

연세대논술

자연계

목차

2026학년도 자연계열(수학)	3
문제 1	3
문제 2	5
문제 3	7
문제 4	10
문제 5	13
2025학년도 자연계열(수학) · 본시험 + 추가시험	15
본시험 · 문제 1	15
본시험 · 문제 2	17
본시험 · 문제 3	19
본시험 · 문제 4	21
본시험 · 문제 5	24
본시험 · 문제 6	27
추가시험 · 문제 1	30
추가시험 · 문제 2	33
추가시험 · 문제 3	35
2024학년도 자연계열(수학 + 과학 택1)	38
수학 · 문제 1	38
수학 · 문제 2	40
수학 · 문제 3	42
수학 · 문제 4	44
물리학 · 문제 1	47
물리학 · 문제 2	50
물리학 · 문제 3	54
물리학 · 문제 4	57
화학 · 문제 1	61
화학 · 문제 2	64
화학 · 문제 3	66
화학 · 문제 4	68
생명과학 · 문제 1	70
생명과학 · 문제 2	72
생명과학 · 문제 3	73
지구과학 · 문제 1	75
지구과학 · 문제 2	77
지구과학 · 문제 3	79
지구과학 · 문제 4	81
지구과학 · 문제 5	83
지구과학 · 문제 6	85

2026학년도 자연계열(수학)

문제 1

[문제 1] 앞면에는 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 있다. 처음에 이 10장의 카드는 모두 0이 보이도록 놓여 있다. 이 10장의 카드 중 임의로 서로 다른 5장의 카드를 택하여, 택한 카드들을 각각 한 번 뒤집은 후 10장의 카드에 보이는 모든 수의 집합을 A 라 하고, 집합 A 의 모든 원소의 합을 S 라 하자. 이산확률변수 X 를

$$X = \begin{cases} 3S & (3 \in A \text{인 경우}) \\ S & (3 \notin A \text{인 경우}) \end{cases}$$

라 할 때, $E(X)$ 의 값을 구하시오. [16점]

■ 예시 답안

10장의 카드 중 임의로 서로 다른 5장의 카드를 택하는 방법의 수는 ${}_{10}C_5 = 252$ 이다.

$3 \in A$ 인 집합 A 의 개수는 ${}_9C_4 = 126$ 이고, 이들 각각의 모든 원소의 합을 $C_1, C_2, \dots, C_{126}$ 이라 하자.

$3 \notin A$ 인 집합 A 의 개수는 ${}_9C_5 = 126$ 이고, 이들 각각의 모든 원소의 합을 $D_1, D_2, \dots, D_{126}$ 이라 하자.

이산확률변수 X 가 $3C_1, 3C_2, \dots, 3C_{126}, D_1, D_2, \dots, D_{126}$ 의 각 값을 가질 확률은 각각 $\frac{1}{252}$ 이다. 따라서,

$$E(X) = \sum_{n=1}^{126} 3C_n \times \frac{1}{252} + \sum_{n=1}^{126} D_n \times \frac{1}{252}$$

이다.

한편, $C_1, C_2, \dots, C_{126}$ 각각을 구할 때 더해진 0이 아닌 $126 \times 5 = 630$ 개의 수 중 3의 개수는 126, 3을 제외한 1부터 10까지 자연수의 개수는 각각 $\frac{630-126}{9} = 56$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{126} C_n = 3 \times 126 + \left(\sum_{n=1}^{10} n - 3 \right) \times 56 = 3 \times 126 + 52 \times 56$$

같은 방법으로 $D_1, D_2, \dots, D_{126}$ 각각을 구할 때 더해진 0이 아닌 $126 \times 5 = 630$ 개의 수 중 3을 제외한 1부터 10까지 자연수의 개수는 각각 $\frac{630}{9} = 70$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{126} D_n = \left(\sum_{n=1}^{10} n - 3 \right) \times 70 = 52 \times 70$$

따라서,

$$E(X) = \frac{3 \times (3 \times 126 + 52 \times 56) + 52 \times 70}{252} = \frac{965}{18}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문제 2

[문제 2] 앞면에는 1부터 n 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 n 장의 카드가 있다. 이 n 장의 카드를 사용하여 다음 시행을 한다.

n 장의 카드 중 임의로 1장의 카드를 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 이 n 장의 카드는 모두 0이 보이도록 놓여 있을 때, 이 시행을 n 번 반복한 후 n 장의 카드에 보이는 모든 수의 합의 기댓값을 a_n 이라 하자. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ 의 값을 구하시오.

(단, 시행을 반복할 때 같은 카드가 여러 번 뒤집힐 수 있고, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 이다.) [20점]

■ 예시 답안

어떤 자연수 a ($1 \leq a \leq n$)에 대하여 n 번의 시행 후 자연수 a 가 보이게 뒤집어져 있을 확률을 $P(a)$ 라 하면

$$P(a) = {}_nC_1 \left(\frac{1}{n}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} + {}_nC_3 \left(\frac{1}{n}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-3} + {}_nC_5 \left(\frac{1}{n}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-5} \\ + \cdots + {}_nC_m \left(\frac{1}{n}\right)^m \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-m}$$

(단, m 은 n 이하의 자연수 중 최대인 홀수)

이고, 이항정리에 의하여

$$P(a) = \frac{\sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} - \sum_{k=0}^n (-1)^k {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}}{2}$$

한편, $\sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1$ 이고

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(-\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k} = \left(-\frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

이므로

$$P(a) = \frac{1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{2}$$

따라서

$$a_n = \sum_{a=1}^n \left\{ a \times \frac{1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{2} \right\} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{2}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n(n+1)}{2n^2} \times \frac{1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{2} \right\} = \frac{e^2 - 1}{4e^2}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문제 3

[문제 3] 7개의 함수

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad g_1(x) = ax + b, \quad g_2(x) = ax + c, \quad g_3(x) = bx + a, \quad g_4(x) = bx + c, \quad g_5(x) = cx + a, \\ g_6(x) = cx + b$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 세 실수 a, b, c 에 대하여 아래의 물음에 답하시오.

(I) $f(x) > 0$ 인 실수 x 가 존재한다.

(II) $1 \leq i \leq 6$ 인 모든 자연수 i 와 $s < t$ 인 모든 실수 s, t 에 대하여 $\int_s^t g_i(x)dx \leq \int_s^t f(x)dx$ 가 성립한다.

3-1 $\frac{2f'(26)}{f''(26)}$ 의 값을 구하시오. [7점]

3-2 $b = 26$ 인 모든 $f(-1)$ 의 값의 범위는 $\alpha \leq f(-1) \leq \beta$ 이다. $\alpha + \beta$ 의 값을 구하시오. [7점]

■ 예시 답안

[문제 3-1]

조건 (II)에서, $s < t$ 인 모든 실수 s, t 에 대하여 $\int_s^t \{f(x) - g_i(x)\}dx \geq 0$ 이 성립하므로

$$\int_0^3 \{f(x) - g_4(x)\}dx = a \int_0^3 x^2 dx = 9a \geq 0 \text{에서 } a \geq 0 \text{이다.} \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $a = 0$ 인 경우

$$\int_0^2 \{f(x) - g_2(x)\}dx = b \int_0^2 x dx = 2b \geq 0, \quad \int_{-2}^0 \{f(x) - g_2(x)\}dx = b \int_{-2}^0 x dx = -2b \geq 0$$

이므로 $b = 0$ 이다.

$$\int_{-1}^1 \{f(x) - g_5(x)\}dx = c \int_{-1}^1 (1-x)dx = 2c \geq 0,$$

$$\int_1^3 \{f(x) - g_5(x)\}dx = c \int_1^3 (1-x)dx = -2c \geq 0$$

이므로 $a = b = c = 0$ 이 되어 조건 (I)을 만족시키지 못한다.

(ii) $a > 0$ 인 경우

$$m = \frac{b-a}{2a} \text{라 하면 } f(x) - g_2(x) = ax^2 + (b-a)x = a(x^2 + 2mx) = a\{(x+m)^2 - m^2\} \text{이다.}$$

$m \neq 0$ 이면,

$$\int_{-m-|m|}^{-m+|m|} \{f(x) - g_2(x)\}dx = a \int_{-m-|m|}^{-m+|m|} \{(x+m)^2 - m^2\}dx = -\frac{4}{3}a |m|^3 \geq 0$$

이므로 $|m| \leq 0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $m = 0$ 이다.

(i), (ii)에서 $a > 0, a = b$ 이므로

$$f(x) = ax^2 + ax + c, \quad f'(x) = 2ax + a, \quad f''(x) = 2a$$

$$\frac{2f'(26)}{f''(26)} = \frac{2 \times (52a + a)}{2a} = 53$$

[문제 3-2]

$b = 26$ 이면 [문제 3-1]에서 $f(x) = 26x^2 + 26x + c$,

$$g_1(x) = g_3(x) = 26x + 26, \quad g_2(x) = g_4(x) = 26x + c, \quad g_5(x) = g_6(x) = cx + 26 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이다.

이차방정식 $f(x) - g_5(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하자.

(i) $D > 0$ 인 경우

이차방정식 $f(x) - g_5(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 p, q ($p < q$)라 하면

$$\int_p^q \{f(x) - g_5(x)\}dx = -\frac{13(q-p)^3}{3} < 0$$

이므로 조건 (II)를 만족시키지 못한다.

(ii) $D \leq 0$ 인 경우

$$D = (26 - c)^2 + 4 \times 26 \times (26 - c) = (c - 26)(c - 130) \leq 0$$

이므로 $26 \leq c \leq 130$ 이다.

(i), (ii)에서 $f(x) - g_5(x) \geq 0$ 을 만족시키는 모든 c 의 범위는 $26 \leq c \leq 130$ 이다.

이 때 $f(x) - g_1(x) \geq 0, f(x) - g_2(x) \geq 0, f(x) - g_5(x) \geq 0$ 이 되므로 ①에 의하여 $1 \leq i \leq 6$ 인 모든 자연수 i 에 대하여 $f(x) - g_i(x) \geq 0$ 이다.

또한 $1 \leq i \leq 6$ 인 모든 자연수 i 와 모든 실수 s 에 대하여 $\frac{d}{dx} \int_s^x \{f(t) - g_i(t)\}dt \geq 0$ 이 되어
함수 $\int_s^x \{f(t) - g_i(t)\}dt$ 는 증가함수이고 $\int_s^s \{f(x) - g_i(x)\}dx = 0$ 이므로
 $s < t$ 인 모든 실수 s, t 에 대하여 $\int_s^t \{f(x) - g_i(x)\}dx \geq 0$ 이 되어 조건 (II)를 만족시킨다.
따라서 $26 \leq c \leq 130$ 이고 $f(-1) = c$ 이므로 $26 \leq f(-1) \leq 130$
 $\alpha = 26, \beta = 130$ 이므로 $\alpha + \beta = 156$

■ 채점 기준

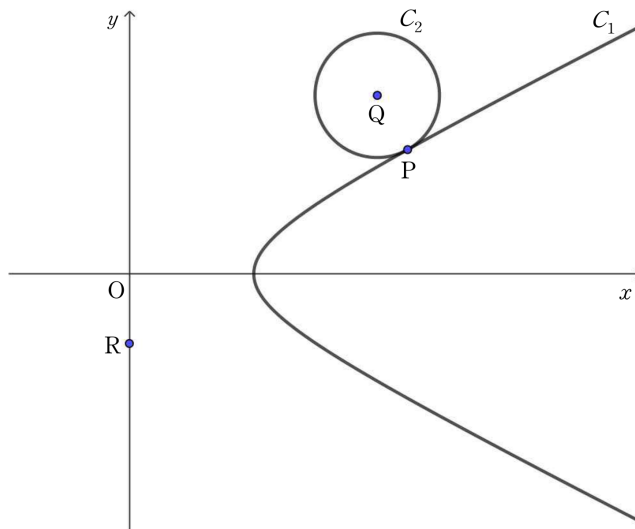
※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문제 4

[문제 4] 곡선 $C_1 : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 (x > 0)$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 P를 지나고 반지름의 길이가 1인 원을 C_2 라 하자. 원 C_2 의 중심이 Q이고 C_2 위의 점 P에서의 접선이 곡선 C_1 위의 점 P에서의 접선과 일치할 때, 아래의 물음에 답하시오. (단, 점 Q의 x 좌표는 점 P의 x 좌표보다 작다.)

4-1 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(t), g(t)$ 에 대하여 점 P의 좌표가 $(f(t), g(t))$ 이고 $g(0) = 0, g'(0) = 2026$ 일 때, 점 Q의 좌표를 $(\alpha(t), \beta(t))$ 라 하자. $\beta'(0)$ 의 값을 구하시오. [10점]

4-2 점 $R\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 가 있다. 모든 직선 QR의 기울기의 집합을 구하시오. [20점]



■ 예시 답안

[문제 4-1]

어떤 양수 t 에 대하여 곡선 C_1 위의 점 $(f(t), g(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{f(t)}{4g(t)}$ 이고 $\overline{PQ} = 1$ 이므로

$$(Q \text{의 } x \text{ 좌표}) - (P \text{의 } x \text{ 좌표}) = \frac{-f(t)}{\sqrt{\{f(t)\}^2 + 16\{g(t)\}^2}}$$

$$(Q \text{의 } y \text{ 좌표}) - (P \text{의 } y \text{ 좌표}) = \frac{4g(t)}{\sqrt{\{f(t)\}^2 + 16\{g(t)\}^2}}$$

$$Q\left(f(t)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\{f(t)\}^2 + 16\{g(t)\}^2}}\right), g(t)\left(1 + \frac{4}{\sqrt{\{f(t)\}^2 + 16\{g(t)\}^2}}\right)\right)$$

즉,

$$\alpha(t) = f(t)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\{f(t)\}^2 + 16\{g(t)\}^2}}\right), \quad \beta(t) = g(t)\left(1 + \frac{4}{\sqrt{\{f(t)\}^2 + 16\{g(t)\}^2}}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

점 P는 곡선 C_1 위의 점이므로

$$\frac{\{f(t)\}^2}{4} - \{g(t)\}^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡의 양변을 t 로 미분하면

$$\frac{f(t)f'(t)}{2} - 2g(t)g'(t) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$\beta'(t) = g'(t)\left(1 + \frac{4\{f(t)\}^2 - 16\{g(t)\}^2}{(\sqrt{\{f(t)\}^2 + 16\{g(t)\}^2})^3}\right)$$

이고, $g(0) = 0, g'(0) = 2026$ 이므로 $f(0) = 2$

따라서 $\beta'(0) = 6078$

[문제 4-2]

직선 QR의 기울기를 m 이라 하자.

점 P가 곡선 C_1 위를 움직이므로 모든 m 의 값의 집합은 하나의 구간을 이룬다.

m 의 최댓값을 b 라 하면 b 는 양수이고, 기울기가 b 인 곡선 C_1 의 접선을 l_1 이라 할 때

$$l_1 : y = bx - \sqrt{4b^2 - 1} \quad \left(b^2 > \frac{1}{4}\right)$$

이때, 점 $R\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 와 직선 l_1 사이의 거리는 1이므로

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{4b^2 - 1}\right|}{\sqrt{b^2 + 1}} = 1$$

$$b^2 > \frac{1}{4} \text{이므로 } b^2 = \frac{89}{36}, b = \frac{\sqrt{89}}{6}$$

곡선 C_1 위에 있는 제4사분면 위의 임의의 점 P에 대하여, 직선 OP의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 보다 크다.

점 R과 직선 $y = -\frac{1}{2}x$ 사이의 거리는 1이므로 점 R을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선을 l_2 라 하면 점 P와 직선 l_2 사이의 거리는 1보다 크므로 직선 QR의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 보다 크다.

한편, $-\frac{1}{2}$ 보다 큰 임의의 음수 k 에 대하여 점 R을 지나고 기울기가 k 인 직선을 l_3 이라 하면 l_3 은 직선 $y = -\frac{1}{2}x$ 와 만난다. 이 점을 T라 하면, 선분 RT 위의 점 중 원 C_2 의 중심이 되는 점이 존재하므로, k 는 모든 직선 QR의 기울기의 집합의 원소이다.

따라서 모든 직선 QR의 기울기의 집합은 $\left\{ m \mid -\frac{1}{2} < m \leq \frac{\sqrt{89}}{6}, m \text{ 은 실수} \right\}$ 이다.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문제 5

[문제 5] 아래의 물음에 답하시오. (단, $e > 2$ 이다.)

- 5-1 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{(e^x + x)(1 - xe^x)}{(e^{2x} + 1)(x^2 + 1)}$ 의 최솟값을 구하시오. [11점]
- 5-2 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{(2e^x + \cos x)(2 - e^x \cos x)}{(e^{2x} + 1)(\cos^2 x + 4)}$ 의 최댓값을 구하시오. [9점]

■ 예시 답안

[문제 5-1]

$(e^x + x)(1 - xe^x) \neq 0$ 인 경우

$(e^{2x} + 1)(x^2 + 1) = x^2 e^{2x} + e^{2x} + x^2 + 1 = (e^x + x)^2 + (1 - xe^x)^2 > 0$ 이고

$(e^x + x)(1 - xe^x) = 0$ 인 경우 $f(x) = 0$ 이므로,

함수 $f(x)$ 는 $(e^x + x)(1 - xe^x) < 0$ 일 때 최솟값을 갖는다. 이때

$-\frac{1}{f(x)} = \frac{e^x + x}{xe^x - 1} + \frac{xe^x - 1}{e^x + x}$ 이고, $\frac{e^x + x}{xe^x - 1} > 0$ 이다.

한편, $h(x) = \frac{e^x + x}{xe^x - 1}$, $p(t) = t + \frac{1}{t}$ ($t > 0$)이라 하면 $-\frac{1}{f(x)} = p(h(x))$

$p'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2}$ 이므로 함수 $p(t)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 $t = 1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

따라서, $h(\alpha) = 1$ 인 실수 α 가 존재한다면 함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

한편, 방정식 $h(x) = 1$ 에서 $\frac{e^x + x}{xe^x - 1} = 1$, $xe^x - e^x - x - 1 = 0$ 이므로

$q(x) = xe^x - e^x - x - 1$ 이라 하면 $q(x)$ 는 연속함수이고 $q(1) = -2 < 0$, $q(2) = e^2 - 3 > 0$ 이므로

사잇값 정리에 의하여 $q(\alpha) = 0$, 즉 $h(\alpha) = 1$ 인 α 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $x = \alpha$ 일 때 $f(x)$ 는 최솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

[문제 5-2]

$(2e^x + \cos x)(2 - e^x \cos x) \neq 0$ 인 경우

$(e^{2x} + 1)(\cos^2 x + 4) = e^{2x} \cos^2 x + 4e^{2x} + \cos^2 x + 4 = (2e^x + \cos x)^2 + (2 - e^x \cos x)^2 > 0$ 이고

$(2e^x + \cos x)(2 - e^x \cos x) = 0$ 인 경우 $f(x) = 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $(2e^x + \cos x)(2 - e^x \cos x) > 0$ 일 때 최댓값을 갖는다. 이때

$\frac{1}{f(x)} = \frac{2e^x + \cos x}{2 - e^x \cos x} + \frac{2 - e^x \cos x}{2e^x + \cos x}$ 이고 $\frac{2e^x + \cos x}{2 - e^x \cos x} > 0$ 이다.

한편, $h(x) = \frac{2e^x + \cos x}{2 - e^x \cos x}$, $p(t) = t + \frac{1}{t}$ ($t > 0$)이라 하면 $\frac{1}{f(x)} = p(h(x))$

$p'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2}$ 이므로 함수 $p(t)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 $t = 1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

따라서, $h(\alpha) = 1$ 인 실수 α 가 존재한다면 함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 최댓값 $\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

한편, 방정식 $h(x) = 1$ 에서 $\frac{2e^x + \cos x}{2 - e^x \cos x} = 1$, $e^x \cos x + 2e^x + \cos x - 2 = 0$ 이므로

$q(x) = e^x \cos x + 2e^x + \cos x - 2$ 라 하면 $q(x)$ 는 연속함수이고

$q(0) = 2 > 0$, $q\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{-\frac{\pi}{2}} - 2 = 2(e^{-\frac{\pi}{2}} - e^0) < 0$ 이므로,

사잇값 정리에 의하여 $q(\alpha) = 0$, 즉 $h(\alpha) = 1$ 인 α 가 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $x = \alpha$ 일 때 $f(x)$ 는 최댓값 $\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

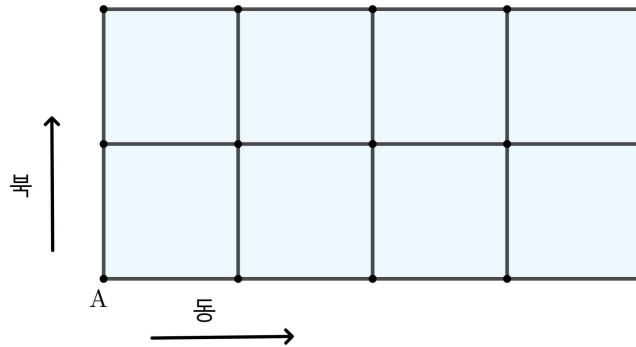
■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

2025학년도 자연계열(수학) · 본시험 + 추가시험

본시험 · 문제 1

[문제 1, 단답형] 아래 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망과 하나의 주머니가 있다. 도로망의 A 지점에 자동차가 있고, 주머니에는 숫자 1, 3, 5가 적힌 공이 각각 1개씩, 숫자 2, 4, 6이 적힌 공이 각각 2개씩 들어있다. 아래 도로망과 이 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.

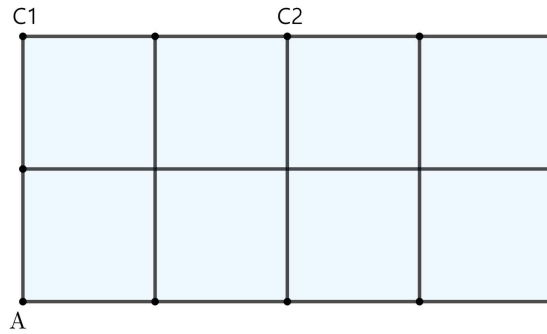


주머니에서 공을 꺼내서 공에 적혀있는 수를 확인한 후 다시 넣는다.
이때, 확인한 수가 홀수이면 북쪽으로, 짝수이면 동쪽으로 자동차를 나온 수만큼 이동시킨다.

위의 시행을 반복하다가 자동차가 동쪽이나 북쪽 경계에 처음으로 도달할 경우, 그곳에서 자동차를 멈추고 시행을 종료한다. 예를 들어, 처음 시행에서 3이 적힌 공을 꺼낸 경우, 북쪽으로 2칸만 이동시킨 후 북쪽 경계에서 자동차를 멈추고 시행을 종료한다. 자동차가 북쪽 경계에 도달하여 시행을 종료하였을 때, 두 번째 시행에서 종료하였을 확률을 구하시오. [10점]

■ 예시 답안

자동차가 북쪽 경계에서 멈추는 경우는 아래 그림에서와 같이 C1, C2에서 멈추는 두 가지의 경우밖에 없다.



(i) C1에서 멈추는 경우

다음 수가 적힌 공이 차례로 나오면 자동차는 C1에서 멈추고 시행을 종료한다.

(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3), (5)

따라서 이 경우의 확률은

$$3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{7}{27}$$

(ii) C2에서 멈추는 경우

다음 수가 적힌 공이 차례로 나오면 자동차는 C2에서 멈추고 시행을 종료한다.

(1, 2, 1), (1, 2, 3), (1, 2, 5), (2, 1, 1), (2, 1, 3), (2, 1, 5), (2, 3), (2, 5)

따라서 이 경우의 확률은

$$6 \times \frac{2}{9} \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{16}{243}$$

(i), (ii)에 의하여 자동차가 북쪽 경계에 도달하여 시행을 종료하였을 확률은

$$\frac{7}{27} + \frac{16}{243} = \frac{79}{243} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

위의 시행을 두 번 하였을 때 자동차가 북쪽 경계에 도달하여 멈추는 경우는 다음 수가 적힌 공이 차례로 나온 경우이다.

(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)

따라서 이 경우의 확률은

$$3 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{7}{81} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡으로부터 구하는 확률은

$$\frac{\frac{7}{81}}{\frac{79}{243}} = \frac{21}{79}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

본시험 · 문제 2

[문제 2, 단답형] $x \geq 1$ 인 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = \int_1^x \frac{t^{2025} + t^{2024} + 1}{t^{2025} + t^{1885} + 1} dt$ 라 할 때, 다음 극한값을 구하시오. [10점]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{10} \frac{f(n+2k) - f(n)}{(k-1)k(k+1)}$$

■ 예시 답안

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[n, n+2k]$ 에서 연속이고 열린구간 $(n, n+2k)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$0 < c_k < 2k$ 인 어떤 c_k 에 대하여 $\frac{f(n+2k) - f(n)}{n+2k - n} = f'(n+c_k)$ 이다.

한편 $f'(x) = \frac{x^{2025} + x^{2024} + 1}{x^{2025} + x^{1885} + 1}$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(n+c_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+c_k)^{2025} + (n+c_k)^{2024} + 1}{(n+c_k)^{2025} + (n+c_k)^{1885} + 1} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{10} \frac{f(n+2k) - f(n)}{(k-1)k(k+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{10} \frac{2f'(n+c_k)}{(k-1)(k+1)} = \sum_{k=2}^{10} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2f'(n+c_k)}{(k-1)(k+1)} = \sum_{k=2}^{10} \frac{2}{(k-1)(k+1)} \\ &= \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{72}{55} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

본시험 · 문제 3

[문제 3, 단답형] 자연수 n 에 대하여 nk 가 2025의 배수가 되도록 하는 자연수 k 중에서 가장 작은 수를 $f(n)$ 이라 하자.

함수 $f(n)$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

3-1 $f(n) = f(n^2)$ 이 되도록 하는 2025 이하의 자연수 n 의 개수를 구하시오. [8점]

3-2 $f(f(n)) < n$ 이 되도록 하는 2025 이하의 자연수 n 의 개수를 구하시오. [7점]

■ 예시 답안

[문제 3-1]

$2025 = 3^4 \times 5^2$ 이므로 다음과 같이 나누어 생각한다.

(i) n 이 2025와 서로소인 경우

n 이 2025와 서로소이면 $f(n) = f(n^2)$ 을 만족시킨다.

2025 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수는 675, 5의 배수의 개수는 405, 15의 배수의 개수는 135이므로
3의 배수 또는 5의 배수인 자연수의 개수는

$$675 + 405 - 135 = 945$$

그러므로 (i)의 경우의 수는 $2025 - 945 = 1080$

(ii) n 이 2025와 서로소가 아닌 경우

n 이 2025와 서로소가 아니면 다음 경우가 $f(n) = f(n^2)$ 을 만족시킨다.

① n 이 3^4 의 배수이지만 5의 배수가 아닌 경우

$$2025 = 3^4 \times 25 \text{이고 } 1 \times 3^4, 2 \times 3^4, \dots, 25 \times 3^4 \text{ 중 5의 배수가 아닌 수의 개수는 } 25 - 5 = 20$$

② n 이 5^2 의 배수이지만 3의 배수가 아닌 경우

$$2025 = 5^2 \times 81 \text{이고 } 1 \times 5^2, 2 \times 5^2, \dots, 81 \times 5^2 \text{ 중 3의 배수가 아닌 수의 개수는 } 81 - 27 = 54$$

③ n 이 3^4 의 배수면서 5^2 의 배수인 경우

$$n = 2025 \text{이므로 개수는 } 1$$

그러므로 (ii)의 경우의 수는 $20 + 54 + 1 = 75$

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는 $1080 + 75 = 1155$

[문제 3-2]

$f(n) \leq 2025$ 이므로 다음과 같이 나누어 생각한다.

(i) n 이 2025의 약수인 경우

$$n \text{이 2025의 약수이면 } f(n) = \frac{2025}{n}, f(f(n)) = f\left(\frac{2025}{n}\right) = n$$

이므로 $f(f(n)) < n$ 을 만족시키지 못한다.

(ii) n 이 2025의 약수가 아닌 경우

$$n = m \times 3^k \times 5^l \text{이라 하자.}$$

(단, $k = 0, 1, 2, 3, 4, l = 0, 1, 2$ 이고 m 은 15와 서로소인 2 이상인 자연수)

$$f(n) = 3^{4-k} \times 5^{2-l}, f(f(n)) = f(3^{4-k} \times 5^{2-l}) = 3^k \times 5^l = \frac{n}{m} < n$$

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는 $2025 - (\text{2025의 약수의 개수}) = 2025 - 15 = 2010$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

본시험 · 문제 4

[문제 4, 단답형] 2 이상의 자연수 α 에 대하여 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 일반항이 다음과 같다.

$$a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}, \quad b_n = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

다음 물음에 답하시오.

4-1 다음 수열의 극한값을 구하시오. [5점]

$$\{n(3n+1)^3 a_n^2\}$$

4-2 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p b_n = L (L \neq 0)$ 일 때, $p+L$ 을 α 에 관한 식으로 나타내시오. [10점]

■ 예시 답안

$c_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ 이라고 하면 $c_n = \begin{cases} a_n & (\alpha = 1) \\ b_n & (\alpha \neq 1) \end{cases}$ 이 성립한다. 먼저 다음 부등식이 성립함을 보이자.

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+2)^\alpha} \right\} \leq c_n \leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right\}$$

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ 라고 하자. 이때 구간 $(0, \infty)$ 에서 함수 f 는 감소하고, 아래로 볼록하다.

세 점 $(n+1, f(n+1))$, $(n+1, f(n+2))$, $(n+2, f(n+2))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+2)^\alpha} \right\}$$

이다. 평균값 정리에 의하여 $0 < \theta < 1$ 인 어떤 θ 에 대하여 다음이 성립한다.

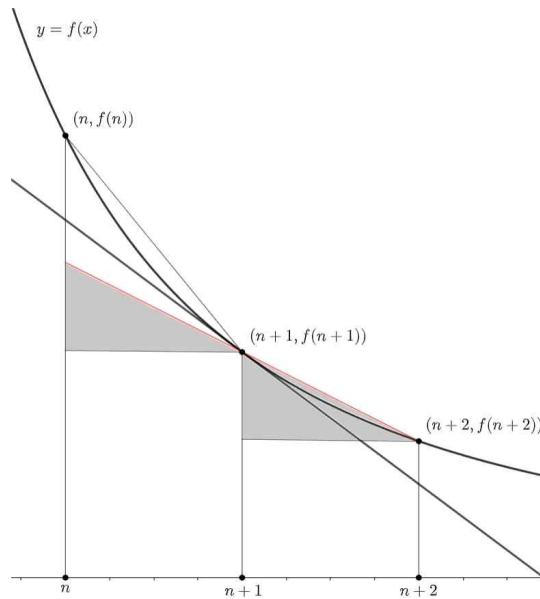
$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+2)^\alpha} = \frac{(n+2)^\alpha - (n+1)^\alpha}{(n+1)^\alpha(n+2)^\alpha} = \frac{\alpha(n+1+\theta)^{\alpha-1}}{(n+1)^\alpha(n+2)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}}$$

즉,

$$\frac{1}{(n+2)^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geq -\frac{\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}} = f'(n+1)$$

이므로 $\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+2)^\alpha} \right\} \leq c_n$ 이다.(아래 그림 참고.) 한편 c_n 은 세 점 $(n, f(n))$, $(n, f(n+1))$, $(n+1, f(n+1))$ 이 이루는 삼각형의 넓이보다 작다. 따라서 다음 부등식을 얻는다.

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+2)^\alpha} \right\} \leq c_n \leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right\}$$



[문제 4-1]

$\alpha = 1$ 이면

$$\frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq a_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{n(3n+1)^3}{4(n+1)^2(n+2)^2} \leq n(3n+1)^3 a_n^2 \leq \frac{n(3n+1)^3}{4n^2(n+1)^2}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(3n+1)^3 a_n^2 = \frac{27}{4}$$

[문제 4-2]

평균값 정리에 의하여 $0 < \theta < 1$ 인 어떤 θ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+2)^\alpha} = \frac{\alpha(n+1+\theta)^{\alpha-1}}{(n+1)^\alpha(n+2)^\alpha} \geq \frac{\alpha}{(n+2)^{\alpha+1}}$$

같은 방식으로 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

따라서

$$\frac{\alpha}{2} \frac{n^{p-(\alpha+1)}}{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\alpha+1}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha n^p}{(n+2)^{\alpha+1}} \leq n^p b_n \leq \frac{1}{2} \frac{\alpha n^p}{n^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{2} n^{p-(\alpha+1)}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 수열 $\{n^p b_n\}$ 의 극한이 0이 아니기 위해서는 $p = \alpha + 1$ 이어야 하고 이때의 극한값은 $L = \frac{\alpha}{2}$ 이다. 그러므로 $p + L = \frac{3\alpha}{2} + 1$ 이다.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

본시험 · 문제 5

[문제 5, 서술형] 수열 $\{x_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오.

제시문

(I) $x_1 = k$ (단, k 는 자연수)

(II) 모든 자연수 n 에 대하여 x_{n+1} 은 곡선 $y = x^2$ 위의 점 (x_n, x_n^2) 에서의 접선의 x 절편이다.

5-1 $a_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 이라고 할 때, a_{2025} 의 값을 구하시오. [5점]

5-2 [문제 5-1]에서 주어진 a_k 에 대하여 곡선 $y = x^2$ 위의 점 (a_k, a_k^2) 에서의 접선을 l 이라 하자. 점 (a_k, a_k^2) 을 지나고 직선 l 에 수직인 직선의 x 절편을 b_k 라고 할 때, 다음 극한값을 구하시오. [15점]

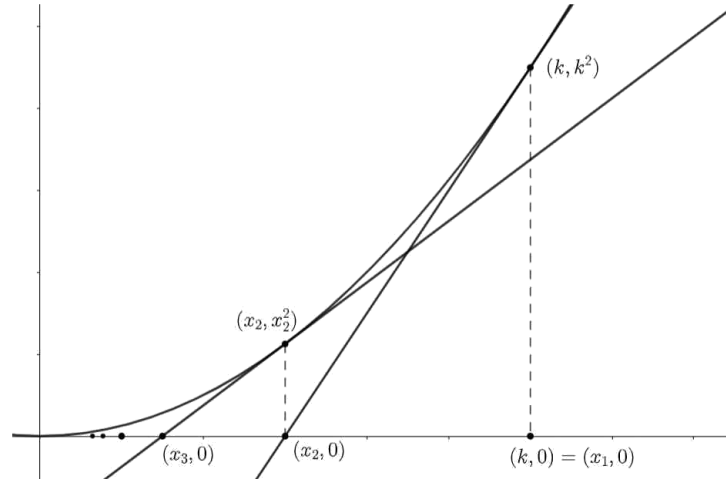
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{a_1^3}{b_m - a_m} + 1 \right)^{\frac{a_1^2}{m^3}} \times \left(\frac{a_2^3}{b_m - a_m} + 1 \right)^{\frac{a_2^2}{m^3}} \times \cdots \times \left(\frac{a_m^3}{b_m - a_m} + 1 \right)^{\frac{a_m^2}{m^3}} \right\}$$

■ 예시 답안

[문제 5-1]

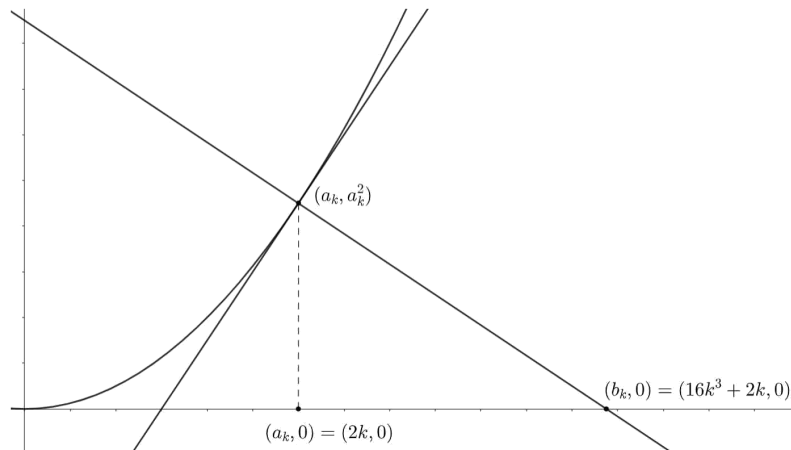
$f(x) = x^2$ 이라 하자. (x_n, x_n^2) 에서 곡선 $y = x^2$ 에 접하는 직선의 방정식은 $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ 이다. $f'(x) = 2x$ 이므로 $x_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n$ 에서 $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$ 이다. 수열 $\{x_n\}$ 은 첫째항이 k 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{k}{1 - \frac{1}{2}} = 2k \text{이다. 따라서 } a_{2025} = 4050$$



[문제 5-2]

주어진 l 에 수직인 직선의 방정식은 $y = -\frac{1}{4k}(x - 2k) + 4k^2$ 이므로 $b_k = 16k^3 + 2k$ 이다.



$$c_m = \left(\frac{a_1^3}{b_m - a_m} + 1\right)^{\frac{a_1^2}{m^3}} \times \left(\frac{a_2^3}{b_m - a_m} + 1\right)^{\frac{a_2^2}{m^3}} \times \cdots \times \left(\frac{a_m^3}{b_m - a_m} + 1\right)^{\frac{a_m^2}{m^3}} \text{이라 하자.}$$

$b_m - a_m = 16m^3$ 이므로

$$c_m = \left(\frac{1^3}{2 \times m^3} + 1\right)^{\frac{4 \times 1^2}{m^3}} \times \left(\frac{2^3}{2 \times m^3} + 1\right)^{\frac{4 \times 2^2}{m^3}} \times \left(\frac{3^3}{2 \times m^3} + 1\right)^{\frac{4 \times 3^2}{m^3}} \times \cdots \times \left(\frac{m^3}{2 \times m^3} + 1\right)^{\frac{4 \times m^2}{m^3}}$$

$\lim_{m \rightarrow \infty} c_m = \alpha$ 라 하자.

$$\ln c_m = \sum_{k=1}^m \frac{4k^2}{m^3} \ln \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m}\right)^3 + 1 \right\} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \ln c_m &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{4k^2}{m^3} \ln \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{k}{m} \right)^3 + 1 \right\} \\ &= \int_0^1 4x^2 \ln \left(\frac{x^3}{2} + 1 \right) dx = 4 \ln \frac{3}{2} - \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\ln \alpha = 4 \ln \frac{3}{2} - \frac{4}{3} \text{ 이므로 } \alpha = e^{4 \ln \frac{3}{2} - \frac{4}{3}} = \frac{81}{16} e^{-\frac{4}{3}}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

본시험 · 문제 6

[문제 6, 서술형] 좌표평면 위의 점 $A(-2, 0)$ 에 대하여 두 점 P, Q 가 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오.

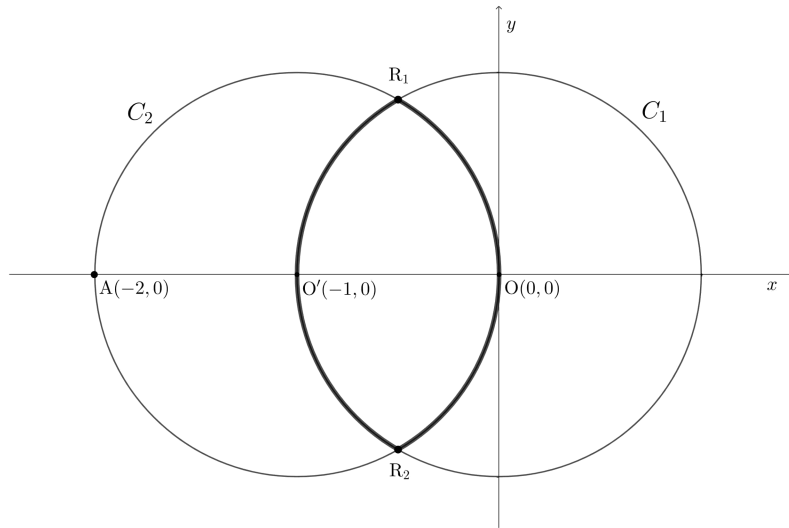
제시문

(I) $\overrightarrow{AP}$ 과 $\overrightarrow{AQ}$ 는 서로 평행하다.

(II) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 9$

6-1 점 P 가 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직이는 점일 때, 점 Q 가 나타내는 도형의 식을 구하시오. [15점]

6-2 아래 그림과 같이 두 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 1, C_2 : (x+1)^2 + y^2 = 1$ 의 서로 다른 두 교점을 R_1, R_2 라 하자. 원 C_1 에서 점 $O'(-1, 0)$ 을 포함하는 호 $R_1O'R_2$ 와 원 C_2 에서 점 $O(0, 0)$ 을 포함하는 호 R_1OR_2 로 이루어진 도형을 R (아래 그림에서 굵게 표시된 도형)이라 하자. 점 P 가 도형 R 위를 움직이는 점일 때, 점 Q 가 나타내는 도형의 길이를 구하시오. [15점]



■ 예시 답안

[문제 6-1]

P가 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때 Q가 나타내는 도형을 생각해보자. $P(\cos \theta, \sin \theta)$ 라고 하면 직선 AP의 방정식은 $y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 2}(x + 2)$ 이다. 두 조건 (I), (II)에서 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ 는 방향이 같은 벡터이므로 점 Q의 좌표를 $t(t \geq -2)$ 라 하면 $Q\left(t, \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 2}(t + 2)\right)$ 에 대하여 다음을 구할 수 있다.

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(\cos \theta + 2)^2 + (\sin \theta)^2},$$

$$|\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{(t + 2)^2 + \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta + 2}\right)^2 (t + 2)^2} = (t + 2) \times \frac{\sqrt{(\cos \theta + 2)^2 + (\sin \theta)^2}}{\cos \theta + 2}$$

조건 (II)에서 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = (t + 2) \times \frac{(\cos \theta + 2)^2 + (\sin \theta)^2}{\cos \theta + 2} = 9$ 이고

$$t = \frac{9(\cos \theta + 2)}{(\cos \theta + 2)^2 + (\sin \theta)^2} - 2 = \frac{8 + \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} \text{이므로}$$

$$Q\left(\frac{8 + \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta}, \frac{9 \sin \theta}{5 + 4 \cos \theta}\right) \text{이다.}$$

점 Q의 좌표를 $Q(X, Y)$ 라고 하면 $X = \frac{8 + \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta}$, $Y = \frac{9 \sin \theta}{5 + 4 \cos \theta}$ 이고

$$\cos \theta = \frac{8 - 5X}{4X - 1}, \quad \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{72X - 63 - 9X^2}}{4X - 1}$$

$$Y = \frac{9 \sin \theta}{5 + 4 \cos \theta} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{72X - 63 - 9X^2} \text{이므로 } (X - 4)^2 + Y^2 = 9 \text{이다.}$$

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 식은 $(x - 4)^2 + y^2 = 9$ 이다.

[문제 6-2]

(i) 점 P가 호 R_1OR_2 위의 점인 경우

$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ 인 θ 에 대하여 $P(\cos \theta - 1, \sin \theta)$ 라고 하면 [문제 6-1]의 풀이와 같이 $Q\left(t, \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \times (t + 2)\right)$ 에 대해 주어진 조건 (II)를 이용하여 다음을 얻는다.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \sqrt{(\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta} \times (t + 2) \times \frac{\sqrt{(\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta}}{\cos \theta + 1} = 2(t + 2) = 9$$

$t = \frac{5}{2}$ 이므로 원 $C_3 : (x - 4)^2 + y^2 = 9$ 와 직선 $x = \frac{5}{2}$ 의 두 교점을 M, N이라 할 때, 점 Q가 나타내는 도형은 선분 MN이다.

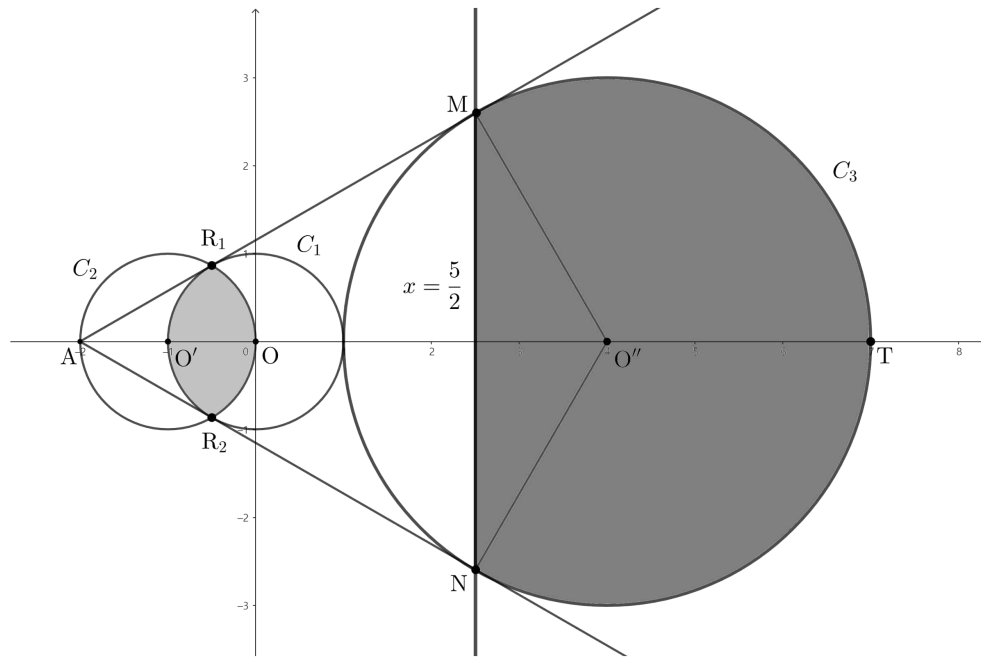
(ii) 점 P가 호 $R_1O'R_2$ 위의 점인 경우

[문제 6-1]의 풀이와 같이 생각하면 점 $T(7, 0)$ 에 대하여 [문제 6-2]의 조건을 만족하는 점 Q가 나타내는 도형은 중심각의 크기가 $\frac{4}{3}\pi$ 이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴의 호 MTN이다.

(i), (ii)에 의하여 점 Q가 나타내는 도형은 선분 MN과 호 MTN으로 이루어진 도형이다. 점 M, N을 구하면 $M\left(\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(\frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 이 된다. 따라서 점 Q가 이루는 도형의 길이는 선분 MN의 길이와 호 MTN의 길이의 합이므로

$$2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{4}{3}\pi = 3\sqrt{3} + 4\pi$$

이다.



■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

추가시험 · 문제 1

[문제 1] 1부터 30까지의 자연수가 하나씩 적힌 30장의 카드가 들어 있는 주머니가 하나 있다. 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후, 꺼낸 카드를 넣지 않고 주머니에서 다시 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한다. 첫 번째로 꺼낸 카드에 적힌 수를 m , 두 번째로 꺼낸 카드에 적힌 수를 n 이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

1-1 확률변수 $X = \int_1^e \{m - n(\ln x)^2\} dx$ 에 대하여 $E(X)$ 의 값을 구하시오. [10점]

1-2 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 확률변수 Y 라 할 때, $E\left(\frac{2Y+1}{3^7}\right)$ 의 값을 구하시오. [20점]

제시문

(I) $xyz = \frac{30!}{mn}$

(II) $x > y > z$

(III) x 와 y , y 와 z , z 와 x 는 각각 서로소이다.

■ 예시 답안

[문제 1-1]

$$\begin{aligned}\int_1^e \{m - n(\ln x)^2\} dx &= m(e-1) - n \int_1^e (\ln x)^2 dx \\ &= m(e-1) - n [x(\ln x)^2]_1^e + 2n \int_1^e \ln x dx \\ &= m(e-1) - n(e-2)\end{aligned}$$

이고, 30 이하의 두 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수가 $30 \times 29 = 870$ 이므로 $E(X)$ 는 두 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 에 대응하는 $m(e-1) - n(e-2)$ 의 값을 모두 더한 뒤 870으로 나눈 값과 같다. 따라서

$$E(X) = \frac{1}{870} \left\{ (e-1) \sum_{k=1}^{30} 29k - (e-2) \sum_{k=1}^{30} 29k \right\} = \frac{1}{870} \times \sum_{k=1}^{30} 29k = \frac{31}{2}$$

(30 이하의 두 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는 870이고, m 과 n 이 취할 수 있는 값은 30 이하의 자연수 30개이므로 m 의 자리에 30 이하의 각 자연수는 $870 \div 30 = 29$ 번씩 사용되었고, n 또한 마찬가지이다.)

[문제 1-2]

m 과 n 은 서로 다른 30이하의 자연수이므로 $\frac{30!}{mn}$ 은 자연수이다. $\frac{30!}{mn}$ 을 소인수분해하면 $\frac{30!}{mn} = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ (단, k 는 자연수이고, k 이하의 자연수 i 에 대하여 p_i 는 소수이며, i 와 다른 k 이하의 자연수 j 에 대하여 $p_i \neq p_j$ 이고 a_i 는 자연수) 라 하자.

자연수 순서쌍들로 이루어진 두 집합 A, B 를 각각

$$A = \left\{ (x, y, z) \mid x > y > z \text{ 이고 } xyz = \frac{30!}{mn} \text{ 이며 } x \text{와 } y, y \text{와 } z, z \text{와 } x \text{는 각각 서로소} \right\}$$

$$B = \left\{ (x, y, z) \mid xyz = \frac{30!}{mn} \text{ 이며 } x \text{와 } y, y \text{와 } z, z \text{와 } x \text{는 각각 서로소} \right\}$$

라 하면 $(x, y, z) \in B$ 이고 p_i 가 x 의 약수인 경우, x 와 y, z 와 x 는 각각 서로소이므로 p_i 는 나머지 두 수 y, z 의 약수가 될 수 없으므로 $p_i^{a_i}$ 는 x 의 약수가 된다.

따라서 k 이하의 각 자연수 i 에 대하여 $p_i^{a_i}$ 는 세 수 x, y, z 중 단 하나의 수의 약수가 되므로 $n(B) = 3^k$ 이다.

한편, $B' = B - \left\{ \left(1, 1, \frac{30!}{mn}\right), \left(1, \frac{30!}{mn}, 1\right), \left(\frac{30!}{mn}, 1, 1\right) \right\}$ 이라 하면 $(a, b, c) \in B'$ 일 때 $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ 이고 집합 A 의 각 원소 (x, y, z) 에 대하여 세 수 x, y, z 를 일렬로 나열하는 경우의 수는 3!이므로

$$n(A) = \frac{n(B')}{3!} = \frac{n(B) - 3}{6} = \frac{3^k - 3}{6} \quad \left(\text{단, } k \text{는 } \frac{30!}{mn} \text{의 서로 다른 소인수의 개수} \right) \cdots (*)$$

30!을 소인수분해하면

$$30! = 2^{26} \times 3^{14} \times 5^7 \times 7^4 \times 11^2 \times 13^2 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29$$

이므로 30!의 서로 다른 소인수의 개수는 10개다. 따라서 위의 (*)에 의하여

① $\frac{30!}{mn}$ 의 서로 다른 소인수의 개수가 8개일 확률은

$$\frac{4 \times 3}{30 \times 29} = \frac{6}{435}$$

② $\frac{30!}{mn}$ 의 서로 다른 소인수의 개수가 9개일 확률은

$$\frac{2 \times 4 \times 26 + 2 \times 2}{30 \times 29} = \frac{106}{435}$$

③ $\frac{30!}{mn}$ 의 서로 다른 소인수의 개수가 10개일 확률은

$$1 - \frac{6}{435} - \frac{106}{435} = \frac{323}{435}$$

①, ②, ③에 의하여 $P\left(Y = \frac{3^8 - 3}{6}\right) = \frac{6}{435}$, $P\left(Y = \frac{3^9 - 3}{6}\right) = \frac{106}{435}$, $P\left(Y = \frac{3^{10} - 3}{6}\right) = \frac{323}{435}$ 이므로

$$P\left(\frac{2Y+1}{3^7} = 1\right) = \frac{6}{435}, \quad P\left(\frac{2Y+1}{3^7} = 3\right) = \frac{106}{435}, \quad P\left(\frac{2Y+1}{3^7} = 3^2\right) = \frac{323}{435}$$

따라서 $E\left(\frac{2Y+1}{2187}\right) = \frac{1 \times 6 + 3 \times 106 + 3^2 \times 323}{435} = \frac{3231}{435} = \frac{1077}{145}$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

추가시험 · 문제 2

[문제 2] 아래의 [문제 2-1], [문제 2-2]에서 주어진 함수 $f(x)$ 는 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하고 $f'(x) \neq 0$ 이다. 이때 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P 에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 를 만족시키는 점 Q 의 x 좌표, y 좌표를 각각 X, Y 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, O 는 원점이다.)

2-1 두 양수 a, b 에 대하여 $f(x) = \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ ($0 < x < a$)일 때, XY 의 최댓값을 구하시오. [15점]

2-2 구간 $(0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다. (단, 구간 $(0, \infty)$ 에서 $f(x) > 0$ 이다.)

제시문

(I) $f(1) = 3$

(II) 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 P 에 대하여 $XY = c$ (c 는 상수)이다.

함수 $\{f(x)\}^2 + \frac{1}{f(x)}$ 이 $x = k$ 에서 최솟값을 가질 때, 실수 k 의 값을 구하시오. [15점]

■ 예시 답안

[문제 2-1]

P를 $P(\alpha, f(\alpha))$ 라 하면 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P에서의 접선은 $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$ 이며 점 A의 x 좌표는 $-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \alpha$, 점 B의 y 좌표는 $-\alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$ 이다.

따라서 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 에서 $X = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $Y = -\alpha f'(\alpha)$ 이며 $XY = \alpha f(\alpha)$ 이다.

$f(x) = \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$ 이므로 $F(x) = xf(x) = x\sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = bx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ 라 하면

$$F'(x) = \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right)$$

따라서 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 일 때, $F'(x) = 0$ 이고 이때 $F(x)$ 가 최댓값을 갖는다.

따라서 XY 는 최댓값 $F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = \frac{ab}{2}$ 를 갖는다.

[문제 2-2]

P($\alpha, f(\alpha)$)라 하면 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 ($\alpha, f(\alpha)$)에서의 접선은 $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$ 이며 점 A의 x 좌표는 $-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \alpha$, 점 B의 y 좌표는 $-\alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$ 이다.

따라서 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 에서 $X = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $Y = -\alpha f'(\alpha)$ 이고

$XY = \alpha f(\alpha)$ 는 α 의 값과 무관하게 상수 c 가 되는데, $XY = 1 \times f(1) = 3$ 이므로 $c = 3$ 이다.

따라서 $f(x) = \frac{3}{x} (x > 0)$

$h(x) = \{f(x)\}^2 + \frac{1}{f(x)}$ 로 놓으면, $h(x) = \frac{9}{x^2} + \frac{x}{3}$, $h'(x) = \frac{x^3 - 54}{3x^3}$ 이고,

$h(x)$ 는 $x = \sqrt[3]{54}$ 에서 최솟값을 가지므로 $k = \sqrt[3]{54}$ 이다.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

추가시험 · 문제 3

[문제 3] 아래의 [문제 3-1], [문제 3-2], [문제 3-3]에서 주어진 함수 $f(t), g(t)$ 는 각각 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수이다. 실수 t 에 대하여 점 P 를 $P(f(t), g(t))$, 점 P' 을 $P'(f'(t), g'(t))$ 라 할 때, 세 점 Q, R, S 가 다음 조건을 만족시킨다. (단, O 는 원점이다.)

(I) $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} < 0, a|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}|$ (단, a 는 1보다 큰 실수이다.)

(II) $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{OP'} = 0, \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} > 0, |\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PQ}|$

(III) $\overrightarrow{PR} \parallel \overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} < 0, b|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PS}|$ (단, b 는 양의 실수이다.)

다음 물음에 답하시오.

- 3-1** $a = 2, b = 5$ 이고 $f(t) = t, g(t) = 4 - 2t$ 일 때, $\int_0^2 (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PS})^2 dt$ 의 값을 구하시오. [10점]
- 3-2** $a = 5$ 이고 $f(t) = 2 \cos t, g(t) = \sin t$ 일 때, 점 $T(0, 1)$ 에 대하여 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $(\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{PR})^2$ 의 최댓값을 구하시오. [15점]
- 3-3** $a > 2$ 이고 모든 실수 t 에 대하여 $f(t)g(t) = 1, f(t) > a, f'(t) > 0$ 일 때, 모든 실수 t 에 대하여 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} > 0$ 임을 보이시오. [15점]

■ 예시 답안

[문제 3-1]

$$\overrightarrow{OP} = (t, 4-2t), \overrightarrow{OP'} = (1, -2)$$

$$a = 2 \text{이므로 조건 (I)에서 } \overrightarrow{PQ} = -2\overrightarrow{OP} = (-2t, 4t-8)$$

조건 (II)에서 $\overrightarrow{PR} = \alpha(2, 1)$ (α 는 실수)이므로 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = -8\alpha > 0$ 이므로 $\alpha < 0$ 이다.

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}| \text{이므로 } 2\sqrt{5t^2 - 16t + 16} = -\alpha\sqrt{5} \text{에서 } \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5t^2 - 16t + 16}$$

$$\text{조건 (III)에서 } \overrightarrow{PS} = -5\overrightarrow{PR} = -5\alpha(2, 1)$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PS} = -20\alpha, (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PS})^2 = 320(5t^2 - 16t + 16) \text{이므로}$$

$$\int_0^2 (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PS})^2 dt = 320 \int_0^2 (5t^2 - 16t + 16) dt = \frac{12800}{3}$$

이다.

[문제 3-2]

$$\overrightarrow{OP} = (2\cos t, \sin t), \overrightarrow{OP'} = (-2\sin t, \cos t), \overrightarrow{OT} = (0, 1)$$

$$a = 5 \text{이므로 조건 (I)에서 } \overrightarrow{PQ} = -5\overrightarrow{OP} = (-10\cos t, -5\sin t)$$

조건 (II)에서 $\overrightarrow{PR} = \alpha(\cos t, 2\sin t)$ (α 는 실수)이므로 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = -10\alpha > 0$ 이므로 $\alpha < 0$ 이다.

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}| \text{이므로 } 5\sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t} = -\alpha\sqrt{\cos^2 t + 4\sin^2 t} \text{에서 } \alpha = -5\sqrt{\frac{4-3\sin^2 t}{1+3\sin^2 t}}$$

따라서

$$\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{PR} = \alpha(0, 1) \cdot (\cos t, 2\sin t) = 2\alpha \sin t, (\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{PR})^2 = 4\alpha^2 \sin^2 t = 100 \times \frac{4\sin^2 t - 3\sin^4 t}{1+3\sin^2 t}$$

$$\sin^2 t = s \ (0 \leq s \leq 1), h(s) = \frac{4s-3s^2}{1+3s} \text{이라 하면 } h'(s) = -\frac{9s^2+6s-4}{(3s+1)^2} \text{이므로}$$

$$h(s) \text{는 } s = \frac{-1+\sqrt{5}}{3} \text{에서 최댓값을 갖고, } h\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{3} = \frac{6-2\sqrt{5}}{3} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{에서 } (\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{PR})^2 \text{의 최댓값은 } \frac{200}{3}(3-\sqrt{5}) \text{이다.}$$

[문제 3-3]

$$\overrightarrow{OP} = (f(t), g(t)), \overrightarrow{OP'} = (f'(t), g'(t)) \text{이고 } g(t) = \frac{1}{f(t)}, g'(t) = -\frac{f'(t)}{\{f(t)\}^2}$$

$$a > 2 \text{이므로 조건 (I)에서 } \overrightarrow{PQ} = -a\overrightarrow{OP} = (-af(t), -ag(t))$$

$$\text{조건 (II)에서 } \overrightarrow{PR} = \alpha(g'(t), -f'(t)) \ (\alpha \text{는 실수})$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = a\alpha\{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)\} = 2a\alpha\frac{f'(t)}{f(t)} > 0 \text{이므로 } \alpha > 0$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}| \text{이므로 } a\sqrt{\{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2} = \alpha\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} \text{에서}$$

$$\alpha = a\sqrt{\frac{\{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2}{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}} = a\sqrt{\frac{\{f(t)\}^2 \left(1 + \frac{1}{\{f(t)\}^4}\right)}{\{f'(t)\}^2 \left(1 + \frac{1}{\{f(t)\}^4}\right)}} = a\frac{f(t)}{f'(t)}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}) \\
&= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PR} \\
&= |\overrightarrow{OP}|^2 + \alpha\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} \\
&= \{f(t)\}^2 + \frac{1}{\{f(t)\}^2} - 2\alpha \frac{f'(t)}{f(t)} \\
&= \{f(t)\}^2 + \frac{1}{\{f(t)\}^2} - 2a \\
&> \{f(t)\}^2 - 2a > a^2 - 2a > 0 \quad (\because f(t) > a > 2)
\end{aligned}$$

이므로 모든 실수 t 에 대하여 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR} > 0$ 이다.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

2024학년도 자연계열(수학 + 과학 택1)

수학 · 문제 1

[문제 1] 좌표평면에서 오른쪽(x 축 양의 방향) 또는 위쪽(y 축 양의 방향)으로만 움직이며 x 좌표와 y 좌표가 모두 음이 아닌 정수로 이루어진 점에서만 방향 전환을 하는 로봇이 있다. 다음 물음에 답하시오.

- 1-1** 로봇이 원점에서 오른쪽으로 출발하여 점 $(21, 21)$ 까지 움직일 때, 방향 전환을 정확히 5번 거쳐 갈 수 있는 경로의 수를 구하시오. 단, 원점에서는 방향 전환이 일어나지 않는다고 가정한다. **[5점]**
- 1-2** 원점을 중심으로 하고 반지름이 58인 원 모양 테두리를 설정하자. 로봇은 원점을 출발하여 테두리에 닿는 즉시 멈춘다. 로봇이 멈출 때까지 움직인 거리의 최댓값을 구하시오. 단, 로봇은 한 점으로 간주한다. **[10점]**

■ 예시 답안

문제 1-1

로봇이 원점에서 점 $(21, 21)$ 까지 가기 위해서는 x 축의 방향으로 21만큼, y 축의 방향으로 21만큼 평행이동해야 한다. 첫 방향 전환 전에 x 축의 방향으로 x_1 만큼, 첫 번째와 두 번째 방향 전환 사이 y 축의 방향으로 y_1 만큼 이동한다. 같은 방식으로 x_2, y_2, x_3, y_3 을 정의하자. 5번의 방향 전환을 거쳐서 점 $(21, 21)$ 에 도착해야 하므로 두 방정식

$$x_1 + x_2 + x_3 = 21, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 21$$

이 각각 성립한다. 이때 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ 은 모두 양의 정수이므로 구하는 경로의 수는 $({}^3H_{18})^2 = ({}^{20}C_2)^2 = 36100$

문제 1-2

$0 \leq x \leq 58, 0 \leq y \leq 58$ 인 두 실수 x, y 에 대하여 로봇이 점 (x, y) 에서 멈추었다고 하면 $x^2 + y^2 = 58^2$ 이고 그때까지 움직인 거리는 $x + y = x + \sqrt{58^2 - x^2}$ 임을 알 수 있다. 함수 $f(x) = x + \sqrt{58^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq 58$)라 하면 도함수 $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{58^2 - x^2}}$ 이 되므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(0, 29\sqrt{2})$ 에서 증가하고 열린구간 $(29\sqrt{2}, 58)$ 에서 감소한다. 그런데 로봇은 x 좌표와 y 좌표가 모두 음이 아닌 정수로 이루어진 점에서만 방향을 전환하므로 로봇이 멈췄을 때 x 좌표 또는 y 좌표가 정수이다. 그러나 대칭성에 의해 x 좌표가 정수인 경우만 고려해도 충분하다.

$41 < 29\sqrt{2} < 42$ 이고 $f(41) = 41 + 3\sqrt{187}, f(42) = 82$ 이므로 $f(42) < f(41)$ 따라서 구하는 거리의 최댓값은 $f(41) = 41 + 3\sqrt{187}$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

수학 · 문제 2

[문제 2] 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = n!$ 이다. 모든 항이 자연수인 두 수열 $\{b_n\}, \{c_n\}$ 은 1보다 큰 모든 자연수 n 에 대하여 아래의 성질을 만족시킨다.

- (가) b_n 의 모든 소인수는 n 이하이다.
 (나) $3 \log_2 n \leq c_n \leq 4 \log_2 n$
 (다) b_n 은 $a_n^{c_n}$ 의 약수가 아니다.

다음 수열의 수렴 및 발산을 조사하고 수렴한다면 극한값을 구하시오.

2-1 $\left\{ \frac{1}{n} \ln a_{2n} - \frac{1}{n} \ln a_n - \ln 2n \right\}$ [5점]

2-2 $\left\{ \frac{b_n}{n^2} \right\}$ [10점]

■ 예시 답안

문제 2-1

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} \ln a_{2n} - \frac{1}{n} \ln a_n - \ln 2n &= \frac{1}{n} \ln \frac{a_{2n}}{a_n} - \ln 2n \\
 &= \frac{1}{n} \ln \frac{(2n)!}{n!} - \ln 2n \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) - \ln 2n \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{\ln(n+k) - \ln 2n\}
 \end{aligned}$$

따라서 정적분과 급수와의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln a_{2n} - \frac{1}{n} \ln a_n - \ln 2n \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{\ln(n+k) - \ln 2n\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2n} \right) = \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} \right) dx = -1 + \ln 2
 \end{aligned}$$

문제 2-2

주어진 조건 (가), (다)에 의하여 각 소인수가 n 이하인 b_n 이 $a_n^{c_n}$ 의 약수가 아니므로 적어도 하나의 소인수 p_n 이 존재하여 $p_n^{c_n+1}$ 이 b_n 의 약수이다. 따라서 조건 (나)에 의하여

$$b_n \geq p_n^{c_n+1} > p_n^{3 \log_2 n} \geq 2^{3 \log_2 n} = n^3 \text{이다.}$$

$$\text{그러므로 } \frac{b_n}{n^2} > \frac{n^3}{n^2} = n \text{이다.}$$

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = \infty$ 이다.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

수학 · 문제 3

[문제 3] 0을 제외하고 -20 부터 20 까지 40 개의 정수가 하나씩 적혀 있는 40 장의 카드들을 두 장씩 짝지어 20 쌍을 만들었다. 이 중 임의로 고른 하나의 쌍에서 두 카드에 적힌 숫자의 합을 확률변수 X 라 하자. 다음 물음에 답하시오.

- 3-1** 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 의 값을 구하고, 그 값이 20 쌍을 만드는 방법과 상관없이 일정함을 보이시오. **[5점]**
- 3-2** 확률변수 X 의 분산 $V(X)$ 의 값이 최대가 되도록 20 쌍을 만드는 방법을 찾고, 이때의 $V(X)$ 의 값을 구하시오. **[10점]**

■ 예시 답안

문제 3-1

20개의 카드쌍에 적힌 숫자를 각각 (a_i, b_i) (i 는 $1 \leq i \leq 20$ 인 자연수)라 하자.

20개의 카드쌍 중 임의로 한 개의 카드쌍을 고를 확률은 $\frac{1}{20}$ 이므로

$$E(X) = \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{20} (a_i + b_i) = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (a_i + b_i)$$

$$\sum_{i=1}^{20} (a_i + b_i) = 0 \text{이므로 } E(X) = \frac{1}{20} \times 0 = 0$$

따라서 a_i, b_i 의 선택과 상관없이 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 의 값은 0이다.

문제 3-2

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = E(X^2)$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{20} \times (a_i + b_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{20} \times (a_i^2 + b_i^2 + 2a_i b_i) \\ &= \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (a_i^2 + b_i^2) + \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{20} a_i b_i \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

㉠에서 $\sum_{i=1}^{20} (a_i^2 + b_i^2)$ 의 값은 카드를 두 장씩 짝짓는 방법에 상관없이 일정하므로 $\sum_{i=1}^{20} a_i b_i$ 의 값이 최대가 될 때, $V(X)$ 의 값이 최대가 된다.

$\sum_{i=1}^{20} a_i b_i$ 의 값이 최대가 되도록 하는 카드쌍 T 에 대하여

$a_1 = 20, b_1 = x, a_2 = 19, b_2 = y$ ($-20 \leq x \leq 18, -20 \leq y \leq 18$)이라 가정하면

$$\sum_{i=1}^{20} a_i b_i = (20x + 19y) + \sum_{i=3}^{20} a_i b_i \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

이때 위의 카드쌍 T 에서 $a_1 = 20, b_1 = 19, a_2 = x, b_2 = y$ 가 되도록 바꾼 카드쌍 S 에 대하여

$$\sum_{i=1}^{20} a_i b_i = (20 \times 19 + xy) + \sum_{i=3}^{20} a_i b_i \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉢} - \textcircled{㉡}$$

$$= xy - 20x - 19y + 20 \times 19$$

$$= (x - 19)(y - 20) > 0$$

이는 카드쌍 T 에 대하여 $\sum_{i=1}^{20} a_i b_i$ 의 값이 최대라는 것에 모순이므로 $\sum_{i=1}^{20} a_i b_i$ 의 값이 최대가 되는 카드쌍에서 20과 19가 쌍을 이룸을 알 수 있다. 이와 같은 과정을 반복하면 $(20, 19), (18, 17), \dots, (2, 1), (-1, -2), \dots, (-17, -18), (-19, -20)$ 과 같이 20쌍을 만들 때, $\sum_{i=1}^{20} a_i b_i$ 의 값이 최대라는 것, 즉 $V(X)$ 의 값이 최대임을 알 수 있다. 따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{20} \times 2 \times (39^2 + 35^2 + \dots + 3^2) \\ &= \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} (4k - 1)^2 \\ &= \frac{1}{10} \left(\sum_{k=1}^{10} 16k^2 - \sum_{k=1}^{10} 8k + 10 \right) = 573 \end{aligned}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

수학 · 문제 4

[문제 4] 좌표평면 위의 점 P 와 평면벡터 $\vec{v}$ 에 대하여, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$ ($t \geq 0$)을 만족하는 점 Q 가 그리는 반직선을 생각하자. 네 점 $P_1(6, 4)$, $P_2(1, 5)$, $P_3(0, 3)$, $P_4(0, -1)$ 과 네 벡터 $\vec{v}_1 = (-1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, -1)$, $\vec{v}_3 = (1, -1)$, $\vec{v}_4 = (1, 1)$ 에 대하여

$$\overrightarrow{OQ_i} = \overrightarrow{OP_i} + t\vec{v}_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

를 만족시키는 점 Q_i 가 그리는 반직선 l_i 가 주어져 있다. 다음 제시문을 참고하여 물음에 답하시오.

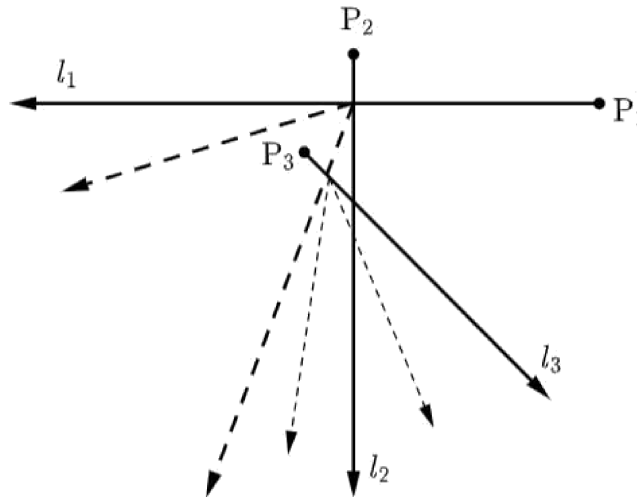
제시문

두 개의 반직선이 만났을 때, 양의 실수 a 에 대하여 다음 규칙을 따라 새로운 반직선들이 생성된다고 하자.

[가] 서로 다른 두 반직선 l_i, l_j ($1 \leq i, j \leq 4$)가 시작점 P_i 또는 P_j 가 아닌 점 P 에서 만날 때, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t(a\vec{v}_i + \vec{v}_j)$ ($t \geq 0$)을 만족시키는 점 R 이 그리는 반직선과 $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + t(\vec{v}_i + a\vec{v}_j)$ ($t \geq 0$)을 만족시키는 점 S 가 그리는 반직선이 각각 생성된다.

[나] 새로 생성된 반직선들을 포함하여 임의의 서로 다른 두 반직선이 시작점이 아닌 점에서 만날 때에도 (가)의 규칙이 계속 적용된다.

※아래는 위 과정을 통해 생성된 일부 반직선들을 나타낸 그림이다.



- 4-1 두 반직선 l_1, l_2 에 대하여 [제시문]의 (가)에 따라 새로운 반직선들이 생성될 때, 점 $A(2, 2)$ 를 지나는 반직선이 생성될 수 있는 양의 실수 a 가 존재하면 그 값을 찾으시오. 만약 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오. [5점]
- 4-2 네 반직선 l_1, l_2, l_3, l_4 에 대하여 [제시문]의 (가), (나)에 따라 새로운 반직선들이 생성될 때, 점 $A(2, 2)$ 를 지나는 반직선이 생성될 수 있는 양의 실수 a 가 존재하면 그 값을 찾으시오. 만약 존재하지 않으면 그 이유를 설명하시오. [10점]

■ 예시 답안

문제 4-1

두 반직선 l_1 과 l_2 가 점 $P(1, 4)$ 에서 만나 생성한 새로운 반직선 l 위의 점 R 은 방정식 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$ ($t \geq 0$)을 만족시킨다. $\vec{v} = (c, d)$ 에 대하여 $\vec{w} = (-d, c)$ 라 하자.

반직선 l 위의 점 R 에 대하여 $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = t\vec{v}$ 이고 $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ 이므로 점 R 은 $\vec{w} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$ 을 만족시킨다.

즉, 모든 양의 실수 a 에 대하여 $\vec{w} \cdot \overrightarrow{PA} > 0$ 이면 반직선 l 은 점 A 를 지나지 않는다.

조건 (가)에 의하여 $\vec{v} = (-a, -1)$ 또는 $\vec{v} = (-1, -a)$ 이다.

(i) $\vec{v} = (-a, -1)$ 인 경우

$c = -a, d = -1$ 이므로 $\vec{w} = (1, -a)$ 이다.

$$\vec{w} \cdot \overrightarrow{PA} = (1, -a) \cdot (1, -2) = 1 + 2a > 0$$

(ii) $\vec{v} = (-1, -a)$ 인 경우

$c = -1, d = -a$ 이므로 $\vec{w} = (a, -1)$ 이다.

$$\vec{w} \cdot \overrightarrow{PA} = (a, -1) \cdot (1, -2) = a + 2 > 0$$

(i), (ii)에 의하여 $\vec{w} \cdot \overrightarrow{PA} > 0$ 이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 양의 실수 a 가 존재하지 않는다.

문제 4-2

4-1 풀이의 반직선 l 을 l_i 로 대체하여 같은 계산을 해 보면 똑같이 $\vec{w} \cdot \overrightarrow{PA} > 0$ 이 성립함을 확인할 수 있다. (이 값은 $i = 1, 2, 3, 4$ 일 때 각각 2, 1, 1, 1이다.) 시작점이 아닌 교점 P 를 갖는 두 반직선 l_i, l_j 에 대하여 4-1의 풀이에서처럼 확인해보면 두 반직선 l_i, l_j 가 생성한 모든 반직선은 $\vec{w} \cdot \overrightarrow{PA} > 0$ 을 만족한다. 이와 같이 네 반직선 l_1, l_2, l_3, l_4 및 이들로부터 생성된 모든 반직선 중 교점을 갖는 임의의 서로 다른 두 반직선을 각각 m_1, m_2 라 하고, 두 반직선 m_1, m_2 를 나타내는 방정식을 각각

$$\overrightarrow{OX_1} = \overrightarrow{OR_1} + t\vec{u}_1, \overrightarrow{OX_2} = \overrightarrow{OR_2} + t\vec{u}_2 \quad (t \geq 0) \text{이라 하자.}$$

여기서 두 반직선 m_1, m_2 가 P 에서 만나 생성한 반직선 m 을 나타내는 방정식을 $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v}$ 라고 하자. 이 때 $\vec{v} = a\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ 또는 $\vec{v} = \vec{u}_1 + a\vec{u}_2$ 이다. $\vec{v} = (c, d)$ 라고 하면 $\vec{w} = (-d, c)$ 에 대하여 $\vec{w} \cdot \overrightarrow{PA} > 0$ 을 보일 경우 A 가 이 반직선 위에 있지 않음을 확인할 수 있다.

$$u_1 = (c_1, d_1), u_2 = (c_2, d_2) \text{에 대하여 } w_1 = (-d_1, c_1), w_2 = (-d_2, c_2) \text{이고 4-1의 풀이에서와 마찬가지로}$$

$$\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{R_1A} > 0, \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{R_2A} > 0 \quad \cdots \cdots \quad \textcircled{㉠}$$

이다.

또한 두 반직선 m_1, m_2 의 교점 P 에 대하여

$$\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{R_1P} = 0, \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{R_2P} = 0 \quad \cdots \cdots \quad \textcircled{㉡}$$

이다.

㉠, ㉡에서

$$\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{PA} > 0, \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{PA} > 0 \quad \cdots \cdots \quad \textcircled{㉢}$$

이다.

(i) $\vec{v} = a\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ 인 경우

$a\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (ac_1 + c_2, ad_1 + d_2)$ 이므로 $\vec{w} = (-ad_1 - d_2, ac_1 + c_2)$ 가 되고,

$$\vec{w} = a\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$$

$a > 0$ 이므로 ㉢에 의하여

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \overrightarrow{PA} &= (a\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}) \cdot \overrightarrow{PA} \\ &= a\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{PA} > 0 \end{aligned}$$

(ii) $\vec{v} = \vec{u}_1 + a\vec{u}_2$ 인 경우

(i)과 마찬가지로 $\vec{w} \cdot \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{PA} + a\overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{PA} > 0$

(i), (ii)에 의하여 $\vec{w} \cdot \overrightarrow{PA} > 0$ 이므로 A 가 이 반직선 위에 있지 않다.

이를 반복해서 적용하면 새로 생성된 모든 반직선은 점 A 를 지날 수 없음을 알 수 있다.

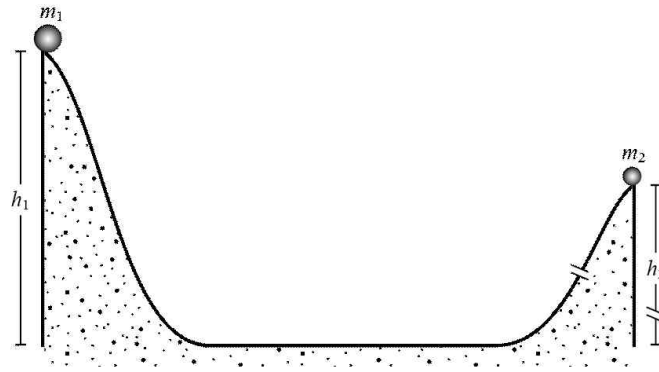
■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

물리학 · 문제 1

제시문

[가] [그림 1]과 같이 수평면 양쪽에 정상의 높이가 각각 h_1 과 h_2 로 서로 다른 두 개의 경사면이 있다. 더 높은 왼쪽 경사면의 정상에 질량이 m_1 인 물체가 있고, 더 낮은 오른쪽 경사면의 정상에 질량이 m_2 인 물체가 있다. 정지해있던 두 물체는 동시에 운동을 시작하여 마찰이 없는 경사면을 미끄러져 내려와 수평면에서 충돌한 후 한 덩어리가 되어 운동한다.



[그림 1]

[문제 1] 제시문 [가]에서 높이 h_1 에서 출발하는 물체의 질량 m_1 이 높이 h_2 에서 출발하는 물체의 질량 m_2 의 2배 일 때, 수평면에서 충돌 후 한 덩어리가 된 물체가 두 경사면을 이탈하지 않고 그 사이에서 운동하게 하기 위해서 h_1/h_2 가 얼마여야 하는지, 그 최댓값을 구하시오. 단, 중력가속도 g 는 연직 아래 방향으로 일정하고, 경사면 및 수평면의 마찰, 공기저항, 물체의 크기는 무시한다. [10점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

(답) $(h_1/h_2)_{\max} = 4$

① **충돌 직전의 속도 — 역학적 에너지 보존.** 경사면에 마찰이 없으므로 각 물체가 정상에서 수평면까지 내려오는 동안 역학적 에너지가 보존된다. 질량을 $m_1 = 2m$, $m_2 = m$ 으로 두고 오른쪽을 + 방향으로 잡으면

$$\frac{1}{2}m_i u_i^2 = m_i g h_i \Rightarrow u_i = \sqrt{2gh_i}$$

이므로, 충돌 직전 두 물체의 속도는 각각

$$u_1 = +\sqrt{2gh_1} \text{ (오른쪽)}, \quad u_2 = -\sqrt{2gh_2} \text{ (왼쪽)}$$

이다. 속력이 질량과 무관하게 높이만으로 정해진다는 점에 주의한다.

② **충돌 — 운동량 보존.** 두 물체가 부딪쳐 한 덩어리가 되므로 완전 비탄성 충돌이며, 수평면에서 수평 방향으로 외력이 작용하지 않으므로 운동량이 보존된다. 충돌 직후 공통 속도를 V 라 하면

$$(2m)\sqrt{2gh_1} + m(-\sqrt{2gh_2}) = (2m + m)V$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}(2\sqrt{2gh_1} - \sqrt{2gh_2}) = \frac{\sqrt{2g}}{3}(2\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})$$

이다. 문제 조건에서 $h_1 > h_2$ 이므로 $2\sqrt{h_1} > 2\sqrt{h_2} > \sqrt{h_2}$, 즉 $V > 0$ 이다. 따라서 한 덩어리가 된 물체는 항상 **오른쪽(낮은 경사면 쪽)**으로 움직인다.

③ **충돌 후 도달하는 최고 높이 — 다시 역학적 에너지 보존.** 충돌 후에도 마찰이 없으므로 운동에너지가 모두 중력 퍼텐셜 에너지로 바뀌는 높이 H 는

$$\frac{1}{2}(3m)V^2 = (3m)gH \Rightarrow H = \frac{V^2}{2g} = \frac{(2\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})^2}{9}$$

이다. 마찰이 없으므로 물체는 두 경사면 사이를 왕복하며 **매번 같은 높이 H** 까지만 올라간다.

④ **이탈하지 않을 조건.** 물체가 경사면을 이탈하려면 정상보다 높이 올라가야 하므로, 이탈하지 않을 조건은 $H \leq h_1$ 이면서 $H \leq h_2$ 이다. 그런데 $h_2 < h_1$ 이므로 **더 낮은 경사면 쪽 조건 $H \leq h_2$ 만 만족하면 충분하다.** $r = h_1/h_2$ ($r > 1$) 로 놓고 양변을 h_2 로 나누면

$$\frac{(2\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})^2}{9} \leq h_2 \Rightarrow (2\sqrt{r} - 1)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow |2\sqrt{r} - 1| \leq 3 \Rightarrow -1 \leq \sqrt{r} \leq 2$$

이고, $\sqrt{r} > 0$ 이므로 실질적인 조건은 $\sqrt{r} \leq 2$, 즉 $r \leq 4$ 이다.

$$\frac{H}{h_2} = \frac{(2\sqrt{r} - 1)^2}{9} \leq 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{h_1}{h_2} \leq 4, \quad \therefore \left(\frac{h_1}{h_2}\right)_{\max} = 4$$

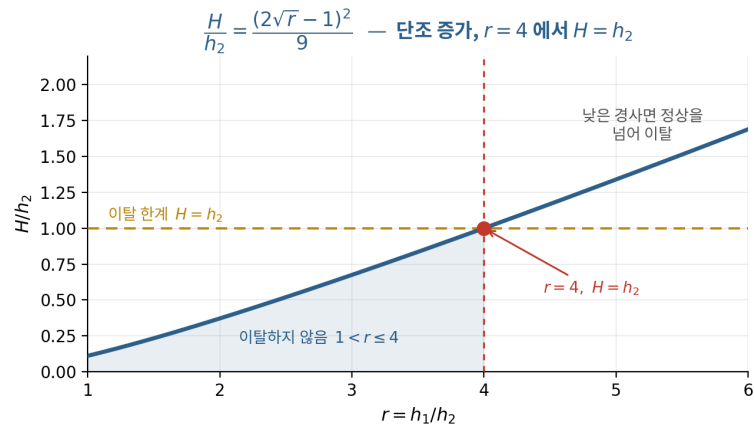
등호가 성립하는 $h_1 = 4h_2$ 일 때 $H = h_2$ 로, 물체는 낮은 경사면의 정상에 속력 0으로 정확히 도달했다가 되돌아온다.

⑤ **결과의 검토와 물리적 의미.**

• H 는 r 에 대해 단조 증가 — $d(H/h_2)/dr = 2(2\sqrt{r} - 1)/(9\sqrt{r}) > 0$ 이므로, 왼쪽 경사면이 높아질수록 충돌 후 속력이 커져 더 높이 올라간다. 따라서 이탈 조건은 위쪽 한계 $r \leq 4$ 하나로 정리된다.

• **한계에서의 속도** — $r = 4$ 이면 $V = (\sqrt{2g}/3)(2\sqrt{4h_2} - \sqrt{h_2}) = \sqrt{2gh_2}$ 로, 합쳐진 물체가 마치 낮은 쪽 물체가 내려온 속력 그대로 되돌아 올라가는 셈이다. 이로부터 $H = h_2$ 임을 곧바로 확인할 수 있다.

• **충돌에서 잃는 에너지** — $r = 4$ 일 때 충돌 직전 운동에너지는 $2mgh_1 + mgh_2 = 9mgh_2$, 직후는 $\frac{1}{2}(3m)V^2 = 3mgh_2$ 이다. 즉 완전 비탄성 충돌에서 역학적 에너지의 $2/3$ 가 소리·열 등으로 사라진다. 운동량은 보존되지만 역학적 에너지는 보존되지 않는다는 점이 이 문제의 핵심이다.



예시 작도 — $H/h_2 = (2\sqrt{r}-1)^2/9$ 가 $r=4$ 에서 이탈 한계 $H=h_2$ 에 닿는다

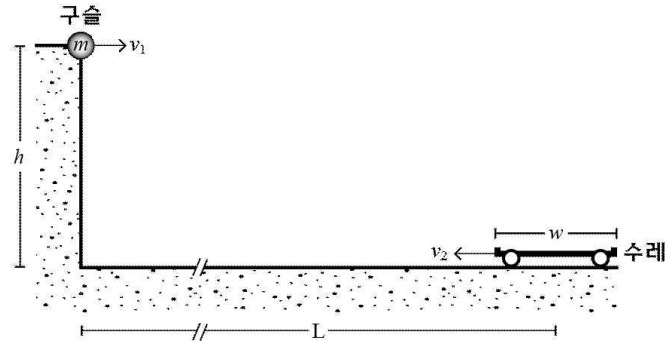
■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

물리학 · 문제 2

제시문

[나] [그림 2]와 같이 지표면으로부터 높이가 h 인 절벽에 구슬을 발사하는 장치가 있고, 지표면에는 폭이 w 인 수레가 있다. 수레의 중심은 구슬 발사 장치로부터 수평거리 L 만큼 떨어진 지점에 있다. 구슬 발사 장치는 일정한 시간 간격 t 마다 질량이 m 인 구슬을 오른쪽 수평 방향으로 속력 v_1 으로 발사한다. 첫 구슬이 발사될 때 수레가 왼쪽 수평 방향으로 일정한 속력 v_2 로 운동하여 벽면에 도달한다. 그동안 발사된 구슬이 수레의 폭 w 안에 떨어지면, 수레가 구슬을 수거한 것으로 간주한다. 수레나 지표면에 닿은 구슬은 다시 튀어 오르지 않으며, 수레가 구슬을 수거하더라도 질량과 속도의 변화는 없다고 가정하자.



[그림 2]

[문제 2] 제시문 [나]에서 구슬 발사 장치의 높이 h 는 5 m, 수레의 중심까지 거리 L 은 20 m, 수레의 폭 w 는 0.8 m, 구슬 발사의 시간 간격 t 는 0.03 s, 발사된 구슬의 초기 속력 v_1 은 9.6 m/s이다. 수레의 속력 v_2 는 처음 발사된 구슬을 수거하기 위한 최솟값이라면 수레가 수거하게 될 구슬은 몇 개인가? 단, 중력가속도 g 는 10 m/s²로 계산하고, 공기저항, 수레의 높이, 구슬의 크기는 무시한다. [10점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

(답) 수거하는 구슬 3개 (첫 번째 · 두 번째 · 세 번째 구슬)

① 좌표 설정과 낙하 시간. 발사 지점 바로 아래의 지표면을 원점, 오른쪽을 $+x$ 로 잡는다. 수평 투사에서 연직 방향은 자유낙하이므로 지표면에 닿을 때까지 걸리는 시간 t_f 는 수평 속력과 무관하게

$$h = \frac{1}{2}gt_f^2 \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{10}} = 1 \text{ s}$$

이다.

② 구슬의 착지점은 항상 같다. 수평 방향은 등속이므로 착지점의 x 좌표는

$$x_\ell = v_1 t_f = 9.6 \times 1 = 9.6 \text{ m}$$

이다. 모든 구슬이 같은 높이에서 같은 속력으로 발사되므로 발사 시각만 다를 뿐 궤적과 착지점은 모두 동일하다. 즉 구슬은 $x = 9.6 \text{ m}$ 한 지점에 0.03 s 간격으로 차례차례 떨어진다. 따라서 문제는 “수레가 그 지점을 덮고 있는 동안 몇 개의 구슬이 떨어지는가”로 바뀐다.

③ 수레의 위치와 첫 구슬 수거 조건. 수레의 중심은 $t = 0$ 에 $x = L = 20 \text{ m}$ 이고 왼쪽으로 등속 v_2 로 움직이므로

$$x_c(t) = L - v_2 t = 20 - v_2 t$$

이고, 수레는 $x_c - w/2$ 부터 $x_c + w/2$ 까지를 덮는다 ($w/2 = 0.4 \text{ m}$). 첫 구슬은 $t = t_f = 1 \text{ s}$ 에 $x = 9.6 \text{ m}$ 에 떨어지므로 수거 조건은

$$|x_\ell - x_c(1)| \leq \frac{w}{2} \Rightarrow |9.6 - (20 - v_2)| \leq 0.4$$

$$\Rightarrow 9.2 \leq 20 - v_2 \leq 10.0 \Rightarrow 10.0 \leq v_2 \leq 10.8 \text{ m/s}$$

이다. v_2 가 작을수록 수레가 덜 다가오므로, 최솟값은 구슬이 수레의 진행 방향 앞쪽 끝($x_c - w/2$)에 겨우 걸리는 경우이다.

$$v_{2, \min} = \frac{L - (x_\ell + w/2)}{t_f} = \frac{20 - 10.0}{1} = 10 \text{ m/s}$$

④ k 번째 구슬의 수거 여부. k 번째 구슬의 발사 시각을 $t_k^{(0)}$ 이라 하면 발사 간격이 $t = 0.03$ s 이므로 $t_k^{(0)} = (k-1)t = 0.03(k-1)$ 이고, 이 구슬은

$$t_k = t_k^{(0)} + t_f = 0.03(k-1) + 1$$

에 착지한다. 그때 수레 중심의 위치는 $v_2 = 10$ m/s 를 대입하여

$$x_c(t_k) = 20 - 10[0.03(k-1) + 1] = 10 - 0.3(k-1)$$

이므로, 수거 조건 $|x_\ell - x_c(t_k)| \leq 0.4$ 는

$$|9.6 - (10 - 0.3(k-1))| \leq 0.4 \Rightarrow |0.3(k-1) - 0.4| \leq 0.4$$

$$\Rightarrow 0 \leq 0.3(k-1) \leq 0.8 \Rightarrow 0 \leq k-1 \leq \frac{8}{3} \approx 2.67$$

가 된다. k 는 자연수이므로 $k = 1, 2, 3$ 이다.

구슬 k	착지 시각 t_k (s)	수레 중심 x_c (m)	중심에서의 어긋남 (m)	수거
1	1.00	10.0	-0.4 (앞쪽 끝)	○
2	1.03	9.7	-0.1	○
3	1.06	9.4	+0.2	○
4	1.09	9.1	+0.5 > 0.4	×

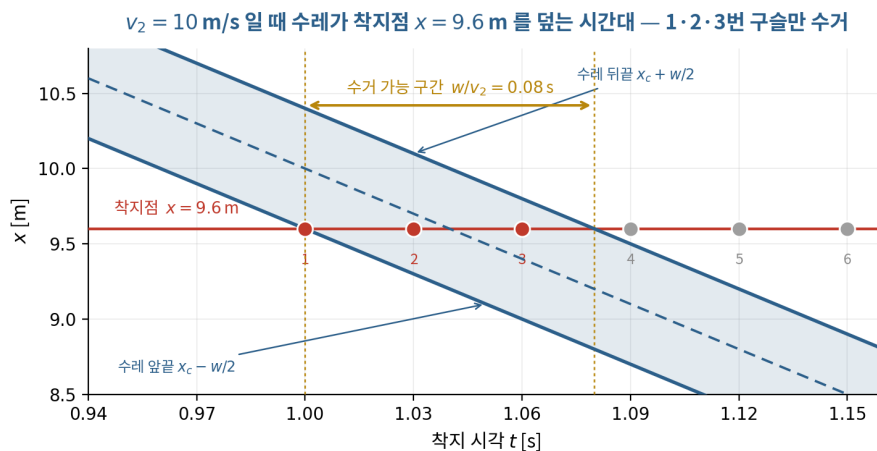
∴ 수레가 수거하는 구슬의 개수 = 3 개

⑤ 다른 방법과 물리적 의미.

• “수거 창”으로 보는 방법 — 착지점이 고정되어 있으므로, 수레가 그 점을 덮고 있는 시간은 수레가 자기 몸 길이만큼 지나가는 데 걸리는 시간 $w/v_2 = 0.8/10 = 0.08$ s 이다. 첫 구슬이 창이 열리는 순간($t = 1.00$ s)에 정확히 떨어지므로, 창이 닫히는 $t = 1.08$ s 까지 0.03 s 간격으로 떨어지는 구슬 수는 $[0.08/0.03] + 1 = 2 + 1 = 3$ 개이다.

• v_2 가 최소값이라는 조건의 뜻 — $v_2 = 10$ m/s 는 첫 구슬을 “겨우” 받는 값이므로 첫 구슬이 수레의 앞쪽 끝에 걸린다. 덕분에 이후 구슬들이 수레 폭 전체를 훑고 지나가 수거 개수가 최대가 된다. 만약 v_2 가 조금 더 컸다면 첫 구슬이 수레 안쪽에 떨어지고 창이 그만큼 일찍 닫혀 수거 개수가 줄어든다.

• 수레가 벽에 닿기 전에 수거가 끝난다 — 수레의 앞쪽 끝이 절벽 벽면($x = 0$)에 닿는 시각은 $(20 - 0.4)/10 = 1.96$ s 로, 마지막 수거 시각 1.06 s 보다 훨씬 뒤이다. 따라서 수거가 진행되는 동안 수레는 계속 등속으로 접근한다.



예시 작도 — 수레가 덮는 구간(띠)과 착지점 $x = 9.6$ m 가 겹치는 시간대는 1.00 ~ 1.08 s 이며, 그 안에 떨어지는 구슬은 1·2·3 번뿐이다

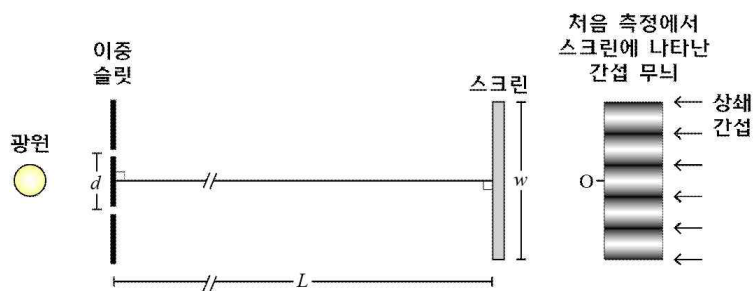
■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

물리학 · 문제 3

제시문

[다] [그림 3]과 같이 빛의 파장이 λ 인 광원을 이용하여 이중 슬릿 실험 장치를 설계하였다. 광원의 오른쪽에 슬릿 사이의 간격이 d 인 이중 슬릿을 두고, 이중 슬릿으로부터 거리 L 만큼 떨어진 지점에 폭이 w 인 스크린을 설치하였다. 빛의 파장 λ 를 일정한 간격으로 점점 증가시켜가며, 스크린에 나타난 상쇄 간섭 무늬의 개수를 기록하였다.



[그림 3]

[문제 3] 제시문 [다]에서 슬릿 간격 d 가 0.1 mm , 거리 L 이 1 m , 처음 측정에서 빛의 파장 λ 가 150 nm 일 때, [그림 3]과 같이 스크린의 가장자리에 중심(O점)으로부터 세 번째 상쇄 간섭이 나타났다. 빛의 파장 λ 를 40 nm 씩 일정하게 증가시키며 스크린에 더 이상 상쇄 간섭 무늬가 나타나지 않을 때까지 측정을 반복하였다. 각 측정에서 스크린에 나타난 상쇄 간섭 무늬의 개수를 모두 합하면 몇 개인가? 단, 1 nm 는 10^{-9} m 로 계산한다. [10점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

(답) 모든 측정의 상쇄 간섭 무늬 개수의 합 = 40 개

① **상쇄 간섭 조건.** 슬릿 간격이 d 이고 스크린이 충분히 멀면($L \gg d$), 두 슬릿에서 나온 빛이 스크린의 한 점에 도달할 때 생기는 경로차는 $d \sin \theta$ 이다. 상쇄 간섭(어두운 무늬)은 경로차가 반파장의 홀수 배일 때 일어나므로

$$d \sin \theta = \left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

이다. 중심 O 에서 켜 거리를 y 라 하면 $L \gg y$ 에서 $\sin \theta \approx \tan \theta = y/L$ 이므로, m 번째 상쇄 무늬의 위치는

$$y_m = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda L}{d}$$

이고 O 를 기준으로 위·아래 대칭으로 나타난다. 이웃한 무늬 사이의 간격은 $\Delta y = \lambda L/d$ 로, **파장이 길수록 무늬가 성기게** 퍼진다.

② **스크린의 반폭 Y 를 결정한다.** 첫 측정 $\lambda = 150 \text{ nm}$ 에서 O 로부터 **세 번째** 상쇄 무늬가 스크린의 가장자리에 나타났으므로 $Y = y_3$ 이다.

$$Y = \left(3 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\lambda L}{d} = 2.5 \times \frac{150 \times 10^{-9} \times 1}{1.0 \times 10^{-4}} = 3.75 \times 10^{-3} \text{ m}$$

즉 $Y = 3.75 \text{ mm}$ 이고 스크린의 폭은 $w = 2Y = 7.5 \text{ mm}$ 이다. 이후 측정에서 장치는 그대로이므로 Y 는 고정된 상수로 쓸 수 있다.

③ **임의의 파장에서 무늬 개수.** 무늬가 스크린 안에 들어올 조건 $y_m \leq Y$ 로부터

$$\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda L}{d} \leq Y \Rightarrow m \leq \frac{Yd}{\lambda L} + \frac{1}{2}$$

이다. 여기서 $Yd/L = 3.75 \times 10^{-3} \times 10^{-4}/1 = 3.75 \times 10^{-7} \text{ m} = 375 \text{ nm}$ 이므로, 한쪽(위 또는 아래)에 보이는 무늬의 최대 차수 M 과 총 개수 N 은

$$M(\lambda) = \left\lfloor \frac{375 \text{ nm}}{\lambda} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad N(\lambda) = 2M(\lambda)$$

④ **차수별 파장 구간으로 세기.** $M(\lambda) = M$ 이 되는 조건은 $M \leq 375/\lambda + 1/2 < M + 1$, 즉

$$\frac{375}{M + 1/2} < \lambda \leq \frac{375}{M - 1/2} \quad (\text{단위: nm})$$

이다. 측정 파장은 $\lambda = 150, 190, 230, \dots$ 로 40 nm 씩 커지는 등차수열이므로, 각 구간에 몇 개의 측정값이 들어가는지 세면 된다.

M	파장 구간 (nm)	해당 측정 파장 (nm)	측정 횟수	$N = 2M$ 의 소계
3	$107.1 < \lambda \leq 150$	150	1회	$3 \times 2 \times 1 = 6$
2	$150 < \lambda \leq 250$	190, 230	2회	$2 \times 2 \times 2 = 8$
1	$250 < \lambda \leq 750$	270, 310, ..., 750	13회	$1 \times 2 \times 13 = 26$
0	$\lambda > 750$	790 이상	—	무늬 없음 $\rightarrow$ 측정 종료

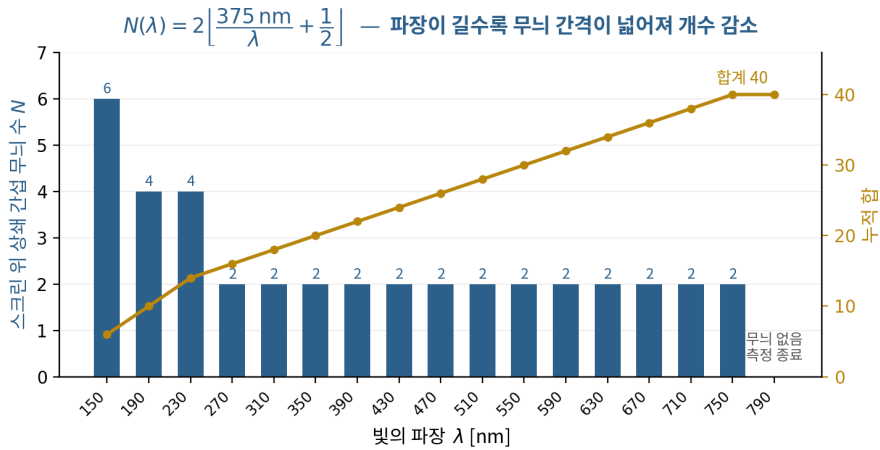
$M = 1$ 구간의 측정 횟수는 270, 310, ..., 750 이 첫째항 270, 공차 40 인 등차수열이므로 $(750 - 270)/40 + 1 = 13$ 회이다. 경계값을 확인하면

• $\lambda = 750 \text{ nm}$: $y_1 = 0.5 \times (750 \times 10^{-9} \times 1)/(1.0 \times 10^{-4}) = 3.75 \times 10^{-3} \text{ m} = 3.75 \text{ mm} = Y$ 로 첫 번째 무늬가 **스크린 가장자리에 정확히** 걸린다. 처음 측정에서 세 번째 무늬가 가장자리에 나타난 것을 “무늬가 나타났다”고 본 것과 같은 기준이므로 $N = 2$ 로 센다.

• $\lambda = 790 \text{ nm}$: $y_1 = 0.5 \times (790 \times 10^{-9} \times 1)/(1.0 \times 10^{-4}) = 3.95 \times 10^{-3} \text{ m} = 3.95 \text{ mm} > Y$ 로 첫 번째 무늬조차 스크린을 벗어난다. 따라서 이 측정에서 무늬는 0개이고, 여기서 측정을 종료한다.

$$\sum N = \underbrace{6}_{\lambda=150} + \underbrace{4+4}_{\lambda=190,230} + \underbrace{2 \times 13}_{\lambda=270 \sim 750} = 6 + 8 + 26 = 40 \text{ 개}$$

⑤ **물리적 의미**. 무늬 간격 $\Delta y = \lambda L/d$ 는 파장에 비례하므로, 파장을 늘리면 무늬가 바깥으로 밀려나며 스크린 밖으로 하나씩 사라진다. 그래서 $N(\lambda)$ 는 매끄럽게 줄지 않고 $6 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ 처럼 **계단 모양**으로 감소한다. 특히 $\lambda = 250 \text{ nm}$ 와 750 nm 부근에서 차수가 하나씩 떨어지는데, 이는 $Yd/L = 375 \text{ nm}$ 라는 장치의 고유한 척도가 파장과 겹쳐지는 지점이다.



예시 작도 — 측정 파장별 상쇄 간섭 무늬 개수 N (막대)과 그 누적 합(선). 마지막 $\lambda = 790 \text{ nm}$ 에서 무늬가 0이 되어 측정이 끝나며 누적 합은 40이다

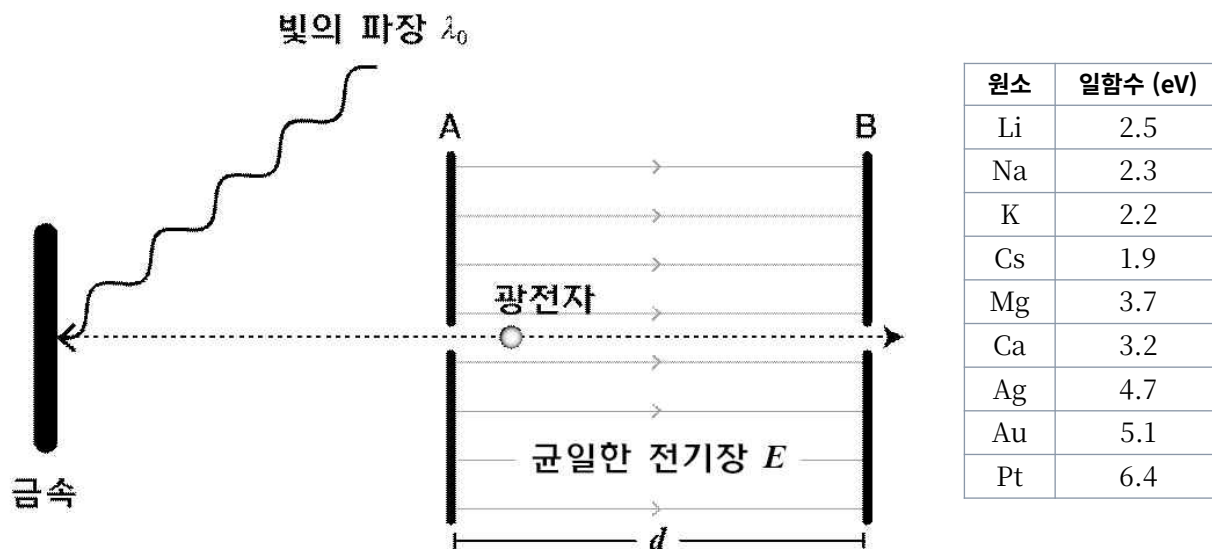
■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

물리학 · 문제 4

제시문

[라] [그림 4]와 같이 단일 원소로 구성된 금속의 성분을 알아보기 위해 광전효과 실험을 준비하였다. 금속 표면에 파장이 λ_0 인 빛을 쏘여주면 광전자가 튀어나온다. 최대 운동 에너지를 갖는 광전자는 수평 방향으로 등속 운동하여 평행판 A에 입사한다. 평행판 A와 B 사이에는 균일한 전기장 E 가 오른쪽 수평 방향으로 걸려있고, 평행판 A와 B 사이의 거리는 d 이다. 광전자는 균일한 전기장 영역을 지나 평행판 B를 통과하였다. A와 B지점에서 각각 광전자의 드브로이 파장을 측정한 결과, λ_A 와 λ_B 로 나타났다.



[그림 4]

[문제 4] 제시문 [라]에서 빛의 파장 λ_0 가 150 nm, 전기장 E 가 80 V/m, 거리 d 가 7 cm이고, B에서 측정한 광전자의 드브로이 파장 λ_B 가 A에서 측정한 드브로이 파장 λ_A 의 3배로 길게 측정되었다. [그림 4]의 표를 바탕으로 금속의 성분 원소가 무엇인지 추론하시오. 단, 플랑크 상수 h 는 4.1×10^{-15} eVs, 광속 c 는 3×10^8 m/s, 1 nm는 10^{-9} m로 계산한다. [10점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

(답) 금속의 성분 원소는 세슘(Cs), 일함수 $W = 1.9 \text{ eV}$

① 입사 광자 1개의 에너지. 파장 λ_0 인 빛의 광자 1개가 갖는 에너지는

$$E_{\text{광자}} = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{(4.1 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{150 \times 10^{-9} \text{ m}} = \frac{1.23 \times 10^{-6}}{1.5 \times 10^{-7}} = 8.2 \text{ eV}$$

이다.

② 광전효과 — A 지점에서의 운동 에너지. 광전자는 광자 1개의 에너지를 받아 일함수 W 만큼을 금속을 탈출하는 데 쓴다. 최대 운동 에너지를 갖는 광전자가 A 에 입사하므로, 아인슈타인의 광전 방정식에서

$$K_A = E_{\text{광자}} - W = 8.2 - W \text{ (eV)}$$

이다. 아직 W 를 모르므로 이 식은 나중에 쓰고, 드브로이 파장 조건에서 K_A 를 먼저 결정한다.

③ 드브로이 파장에서 운동 에너지의 비를 얻는다. 물질파의 파장은 $\lambda = h/p$ 이고 운동 에너지는 $K = p^2/(2m_e)$ 이므로

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e K}} \Rightarrow K \propto \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{K_B}{K_A} = \left(\frac{\lambda_A}{\lambda_B}\right)^2$$

이다. $\lambda_B = 3\lambda_A$ 이므로

$$\frac{K_B}{K_A} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow K_B = \frac{K_A}{9}$$

이다. $K_B < K_A$ 이므로 광전자는 A 에서 B 로 가는 동안 **느려졌다**. 실제로 전기장 E 는 $+x$ 방향인데 전자의 전하는 $-e$ 이므로 전기력 $\vec{F} = (-e)\vec{E}$ 는 $-x$ 방향, 즉 운동 방향과 반대여서 광전자를 감속시킨다.

④ 전기장이 한 일 — 에너지 보존. 균일한 전기장 속에서 전하 $-e$ 가 거리 d 만큼 이동할 때 전기장이 하는 일은 $-eEd$ 이므로

$$K_B - K_A = -eEd \Rightarrow K_A - K_B = eEd$$

이다. 여기서 $Ed = 80 \times 0.07 = 5.6 \text{ V}$ 는 두 평행판 사이의 전위차이고, 전자 1개가 5.6 V 의 전위차를 거스를 때 잃는 에너지는 정의상 5.6 eV 이다.

$$K_A - \frac{K_A}{9} = 5.6 \Rightarrow \frac{8}{9}K_A = 5.6 \Rightarrow K_A = 5.6 \times \frac{9}{8} = 6.3 \text{ eV}$$

$$K_B = \frac{K_A}{9} = 0.7 \text{ eV} (> 0)$$

$K_B > 0$ 이므로 광전자가 실제로 평행판 B 를 통과했다는 제시문의 서술과 모순이 없다.

⑤ 일함수와 원소의 결정. ②의 식에 $K_A = 6.3 \text{ eV}$ 를 넣으면

$$W = E_{\text{광자}} - K_A = 8.2 - 6.3 = 1.9 \text{ eV} \Rightarrow \therefore \text{세슘 (Cs)}$$

[그림 4]의 표에서 일함수가 1.9 eV 인 원소는 세슘(Cs) 하나뿐이다.

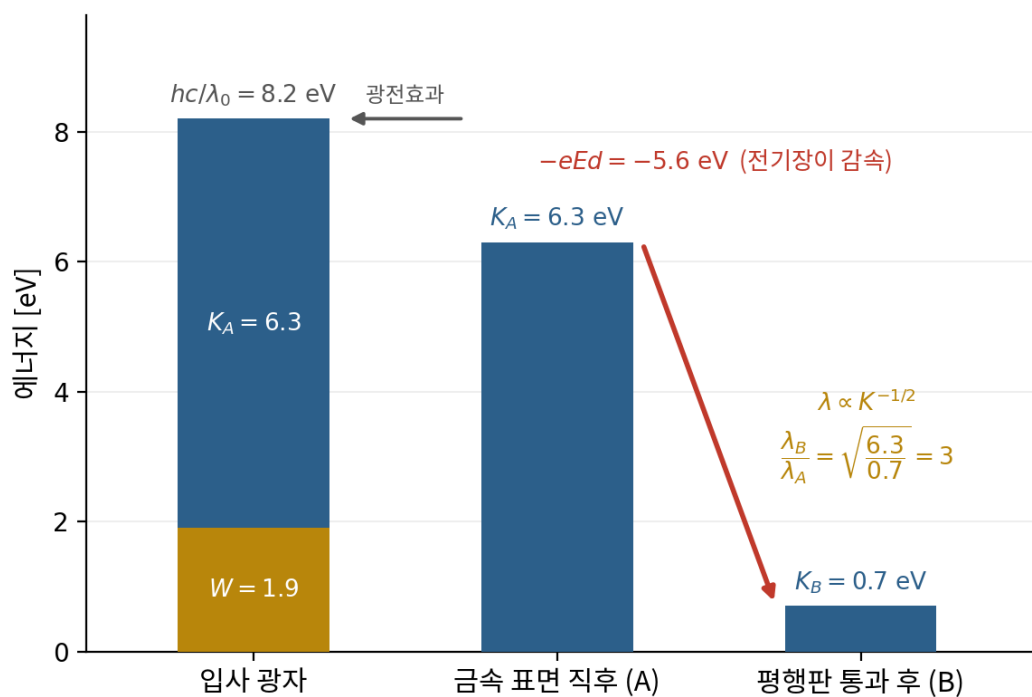
⑥ **답의 유일성 검토와 물리적 의미.** [그림 4] 표의 다른 원소를 넣어 보면 조건을 만족하지 못한다. 원소마다 $K_A = 8.2 - W$ 가 정해지고, B 를 통과하려면 $K_B = K_A - 5.6 > 0$ 이어야 하며, 그때 파장 비는 $\lambda_B/\lambda_A = \sqrt{K_A/K_B}$ 이다.

원소	W (eV)	$K_A = 8.2 - W$	$K_B = K_A - 5.6$	$\lambda_B/\lambda_A = \sqrt{K_A/K_B}$
Cs	1.9	6.3	0.7	3.00 ← 조건 일치
K	2.2	6.0	0.4	3.87
Na	2.3	5.9	0.3	4.43
Li	2.5	5.7	0.1	7.55
Mg, Ca, Ag, Au, Pt	≥ 3.2	≤ 5.0	≤ -0.6	B 에 도달하지 못함

- 일함수가 3.2 eV 이상인 원소는 $K_A \leq 5.0$ eV 로 감속 에너지 5.6 eV 보다 작아 광전자가 평행판 B 에 도달하기 전에 멈춰 되돌아온다. 제시문의 “B 를 통과하였다”는 서술과 어긋나므로 후보에서 제외된다.
- 남은 Li·Na·K·Cs 중에서는 일함수가 작을수록 K_A 가 커지고 K_B 도 커져 λ_B/λ_A 가 작아진다. 이 비가 정확히 3 이 되는 것은 $W = 1.9$ eV 인 세슘뿐이므로 답은 유일하다.
- 이 실험의 원리는 **두 번 재기**에 있다. 파장(물질파)을 재면 운동 에너지를 알 수 있고, 전기장 구간을 지나기 전후의 운동 에너지 차이는 이미 알고 있는 eEd 이다. 이 두 정보를 결합하면 광전자가 처음 갖고 나온 에너지 K_A 가 정해지고, 광전 방정식이 곧바로 일함수 W 를 준다. 즉 **빛의 파장과 전기장만으로 금속의 종류를 알아내는** 셈이다.

⑦ **조건을 다시 읽기 — 놓치기 쉬운 세 가지.**

- 왜 “**최대 운동 에너지**”인가 — 금속 표면 바로 아래에서 튀어나온 전자만이 일함수 W 만큼만 쓰고 나머지를 모두 운동 에너지로 갖는다. 더 깊은 곳에서 나온 전자는 그보다 적은 에너지를 가지므로 드브로이 파장이 더 길고, 감속 구간을 통과하지 못하고 되돌아올 수도 있다. 제시문이 “최대 운동 에너지를 갖는 광전자”를 지정한 것은 $K_A = hc/\lambda_0 - W$ 라는 하나의 값을 쓰기 위함이다.
- **빛의 세기는 답에 영향을 주지 않는다** — 광전효과는 광자 1개와 전자 1개의 일대일 상호작용이므로, K_A 는 빛의 세기가 아니라 진동수(파장)만으로 결정된다. 세기를 키우면 광전자의 개수만 늘어날 뿐 λ_A 는 그대로이고, 따라서 $\lambda_B/\lambda_A = 3$ 이라는 측정 결과도 변하지 않는다.
- **Ed 는 사실상 감속 전압이다** — $Ed = 80 \times 0.07 = 5.6$ V 는 A 와 B 사이의 전위차이므로, 이 실험은 전자를 5.6 V 만큼 거슬러 올려보내는 것과 같다. 광전자가 B 에 도달하려면 $eEd < K_A$, 즉 $Ed < 6.3$ V 여야 한다. 여기서 $V_0 = K_A/e = 6.3$ V 가 바로 이 금속·이 파장에서 **정지 전압**이며, 주어진 5.6 V 는 그보다 작으므로 광전자가 실제로 B 를 통과한다.

에너지 수지 — 일함수 $W = 1.9 \text{ eV}$ 는 표에서 세슘(Cs)

예시 작도 — 광자 $8.2 \text{ eV} = \text{일함수 } 1.9 \text{ eV} + K_A = 6.3 \text{ eV}$, 이어서 전기장이 5.6 eV 를 빼앗아 $K_B = 0.7 \text{ eV}$, 따라서 $\lambda_B/\lambda_A = 3$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

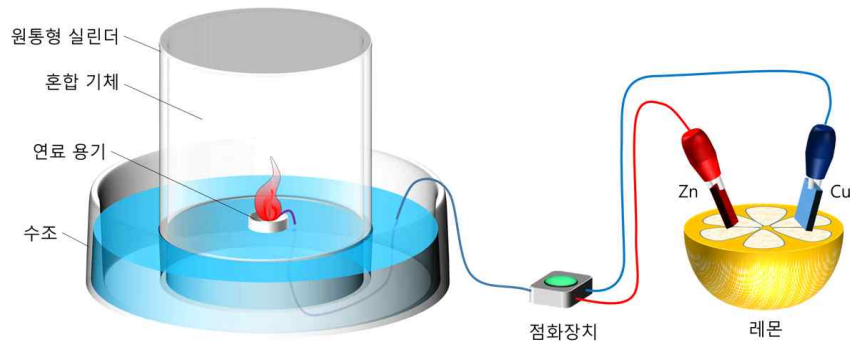
화학 · 문제 1

※ 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

제시문

[가] 물질이 전자를 잃고 산소와 결합하는 과정을 산화라고 하며, 물질이 연소되는 과정은 산화반응의 일종이다. 산화 반응 중 전자를 얻는 반응인 환원도 동시에 진행되는데 이를 산화·환원 반응이라 한다. 철이 공기 중의 산소와 반응하여 녹슬거나, 식물이 광합성을 통해서 포도당을 형성하는 과정에도 산화·환원 반응이 관여한다. 이 과정에서 물질은 전자를 얻거나 잃는다. 산화·환원 과정에서 생성되는 전자의 흐름을 에너지원으로 활용한 것이 화학 전지이다.

[나] **[그림 1]**의 장치를 이용하여 에탄올(C_2H_5OH), 에텐(C_2H_4), 포도당($C_6H_{12}O_6$) 등을 연료로 사용하는 연소반응을 혼합 기체 내에서 진행하였다. 수조 안에 혼합 기체가 밀폐된 원통형 실린더를 설치하였으며, 실린더 내부에 연료를 담은 용기를 띄웠다. 연료의 연소는 외부 점화장치의 스위치를 켜면 시작된다. 점화장치는 레몬과 아연(Zn)판 및 구리(Cu)판으로 구성된 화학 전지와 연결되어있다. 외부 1기압, $27^\circ C$ 조건에서 연소반응이 시작되기 전 실린더 내/외부 수면의 높이는 같다. 원통형 실린더의 내부 밀면적은 100 cm^2 이며 수면에서 실린더 내부 윗면까지 높이는 24 cm 이다. 본 실험에서 연소반응 과정에서 나온 열은 물에 흡수되어, 기체의 최종 온도는 $27^\circ C$ 로 평형을 이룬다.



[그림 1] 연료의 연소반응 실험 장치 모식도

[다] 제시문 **[나]**의 각 실험에서 사용된 혼합 기체의 조성은 **[표 1]**과 같다.

[표 1] $27^\circ C$ 에서 혼합 기체의 몰 분율(%)

	질소	산소	에텐
혼합 기체 A	60	40	0
혼합 기체 B	50	40	10

[라] 화학 반응이 일어나기 위해서는 반응물이 충분한 에너지를 가지고 반응에 적합한 방향으로 충돌해야 한다. 반응물과 생성물 사이에 넘어야 하는 에너지 장벽, 즉 화학 반응이 일어나는 데 필요한 최소한의 에너지를 활성화 에너지라고 한다. 활성화 에너지는 반응 속도에 큰 영향을 준다. 반응이 일어날 때 반응물과 생성물의 상대적인 양은 화학 평형뿐만 아니라 반응 속도를 동시에 고려해야 한다. 화학 반응에서 반응물이나 생성물이 기체일 때, 반응 속도는 시간에 따른 부피 변화나 압력 변화로 나타낼 수 있다.

※ 모든 기체는 이상기체라 가정한다.

※ 반응 후에 생성된 물은 모두 액체로 변환되며 에탄올과 물의 증기압은 0으로 가정한다.

※ 원통형 실린더 내의 연료와 연료 용기의 질량 및 부피와 수면의 높이 변화에 따른 압력차는 무시할 수 있을 정도로 작다.

※ H, C, O의 원자량은 각각 1, 12, 16이고, 기체상수는 $0.08\text{ L}\cdot\text{atm}/(\text{mol}\cdot\text{K})$ 이다.

[문제 1] [그림 1]의 장치를 이용하여 외부압력 1기압, 27°C 에서, 혼합기체 A에서 0.46 g의 에탄올을 연소시켰다. 연소반응 후 실린더 내에 존재하는 모든 기체의 부분압력을 구하고 실린더 내의 수면의 높이 변화량을 논하시오. [10점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

초기 조건 확인

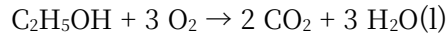
초기 기체: 혼합 기체 A (N_2 60%, O_2 40%), 압력 $P = 1 \text{ atm}$, 온도 $T = 300 \text{ K}$.

실린더 단면적 $S = 100 \text{ cm}^2$, 기체 기둥 높이 $h = 24 \text{ cm}$, 초기 부피 $V_0 = 2400 \text{ cm}^3 = 2.4 \text{ L}$.

이상기체: $n_0 = PV/(RT) = (1 \times 2.4)/(0.08 \times 300) = \mathbf{0.1 \text{ mol}}$

$N_2 = 0.06 \text{ mol}$, $O_2 = 0.04 \text{ mol}$.

에탄올 완전 연소 반응식



에탄올 0.01 mol 연소 시 소모 $O_2 = 0.03 \text{ mol}$, 생성 $CO_2 = 0.02 \text{ mol}$, 생성 H_2O 는 27°C 에서 모두 액체로 응축.

최종 기체 몰수 및 부피

- N_2 : 0.06 mol (불변)
- O_2 : $0.04 - 0.03 = 0.01 \text{ mol}$
- CO_2 : 0.02 mol
- 합계 $n_f = \mathbf{0.09 \text{ mol}}$

압력 일정(1 atm): $V_f = 0.09 \times 0.08 \times 300 / 1 = \mathbf{2.16 \text{ L}}$

부피 감소 $\Delta V = 2.4 - 2.16 = 0.24 \text{ L} = 240 \text{ cm}^3$

수면 상승 = $\Delta V / S = 240 / 100 = \mathbf{2.4 \text{ cm}}$ (기체 부피 감소 $\rightarrow$ 물이 실린더 내부로 상승)

최종 각 기체의 부분압 (전체 압력 1 atm 기준)

- $P(N_2) = 0.06/0.09 \times 1 = 2/3 \text{ atm} \approx \mathbf{0.667 \text{ atm}}$
- $P(O_2) = 0.01/0.09 \times 1 = 1/9 \text{ atm} \approx \mathbf{0.111 \text{ atm}}$
- $P(CO_2) = 0.02/0.09 \times 1 = 2/9 \text{ atm} \approx \mathbf{0.222 \text{ atm}}$

검산: $6/9 + 1/9 + 2/9 = 9/9 = 1 \text{ atm} \checkmark$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

화학 · 문제 2

※ 제시문은 앞 문항(화학 · 문제 1)을 참고하시오.

[문제 2] 혼합 기체 A를 포함하는 장치에 외부압력을 2기압으로 증가시켰다. 이때 실린더 내 수면의 높이 변화량을 외부압력 1기압일 때와 비교하여 구하고, 이 상태에서 0.46 g의 에탄올을 연소시켰을 때, 반응 전/후 수면의 높이 변화량에 대하여 논하시오. 또한, 1기압과 2기압 조건에서의 에탄올 연소반응에 대한 반응 속도, 속도상수, 활성화 에너지를 비교하여 논하시오. (단, 압력의 변화에 따른 실린더 내부의 온도 변화는 없는 것으로 가정한다.)
[10점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

외부압력 2 atm으로 증가 — 연소 전 수면 변화

초기(1 atm, 300 K): $V_0 = 2.4 \text{ L}$, $n_0 = (1 \times 2.4)/(0.08 \times 300) = 0.1 \text{ mol}$ (N_2 0.06 mol, O_2 0.04 mol).

외부압력 2 atm, 온도 일정: $V_1 = 0.1 \times 0.08 \times 300 / 2 = 1.2 \text{ L}$

$\Delta V = 2.4 - 1.2 = 1.2 \text{ L} = 1200 \text{ cm}^3 \rightarrow$ 수면 상승 = $1200 / 100 = 12 \text{ cm}$ (1기압일 때에 비해 기체 부피가 절반이 되므로 수면이 12 cm 올라간다.)

연소 후 기체 몰수 및 부피

에탄올 0.46 g = 0.01 mol 연소: 소모 $\text{O}_2 = 0.03 \text{ mol}$, 생성 $\text{CO}_2 = 0.02 \text{ mol}$, H_2O 액체 응축.

- N_2 : 0.06 mol
- O_2 : $0.04 - 0.03 = 0.01 \text{ mol}$
- CO_2 : 0.02 mol
- 합계 $n_f = 0.09 \text{ mol}$

압력 2 atm 유지: $V_f = 0.09 \times 0.08 \times 300 / 2 = 1.08 \text{ L}$

$\Delta V = 1.2 - 1.08 = 0.12 \text{ L} = 120 \text{ cm}^3$

반응 전/후 수면 상승 = $120 / 100 = 1.2 \text{ cm}$ (문제 1의 절반: 압력 2배이므로 같은 몰수 변화에서 부피 변화 절반)

반응속도, 속도상수 k, 활성화에너지 E_a 에 대한 설명

아레니우스 식: $k = A \cdot \exp(-E_a / RT)$

속도상수 k는 온도에 의존하고 활성화에너지 E_a 는 반응의 고유한 값이므로, 둘 다 농도·압력 변화와 무관하다.

- E_a (활성화에너지): 반응 경로에 의해 정해지는 값. 농도·압력 2배로 해도 불변.
- 속도상수 k: 동일 온도에서 불변. k는 농도의 함수가 아닌 온도의 함수이다.
- 반응속도(rate): $\text{rate} = k \cdot [\text{반응물}]^n$ 형태. 농도(압력)가 2배 $\rightarrow$ 반응물 농도 증가 $\rightarrow$ rate 증가.

따라서 압력(농도)을 2배로 높이면 반응속도는 증가하지만, 속도상수 k와 활성화에너지 E_a 는 변하지 않는다.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

화학 · 문제 3

※ 제시문은 앞 문항(화학 · 문제 1)을 참고하십시오.

[문제 3] [그림 1]의 장치를 이용하여 외부압력 1기압, 27°C에서, 실험 ①에서는 혼합기체 A에서 고체 연료 포도당을, 실험 ②에서는 혼합기체 A에서 액체 연료 에탄올을, 실험 ③에서는 혼합기체 B에서 기체 연료 에텐을 각각 연소시켰다. 각 실험에서 같은 양의 산소가 소비되었을 때, 실험 ①~③에서 수면의 높이 변화량을 비교하여 논하십시오. [10점]

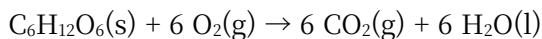
■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

연료별 기체 몰수 변화 Δn_{gas} 계산

27°C에서 물과 에탄올은 액체 → 기체 몰수 계산에서 제외. O_2 n mol 소모 기준.

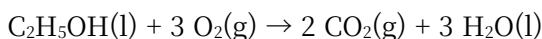
① 포도당 (고체 연료)



O_2 n mol 소모 → CO_2 n mol 생성. 포도당은 고체로 기체에 미기여.

$$\Delta n_{\text{gas}} = n(\text{생성}) - n(\text{소모}) = n - n = 0$$

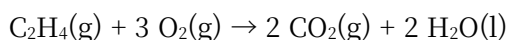
② 에탄올 (액체 연료)



O_2 n mol 소모 → CO_2 ($2n/3$) mol 생성. 에탄올은 액체.

$$\Delta n_{\text{gas}} = (2n/3) - n = -n/3 \text{ (기체 } n/3 \text{ 감소)}$$

③ 에텐/에틸렌 (기체 연료)



O_2 n mol 소모 → C_2H_4 ($n/3$) mol 소모 (기체), CO_2 ($2n/3$) mol 생성.

$$\Delta n_{\text{gas}} = (2n/3) - n - (n/3) = -2n/3 \text{ (기체 } 2n/3 \text{ 감소)}$$

수면 상승 크기 비교

압력 일정 시 기체 부피 $\propto n$. 기체 몰수 감소 클수록 수면 더 크게 상승.

$$|\Delta n_{\text{gas}}|: \text{③ } 2n/3 > \text{② } n/3 > \text{① } 0$$

수면 상승: ③ 에텐 > ② 에탄올 > ① 포도당

③의 수면 상승은 ②의 정확히 2배(Δn 비율 2:1). ①은 기체 몰수 변화가 없으므로 수면 상승 없음.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

화학 · 문제 4

※ 제시문은 앞 문항(화학 · 문제 1)을 참고하십시오.

[문제 4] [그림 1]의 장치에서 레몬의 과즙은 약 pH 2의 산성을 띠고 있다. 이 화학 전지의 산화 전극과 환원 전극을 제시하고 각 전극에서 일어나는 반쪽반응을 쓰시오. [10점]

■ 예시 답안

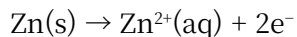
※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

볼타 전지(레몬 전지) 작동 원리

레몬 전지는 Zn 전극(음극, anode)과 Cu 전극(양극, cathode)을 산성 전해질(레몬 즙)에 담근 갈바니 전지이다.

이온화 경향: $Zn > Cu \rightarrow Zn$ 이 산화 전극, Cu 전극에서 환원 반응이 일어난다.

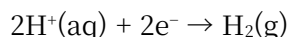
Zn 전극 — 산화 반응 (음극, anode)



Zn이 산화되어 Zn^{2+} 이온으로 용해되고, 전자 2개를 외부 도선으로 방출한다.

Cu 전극 — 환원 반응 (양극, cathode)

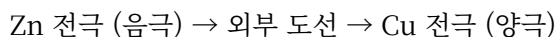
산성 용액(레몬 즙)에서 H^{+} 이온이 풍부하므로:



Cu 전극 표면에서 수소 이온(H^{+})이 전자를 받아 수소 기체로 환원된다. Cu 전극 자체는 반응하지 않고 전자 전달 매개체 역할을 한다.

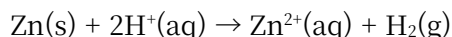
전자의 이동 방향

외부 회로(도선)를 통해 전자는 산화 전극에서 환원 전극 방향으로 이동한다:



전류의 방향(관습적)은 전자 이동과 반대: $Cu \rightarrow Zn$. 내부 전해질에서는 양이온이 Cu 전극 방향으로 이동하여 회로가 완성된다.

전체 반응식



■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

생명과학 · 문제 1

제시문

[가] 16세기에 사람들은 모든 식물은 씨앗(종자)에서 자라나는데 뿌리를 가진 이 식물의 경우 씨앗을 찾을 수 없었기 때문에 이 식물의 씨앗은 눈에 보이지 않는다고 생각했다. 당시 사람들은 식물의 약효가 잎과 꽃의 모양에 따라 좌우된다고 생각했다. 그러므로 키드니베치(Kidney Vetch)라는 콩은 콩팥 질환에 좋고, 우산이끼(Liverwort)는 이파리가 간처럼 생겼기 때문에 간에 좋은 약으로 생각했다. 이것은 ‘특징설(doctrine of signatures)’을 자연에까지 확대 적용한 것으로, 눈에 보이지 않는 이 식물의 씨앗을 얻으면 그 자신도 다른 사람의 눈에 보이지 않을 거라고 믿었다. (중략) 셰익스피어가 1597년에 쓴 희곡 <헨리4세>에서 가드실이라는 도둑은 공범을 끌어들이기 위해 이렇게 말한다. “성 안에 들어가면 우리는 보이지 않을 거야. 그 식물의 씨앗을 가지고 있거든. 안 보이게 걸어다닐 수 있어.” 사실 이 식물은 유성생식을 하지만 씨앗으로 번식하지 않는다. - <씨앗의 자연사>, 진선미 번역

[나] 식물이라면 열매를 맺고 씨앗으로 번식할 수 있지 않을까 하는 궁금증이 생길 텐데요. 혹시 개나리 열매를 보신 분 계신가요? 씨앗은요? 은행나무가 암수한그루인 것처럼 개나리도 장주화와 단주화 두 가지로 나뉩니다. 엄밀히 따지면 암꽃, 수꽃과는 조금 다른 개념이긴 한데요. 장주화는 수술이 퇴화하고 씨방이 있는 암술만 발달한 꽃이고, 단주화는 반대로 암술이 퇴화하고 수술이 발달한 꽃입니다. 번식을 위해서는 수술과 암술이 모두 있는 개나리이거나 장주화와 단주화가 모두 있어야 할 텐데, 우리가 도시에 심는 개나리는 모두 단주화입니다. 개나리를 자세히 살펴보면 가운데 암술이 짧고 곁에 수술만 길게 나 있는 걸 발견할 수 있을 거예요. 그래서 당연히 수정도 하지 못하고 열매도 맺지 못하죠. 스스로 번식하지 못하고 인간에 의해 꺾꽂이 등의 방식으로만 번식하는 거예요. 개나리 줄기 일부를 잘라서 땅에 심으면 새로운 개체가 되는 것이죠. 비록 지금이야 우리 주변에 개나리가 흔하지만, 이렇게 자생하는 개체도 없는데 의와 같은 번식을 하는 경우 최후엔 멸종할 수밖에 없습니다. - <식물의 책>, 이소영

[다] 근친도(유전적 관련 정도)는 두 사람의 친족이 1개의 유전자를 공유하게 되는 확률을 나타낸다. - <이기적유전자>, 홍영남 번역

달리 말해, 두 사람 사이에 특정 염색체의 특정 위치에 있는 유전자가 동일할 확률을 의미한다. 이때 동일하다는 것은 유전자의 기원이 동일하다는 의미이다. 여기에서는 하나의 염색체가 동일할 확률로 이해하자.

[라] tRNA는 매우 독특한 RNA분자이다. tRNA의 말단에는 아미노산이 결합하는 자리가 있으며, 또한 mRNA의 코돈과 상보적으로 결합할 수 있는 안티코돈이 존재한다. 따라서 tRNA는 안티코돈 서열에 따라 여러 종류가 있다. tRNA는 번역 과정에서 중요한 역할을 한다. 리보솜에서 새로운 펩타이드 결합이 형성될 때, tRNA는 결합하고 있던 아미노산을 합성되는 단백질의 펩타이드 사슬에 전달하게 된다. 그리고 아미노산을 잃어버린 tRNA는 자신의 안티코돈 서열에 맞는 특정 아미노산과의 결합이 다시 일어나 번역과정에 재참여한다. 이러한 tRNA와 특정 아미노산의 결합을 매개하는 효소가 아미노아실-tRNA 합성효소(aminoacyl-tRNA synthetase)이다. 이 효소군은 tRNA의 안티코돈과 아미노산에 대한 기질특이성을 가지고 있다. 따라서 각각의 tRNA가 가지고 있는 안티코돈에 상응하는 정확한 아미노산을 tRNA의 말단에 결합시키는 일을 매개하며 여러 종류의 아미노아실-tRNA 합성효소가 있다.

[마] 아래는 코돈표의 일부이다.

AUU AUC AUA	아이소류신	ACU ACC ACA ACG	트레오닌	AAU AAC	아스파라진	AGU AGC	세린
AUG	메싸이오닌			AAA AAG	라이신	AGA AGG	아르지닌
GUU GUC GUA GUG	발린	GCU GCC GCA GCG	알라닌	GAU GAC GAA GAG	아스파트산 글루탐산	GGU GGC GGA GGG	글리신

*번역은 개시코돈에서 시작해서 종결코돈에서 끝나며, AUG는 개시코돈, UAA와 UAG, UGA는 종결코돈임.

[문제 1] 제시문 가)의 밑줄 친 식물과 나)의 개나리가 각각 속할 수 있는 분류군이 무엇인지 근거와 함께 설명하고, 이 분류군들의 형질을 바탕으로 식물이 건조한 육상환경에 적응해 온 과정을 설명하라. [12점]

※ 대학에서 이 문항의 예시답안과 채점기준을 공개하지 않았습니다.

생명과학 · 문제 2

※ 제시문은 앞 문항(생명과학 · 문제 1)을 참고하십시오.

[문제 2] 제시문 나)에서 작가가 밑줄 친 부분과 같이 글을 쓴 이유를 사람과 같은 대부분의 다세포생물의 번식과 비교하여 설명하라. 사람의 경우 한 부모에서 태어난 자손의 유전적 다양성이 얼마인지를 근거와 함께 설명하라. 또한, 제시문 다)를 참고하여 나와 어머니 사이의 유전적 관련 정도와 나와 형제자매 사이의 유전적 관련 정도는 각각 얼마이며, 그 차이는 무엇인지 설명하라. (단, 교차와 돌연변이 효과는 고려하지 않는다.) [16점]

※ 대학에서 이 문항의 예시답안과 채점기준을 공개하지 않았습니다.

생명과학 · 문제 3

※ 제시문은 앞 문항(생명과학 · 문제 1)을 참고하시오.

[문제 3] 제시문 라)와 마)를 참고하여 답하라. 깊은 바다 속에서 발견된 세균을 분석한 결과, 아미노아실-tRNA 합성효소 중 하나의 구조가 기존 생물종에서 발견된 것과 매우 달랐다. 이 합성효소의 기능을 조사하기 위해 일반적인 대장균(E), 그리고 상응하는 정상 아미노아실-tRNA 합성효소 유전자를 깊은 바다 속 세균의 합성효소 유전자로 바꾼 대장균(T)에서 아래와 같은 임의의 유전자를 발현시켜 다음과 같은 아미노산의 서열을 얻었다.

임의의 유전자 염기서열:



T 대장균에서 얻어진 아미노산 서열: 메싸이오닌-발린-라이신-아스파르트산-글루탐산

동일한 유전자를 E 대장균에서 발현시켜 얻은 아미노산의 서열과 비교하라. 만약 이 서열이 T 대장균에서 얻은 서열과 다르다면 전사와 번역의 개시, 신장, 종결 중 어느 단계에서 차이가 발생했는지 추론하고, 그 단계에 해당하는 과정과 함께 설명하라. (단, 제시된 유전자 바뀔 외에 돌연변이 등 다른 변화는 고려하지 않는다.) [12점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

[mRNA 전사 및 코돈 분석]

비주형가닥(coding strand)은 mRNA와 염기 서열이 동일하고(T→U 치환), 주형가닥(template strand)으로부터 mRNA가 합성된다.

mRNA: 5'-ACGAAAUGGUCAAUGAUGAAUAAAA-3'

개시코돈(AUG)은 6번째 염기에서 시작한다. 코돈을 구분하면:

5'-ACGAA · AUG · GUC · AAU · GAU · GAA · UAA · AA-3'

각 코돈과 코돈표를 대조하면:

코돈	E 대장균 번역	T 대장균 번역	비고
AUG	Met (개시)	Met (개시)	동일
GUC	Val	Val	동일
AAU	Asn (아스파라진)	Lys (라이신)	차이 발생
GAU	Asp	Asp	동일
GAA	Glu	Glu	동일
UAA	종결	종결	동일

[결론: 번역의 어느 단계에서 차이가 발생하는가]

E 대장균과 T 대장균에서 mRNA 서열이 동일하므로 전사 단계의 차이는 없다. 또한 개시코돈(AUG)과 종결 코돈(UAA)이 두 경우 모두 동일하게 인식되어 번역의 **개시 단계**와 **종결 단계**에는 차이가 없다.

차이는 번역의 **신장(elongation) 단계**에서 발생한다. 구체적으로 세 번째 코돈 AAU를 번역할 때, E 대장균에서는 정상적인 아미노아실-tRNA 합성효소가 안티코돈 UUA를 가진 tRNA에 아스파라진(Asn)을 결합시켜 올바른 Asn-tRNA를 리보솜에 공급한다. 그러나 T 대장균에는 심해세균 유래의 비정상적인 아미노아실-tRNA 합성효소가 도입되어 있다. 이 효소는 기질특이성이 변형되어 있어, AAU에 상응하는 tRNA(안티코돈 UUA)에 Asn 대신 라이신(Lys)을 잘못 결합시킨다(오충전, mischarging). 신장 과정에서 이 Lys-tRNA가 리보솜 A 자리에 들어와 AAU 코돈과 염기쌍을 형성하면, Asn 대신 Lys가 펩타이드 사슬에 삽입된다.

제시문 라에 따르면, 아미노아실-tRNA 합성효소는 안티코돈과 아미노산 양쪽에 대한 기질특이성을 가지며 tRNA와 아미노산의 정확한 결합을 담당한다. T 대장균에서 이 효소의 기질특이성이 바뀌어 tRNA에 잘못된 아미노산이 결합(오충전)되었고, 그 결과 번역 신장 단계에서 세 번째 잔기가 Asn에서 Lys로 치환된 아미노산 서열(Met-Val-Lys-Asp-Glu)이 생성된 것이다.

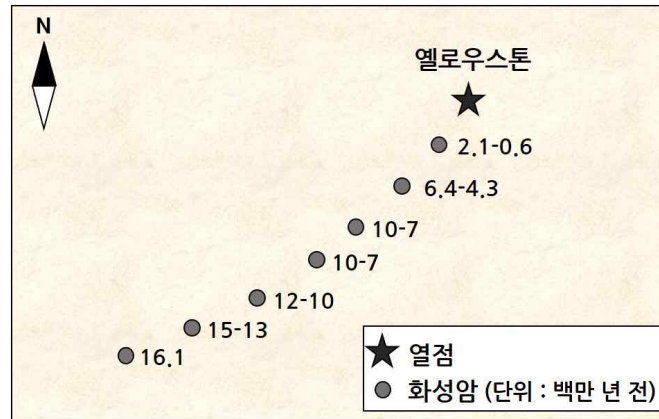
■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

지구과학 · 문제 1

제시문

[가] [그림 1]은 대표적인 대륙의 열점 중 하나인 북아메리카판의 옐로우스톤(Yellowstone)과 화성암의 분포를 나타낸 것이다.



[그림 1] 옐로우스톤과 주변의 화성암 분포.

[문제 1] 제시문 [가]에 제시된 내용을 읽고 다음 물음에 답하시오.

[문제 1.1] 플룸 구조론과 판구조론에 근거하여 화성암의 연령(연대) 분포를 판의 이동 방향과 관련지어 서술하시오. [3점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

[문제 1.1]

열점은 맨틀 하부의 플룸에 의해 공급되는 마그마로 형성되며, 판이 이동하더라도 그 위치는 고정된다. 따라서 판이 열점 위를 지나면서 화산이 순서대로 생성되어, 화성암 연령은 열점 위치(현재 활화산)에서 멀어질수록 오래된 값을 가진다.

- 북아메리카판이 남서 방향으로 이동함에 따라, 옐로우스톤 열점에서 생성된 화성암들은 남서쪽으로 갈수록 더 오래된 연령을 보인다.
- 즉 화성암 연령의 구배 방향(연령이 증가하는 방향)이 판의 이동 방향(남서)과 일치한다.
- [그림 1]의 연령 분포($2.1-0.6 \rightarrow 6.4-4.3 \rightarrow 10-7 \rightarrow 12-10 \rightarrow 15-13 \rightarrow 16.1$ 백만 년 전, 남서쪽으로 이동)가 이를 보여준다.

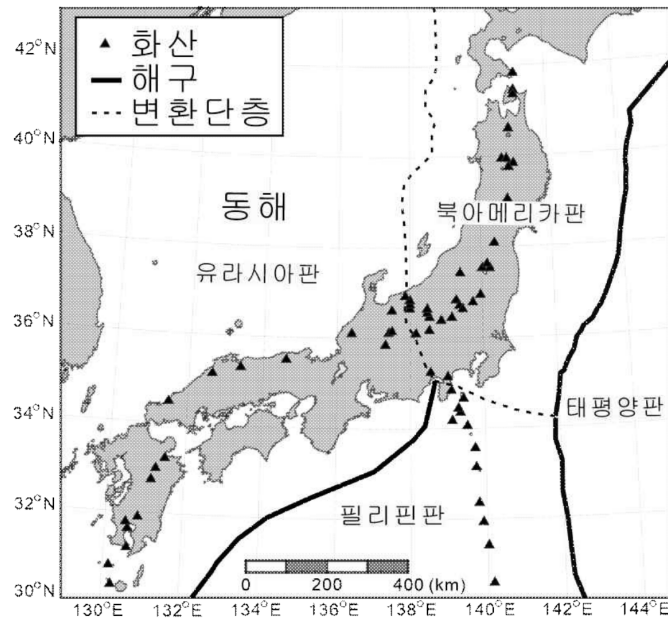
■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

지구과학 · 문제 2

제시문

[나] [그림 2]는 일본에서 신생대 제4기에 형성된 화산과 판의 경계를 표시한 것이다. 일본이 위치한 북아메리카판과 유라시아판의 모호로비치치 불연속면의 깊이는 지표면에서부터 약 30-35km이며, 필리핀판과 태평양판의 모호로비치치 불연속면의 깊이는 해저면에서부터 약 5-7km이다.



[그림 2] 일본의 화산과 판의 경계 분포.

[문제 2] 제시문 [나]에 제시된 내용을 읽고 다음 물음에 답하시오.

- 2.1 [그림 2]에 표시된 모든 판의 종류를 근거를 들어 대륙판 혹은 해양판으로 분류하시오. [3점]
- 2.2 섭입하는 판 위의 맨틀에서 마그마가 형성되는 원리를 물의 역할과 함께 서술하시오. [3점]
- 2.3 [문제 2.1]과 [문제 2.2]의 답안에 근거하여 섭입대를 이루는 두 판을 ‘상부 판의 이름(판의 종류)-침강하는 판의 이름(판의 종류)’ 순서로 있는 대로 서술하시오. [4점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

[문제 2.1]

[그림 2]에 표시된 판들을 모호로비치치 불연속면 깊이 기준으로 분류한다.

- **대륙판**: 북아메리카판, 유라시아판 - 모호면 깊이가 30-35 km로 두껍고 밀도가 낮은 대륙지각으로 이루어져 있다.
- **해양판**: 필리핀판, 태평양판 - 모호면 깊이가 5-7 km로 얇고 밀도가 높은 현무암질 해양지각으로 이루어져 있다.

[문제 2.2]

섭입하는 해양판에는 함수 광물(물이 결합된 광물)이 포함되어 있다. 이 판이 맨틀 속으로 침강하면 온도와 압력이 증가하여 함수 광물에서 물(H_2O)이 분리·방출된다. 방출된 물은 위쪽 맨틀 켜기(mantle wedge)의 감람암에 스며들어 용융점을 낮추고(물에 의한 용융점 강하), 이를 통해 부분용융이 일어나 마그마가 생성된다.

[문제 2.3]

위 분류와 원리에 근거하여, 밀도가 큰 판(주로 해양판)이 밀도가 작은 판 아래로 섭입한다. 성립 가능한 섭입대 쌍(상부판 - 침강판):

1. 북아메리카판(대륙판) - 태평양판(해양판)
2. 유라시아판(대륙판) - 필리핀판(해양판)
3. 필리핀판(해양판) - 태평양판(해양판) (태평양판이 더 오래되고 밀도가 커 침강)

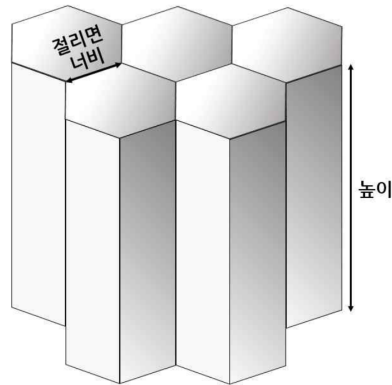
■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

지구과학 · 문제 3

제시문

[다] 주상절리대는 주로 화산암이 식는 과정에서 수직 방향으로 절리를 발달시켜 형성된다. 절리면 너비는 주상절리대를 구성하는 암석이 빠르게 냉각될수록 작다[그림 3]. 화산학자 이시현 박사는 우리나라 남해안의 한 지역에서 안산암으로 구성된 높이가 서로 다른 두 주상절리대 A와 B를 발견하였다. 주상절리대 A와 B의 높이는 각각 30m와 10m이다. 이시현 박사는 주상절리대 A로부터 동쪽으로 약 500m 떨어진 곳에서 역암을 발견하였다. 이 역암에는 주상절리대 A의 안산암 조각과 공통 발자국 화석이 함께 포함되어 있었다.



[그림 3] 주상절리대의 개략도.

[문제 3] 제시문 [다]에 제시된 내용을 읽고 다음 물음에 답하시오.

- 3.1 주상절리대 A의 생성 시기를 추론하시오. [3점]
- 3.2 이시현 박사는 지구화학자 이수인 박사에게 주상절리대 A의 샘플을 제공, 절대연령(연대) 측정을 의뢰하였다. 이수인 박사는 샘플의 절대연령을 측정하기 위하여 방사성 동위 원소 우라늄(^{235}U)과 탄소(^{14}C) 중 무엇을 사용하였을지 그 이유와 함께 서술하시오. [3점]
- 3.3 주상절리대 A와 B 중에서 어느 주상절리대의 절리면 너비가 큰지 서술하시오. (단, 주상절리대 A와 B는 같은 환경에서 냉각되어 형성된 이후 풍화는 거의 겪지 않았다고 가정한다.) [1점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

[문제 3.1]

역암 속에 주상절리대 A의 안산암 자갈이 포함되어 있으므로, A는 역암보다 먼저 형성되었다(포유물의 선후 관계). 또한 같은 역암에 공룡 발자국 화석이 포함되어 있으므로, 이 역암은 공룡이 살았던 중생대에 퇴적된 것이다(표준화석에 의한 지질 시대 결정). 따라서 주상절리대 A는 중생대 이전 또는 중생대(백악기)에 형성된 것으로 추론된다.

[문제 3.2]

우라늄(^{235}U)을 사용. 이유: 주상절리대 A는 중생대(수천만~수억 년 전)에 생성된 오래된 암석이다. ^{235}U 의 반감기는 약 7억 년으로 중생대 암석 연대 측정에 적합하다. 반면 ^{14}C 의 반감기는 약 5,730년에 불과하여 수천만 년 전 암석에서는 ^{14}C 가 이미 거의 모두 붕괴되어 잔량을 측정할 수 없다. 또한 안산암(화성암)에는 ^{14}C 측정에 필요한 유기 탄소가 거의 없다.

[문제 3.3]

A의 절리면 너비가 더 크다. A(높이 30 m)는 B(높이 10 m)보다 두껍게 쌓인 용암층으로, 같은 환경에서 냉각될 때 내부 열이 더 오래 유지되어 더 느리게 냉각된다. 절리면 너비는 냉각 속도가 느릴수록 크므로, A의 절리면 너비가 B보다 크다.

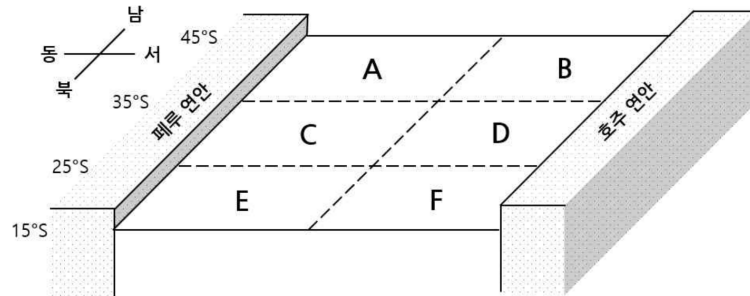
■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

지구과학 · 문제 4

제시문

[라] 대기와 해양은 지구의 구성 요소로 서로 끊임없이 영향을 주고받는다. 수백 km 이상의 규모에서 이들의 운동은 수평 방향 압력의 차이에서 발생하는 힘과 전향력이 균형을 이루는 상태로 발생한다. 한편 해양의 마찰층 또는 에크만층에서 해수의 평균 이동 방향은 북반구의 경우 바람 방향의 오른쪽 90° 방향을 향한다.



[그림 4] 남태평양 모식도

[문제 4] 제시문 [라]를 읽고 [그림 4]에 관한 물음에 답하시오.

- 4.1 [그림 4]는 무역풍과 편서풍의 영향을 받는 남태평양을 단순하게 표현한 것으로, 전향력의 크기는 고위도로 갈수록 커진다. A~F 중 해수면의 높이가 가장 높은 곳을 선택하고, 그 이유를 서술하시오. 또한 이로 인한 표층 해류의 순환 방향을 시계 방향 또는 시계 반대 방향으로 표현하여 쓰고, A~F 중 유속이 가장 빠른 곳을 쓰시오. [4점]
- 4.2 열대지역인 E와 F 중 열대저기압이 발달하기 어려운 곳과 그 이유를 대기와 해양의 운동을 바탕으로 서술하시오. [2점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

[문제 4.1]

해수면 최고: D

남태평양에서 저위도의 무역풍(동풍)에 의한 에크만 수송(남반구: 바람의 왼쪽 90°, 즉 남쪽)과 고위도 편서풍에 의한 에크만 수송(북쪽)이 중위도에서 수렴하여 해수면이 불룩하게 상승한다. 전향력은 고위도로 갈수록 크므로 서안강화(western intensification) 현상에 의해 해수면 최고점이 서쪽(호주 연안 쪽)으로 치우쳐 **D** 지점이 가장 높다.

순환 방향: 시계 반대 방향

남반구 아열대 환류는 시계 반대 방향으로 순환한다.

유속 최대: D

서안강화로 인해 서안경계류(호주 연안 측)가 좁고 빠른 해류를 형성하여 **D** 지점에서 유속이 가장 빠르다.

[문제 4.2]

E(페루 연안)

저위도 무역풍(동풍)에 의해 E 지점(페루 연안, 동쪽 경계)에서 표층수가 외해(서쪽)로 에크만 수송되면 연안 용승(upwelling)이 발생하여 찬 심층수가 표면으로 올라온다. 표층 수온이 낮아지므로 열대저기압 발달에 필요한 충분한 수증기·잠열 공급이 차단되어 열대저기압이 형성되기 어렵다.

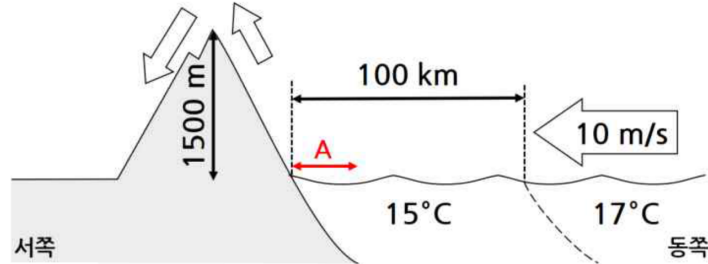
■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

지구과학 · 문제 5

제시문

[마] 안개는 공기 중 수증기의 응결로 만들어진 미세한 물방울이 떠 있는 현상으로 공기가 냉각되거나 수증기량이 증가할 때 발생한다. 이 중 이류안개는 온난하고 습윤한 공기가 차가운 표면 위를 지날 때 발생한다. 한편 공기의 건조 단열 감률은 $10^{\circ}\text{C}/\text{km}$, 습윤 단열 감률은 $5^{\circ}\text{C}/\text{km}$ 이라고 하고, 이슬점 감률은 $2^{\circ}\text{C}/\text{km}$ 정도의 값을 가진다.



[그림 5] 동해안 모식도

[문제 5] 제시문 [마]를 읽고 [그림 5]를 참고하여 물음에 답하시오.

- 5.1 온도는 17°C 이고 이슬점이 15°C 인 동해상의 공기가 10m/s 의 속력으로 서쪽으로 이동하고 있다. 공기 온도가 표층 수온보다 높으면 시간당 1°C 만큼 공기 온도가 하강하고, 이슬점은 변하지 않는다고 가정한다. 이 경우, 이류안개가 해안선에서 몇 km 떨어진 곳([그림 5]의 A)에서 발생할지 서술하시오. [4점]
- 5.2 이 공기가 해안에 도달했을 때 1500m 높이의 산을 만나, 이를 넘어 해수면 높이로 다시 하강하였을 때, 이 공기의 온도를 계산 과정과 함께 서술하시오. (단, 산 정상의 서쪽에는 구름 또는 안개가 없다.) [3점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

[문제 5.1]

계산:

공기 온도 17°C , 이슬점 $15^{\circ}\text{C} \Rightarrow$ 냉각 필요량 $= 17 - 15 = 2^{\circ}\text{C}$.

표층 수온보다 공기가 높으므로 시간당 1°C 씩 냉각 $\Rightarrow$ 2시간 소요.

이동 속력 $10\text{ m/s} = 36\text{ km/h}$ 이므로 2시간 동안 이동 거리 $= 36 \times 2 = 72\text{ km}$.

공기는 해안에서 동쪽으로 100 km 떨어진 외해에서 출발 $\Rightarrow$ 이류안개 발생 위치: 해안선에서 $100 - 72 =$ **약 28 km** 떨어진 지점(그림 5의 A).

[문제 5.2]

계산 과정:

해안 도달 시 공기 온도 = 이슬점 = 15°C (포화 상태).

산을 오를 때(포화 상태) $\Rightarrow$ 습윤 단열 감률 5°C/km 적용:

$$1500\text{ m} = 1.5\text{ km} \text{ 상승} \rightarrow \text{온도 감소} = 5 \times 1.5 = 7.5^{\circ}\text{C}$$

정상 온도 $= 15 - 7.5 = 7.5^{\circ}\text{C}$

산 정상에서 구름·안개 없음(불포화) $\Rightarrow$ 서쪽으로 하강할 때 건조 단열 감률 10°C/km 적용:

$$1.5\text{ km} \text{ 하강} \rightarrow \text{온도 증가} = 10 \times 1.5 = 15^{\circ}\text{C}$$

해수면 도달 온도 $= 7.5 + 15 =$ **22.5°C** (뽕 현상)

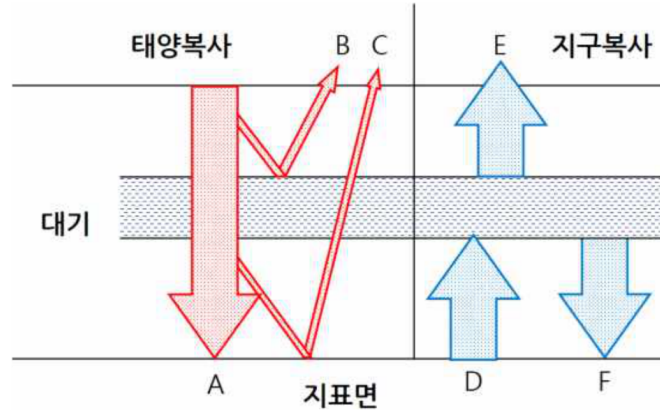
■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

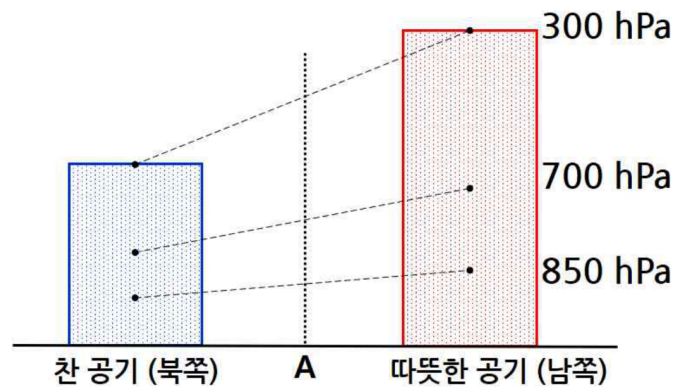
지구과학 · 문제 6

제시문

[바] 대규모 화산활동과 같은 자연적 요인뿐만 아니라 온실기체 배출 등의 인위적 요인도 지구 복사 평형의 상태를 바꾸어 지표면 온도를 변화시킨다. 지난 100여 년간 지구 평균기온이 상승하고 있는데, 기온이 가장 빠르게 상승하고 있는 곳은 북극 지역으로, 해빙(海氷, sea ice)과 빙하의 감소로 인하여 태양 복사 에너지가 더 많이 흡수되기 때문이다.



[그림 6] 지구 복사 평형에 대한 모식도



[그림 7] 온도 분포에 따른 등압면 높이 모식도

[문제 6] 제시문 [바]를 읽고 물음에 답하시오.

- 6.1 [그림 6]의 지구 복사 평형에서 대규모 화산활동이 발생하였을 때 A, B, C의 변화를 각각 서술하고, 또한 온실기체 증가로 인해 값이 변하는 기호를 모두 찾아 이들의 변화를 서술하시오. [4점]
- 6.2 북극 지역의 가파른 온도 상승은 남북방향의 온도 차이를 줄이면서 기압 분포의 변화를 만들 것으로 기대할 수 있다. [그림 7]과 같은 상황에서 북쪽의 온도가 상승할 때 A 지역에서 기울기 변화가 가장 큰 등압면을 찾아 쓰고, 이 때 편서풍 세기의 변화를 그 이유와 함께 서술하시오. [3점]

■ 예시 답안

※ 대학 미공개 문항으로, 자체 제작한 예시답안입니다.

[문제 6.1]

[대규모 화산활동 → A, B, C 변화]

화산활동으로 화산재와 황산 에어로졸이 성층권으로 유입되면 지구 알베도가 증가하여 태양복사가 더 많이 반사된다.

- A(지표 도달 태양복사): **감소** - 반사·산란이 증가하여 지표에 도달하는 태양복사 에너지가 줄어든다.
- B(대기에서 반사되는 태양복사): **증가** - 에어로졸에 의해 대기 중 반사량이 증가한다.
- C(지표면에서 반사되는 태양복사): **감소** - 지표에 도달하는 태양복사(A)가 줄어들므로 지표면에서 반사되어 나가는 양도 줄어든다.

[온실기체 증가 → 변화하는 기호]

온실기체 증가는 지구복사(적외선)의 흡수를 증가시켜 지구·대기 온도를 높인다.

- D(지표면 방출 지구복사): **증가** - 지표온도 상승으로 방출 복사 증가.
- E(우주로 방출되는 지구복사): **감소(단기)** - 대기의 흡수 증가로 우주로 방출되는 양 감소.
- F(대기 → 지표 하향 재복사): **증가** - 온실기체 증가로 대기의 지표 방향 재복사 증가.
- A, B, C는 태양복사와 관련되며 온실기체와 직접적 관련 없어 변화 없음.

[문제 6.2]

기울기 변화가 가장 큰 등압면: 300 hPa

등압면은 따뜻한 남쪽이 높고 찬 북쪽이 낮은 기울기를 가지며, 상층으로 갈수록 남북 고도차(기울기)가 누적되어 커진다. 따라서 세 등압면(850, 700, 300 hPa) 중 가장 상층인 300 hPa 등압면의 남북 기울기가 가장 크다. 북극 온난화로 남북 온도차가 줄면 기울기 변화량도 가장 큰 300 hPa에서 두드러진다.

편서풍 세기: 약화

상층 등압면 기울기 감소 ⇒ 남북 기압경도력 감소 ⇒ 지균풍(편서풍·제트류) 속도 감소. 즉 북극 온난화가 심화될수록 편서풍(제트류)이 약해진다.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다