 이므로 규칙 ①, ②를 따른다. 3번 자리의 카드를 이기는 카드는 이미 1번 또는 2번 자리에 있고 $h(3) = 2$ 이므로 규칙 ③도 따른다. 따라서 모든 카드배열이 h -카드배열이다.

(ii) $h(1) = 3, h(2) = 3, h(3) = 3$ 은 어떤 제약 조건도 없으므로 모든 카드배열이 h -카드배열이다.

따라서 답은 $h(1) = 3, h(2) = 3, h(3) = 3$ 과 $h(1) = 3, h(2) = 3, h(3) = 2$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	순열임을 관찰하고 정답을 올바르게 구함	5점
[2-1] (2)	조합임을 관찰하고 정답을 올바르게 구함	5점
[2-1] (3)	이웃하는 카드가 있는 경우에 대한 의미 있는 관찰	2점
	공의 법칙을 이해하여 정답을 올바르게 구함	3점

하위 문항	채점 기준	배점
[2-2] (1)	정의를 이용하여 f -카드배열이 되는 의미 있는 조건을 관찰함	6점
	f -카드배열을 이해하여 정답을 올바르게 구함	4점
[2-2] (2)	$g(2) \neq 3$ 에 대한 카드배열의 성질을 올바르게 관찰함	4점
	$g(2) = 3$ 에 대한 카드배열의 성질을 올바르게 관찰함	4점
	정답을 올바르게 구함	4점
[2-2] (3)	$h(1) = 3$ 을 관찰	4점
	$h(2) = 3$ 을 관찰	4점
	$h(3) = 2$ 또는 $h(3) = 3$ 일 때 명제가 참임을 관찰	5점

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다