

이화여대논술

자연계열

목차

2026학년도 자연계열 I · II	3
자연 I · 문항 1	3
자연 I · 문항 2	7
자연 I · 문항 3	12
자연 II · 문항 1	16
자연 II · 문항 2	21
자연 II · 문항 3	24
 2025학년도 자연계열 I · II	 28
자연 I · 문항 1	28
자연 I · 문항 2	31
자연 I · 문항 3	34
자연 II · 문항 1	37
자연 II · 문항 2	41
자연 II · 문항 3	44
 2024학년도 자연계열 I · II	 47
자연 I · 문항 1	47
자연 I · 문항 2	52
자연 I · 문항 3	55
자연 II · 문항 1	59
자연 II · 문항 2	64
자연 II · 문항 3	67

2026학년도 자연계열 I · II

자연 I · 문항 1

삼차함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, 아래 물음에 답하시오. [40점]

제시문

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이다.

(나) $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$

- (1) 삼차함수 $f(x)$ 를 구하시오.
- (2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ 가 성립함을 보이시오.
- (3) $f'(c) = g'(c)$ 를 만족시키는 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 오직 하나 존재함을 보이시오.
- (4) $0 \leq x \leq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq g(x)$ 가 성립함을 보이시오.

■ 예시 답안

1-(1)

삼차함수 $f(x)$ 를 구하시오.

[풀이]

함수 $f(x)$ 에 $x = 0$ 을 대입하면, 조건 (가)로부터 $f(-0) = -f(0)$ 이므로 $f(0) = 0$ 이다. 한편, $g(2) = \sin \pi = 0$ 이므로 조건 (나)로부터 $f(2) = g(2) = 0$ 이다. 다시 조건 (가)를 적용하면 $f(-2) = -f(2) = 0$ 이다. 따라서 삼차함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = ax(x-2)(x+2) \quad (a \neq 0 \text{ 인 상수})$$

임을 알 수 있다.

또한 $g(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ 이므로 조건 (나)로부터 $f(1) = g(1) = 1$ 이다. 따라서 $-3a = 1$ 이다. 즉 $a = -\frac{1}{3}$ 이다. 따라서 삼차함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = -\frac{1}{3}x(x-2)(x+2) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x$$

이다.

1-(2)

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ 가 성립함을 보이시오.

[풀이]

함수 $k(x) = \sin x$ 는 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $k''(x) = -\sin x < 0$ 이므로 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 위로 볼록하다. 함수 $k(x)$ 에 대하여 $k(0) = 0$, $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 이므로, 점 $(0, 0)$ 과 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 을 잇는 선분 $y = \frac{2}{\pi}x$ 보다 $y = k(x)$ 의 그래프가 위에 있다. 따라서

$$k(x) = \sin x > \frac{2}{\pi}x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이다. 결론적으로 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ 이다.

1-(3)

$f'(c) = g'(c)$ 를 만족시키는 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 오직 하나 존재함을 보이시오.

[풀이]

함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

라 할 때, 도함수는

$$h'(x) = -x^2 + \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x$$

이다.

도함수 $h'(x)$ 는 $h'(0) = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} < 0$ 이고 $h'(1) = \frac{1}{3} > 0$ 이다. 도함수 $h'(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이므로 사잇값의 정리에 의해 $h'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

식 ①에 $x = \frac{\pi}{2}t$ 로 치환하여 대입하면 $0 < t < 1$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $\sin \frac{\pi}{2}t > t$ 임을 알 수 있다.

따라서 $0 < x < 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$h''(x) = -2x + \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2}x > -2x + \frac{\pi^2}{4}x > 0$$

이다. 그러므로 도함수 $h'(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 증가하므로 $h'(c) = 0$ 을 만족시키는 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 오직 하나 존재한다. $h'(x) = f'(x) - g'(x)$ 이므로 $f'(c) = g'(c)$ 를 만족시키는 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 오직 하나 존재한다.

1-(4)

$0 \leq x \leq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq g(x)$ 가 성립함을 보이시오.

[풀이]

문항 (3)의 증명 과정에서 도함수 $h'(x)$ 는 $0 \leq x < c$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $h'(x) < 0$ 이고 $c < x \leq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $h'(x) > 0$ 이다. 즉 함수 $h(x)$ 는 닫힌구간 $[0, c]$ 에서 감소하고 닫힌구간 $[c, 1]$ 에서 증가한다. 한편 $h(0) = 0$ 이고 $h(1) = 0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 $0 \leq x \leq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) \leq 0$ 이다. 따라서 $0 \leq x \leq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \leq g(x)$ 가 성립한다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	삼차함수 $f(x)$ 를 구하시오.	6점
	$f(0) = 0$ 임을 보임	1점
	$g(2) = 0$ 과 $f(2) = g(2)$ 로부터 $f(2) = 0$ 임을 보임	1점
	$f(-2) = 0$ 임을 보임	2점
	$g(1) = 1$ 과 $f(1) = g(1)$ 로부터 $-3a = 1$, $a = -\frac{1}{3}$ 임을 보임	1점
	삼차함수 $f(x) = -\frac{1}{3}x(x-2)(x+2) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x$ 임을 보임	1점
1-(2)	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ 가 성립함을 보이시오.	8점
	$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 인 x 에 대하여 $(\sin x)'' = -\sin x < 0$ 임을 보이고, 구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 위로 볼록임을 보임	2점
	함수 $k(x)$ 에 대하여 $k(0) = 0$, $k(\frac{\pi}{2}) = 1$ 임을 보임	2점
	점 $(0, 0)$ 과 점 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 을 잇는 선분 $y = \frac{2}{\pi}x$ 보다 $y = k(x)$ 의 그래프가 위에 있다.	2점
	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ 이다.	2점
1-(3)	$f'(c) = g'(c)$ 를 만족시키는 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 오직 하나 존재함을 보이시오.	16점
	함수 $h(x) = f(x) - g(x)$ 를 설정하고 도함수 $h'(x) = -x^2 + \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}x$ 를 구함	2점
	$h'(0) = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} < 0$, $h'(1) = \frac{1}{3} > 0$ 임을 보임	2점
	도함수 $h'(x)$ 에 사잇값의 정리를 적용해서 $h'(c) = 0$ 인 c 가 0과 1 사이에 적어도 하나 존재함을 보임	3점
	식 ①에 $\frac{\pi}{2}x$ 를 x 대신 치환하여 $0 < x < 1$ 인 x 에 대하여 $\sin \frac{\pi}{2}x > x$ 임을 보임	3점
	$0 < x < 1$ 인 x 에 대하여 $h''(x) = -2x + \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2}x > -2x + \frac{\pi^2}{4}x > 0$ 임을 보임	3점
	$h'(x) = 0$ 을 만족시키는 점이 $x = c$ 하나뿐임을 보임. 결론적으로 $[0, 1]$ 에서 $f'(x) = g'(x)$ 를 만족시키는 점은 $x = c$ 하나뿐임을 보임	3점
1-(4)	$0 \leq x \leq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq g(x)$ 가 성립함을 보이시오.	10점
	문항 (3)의 증명 과정으로부터 $0 \leq x < c$ 인 x 에 대하여 $h'(x) < 0$ 이고 $c < x \leq 1$ 인 x 에 대하여 $h'(x) > 0$ 임을 보임	3점
	함수 $h(x)$ 가 $[0, c]$ 에서 감소하고 닫힌구간 $[c, 1]$ 에서 증가함을 보임	2점
	$h(0) = 0$ 이고 $h(1) = 0$ 임을 지적	2점
	$0 \leq x \leq 1$ 인 x 에 대하여 $h(x) \leq 0$ 임을 보임으로써 $0 \leq x \leq 1$ 인 x 에 대하여 $f(x) \leq g(x)$ 임을 보임	3점

자연 I · 문항 2

두 다항식 $P(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$ 와 $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2)\dots(x - b_n)$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

제시문

- (가) $m < n$
- (나) $a_0, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$ 은 상수이다.
- (다) $a_m \neq 0$
- (라) $b_1 < b_2 < \dots < b_n$

다음 등식

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x - b_1} + \frac{c_2}{x - b_2} + \dots + \frac{c_n}{x - b_n} \quad (c_1, c_2, \dots, c_n \text{ 은 상수})$$

가 성립할 때, 아래 물음에 답하십시오. [30점]

- (1) $x \neq b_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$)일 때, $\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - b_k}$ 이 성립함을 보이시오.
- (2) $k = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 $Q'(b_k) \neq 0$ 과 $c_k = \frac{P(b_k)}{Q'(b_k)}$ 가 성립함을 보이시오.
- (3) $c_1 + \dots + c_n = \begin{cases} 0 & (m < n - 1) \\ a_m & (m = n - 1) \end{cases}$ 이 성립함을 보이시오.

■ 예시 답안

2-(1)

$x \neq b_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$)일 때, $\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-b_k}$ 이 성립함을 보이시오.

[풀이]

다항식 $Q(x) = (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$ 에 대하여

$$\ln|Q(x)| = \ln|(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)| = \ln|x-b_1| + \ln|x-b_2| + \cdots + \ln|x-b_n|$$

이다. 양변을 x 에 대하여 미분하면 $\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x-b_1} + \cdots + \frac{1}{x-b_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-b_k}$ 이 성립한다.

(별해)

다항식 $Q(x) = (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$ 이므로

$$\begin{aligned} Q'(x) &= (x-b_2)(x-b_3)\cdots(x-b_n) \\ &\quad + (x-b_1)(x-b_3)\cdots(x-b_n) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (x-b_1)\cdots(x-b_{k-1})(x-b_{k+1})\cdots(x-b_n) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{n-1}) \end{aligned}$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{Q'(x)}{Q(x)} &= \frac{(x-b_2)(x-b_3)\cdots(x-b_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)} \\ &\quad + \frac{(x-b_1)(x-b_3)\cdots(x-b_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \frac{(x-b_1)\cdots(x-b_{k-1})(x-b_{k+1})\cdots(x-b_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)} \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + \frac{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{n-1})}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)} \\ &= \frac{1}{x-b_1} + \cdots + \frac{1}{x-b_k} + \cdots + \frac{1}{x-b_n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-b_k} \end{aligned}$$

2-(2)

$k = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 $Q'(b_k) \neq 0$ 과 $c_k = \frac{P(b_k)}{Q'(b_k)}$ 가 성립함을 보이시오.

[풀이]

다항식 $Q(x)$ 의 도함수 $Q'(x)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q'(x) &= (x-b_2)(x-b_3)\cdots(x-b_n) \\ &\quad + (x-b_1)(x-b_3)\cdots(x-b_n) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (x-b_1)\cdots(x-b_{k-1})(x-b_{k+1})\cdots(x-b_n) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{n-1}) \end{aligned}$$

$Q'(x)$ 에서 $(x-b_k)$ 를 인수로 포함하지 않는 항은 $(x-b_1)\cdots(x-b_{k-1})(x-b_{k+1})\cdots(x-b_n)$ 이고 그 이외의 항들은 $(x-b_k)$ 를 인수로 포함하고 있다.

따라서 $Q'(x)$ 에서 $x = b_k$ 를 대입하면 $(x - b_k)$ 를 인수로 포함하고 있는 항들은 모두 0이 되고 $(x - b_k)$ 를 인수로 포함하지 않은 항 $(x - b_1) \cdots (x - b_{k-1})(x - b_{k+1}) \cdots (x - b_n)$ 은 $(b_k - b_1) \cdots (b_k - b_{k-1})(b_k - b_{k+1}) \cdots (b_k - b_n)$ 이 된다. 여기에서 조건 (라)에 의하여 $i \neq k$ 이면 $b_k - b_i \neq 0$ 이므로 $Q'(b_k) = (b_k - b_1) \cdots (b_k - b_{k-1})(b_k - b_{k+1}) \cdots (b_k - b_n) \neq 0$ 이 성립한다.

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_1}{x - b_1} + \frac{c_2}{x - b_2} + \cdots + \frac{c_n}{x - b_n}$ 이고 $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)$ 이므로

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(\frac{c_1}{x - b_1} + \frac{c_2}{x - b_2} + \cdots + \frac{c_n}{x - b_n} \right) \cdot Q(x) \\ &= \left(\frac{c_1}{x - b_1} + \frac{c_2}{x - b_2} + \cdots + \frac{c_n}{x - b_n} \right) \cdot (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n) \\ &= c_1(x - b_2)(x - b_3) \cdots (x - b_n) \\ &\quad + c_2(x - b_1)(x - b_3) \cdots (x - b_n) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + c_k(x - b_1) \cdots (x - b_{k-1})(x - b_{k+1}) \cdots (x - b_n) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + c_n(x - b_1) \cdots (x - b_{n-1}) \end{aligned}$$

이고 $P(x)$ 의 항들 중에서 $(x - b_k)$ 를 인수로 포함하지 않은 항은 $c_k(x - b_1) \cdots (x - b_{k-1})(x - b_{k+1}) \cdots (x - b_n)$ 이고 그 이외의 항들은 $(x - b_k)$ 를 인수로 포함하므로

$$P(b_k) = c_k(b_k - b_1) \cdots (b_k - b_{k-1})(b_k - b_{k+1}) \cdots (b_k - b_n) = c_k \cdot Q'(b_k) \text{ 이다.}$$

$$Q'(b_k) = (b_k - b_1) \cdots (b_k - b_{k-1})(b_k - b_{k+1}) \cdots (b_k - b_n) \neq 0 \text{ 이므로 } c_k = \frac{P(b_k)}{Q'(b_k)} \text{ 이다.}$$

2-(3)

$c_1 + \cdots + c_n = \begin{cases} 0 & (m < n - 1) \\ a_m & (m = n - 1) \end{cases}$ 이 성립함을 보이시오.

[풀이]

다음 분수식을 통분하면

$$\begin{aligned} &\frac{c_1}{x - b_1} + \frac{c_2}{x - b_2} + \cdots + \frac{c_n}{x - b_n} \\ &= \frac{c_1(x - b_2) \cdots (x - b_n) + c_2(x - b_1)(x - b_3) \cdots (x - b_n) + \cdots + c_n(x - b_1) \cdots (x - b_{n-1})}{(x - b_1) \cdots (x - b_n)} \end{aligned}$$

이고 $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)$ 이므로

$$P(x) = c_1(x - b_2) \cdots (x - b_n) + c_2(x - b_1)(x - b_3) \cdots (x - b_n) + \cdots + c_n(x - b_1) \cdots (x - b_{n-1})$$

이다.

또한 $(x - b_2) \cdots (x - b_n), (x - b_1)(x - b_3) \cdots (x - b_n), \cdots, (x - b_1) \cdots (x - b_{n-1})$ 은 모두 $(n - 1)$ 차 다항식이므로

$$\begin{aligned} P(x) &= c_1(x - b_2) \cdots (x - b_n) + c_2(x - b_1)(x - b_3) \cdots (x - b_n) + \cdots + c_n(x - b_1) \cdots (x - b_{n-1}) \\ &= (c_1 + \cdots + c_n)x^{n-1} + R(x) \end{aligned}$$

이다. 이때 $R(x)$ 는 최고차항의 차수가 $(n - 1)$ 보다 낮은 다항식이다. 따라서

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (c_1 + \cdots + c_n)x^{n-1} + R(x)$$

이므로 $m = n - 1$ 일 때에는 $a_m = c_1 + \cdots + c_n$ 이고 $m < n - 1$ 일 때에는 $c_1 + \cdots + c_n = 0$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	$x \neq b_k$ ($k = 1, 2, \cdots, n$)일 때, $\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - b_k}$ 이 성립함을 보이시오.	10점

하위 문항	채점 기준	배점
	다항식 $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)$ 에 로그함수를 적용하여 $\ln Q(x) = \ln x - b_1 + \ln x - b_2 + \cdots + \ln x - b_n $ 을 유도	5점
	$\ln Q(x) = \ln x - b_1 + \ln x - b_2 + \cdots + \ln x - b_n $ 을 x 에 대하여 미분하여 $\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x - b_1} + \cdots + \frac{1}{x - b_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - b_k}$ 을 얻음	5점
2-(1) 별해	$Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)$ 에 함수의 곱의 미분을 적용하여 $Q'(x) = (x - b_2)(x - b_3) \cdots (x - b_n)$ $+ (x - b_1)(x - b_3) \cdots (x - b_n)$ $+ \cdots$ $+ (x - b_1) \cdots (x - b_{k-1})(x - b_{k+1}) \cdots (x - b_n)$ $+ \cdots$ $+ (x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_{n-1})$ 을 유도	5점
2-(1) 별해	위의 $Q'(x)$ 를 $Q(x)$ 로 나누어 $\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \frac{(x - b_2)(x - b_3) \cdots (x - b_n)}{(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)}$ $+ \frac{(x - b_1)(x - b_3) \cdots (x - b_n)}{(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)}$ $+ \cdots$ $+ \frac{(x - b_1) \cdots (x - b_{k-1})(x - b_{k+1}) \cdots (x - b_n)}{(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)}$ $+ \cdots$ $+ \frac{(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_{n-1})}{(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)}$ $= \frac{1}{x - b_1} + \cdots + \frac{1}{x - b_k} + \cdots + \frac{1}{x - b_n}$ $= \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - b_k}$ 을 유도	5점
2-(2)	$k = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 $Q'(b_k) \neq 0$ 과 $c_k = \frac{P(b_k)}{Q'(b_k)}$ 가 성립함을 보이시오.	10점
	$Q'(b_k) = (b_k - b_1) \cdots (b_k - b_{k-1})(b_k - b_{k+1}) \cdots (b_k - b_n)$ 을 유도	2점
	(라) 조건에 의하여 $Q'(b_k) \neq 0$	2점
	$P(b_k) = c_k(b_k - b_1) \cdots (b_k - b_{k-1})(b_k - b_{k+1}) \cdots (b_k - b_n)$ 을 유도	2점
	$(b_k - b_1) \cdots (b_k - b_{k-1})(b_k - b_{k+1}) \cdots (b_k - b_n) = Q'(b_k)$ 을 확인	2점
	$Q'(b_k) \neq 0$ 이므로 $c_k = \frac{P(b_k)}{Q'(b_k)}$ 가 성립함을 확인	2점
2-(3)	$c_1 + \cdots + c_n = \begin{cases} 0 & (m < n - 1) \\ a_m & (m = n - 1) \end{cases}$ 이 성립함을 보이시오.	10점

하위 문항	채점 기준	배점
	$P(x) = c_1(x - b_2) \cdots (x - b_n)$ $+ c_2(x - b_1)(x - b_3) \cdots (x - b_n)$ $+ \cdots$ $+ c_n(x - b_1) \cdots (x - b_{n-1})$ 을 유도	3점
	위의 식을 정리하면 $P(x)$ 가 $(n - 1)$ 차 다항식이어서 $P(x) = (c_1 + \cdots + c_n)x^{n-1} + \text{나머지 항}$ 으로 표현됨	2점
	$P(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 으로 주어졌으므로 $a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (c_1 + \cdots + c_n)x^{n-1} + R(x)$	2점
	위의 등식으로부터 $c_1 + \cdots + c_n = \begin{cases} 0 & (m < n - 1) \\ a_m & (m = n - 1) \end{cases}$ 을 유도	3점

자연 I · 문항 3

닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $H(x)$ 를

$$H(x) = \int_0^x f(t) dt - \int_x^1 f(t) dt \quad (-1 \leq x \leq 2)$$

라 할 때, 아래 물음에 답하시오. [30점]

- (1) $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 함수 $H(x)$ 가 연속임을 보이시오.
 (2) 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 (1 - 2x)f(x) dx$$

- (3) $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 xf(x) dx$ 일 때, 다음 등식을 만족시키는 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

$$\int_0^c f(x) dx = \int_c^1 f(x) dx$$

- (4) $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = 0 \iff H(x) = 0$$

임을 보이시오.

■ 예시 답안

3-(1)

$-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 함수 $H(x)$ 가 연속임을 보이시오.

[풀이]

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 적분과 미분의 관계에 의해 다음을 알 수 있다.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a < x < b)$$

$-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 라 하면, 위 성질로부터 함수 $F(x)$ 는 $-1 < x < 2$ 에서 미분가능하고, 따라서 연속이다. 정적분의 성질에 의해 함수 $H(x)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H(x) = 2 \left(F(x) - \int_{-1}^0 f(t) dt \right) - \int_0^1 f(t) dt = 2F(x) - 2 \int_{-1}^0 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt \quad \dots\dots ①$$

함수 $F(x)$ 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 연속이고 연속함수의 성질에 의해 함수 $H(x)$ 도 그 구간에서 연속이다.

3-(2)

다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 (1 - 2x)f(x) dx$$

[풀이] 상수 $A = -2 \int_{-1}^0 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = -2 \int_{-1}^1 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt$ 라 하자. ①로부터 $H(x) = 2F(x) + A$ 임을 알 수 있고, $\frac{d}{dx}x = 1$ 이므로 부분적분법을 이용하면 다음을 보일 수 있다.

$$\int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 (1 \cdot (2F(x) + A)) dx = 2F(1) + A - 2 \int_0^1 xF'(x) dx$$

이때, $2F(1) + A = H(1) = \int_0^1 f(x) dx$ 이고 $F'(x) = f(x)$ 이므로 다음 등식이 성립한다.

$$\int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 (1 - 2x)f(x) dx$$

3-(3)

$\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 xf(x) dx$ 일 때, 다음 등식을 만족시키는 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재함을 보이시오.

$$\int_0^c f(x) dx = \int_c^1 f(x) dx$$

[풀이]

주어진 조건과 문항 (2)의 결과로부터 $\int_0^1 H(x) dx = 0$ 임을 알 수 있다.

함수 $G(x)$ 를 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 다음과 같이 정의하자.

$$G(x) = \int_{-1}^x H(t) dt$$

그러면 함수 $G(x)$ 는 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하고, 따라서 그 구간에서 연속이다. 또한, $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $G'(x) = H(x)$ 를 만족한다. 이때, $\int_0^1 H(x) dx = 0$ 이므로

$$G(0) = \int_{-1}^0 H(t) dt, \quad G(1) = \int_{-1}^1 H(t) dt = \int_{-1}^0 H(t) dt + \int_0^1 H(t) dt = \int_{-1}^0 H(t) dt$$

이다. 따라서 $G(0) = G(1)$ 이다. 함수 $G(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고, 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하므로 롤의 정리에 의해 $G'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나 존재한다. $H(c) = G'(c) = 0$ 이므로 함수 $H(x)$ 의 정의에 의해 다음 등식이 성립한다.

$$\int_0^c f(x) dx = \int_c^1 f(x) dx$$

3-(4)

$-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = 0 \iff H(x) = 0$$

임을 보이시오.

[풀이]

$-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0$ 이면 $\int_0^x f(t) dt - \int_x^1 f(t) dt = 0$ 이므로, $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $H(x) = 0$ 이다.

역으로, $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $H(x) = 0$ 이면 $H(x) = 2F(x) + A$ 이므로 $F(x) = -\frac{A}{2}$ 이다. 따라서 $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = F'(x) = 0$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	$-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 함수 $H(x)$ 가 연속임을 보이시오.	7점
	닫힌구간 $[a, b]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 다음의 적분과 미분의 관계를 언급한다. $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a < x < b)$	2점
	미분가능한 함수는 연속임을 언급한다.	2점
	함수 $H(x)$ 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 연속이라는 결론을 도출한다.	3점
3-(2)	다음 등식이 성립함을 보이시오. $\int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 (1 - 2x)f(x) dx$	9점
	$\int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 1 \cdot H(x) dx$ 이고 $1 = \frac{d}{dx}x$ 임을 언급한다.	3점
	부분적분법을 이용하여 $\int_0^1 H(x) dx = [xH(x)]_0^1 - 2 \int_0^1 xf(x) dx$ 의 형태로 표현한다.	3점
	$[xH(x)]_0^1 = \int_0^1 f(x) dx$ 임을 보이고 $\int_0^1 H(x) dx = \int_0^1 (1 - 2x)f(x) dx$ 라는 결론을 도출한다.	3점
3-(3)	$\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 xf(x) dx$ 일 때, 다음 등식을 만족시키는 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재함을 보이시오. $\int_0^c f(x) dx = \int_c^1 f(x) dx$	10점
	$\int_0^1 H(x) dx = 0$ 임을 언급한다.	1점
	함수 $H(x)$ 의 한 부정적분이 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 롤의 정리 조건을 만족함을 언급한다.	4점

하위 문항	채점 기준	배점
	롤의 정리로부터 $H(c) = 0$ 을 만족시키는 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재함을 언급한다.	4점
	$\int_0^c f(x) dx = \int_c^1 f(x) dx$ 이라는 결론을 도출한다.	1점
3-(4)	$-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0 \iff H(x) = 0$ 임을 보이시오.	4점
	$-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0$ 일 때, 임의의 구간에서의 함수 $f(x)$ 의 정적분 값이 0임을 언급하고 $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $H(x) = 0$ 이라는 결론을 도출한다.	2점
	$-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $H(x) = 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분이 상수함수임을 언급하고 $-1 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0$ 이라는 결론을 도출한다.	2점

자연 II · 문항 1

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수 $f''(x)$ 를 갖고 다음 조건을 만족시킨다.

제시문

(가) $\int_2^6 f''(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx = -\frac{\pi^2}{16}$

(나) $x \geq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = -f(x)$ 이다.

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = \int_0^{4n+2} f(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx$ 라 할 때, 아래 물음에 답하시오. [40점]

(1) $\int_2^6 f(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx$ 의 값을 구하시오.

(2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^m a_n$ 의 값을 구하시오.

(3) 다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

$$a_1^2 + \cdots + a_{2026}^2 \geq \frac{2025 \times 2026 \times 2027}{12}$$

(4) 문항(3)의 부등식의 등호가 성립할 때 다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{a_3 + a_4}{a_3^2 a_4^2} + \cdots + \frac{a_{2025} + a_{2026}}{a_{2025}^2 a_{2026}^2}$$

■ 예시 답안

1-(1)

$\int_2^6 f(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx$ 의 값을 구하시오.

[풀이] 부분적분법을 활용하여

$$\int_2^6 f(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx = \frac{4}{\pi} \left[f(x) \sin \frac{\pi x}{4} \right]_2^6 - \frac{4}{\pi} \int_2^6 f'(x) \sin \frac{\pi x}{4} dx \text{ 이다.}$$

조건(나)에서 $f(6) = -f(2)$ 이므로

$$\left[f(x) \sin \frac{\pi x}{4} \right]_2^6 = f(6) \sin \frac{3\pi}{2} - f(2) \sin \frac{\pi}{2} = -f(6) - f(2) = 0 \text{ 이다.}$$

부분적분법을 적용하면

$$\begin{aligned} \int_2^6 f(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx &= -\frac{4}{\pi} \int_2^6 f'(x) \sin \frac{\pi x}{4} dx \\ &= -\frac{4}{\pi} \left(-\frac{4}{\pi} \left[f'(x) \cos \frac{\pi x}{4} \right]_2^6 + \frac{4}{\pi} \int_2^6 f''(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx \right) \end{aligned}$$

이다. 한편 $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ 이고 조건(가)에 의하여

$$\int_2^6 f(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx = -\frac{4}{\pi} \left(-\frac{4}{\pi} \left(f'(6) \cos \frac{3\pi}{2} - f'(2) \cos \frac{\pi}{2} \right) + \frac{4}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi^2}{16} \right) \right) = 1$$

이다.

1-(2)

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^m a_n$ 의 값을 구하시오.

[풀이] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x) \cos \frac{\pi x}{4}$ 라 하면, $x \geq 2$ 인 모든 실수 x 에 대해

$$g(x+4) = f(x+4) \cdot \cos \left(\pi + \frac{\pi x}{4} \right) = (-f(x)) \cdot \left(-\cos \frac{\pi x}{4} \right) = g(x) \quad \dots \textcircled{1} \text{ 이다.}$$

문항(1)에 의하여

$$a_1 = \int_0^6 g(x) dx = \int_0^2 g(x) dx + \int_2^6 g(x) dx = \int_0^2 g(x) dx + 1$$

이고 정적분의 성질에 의해서 자연수 n 에 대해

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{4n+6} g(x) dx - \int_0^{4n+2} g(x) dx = \int_{4n+2}^{4n+6} g(x) dx$$

이므로 $x = y + 4n$ 이라 놓으면 $\textcircled{1}$, 문항(1)에 의하여

$$a_{n+1} - a_n = \int_2^6 g(y+4n) dy = \int_2^6 g(y) dy = \int_2^6 f(y) \cos \frac{\pi y}{4} dy = 1 \text{ 이다.}$$

따라서 a_n 은 첫째항이 $\int_0^2 g(x) dx + 1$, 공차가 1인 등차수열이다. 그러므로 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = \left(\int_0^2 g(x) dx + 1 \right) + (n-1) \cdot 1 = n + \int_0^2 g(x) dx \quad \dots \textcircled{2} \text{ 이다.}$$

따라서

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^m a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^m \left(n + \int_0^2 g(x) dx \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^m n + \frac{1}{m^2} \left(\int_0^2 g(x) dx \right) \cdot \sum_{n=1}^m 1 \right)$$

이다. 한편, 자연수의 거듭제곱의 합에 의하여 자연수 m 에 대해 $\sum_{n=1}^m n = \frac{m(m+1)}{2}$, $\sum_{n=1}^m 1 = m$ 이다. 이를 위식에 대입하면 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의해서

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^m a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m(m+1)}{2m^2} + \frac{1}{m} \int_0^2 g(x) dx \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m(m+1)}{2m^2} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \int_0^2 g(x) dx = \frac{1}{2}$$

이다.

1-(3)

다음 부등식이 성립함을 증명하시오.

$$a_1^2 + \cdots + a_{2026}^2 \geq \frac{2025 \times 2026 \times 2027}{12}$$

[풀이] 식 ㉠에 의하여

$$\begin{aligned} a_1^2 + \cdots + a_{2026}^2 &= \sum_{n=1}^{2026} \left(n + \int_0^2 g(x) dx \right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{2026} n^2 + 2 \left(\int_0^2 g(x) dx \right) \cdot \sum_{n=1}^{2026} n + \left(\int_0^2 g(x) dx \right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{2026} 1 \quad \dots \text{㉡} \end{aligned}$$

이다. 자연수의 거듭제곱의 합에 의하여 자연수 m 에 대해 $\sum_{n=1}^m n^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ 이므로,

$$\sum_{n=1}^{2026} n^2 = \frac{2026 \times 2027 \times 4053}{6}, \quad \sum_{n=1}^{2026} n = \frac{2026 \times 2027}{2}, \quad \sum_{n=1}^{2026} 1 = 2026 \quad \dots \text{㉢}$$

이다. $t = \int_0^2 g(x) dx$ 라 하면 ㉡, ㉢에 의하여

$$a_1^2 + \cdots + a_{2026}^2 = 2026 \left(t^2 + 2027t + \frac{2027 \times 4053}{6} \right) \quad \dots \text{㉣}$$

이다. 한편,

$$\begin{aligned} &2026 \left(t^2 + 2027t + \frac{2027 \times 4053}{6} \right) \\ &= 2026 \left(\left(t + \frac{2027}{2} \right)^2 + \frac{2025 \times 2027}{12} \right) \geq \frac{2025 \times 2026 \times 2027}{12} \quad \dots \text{㉤} \end{aligned}$$

이다. ㉣, ㉤에 의하여

$$a_1^2 + \cdots + a_{2026}^2 \geq \frac{2025 \times 2026 \times 2027}{12}$$

이 성립한다.

1-(4)

문항(3)의 부등식의 등호가 성립할 때 다음 식의 값을 구하시오.

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{a_3 + a_4}{a_3^2 a_4^2} + \cdots + \frac{a_{2025} + a_{2026}}{a_{2025}^2 a_{2026}^2}$$

[풀이] 자연수 n 에 대해서 $a_{n+1} - a_n = 1$ 이므로

$$\frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2} = \frac{(a_n + a_{n+1})(a_{n+1} - a_n)}{a_n^2 a_{n+1}^2} = \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{a_n^2 a_{n+1}^2} = \frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{n+1}^2}$$

이다. 따라서

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{a_3 + a_4}{a_3^2 a_4^2} + \cdots + \frac{a_{2025} + a_{2026}}{a_{2025}^2 a_{2026}^2} = \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} - \frac{1}{a_4^2} + \cdots + \frac{1}{a_{2025}^2} - \frac{1}{a_{2026}^2}$$

이다.

한편, 문항(3)의 부등식에서 등호가 성립하면 ㉣과 ㉤에 의하여 $t = \int_0^2 g(x) dx = -\frac{2027}{2}$ 이다. 따라서 ㉠에 의하여 등차수열 a_n 은

$$a_n = n + \int_0^2 g(x) dx = n - \frac{2027}{2}$$

이고 $1 \leq n \leq 2026$ 인 자연수 n 에 대해서

$$a_n + a_{2027-n} = \left(n - \frac{2027}{2}\right) + \left(2027 - n - \frac{2027}{2}\right) = 0$$

이므로 $a_n = -a_{2027-n}$ 이 성립한다. 따라서

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 + a_2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{a_3 + a_4}{a_3^2 a_4^2} + \cdots + \frac{a_{2025} + a_{2026}}{a_{2025}^2 a_{2026}^2} \\ &= \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a_{2026}^2}\right) + \left(-\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_{2025}^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{1013}^2} - \frac{1}{a_{1014}^2}\right) = 0 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	$\int_2^6 f(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx$ 의 값을 구하시오.	6점
	$\int_2^6 f(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx = -\frac{4}{\pi} \int_2^6 f'(x) \sin \frac{\pi x}{4} dx$ 를 유도함.	3점
	$\int_2^6 f(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx = 1$ 을 도출함.	3점
1-(2)	$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^m a_n$ 의 값을 구하시오.	10점
	$x \geq 2$ 에서 $f(x+4) \cos \frac{\pi(x+4)}{4} = f(x) \cos \frac{\pi x}{4}$ 임을 유도함.	3점
	$a_n = n + \int_0^2 f(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx$ 임을 유도함.	3점
	$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^m n = \frac{1}{2}$ 을 유도함.	3점
	$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^m a_n = \frac{1}{2}$ 을 도출함.	1점
1-(3)	다음 부등식이 성립함을 증명하시오. $a_1^2 + \dots + a_{2026}^2 \geq \frac{2025 \times 2026 \times 2027}{12}$	12점
	자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 $\sum_{n=1}^{2026} n^2 = \frac{2026 \times 2027 \times 4053}{6}$, $\sum_{n=1}^{2026} n = \frac{2026 \times 2027}{2}$, $\sum_{n=1}^{2026} 1 = 2026$ 을 유도함.	5점
	$a_1^2 + \dots + a_{2026}^2 = 2026 \left(t^2 + 2027t + \frac{2027 \times 4053}{6} \right) \left(t = \int_0^2 f(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx \right)$ 를 유도함.	3점
	$a_1^2 + \dots + a_{2026}^2 \geq \frac{2025 \times 2026 \times 2027}{12}$ 을 증명함.	4점
	문항(3)의 부등식의 등호가 성립할 때 다음 식의 값을 구하시오. $\frac{a_1 + a_2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{a_3 + a_4}{a_3^2 a_4^2} + \dots + \frac{a_{2025} + a_{2026}}{a_{2025}^2 a_{2026}^2}$	12점
1-(4)	$\int_0^2 f(x) \cos \frac{\pi x}{4} dx = -\frac{2027}{2}$ 임을 유도함.	3점
	$a_n = n - \frac{2027}{2}$ 임을 유도함.	1점
	$a_n = -a_{2027-n}$ 임을 유도함.	4점
	$\frac{a_1 + a_2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{a_3 + a_4}{a_3^2 a_4^2} + \dots + \frac{a_{2025} + a_{2026}}{a_{2025}^2 a_{2026}^2} = 0$ 을 도출함.	4점

자연 II · 문항 2

양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수 $f(x) = \left(\frac{x}{x+6}\right)^x$ 에 대하여 아래 물음에 답하시오. [30점]

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 의 값을 각각 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$ 이다.)
- (2) 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 감소함을 보이시오.
- (3) $f(c) = \frac{1}{15}$ 을 만족시키는 양의 실수 c 가 오직 하나 존재함을 보이시오.

■ 예시 답안

2-(1)

[풀이] 양의 실수 x 에 대해, $\frac{x}{x+6} > 0$ 이므로 $f(x) = \left(\frac{x}{x+6}\right)^x > 0$ 이므로 함수

$$g(x) = \ln f(x) = x \ln x - x \ln(x+6)$$

이 잘 정의된다. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$ 이고 $x \ln x = \ln(x^x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \ln 1 = 0$ 이다. 또한

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln(x+6) = 0 \cdot \ln 6 = 0$$

이다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x - \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln(x+6) = 0 - 0 = 0$$

이다. $f(x) = e^{g(x)}$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = e^0 = 1$ 이다. 그리고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+6}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{1 + \frac{6}{x}} \right)^{\frac{x}{6}} \right)^6 = \frac{1}{e^6} = e^{-6}$$

이다.

2-(2)

[풀이] 함수 $g(x) = \ln f(x) = x \ln x - x \ln(x+6)$ 이 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$g'(x) = \ln x - \ln(x+6) + 1 - \frac{x}{x+6} = \ln\left(\frac{x}{x+6}\right) + \frac{6}{x+6} = \ln\left(1 - \frac{6}{x+6}\right) + \frac{6}{x+6}$$

이다.

함수 $h(y) = \ln(1-y) + y$ 라 하면,

$$h'(y) = -\frac{1}{1-y} + 1 = \frac{y}{y-1}$$

이므로 $0 < y < 1$ 에서 $h'(y) < 0$ 이다. 따라서 함수 $h(y)$ 는 구간 $[0, 1)$ 에서 감소하고 $0 < y < 1$ 에서 $h(y) < h(0) = \ln 1 + 0 = 0$ 이다. $g'(x)$ 에 $\frac{6}{x+6} = y$ 로 치환하면 모든 양의 실수 x 에서 $0 < \frac{6}{x+6} < 1$ 이므로 $0 < y < 1$ 이고 $g'(x) = h(y) < 0$ 이다. $g(x) = \ln f(x)$ 이므로 $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ 이다. 양의 실수 x 에 대해, $f(x) > 0$ 이므로

$$f'(x) = f(x)g'(x) < 0$$

이다. 따라서 $f(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 감소한다.

2-(3)

[풀이] $f(1) = \frac{1}{7}$, $f(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ 이다. 그러므로

$$f(1) = \frac{1}{7} > \frac{1}{15} > \frac{1}{27} = f(3)$$

을 만족한다. 함수 $f(x)$ 가 연속이므로 사잇값의 정리에 의해, $f(c) = \frac{1}{15}$ 인 c 가 열린구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다. 문항(2)에 의해, 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 감소하므로 $f(c) = \frac{1}{15}$ 인 양의 실수 c 가 오직 하나 존재한다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 의 값을 각각 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$ 이다.)	10점
	$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1$ 을 활용하여 $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \ln f(x) = 0$ 을 구함.	5점
	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^{-6}$ 임을 구함.	5점
2-(2)	함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \infty)$ 에서 감소함을 보이시오.	10점
	함수 $f(x)$ 의 도함수 또는 $\ln f(x)$ 의 도함수를 정확히 구함.	5점
	구간 $(0, \infty)$ 에서 $f'(x) < 0$ 임을 보여서 $f(x)$ 가 감소함수임을 논함. 또는 $\ln f(x)$ 의 도함수 $f'(x)/f(x) < 0$ 임을 보이고 $f(x) > 0$ 임을 정확히 언급하여 구간 $(0, \infty)$ 에서 $f'(x) < 0$ 임을 결론적으로 보여서 $f(x)$ 가 감소함수임을 논함.	5점
2-(3)	$f(c) = \frac{1}{15}$ 을 만족시키는 양의 실수 c 가 오직 하나 존재함을 보이시오.	10점
	$f(a) > \frac{1}{15}$, $f(b) < \frac{1}{15}$ 가 되는 양수 a 와 b 를 구체적으로 언급함.	4점
	사잇값의 정리에 의해, $f(c) = \frac{1}{15}$ 인 양수 c 가 구간 (a, b) 에 있음을 보임.	3점
	$f(x)$ 가 감소함수임을 이용하여 $f(c) = \frac{1}{15}$ 인 양수 c 가 유일함을 보임.	3점

자연 II · 문항 3

좌표평면에 주어진 두 집합

$$A = \left\{ (x, y) \mid \frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} = 1 \right\}, \quad B = \{ (x, y) \mid |x^k y| = 3 \}$$

에 대하여 $n(A \cap B) = 4$ 일 때 다음 물음에 답하시오. (단, a, b 는 양수, k 는 자연수) [30점]

- (1) $k = 1$ 일 때 집합 A 가 나타내는 도형의 넓이가 일정함을 보이고, 이때 집합 A 가 나타내는 도형의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.
- (2) 자연수 k 에 대하여 집합 A 가 나타내는 도형의 넓이를 집합 $A \cap B$ 의 원소들을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이로 나눈 값을 h_k 라 할 때, h_k 가 양수 a, b 와 관계없이 일정함을 보이시오.
- (3) 문항(2)의 h_k 에 대하여 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^3 h_k}$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

3-(1)

[풀이] 집합 A, B 가 나타내는 도형들이 모두 x 축과 y 축에 대하여 대칭이다. $k = 1$ 이면 양의 실수 a, b 에 대하여 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 제1사분면에서 곡선 $y = \frac{3}{x}$ 에 접할 때 주어진 조건을 만족한다.

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 곡선 $y = \frac{3}{x}$ 의 점 $\left(\alpha, \frac{3}{\alpha}\right)$ ($\alpha > 0$)에서 접한다고 하면, $y = \frac{3}{x}$ 의 도함수가 $y' = -\frac{3}{x^2}$ 이므로 접선의 기울기는 $-\frac{3}{\alpha^2}$ 이고 접선의 방정식은

$$y - \frac{3}{\alpha} = \left(-\frac{3}{\alpha^2}\right)(x - \alpha)$$

이다. 이 접선과 x 축과의 교점이 $(2\alpha, 0)$ 이고 y 축과의 교점이 $\left(0, \frac{6}{\alpha}\right)$ 이므로 $a = 2\alpha$ 이고 $b = \frac{6}{\alpha}$ 이다. 집합 A 가 나타내는 도형이 대각선의 길이가 각각 $2a, 2b$ 인 마름모이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}(2a \cdot 2b) = 2ab = 2\left(2\alpha \cdot \frac{6}{\alpha}\right) = 24$$

이다. 그러므로 집합 A 가 나타내는 도형의 넓이가 a, b 에 관계없이 일정하다.

집합 A 가 나타내는 도형이 대각선의 길이가 각각 $2a, 2b$ 인 마름모이므로 둘레의 길이가 $4\sqrt{a^2 + b^2}$ 이다. 주어진 조건을 만족할 때 양의 실수 a, b 가 $ab = 12$ 를 만족한다. 양의 실수 a, b 에 대하여 산술평균과 기하평균의 부등식을 활용하면

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2ab = 2 \cdot 12 = 24$$

이므로 구하는 둘레의 길이 $4\sqrt{a^2 + b^2}$ 의 최솟값은 $4\sqrt{24} = 8\sqrt{6}$ 이다.

3-(2)

[풀이] 집합 A, B 가 나타내는 도형들이 모두 x 축과 y 축에 대하여 대칭이다. 자연수 k 와 양수 a, b 에 대하여 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 제1사분면에서 곡선 $y = \frac{3}{x^k}$ 에 접할 때 주어진 조건을 만족한다.

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 곡선 $y = \frac{3}{x^k}$ 의 점 $\left(\alpha, \frac{3}{\alpha^k}\right)$ ($\alpha > 0$)에서 접한다고 하면, $y = \frac{3}{x^k}$ 의 도함수가 $y' = -\frac{3k}{x^{k+1}}$ 이므로 접선의 기울기는 $-\frac{3k}{\alpha^{k+1}}$ 이고 접선의 방정식은

$$y - \frac{3}{\alpha^k} = \left(-\frac{3k}{\alpha^{k+1}}\right)(x - \alpha)$$

이다. 이 접선과 x 축과의 교점이 $\left(\frac{k+1}{k}\alpha, 0\right)$ 이고 y 축과의 교점이 $\left(0, \frac{3(k+1)}{\alpha^k}\right)$ 이므로 $a = \frac{k+1}{k}\alpha$ 이고 $b = \frac{3(k+1)}{\alpha^k}$ 이다.

집합 A 가 나타내는 도형이 대각선의 길이가 각각 $2a, 2b$ 인 마름모이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}(2a \cdot 2b) = 2ab = 2\left(\left(\frac{k+1}{k}\alpha\right) \cdot \frac{3(k+1)}{\alpha^k}\right) = 6\frac{(k+1)^2}{k\alpha^{k-1}}$$

이다. 집합 A, B 가 나타내는 도형들이 모두 x 축과 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\left(\alpha, \frac{3}{\alpha^k}\right), \left(-\alpha, \frac{3}{\alpha^k}\right), \left(\alpha, -\frac{3}{\alpha^k}\right), \left(-\alpha, -\frac{3}{\alpha^k}\right)$$

가 집합 $A \cap B$ 의 네 개의 원소가 된다. 이들을 꼭짓점으로 하는 사각형이 직사각형이므로 이 직사각형의 넓이가

$$4\left(\alpha \cdot \frac{3}{\alpha^k}\right) = \frac{12}{\alpha^{k-1}}$$

이다. 따라서

$$h_k = \left(6 \frac{(k+1)^2}{k\alpha^{k-1}}\right) \cdot \left(\frac{12}{\alpha^{k-1}}\right)^{-1} = \frac{(k+1)^2}{2k}$$

이므로 양수 a, b 와 관계없이 일정하다.

3-(3)

[풀이] 문항(2)의 결과에 따라

$$h_k = \frac{(k+1)^2}{2k}$$

이다. 그러므로 구하는 값은

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^3 h_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2k+1)}{k^2 (k+1)^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 2 \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 2$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	$k = 1$ 일 때 집합 A 가 나타내는 도형의 넓이가 일정함을 보이고, 이때 집합 A 가 나타내는 도형의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.	13점
	집합 A, B 가 나타내는 도형들이 모두 x 축과 y 축에 대하여 대칭임을 명시하거나 그림으로 표현함	2점
	곡선 $y = \frac{3}{x}$ 의 점 $\left(\alpha, \frac{3}{\alpha}\right)$ ($\alpha > 0$)에서 접선의 방정식을 바르게 구함	2점
	$a = 2\alpha, b = \frac{6}{\alpha}$ 를 바르게 구함	2점
	집합 A 가 나타내는 마름모의 넓이를 $\frac{1}{2}(2a \cdot 2b) = 24$ 로 구하여 집합 A 가 나타내는 도형의 넓이가 a, b 에 관계없이 일정함을 보임	2점
	집합 A 가 마름모이므로 둘레의 길이가 $4\sqrt{a^2 + b^2}$ 로 바르게 구함	2점
	산술평균과 기하평균의 부등식을 바르게 활용하며 구하는 둘레의 길이의 최솟값 $8\sqrt{6}$ 을 구함	3점
3-(2)	자연수 k 에 대하여 집합 A 가 나타내는 도형의 넓이를 집합 $A \cap B$ 의 원소들을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이로 나눈 값을 h_k 라 할 때, h_k 가 양수 a, b 와 관계없이 일정함을 보이시오.	13점
	집합 A, B 가 나타내는 도형들이 모두 x 축과 y 축에 대하여 대칭임을 명시하거나 그림으로 표현함	2점
	곡선 $y = \frac{3}{x^k}$ 의 점 $\left(\alpha, \frac{3}{\alpha^k}\right)$ ($\alpha > 0$)에서 접하는 접선의 방정식을 바르게 구함	2점
	$a = \frac{k+1}{k}\alpha, b = \frac{3(k+1)}{\alpha^k}$ 를 바르게 구함	2점
	집합 A 가 나타내는 도형이 마름모이므로 구하는 넓이를 $2ab = 6\frac{(k+1)^2}{k\alpha^{k-1}}$ 로 구함	2점
	집합 $A \cap B$ 의 네 개의 원소를 꼭짓점으로 하는 사각형이 직사각형임을 확인하고 직사각형의 넓이 $4\left(\alpha \cdot \frac{3}{\alpha^k}\right) = \frac{12}{\alpha^{k-1}}$ 를 구함	3점
	$h_k = \frac{(k+1)^2}{2k}$ 를 구하고 이 값이 양수 a, b 와 관계없이 일정함을 보임	2점
3-(3)	문항(2)의 h_k 에 대하여 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^3 h_k}$ 의 값을 구하시오.	4점
	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2k+1)}{k^2(k+1)^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right)$ 로 나타냄	2점
	$2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 2 \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 2$ 로 계산함	2점

2025학년도 자연계열 I · II

자연 I · 문항 1

[문항 1] 모든 실수 x 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)$ 가 연속이다. 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,

제시문

[가] $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}$

[나] $2f(x) + f'(x) \tan 2x > 0$

아래 물음에 답하시오. [35점]

- (1) 구간 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 $g(x) = f(x) \sin 2x$ 일 때, $g(x)$ 는 구간 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 에서 증가함을 보이시오.
- (2) (1)에서 언급한 함수 $g(x)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라 할 때, $h(0)$ 과 $h(3)$ 의 값을 각각 구하시오.
- (3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x f(x) \cos 2x \, dx = a$, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x f'(x) \sin 2x \, dx = b$ 인 실수 a, b 와 (2)에서 언급한 $h(x)$ 에 대하여, $\int_0^3 h(x) \, dx$ 의 값을 a, b 로 나타내시오.

■ 예시 답안

1-(1)

[풀이] 함수 $f(x)$ 가 미분가능하므로 $g(x) = f(x) \sin 2x$ 도 미분가능하다. $f'(x)$ 가 연속이고

$$g'(x) = 2f(x) \cos 2x + f'(x) \sin 2x$$

이므로 $g'(x)$ 은 연속함수이다. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 인 실수 x 에 대해서, $\cos 2x > 0$ 이고, 조건 (나)에 의해

$$g'(x) = (2f(x) + f'(x) \tan 2x) \cos 2x > 0$$

이다. 따라서 $g(x) = f(x) \sin 2x$ 는 증가한다.

1-(2)

[풀이] $g(0) = f(0) \times \sin 0 = 0$ 이고 $g(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{\pi}{6}) \times \sin \frac{\pi}{3} = 3$ 이다. 따라서 함수 $h(x)$ 가 $g(x)$ 의 역함수이므로 $h(0) = 0$, $h(3) = \frac{\pi}{6}$ 이다.

1-(3)

[풀이] (2)의 결과로부터 $h(0) = 0$, $h(3) = \frac{\pi}{6}$ 이므로, 정적분과 넓이의 관계를 통해

$$\int_0^3 h(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x) dx = \frac{\pi}{2}$$

임을 알 수 있다. 또한 부분적분법에 의해

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x) dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} xg'(x) dx$$

을 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_0^3 h(x) dx &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} xg'(x) dx \right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} xg'(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2xf(x) \cos 2x + xf'(x) \sin 2x) dx \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 문제 조건에 의해

$$\int_0^3 h(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2xf(x) \cos 2x + xf'(x) \sin 2x) dx = 2a + b$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	구간 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 에서 정의된 함수 $g(x)$ 가 $g(x) = f(x) \sin 2x$ 일 때, $g(x)$ 는 구간 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 에서 증가함을 보이시오.	10점
	$g(x)$ 의 도함수가 $g'(x) = 2f(x) \cos 2x + f'(x) \sin 2x$ 임을 결정함.	4점
	조건 (나)를 활용해 $g'(x) > 0$ 임을 얻음.	3점
	$g'(x) > 0$ 임을 이용하여 $g(x)$ 가 증가함을 얻음.	3점
1-(2)	(1)에서 언급한 함수 $g(x)$ 의 역함수를 $h(x)$ 라 할 때, $h(0)$ 과 $h(3)$ 의 값을 각각 구하시오.	10점

하위 문항	채점 기준	배점
	$g(0) = 0$ 과 $g(\frac{\pi}{6}) = 3$ 임을 얻음.	5점
	$h(x)$ 가 $g(x)$ 의 역함수임을 이용하여 $h(0) = 0$, $h(3) = \frac{\pi}{6}$ 임을 얻음.	5점
1-(3)	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} xf(x) \cos 2x \, dx = a$, $\int_0^{\frac{\pi}{6}} xf'(x) \sin 2x \, dx = b$ 인 실수 a, b 와 (2)에서 언급한 $h(x)$ 에 대하여, $\int_0^3 h(x) \, dx$ 의 값을 a, b 로 나타내시오.	15점
	정적분과 넓이의 관계를 통해 $\int_0^3 h(x) \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x) \, dx = \frac{\pi}{2}$ 을 얻음.	5점
	부분적분법을 통해 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x) \, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} xg'(x) \, dx$ 을 얻음.	5점
	$\int_0^3 h(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2xf(x) \cos 2x + xf'(x) \sin 2x) \, dx = 2a + b$ 을 얻음.	5점

자연 I · 문항 2

[문항 2] 구간 $[0, \infty)$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족할 때,

제시문

[가] 실수 $a > 1$ 에 대하여 $f(x) = \begin{cases} a^x - 1 & (0 \leq x < 1) \\ a - a^{x-1} & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$ 이다.

[나] 모든 자연수 n 에 대하여, 구간 $[2n, 2n+2]$ 에서 $f(x) = a^{-n}f(x-2n)$ 이다.

아래 물음에 답하시오. [35점]

- (1) $\int_0^2 f(x) dx$ 의 값을 구하시오.
- (2) 모든 자연수 n 에 대하여 $2n \leq x \leq 2n+2$ 에서의 $f(x)$ 를 구하시오.
- (3) 모든 자연수 n 에 대하여 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 0, x = 2n$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2025$ 를 만족시키는 실수 a 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

2-(1)

[풀이] 조건 (가)로부터 $0 \leq x \leq 1$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 그래프를 x 축 대칭, x 축 방향으로 1, y 축 방향으로 $a - 1$ 만큼 평행이동하면 $1 \leq x \leq 2$ 에서의 함수 $f(x)$ 의 그래프와 같음을 알 수 있다. 이로부터 치환적분법을 이용하면

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (a - 1 - f(x)) dx$$

임을 알 수 있고, $\int_0^2 f(x) dx$ 의 값은 가로가 1, 세로가 $a - 1$ 인 직사각형의 넓이와 같으므로, $\int_0^2 f(x) dx = a - 1$ 이다.

2-(2)

[풀이] 조건 (나)로부터 각 자연수 n 에 대하여 $f(x) = a^{-n}f(x - 2n)$ 이므로, $y = x - 2n$ 이라 하면 $2n \leq x \leq 2n + 2$ 일 때, $0 \leq y \leq 2$ 이고

$$f(y + 2n) = a^{-n}f(y) = \begin{cases} a^{y-n} - a^{-n} & (0 \leq y \leq 1) \\ a^{1-n} - a^{y-1-n} & (1 \leq y \leq 2) \end{cases}$$

이다. 다시 $x = y + 2n$ 이라 하면 위 식으로부터

$$f(x) = a^{-n}f(x - 2n) = \begin{cases} a^{x-3n} - a^{-n} & (2n \leq x \leq 2n + 1) \\ a^{1-n} - a^{x-3n-1} & (2n + 1 \leq x \leq 2n + 2) \end{cases}$$

이다.

2-(3)

[풀이] 함수 $f(x)$ 의 조건문으로부터 $f(0) = f(2) = 0$ 이고, (2)의 결과로 자연수 k 에 대하여 $f(2k) = f(2k + 2) = 0$ 임을 알 수 있다. $(2k - 2, 2k)$ 에서 $f(x)$ 가 0이 아니므로 S_n 은 $1 \leq k \leq n$ 에 대하여 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 2k - 2$, $x = 2k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 모두 합한 것과 같음을 알 수 있다. 치환적분법을 이용하면 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 2k - 2$, $x = 2k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{2k-2}^{2k} f(x) dx = \int_0^2 f(x + 2k - 2) dx = a^{1-k} \int_0^2 f(x) dx = (a - 1)a^{1-k}$$

와 같음을 알 수 있고 따라서

$$S_n = \sum_{k=1}^n (a - 1)a^{1-k}$$

가 된다. $(a - 1)a^{1-k}$ 는 초항이 $a - 1$ 이고 공비가 $\frac{1}{a}$ 인 등비수열이고 $a > 1$ 이므로 등비급수의 합은 수렴하며

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a - 1)a^{1-n} = a \text{이다. 따라서 } a = 2025 \text{이다.}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	$\int_0^2 f(x) dx$ 의 값을 구하시오.	12점
	$0 \leq x \leq 1$ 에서의 함수 $f(x)$ 를 대칭 및 평행이동하여 $1 \leq x \leq 2$ 에서의 $f(x)$ 와 같음을 보임.	4점
	치환적분법을 이용하여 $\int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (a - 1 - f(x)) dx$ 임을 보임.	4점
	$\int_0^2 f(x) dx$ 의 값이 가로가 1, 세로가 $a - 1$ 인 직사각형의 넓이와 같음을 이용하여 $\int_0^2 f(x) dx = a - 1$ 임을 보임.	4점

하위 문항	채점 기준	배점
2-(2)	모든 자연수 n 에 대하여 $2n \leq x \leq 2n+2$ 에서의 $f(x)$ 를 구하시오.	8점
	$y = x - 2n$ 을 이용하여 $2n \leq x \leq 2n+2$ 에서의 함수 $f(x)$ 를 $0 \leq y \leq 2$ 에서의 y 에 관한 함수로 표현.	4점
	$y = x - 2n$ 을 대입하여 $2n \leq x \leq 2n+2$ 에서의 함수 $f(x)$ 를 표현.	4점
2-(3)	모든 자연수 n 에 대하여 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 0, x = 2n$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2025$ 를 만족시키는 실수 a 의 값을 구하시오.	15점
	자연수 n 에 대하여 $f(2n-2) = 0$ 임을 보임.	1점
	위의 결과를 바탕으로 자연수 n 에 대하여 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 0, x = 2n$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 자연수 $k = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 2k-2, x = 2k$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 합으로 표현됨을 보임.	4점
	치환적분법을 이용하여 $\int_{2k-2}^{2k} f(x) dx = a^{-k+1} \int_0^2 f(x) dx$ 임을 보임	4점
	(1)의 결과를 이용하여 $S_n = \sum_{k=1}^n (a-1)a^{1-k}$ 임을 보임.	3점
	$a > 1$ 임을 이용하여 등비급수의 합 $\sum_{n=1}^{\infty} (a-1)a^{1-n} = a$ 임을 보임.	2점
	문제의 조건으로부터 $a = 2025$ 임을 보임.	1점

자연 I · 문항 3

[문항 3] 모든 실수 x 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)$ 가 연속이다. 함수 $f(x)$ 가 다음 식을 만족시킬 때,

$$f(x) + (x^2 - x + 1)e^x = \int_0^x e^{x-t} f'(t) dt$$

아래 물음에 답하시오. [30점]

- (1) $f(0) = -1$ 임을 보이시오.
- (2) 함수 $F(x)$ 를 $F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ 라 할 때, $F(a) = 0$ 이 되도록 하는 실수 a 의 값을 모두 구하시오.
- (3) 함수 $f(x)$ 의 극값을 모두 구하시오.

■ 예시 답안

3-(1)

[풀이] $f(0) = -(0^2 - 0 + 1)e^0 + \int_0^0 e^{0-t} f'(t) dt = -e^0 = -1$ 이다.

3-(2)

[풀이] 부분적분법을 적용하면,

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t} f'(t) dt &= [e^{-t} f(t)]_0^x + \int_0^x e^{-t} f(t) dt \\ &= e^{-x} f(x) - f(0) + \int_0^x e^{-t} f(t) dt \\ &= e^{-x} f(x) + 1 + \int_0^x e^{-t} f(t) dt \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - x + 1)e^x + e^x \int_0^x e^{-t} f'(t) dt \\ &= -(x^2 - x + 1)e^x + e^x \left(e^{-x} f(x) + 1 + \int_0^x e^{-t} f(t) dt \right) \\ &= -(x^2 - x + 1)e^x + f(x) + e^x + e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt \end{aligned}$$

이 된다. 이 식을 정리하면,

$$e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt = e^x (x^2 - x)$$

이 된다. 양변을 e^x 로 나누면

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt = x^2 - x$$

를 얻는다. 따라서 $F(a) = 0$ 을 만족하는 실수 a 는 0 또는 1이다.

3-(3)

[풀이] (2)의 결과로부터 $\int_0^x e^{-t} f(t) dt = x^2 - x$ 이므로, 양변을 x 에 대하여 미분하면 정적분과 미분의 관계에 의하여 $e^{-x} f(x) = 2x - 1$ 이 성립한다. 따라서 $f(x) = e^x (2x - 1)$ 이고 $f'(x) = e^x (2x + 1)$ 이다. $f'(x) = 0$ 인 실수 x 는 $-\frac{1}{2}$ 뿐이고, $x = -\frac{1}{2}$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{2}$ 에서 극솟값 $f(-\frac{1}{2}) = -2e^{-\frac{1}{2}}$ 을 가진다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	$f(0) = -1$ 임을 보이시오.	5점
	주어진 식에 $x = 0$ 을 대입하여 $f(0) = -1$ 을 얻음.	5점
3-(2)	함수 $F(x)$ 를 $F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ 라 할 때, $F(a) = 0$ 이 되도록 하는 실수 a 의 값을 모두 구하시오.	13점
	$\int_0^x e^{-t} f'(t) dt$ 에 부분적분을 적용함.	3점
	$\int_0^x e^{-t} f'(t) dt = e^{-x} f(x) + 1 + \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ 을 유도함	5점

하위 문항	채점 기준	배점
	$F(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt = x^2 - x$ 를 유도	3점
	$F(a) = 0$ 을 만족하는 실수 a 는 0 또는 1임을 구함.	각 1점 총 2점
3-(3)	함수 $f(x)$ 의 극값을 구하시오.	12점
	$\int_0^x e^{-t} f(t) dt = x^2 - x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분	3점
	$f(x) = e^x(2x - 1)$ 를 찾음	3점
	$f'(x) = 0$ 인 실수 x 는 $-\frac{1}{2}$ 임을 보임.	2점
	$x = -\frac{1}{2}$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀔을 확인함.	2점
	$f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{2}$ 에서 극소값 $f(-\frac{1}{2}) = -2e^{-\frac{1}{2}}$ 을 가짐을 보임.	2점

자연 II · 문항 1

[문항 1] 양의 실수 a 에 대하여 아래 물음에 답하시오. [35점]

- (1) 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 에서 점 $A(0, 3)$ 까지의 거리를 b , 점 $P(x, y)$ 에서 점 $B(0, 5)$ 까지의 거리를 c 라 할 때, $b + c = 4$ 이다. 이때 점 P 가 그리는 도형 S 의 방정식을 구하시오.
- (2) 좌표평면 위의 점 $Q(x, y)$ 에서 점 $A(0, 3)$ 까지의 거리를 d , 점 Q 와 x 축까지의 거리를 e 라 할 때, $d + e = a$ 이다. 이때 $y \geq 0$ 인 점 Q 가 그리는 도형 T 의 방정식을 구하시오.
- (3) 언급된 (1), (2)의 두 도형 S, T 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위와 이때 두 교점의 좌표를 구하시오.

■ 예시 답안

1-(1)

[풀이] $b + c = 4$ 이므로 $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y-5)^2} = 4$ 이다. 따라서 점 $P(x, y)$ 는

$$4x^2 + 3y^2 - 24y + 36 = 0$$

을 만족시킨다. 따라서 점 P 가 그리는 도형 S 의 방정식은 타원의 방정식

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

이다.

1-(2)

[풀이] $d + e = a$ 이고 $y \geq 0$ 이므로 $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + y = a$ 를 얻는다. y 를 이항하여 양변을 제곱하면

$$x^2 + (y-3)^2 = (a-y)^2$$

이다.

(i) $a = 3$ 인 경우, $x = 0$ 이다. 이때 조건 $d + e = a$ 로부터

$$|y-3| + |y| = 3$$

을 얻는다. 즉 점 Q 가 그리는 도형 T 의 방정식은 $x = 0, 0 \leq y \leq 3$ 이다.

(ii) $a \neq 3$ 인 경우, 점 $Q(x, y)$ 는 $x^2 - 6y + 9 = a^2 - 2ay$ 를 만족시킨다. 따라서 점 Q 가 그리는 도형 T 의 방정식은 포물선

$$y = \frac{1}{2(3-a)}(x^2 + 9 - a^2) = \frac{1}{2(3-a)}x^2 + \frac{3+a}{2}$$

의 x 축 위쪽 부분이다.

1-(3)

[풀이] 도형 $S: \frac{x^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ 는 $2 \leq y \leq 6$ 인 범위에 있는 타원이다.

(i) $a = 3$ 인 경우, 도형 $T: x = 0, 0 \leq y \leq 3$ 는 타원 S 와 점 $(0, 2)$ 에서만 만난다.

(ii) $a \neq 3$ 인 경우, 도형 $T: y = \frac{1}{2(3-a)}x^2 + \frac{3+a}{2}, y \geq 0$ 는 포물선의 x 축 위쪽 부분이다. 도형 T 는

$$x^2 = 2(3-a)y - 9 + a^2 \quad (y \geq 0)$$

을 만족시키고, 도형 S 는

$$4x^2 = 12 - 3(y-4)^2 \quad (2 \leq y \leq 6)$$

이므로, 도형 T 와 도형 S 의 교점 (x, y) 의 y 좌표는

$$12 - 3(y-4)^2 = 8(3-a)y - 36 + 4a^2 \quad (2 \leq y \leq 6)$$

을 만족시킨다. 식을 정리하면

$$3y^2 - 8ay + 4a^2 = 0 \quad (2 \leq y \leq 6)$$

을 얻는다. 이때, $y = 2a, \frac{2a}{3}$ 임을 알 수 있다. a 가 양의 실수이므로 $2a < 2$ 이거나 $\frac{2a}{3} > 6$ 인 경우, 즉 $a < 1$ 이거나 $a > 9$ 인 경우는 도형 S 와 도형 T 는 만나지 않는다.

특히 포물선 $y = \frac{1}{2(3-a)}x^2 + \frac{3+a}{2}$ 의 꼭짓점이 $(0, \frac{3+a}{2})$ 이므로, $1 < a < 3$ 또는 $3 < a < 9$ 인 범위에서는 포물선의 꼭짓점 $(0, \frac{3+a}{2})$ 이 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ 의 안쪽에 있다. 또한 $a = 1$ 이거나 $a = 9$ 인 경우는 포물선의 꼭짓점 $(0, \frac{3+a}{2})$ 이 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ 위에 있다.

(ㄱ) $3 < a \leq 9$ 인 경우, $2a > 6$ 이므로 도형 T 와 도형 S 의 교점 (x, y) 의 y 좌표는 $y = \frac{2a}{3}$ 이다. 이때 $\frac{1}{2(3-a)} < 0$ 이므로 포물선 $y = \frac{1}{2(3-a)}x^2 + \frac{3+a}{2}$ 는 직선 $y = \frac{3+a}{2}$ 의 아래쪽에 있고, 두 도형 S 와 T 의 교점은

$\left(\pm\sqrt{\frac{(a-3)(9-a)}{3}}, \frac{2a}{3}\right)$ 이다. 따라서 $3 < a < 9$ 에서는 두 개의 교점을 갖고, $a = 9$ 에서는 한 개의 교점을 갖는다.

(ㄴ) $1 \leq a < 3$ 인 경우, $\frac{2a}{3} < 2$ 이므로 도형 T 와 도형 S 의 교점 (x, y) 의 y 좌표는 $y = 2a$ 이다. 이때 $\frac{1}{2(3-a)} > 0$ 이므로 포물선 $y = \frac{1}{2(3-a)}x^2 + \frac{3+a}{2}$ 는 직선 $y = \frac{3+a}{2}$ 의 위쪽에 있고, 두 도형 S 와 T 의 교점은 $(\pm\sqrt{3(a-1)(3-a)}, 2a)$ 이다. 따라서 $1 < a < 3$ 에서는 두 개의 교점을 갖고, $a = 1$ 에서는 한 개의 교점을 갖는다.

따라서 도형 S 와 도형 T 가 두 점에서 만나도록 하는 a 의 범위와 이때 교점들의 좌표는 각각 $1 < a < 3$ 일 때, $(\pm\sqrt{3(a-1)(3-a)}, 2a)$ 이고, $3 < a < 9$ 일 때, $\left(\pm\sqrt{\frac{(a-3)(9-a)}{3}}, \frac{2a}{3}\right)$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 에서 점 $A(0, 3)$ 까지의 거리를 b , 점 $P(x, y)$ 에서 점 $B(0, 5)$ 까지의 거리를 c 라 할 때, $b + c = 4$ 이다. 이때 점 P 가 그리는 도형 S 의 방정식을 구하시오.	6점
	조건 $b + c = 4$ 로부터 $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y-5)^2} = 4$ 를 설정함.	2점
	점 $P(x, y)$ 가 만족시키는 방정식 $4x^2 + 3y^2 - 24y + 36 = 0$ 을 유도함.	2점
	도형 S 의 방정식이 타원의 방정식 $\frac{x^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ 임을 보임.	2점
1-(2)	좌표평면 위의 점 $Q(x, y)$ 에서 점 $A(0, 3)$ 까지의 거리를 d , 점 Q 와 x 축까지의 거리를 e 라 할 때, $d + e = a$ 이다. 이때 $y \geq 0$ 인 점 Q 가 그리는 도형 T 의 방정식을 구하시오.	11점
	조건 $d + e = a$ 와 $y \geq 0$ 로부터 $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + y = a$ 를 설정함.	2점
	정리하여 방정식 $x^2 + (y-3)^2 = (a-y)^2$ 을 유도함.	1점
	$a = 3$ 인 경우와 $a \neq 3$ 인 경우로 구분함.	2점
	$a = 3$ 인 경우, $x = 0$ 임을 보이고, 이때 $ y-3 + y = 3$ 임을 보임.	2점
	도형 T 의 방정식이 $x = 0, 0 \leq y \leq 3$ 임을 보임.	1점
	$a \neq 3$ 인 경우, $x^2 - 6y + 9 = a^2 - 2ay$ 이 성립함을 보임.	2점
	도형 T 의 방정식이 포물선 $y = \frac{1}{2(3-a)}x^2 + \frac{3+a}{2}, y \geq 0$ 임을 보임.	1점
1-(3)	언급된 (1), (2)의 두 도형 S, T 가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a 의 값의 범위와 이때 두 교점의 좌표를 구하시오.	18점
	$a = 3$ 인 경우, 도형 $T: x = 0, 0 \leq y \leq 3$ 와 도형 S 가 점 $(0, 2)$ 에서만 만남을 보임.	2점
	$a \neq 3$ 인 경우, 도형 T 와 도형 S 의 교점의 y 좌표가 $12 - 3(y-4)^2 = 8(3-a)y - 36 + 4a^2$ ($2 \leq y \leq 6$)을 만족시킴을 보임. 기타 y 에 관한 동치인 방정식을 유도해도 인정함.	2점
	교점의 y 좌표가 $y = 2a, \frac{2a}{3}$ 임을 보임.	2점
	$a < 1$ 이거나 $a > 9$ 인 경우, 도형 S 와 도형 T 는 만나지 않음을 보임.	2점
	포물선 $y = \frac{1}{2(3-a)}x^2 + \frac{3+a}{2}$ 의 꼭짓점 $\left(0, \frac{3+a}{2}\right)$ 이 $1 < a < 3$ 또는 $3 < a < 9$	2점

하위 문항	채점 기준	배점
	일 때, 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ 의 안쪽에 있음을 보임.	
	$3 < a \leq 9$ 일 때, $2a > 6$ 임을 지적, 교점의 y 좌표가 $y = \frac{2a}{3}$ 임을 보임.	2점
	도형 S 와 T 의 교점은 $\left(\pm\sqrt{\frac{(a-3)(9-a)}{3}}, \frac{2a}{3}\right)$ 이고, $3 < a < 9$ 에서 두 개의 교점을 갖고, $a = 9$ 에서 한 개의 교점을 가짐을 보임.	2점
	$1 \leq a < 3$ 일 때, $\frac{2a}{3} < 2$ 임을 지적, 교점의 y 좌표가 $y = 2a$ 임을 보임	2점
	도형 S 와 T 의 교점이 $(\pm\sqrt{3(a-1)(3-a)}, 2a)$ 이고, $1 < a < 3$ 에서 두 개의 교점을 갖고, $a = 1$ 에서 한 개의 교점을 가짐을 보임.	2점

자연 II · 문항 2

구간 $[0, \infty)$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,

$$2^{n-1} - 1 \leq x < 2^n - 1 \text{ 일 때, } f(x) = \sqrt{2^{n-1}(x+1) - 2^{2n-2}} + 2^{n-1} - 1 \text{ 이다.}$$

(단, $n = 1, 2, 3, \dots$ 이다.)

아래 물음에 답하시오. [35점]

- (1) 함수 $f(x)$ 가 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가함을 보이시오.
- (2) 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = 2^{n-1} - 1$ 일 때, $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx$ 의 값을 구하시오.
- (3) 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, (2)에서 언급된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, $\int_{a_n}^{a_{n+1}} g(x)dx$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

2-(1)

[풀이] 실수 x, y 가 $0 \leq x < y$ 를 만족한다. 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_n = 2^{n-1} - 1$ 이라 하면, 어떤 자연수 m, n 에 대하여

$$a_m \leq x < a_{m+1}, \quad a_n \leq y < a_{n+1}$$

이다. $x < y$ 이므로 $m \leq n$ 을 만족한다.

(i) $m = n$ 인 경우, $a_n \leq x < y < a_{n+1}$ 이다. 함수 $\sqrt{2^{n-1}(x+1) - 2^{2n-2}} + 2^{n-1} - 1$ 은 구간 $[a_n, a_{n+1}]$ 에서 증가하므로

$$f(a_n) \leq f(x) < f(y) \text{ 이다.}$$

(ii) $m < n$ 인 경우,

$$a_m \leq x < a_{m+1} \leq a_n \leq y < a_{n+1}$$

이다. 함수 $f(x)$ 는 각각의 닫힌구간 $[a_m, a_{m+1}]$, $[a_n, a_{n+1}]$ 에서 증가하고

$$f(a_m) = a_m, \quad f(a_{m+1}) = a_{m+1}, \quad f(a_n) = a_n$$

이므로

$$a_m \leq f(x) < a_{m+1} \leq a_n \leq f(y)$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

2-(2)

[풀이] 자연수 n 에 대하여,

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx = \int_{2^{n-1}-1}^{2^n-1} (\sqrt{2^{n-1}(x+1) - 2^{2n-2}} + 2^{n-1} - 1)dx$$

이고 $t = x + 1 - 2^{n-1}$ 로 치환하면,

$$\begin{aligned} \int_{2^{n-1}-1}^{2^n-1} (\sqrt{2^{n-1}(x+1) - 2^{2n-2}} + 2^{n-1} - 1)dx &= \int_0^{2^{n-1}} (\sqrt{2^{n-1}t} + 2^{n-1} - 1)dt \\ &= \left[\frac{2^{\frac{n+1}{2}} t^{\frac{3}{2}}}{3} + (2^{n-1} - 1)t \right]_0^{2^{n-1}} \\ &= \frac{5}{3} \times 2^{2n-2} - 2^{n-1} \end{aligned}$$

이다.

2-(3)

[풀이] (1)의 결과로부터, 모든 자연수 n 에 대하여 $f(a_n) = a_n$ 이고, 따라서 $g(a_n) = a_n$ 이다.

$$A_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx, \quad B_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} g(x)dx$$

라 하면,

$$A_n + B_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2^n - 1)^2 - (2^{n-1} - 1)^2 = 3 \times 2^{2n-2} - 2^n$$

이다. (2)의 결과에 의해서 $A_n = \frac{5}{3} \times 2^{2n-2} - 2^{n-1}$ 이므로 $B_n = \frac{4}{3} \times 2^{2n-2} - 2^{n-1}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	함수 $f(x)$ 가 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가함을 보이시오.	11점
	임의의 $0 \leq x < y$ 인 x, y 에 대해, $a_m \leq x < a_{m+1}$, $a_n \leq y < a_{n+1}$ 인 자연수 m, n 을 찾음.	3점
	$m = n$ 인 경우, $f(x) < f(y)$ 임을 보임.	4점
	$m < n$ 인 경우, $f(x) < f(y)$ 임을 보임.	4점
2-(2)	수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = 2^{n-1} - 1$ 일 때, $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx$ 의 값을 구하시오.	10점
	$f(x)$ 의 정의를 활용하여 $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx = \int_{2^{n-1}-1}^{2^n-1} (\sqrt{2^{n-1}(x+1)} - 2^{2n-2} + 2^{n-1} - 1)dx$ 임을 얻음.	2점
	치환적분법을 활용하여 $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx = \int_0^{2^{n-1}} (\sqrt{2^{n-1}t} + 2^{n-1} - 1)dt$ 임을 얻음.	4점
	함수 $\sqrt{x}$ 의 부정적분을 활용하여 $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx = \frac{5}{3} \times 2^{2n-2} - 2^{n-1}$ 임을 얻음.	4점
2-(3)	함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, (2)에서 언급된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여, $\int_{a_n}^{a_{n+1}} g(x)dx$ 의 값을 구하시오.	14점
	모든 자연수 n 에 대하여 $f(a_n) = a_n$ 임을 통해 $g(a_n) = a_n$ 임을 얻음.	4점
	$\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx + \int_{a_n}^{a_{n+1}} g(x)dx = 3 \times 2^{2n-2} - 2^n$ 임을 얻음.	5점
	$\int_{a_n}^{a_{n+1}} g(x)dx = \frac{4}{3} \times 2^{2n-2} - 2^{n-1}$ 임을 얻음.	5점

자연 II · 문항 3

모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 을 다음과 같이 정의할 때,

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x dx, \quad b_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}, \quad c_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$$

아래 물음에 답하시오. [30점]

- (1) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 임을 보이시오.
- (2) 수열 $\{b_n\}$ 이 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값과 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 의 값을 각각 구하시오.
- (3) 수열 $\{b_n\}$ 이 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 \times 3^2 \times \cdots \times (2n-1)^2}{2^2 \times 4^2 \times \cdots \times (2n)^2} \times n$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

3-(1)

[풀이] 각 자연수 n 에 대하여, 부분적분법을 이용하면,

$$\begin{aligned}
 a_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x (\sin x)' dx \\
 &= [\cos^n x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x)' \sin x dx \\
 &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin^2 x dx \\
 &= na_n - na_{n+2}
 \end{aligned}$$

이므로 $a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 이다.

3-(2)

[풀이] $a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 을 이용하면 $b_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{a_{2n-1}}{a_{2n-2}} = \frac{2n-1}{2n}c_n$ 임을 알 수 있고, $c_n = \frac{2n}{2n-1}b_n$ 이다. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-1} = 1$ 이므로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

임을 알 수 있다.

한편, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 각 자연수 n 에 대하여 $0 \leq \cos^n x \leq \cos^{n-1} x$ 임을 알 수 있고, 따라서 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos^{n-1} x$ 와 $\cos^n x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-1} x - \cos^n x) dx \geq 0$ 이다. 정적분의 성질로부터

$$a_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x dx = a_n$$

임을 알 수 있고, 이를 이용하면 $b_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1$ 이고 $c_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n-2}} \geq \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1$ 이다. 수열의 극한의 대소 관계에 의해 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq 1$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \geq 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ 이다.

3-(3)

[풀이] $a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 을 이용하면, $a_{2n+1}a_{2n} = \frac{n-1}{n}a_{2n-1}a_{2n-2}$ 을 알 수 있다. $a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$ 과 $a_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1$ 이므로, 위 결과를 귀납적 방법으로 활용하면 $a_{2n+1}a_{2n} = \frac{\pi}{4n}$ 이 되고, $b_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{4n}{\pi}(a_{2n+1})^2$ 이 된다. 따라서 (2)의 결과로부터

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\pi}(a_{2n+1})^2$$

을 얻는다. 위 극한값의 결과와 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{2n-1}{2n}$ 을 이용하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 \times 3^2 \times \cdots \times (2n-1)^2}{2^2 \times 4^2 \times \cdots \times (2n)^2} \times n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^2 \times \left(\frac{a_5}{a_3} \right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} \right)^2 \times n \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_1^2} (a_{2n+1})^2 \\
 &= \frac{1}{\pi} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\pi} (a_{2n+1})^2 \\
 &= \frac{1}{\pi}
 \end{aligned}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 임을 보이시오.	5점
	$\cos x = (\sin x)'$ 의 변형.	1점
	부분적분을 이용하여 $a_{n+2} = na_n - na_{n+2}$ 을 구함.	3점
	$a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 결과 도출.	1점
3-(2)	수열 $\{b_n\}$ 이 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값과 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 의 값을 각각 구하시오.	12점
	$a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 을 이용하여 $c_n = \frac{2n}{2n-1}b_n$ 을 도출.	3점
	수열의 극한의 기본 성질을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 임을 도출.	2점
	두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 정의 및 정적분의 성질로부터 $a_{n+1} \leq a_n$ 임을 도출.	3점
	$a_{n+1} \leq a_n$ 을 이용하여 $b_n \leq 1, c_n \geq 1$ 을 도출.	2점
	수열의 극한의 대소 관계 및 두 극한값이 같음을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ 임을 도출.	2점
3-(3)	수열 $\{b_n\}$ 이 수렴할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 \times 3^2 \times \cdots \times (2n-1)^2}{2^2 \times 4^2 \times \cdots \times (2n)^2} \times n$ 의 값을 구하시오.	13점
	$a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 을 이용하여 $a_{2n+1}a_{2n} = \frac{\pi}{4n}$ 임을 도출.	3점
	$a_{2n+1}a_{2n} = \frac{\pi}{4n}$ 과 b_n 의 정의로부터 $b_n = \frac{4n}{\pi}(a_{2n+1})^2$ 이 됨을 도출.	3점
	$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ 을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\pi}(a_{2n+1})^2 = 1$ 임을 도출.	2점
	$a_{n+2} = \frac{n}{n+1}a_n$ 을 이용하여 $\frac{1^2 \times 3^2 \times \cdots \times (2n-1)^2 \times n}{2^2 \times 4^2 \times \cdots \times (2n)^2} = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 \times \left(\frac{a_5}{a_3}\right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\right)^2 \times n$ 을 도출.	3점
	위의 결과와 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\pi}(a_{2n+1})^2 = 1$ 의 결과를 바탕으로 수열의 극한의 기본 성질을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2 \times 3^2 \times \cdots \times (2n-1)^2 \times n}{2^2 \times 4^2 \times \cdots \times (2n)^2} \right) = \frac{1}{\pi}$ 임을 도출.	2점

2024학년도 자연계열 I · II

자연 I · 문항 1

[문항 1] 실수 a 가 $-1 < a < 1$ 일 때 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta$$

(2) 치환적분을 적용하여 문항 (1)로부터 다음 등식을 유도하시오.

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \sin \theta) d\theta$$

(3) 문항 (2)로부터 다음 등식이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2^n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta$$

(4) 다음 부등식이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 보이시오.

$$2\pi \ln(1 - a^{2^n}) \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta \leq 2\pi \ln(1 + a^{2^n})$$

(5) 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 다음 정적분을 계산하시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta$$

■ 예시 답안

1-(1)

[풀이]

$\theta = -t$ 로 치환하면 $dt = -d\theta$, $t \in [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$, $\sin \theta = \sin(-t) = -\sin t$ 가 성립하므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin t)(-1) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin t) dt$$

1-(2)

[풀이] 문항 (1)에 의하여

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta$$

가 성립한다. 위 등식의 우변을 정리하면 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{\ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) + \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta)\} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 - 4a^2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2(1 - 2\sin^2 \theta)) d\theta \quad (1 - 2\sin^2 \theta = \cos 2\theta) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos 2\theta) d\theta \quad \left(t = 2\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{2} dt, t \in [-\pi, \pi]\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt \end{aligned}$$

여기에서 $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt$ 를 아래와 같이 표현할 수 있다.

우선 $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt = \int_{-\pi}^0 \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt + \int_0^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt$ 로 분리하여, 우변의 첫 번째 적분에는 $t = x - \frac{\pi}{2}$ 로 치환하여 $dt = dx$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos t = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ 를 활용하고, 두 번째 적분에는 $t = y + \frac{\pi}{2}$ 로 치환하여 $dt = dy$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos t = \cos(y + \frac{\pi}{2}) = -\sin y$ 를 활용한다. 이 치환적분의 결과와 문항 (1)에 의하여 아래의 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt &= \int_{-\pi}^0 \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt + \int_0^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \sin x) dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 - 2a^2 \sin y) dy \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

위의 두 등식을 정리하면 아래가 성립한다.

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \sin \theta) d\theta$$

1-(3)

[풀이] 수학적 귀납법을 사용하여 증명한다.

$n = 1$ 일 때 문항 (2)에 의하여 주어진 등식이 성립한다.

$n = k$ 일 때 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2^k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}} + 1 + 2a^{2^k} \sin \theta) d\theta$ 이 성립한다고 가정하자.

위의 식에서 $a^{2^k} = \beta$ 라고 하면 $a^{2^{k+1}} = a^{2^k \cdot 2} = (a^{2^k})^2 = \beta^2$ 이고 $\beta^4 = (\beta^2)^2 = a^{2^{k+2}}$ 이 성립한다. 이때 $-1 < a < 1$ 이므로 $0 \leq a^{2^k} = \beta < 1$ 이고, $0 \leq a^{2^{k+1}} = \beta^2 < 1$ 이다. 그러므로 $n = 1$ 일 때의 식에서 a 에 β 를 대입하면,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\beta^2 + 1 + 2\beta \sin \theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\beta^4 + 1 + 2\beta^2 \sin \theta) d\theta \quad \text{이 성립하고,} \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta &= \frac{1}{2^k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}} + 1 + 2a^{2^k} \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2^k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\beta^2 + 1 + 2\beta \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\beta^4 + 1 + 2\beta^2 \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+2}} + 1 + 2a^{2^{k+1}} \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

이 성립하여 $n = k + 1$ 일 때 주어진 등식이 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

1-(4)

[풀이] $-1 < a < 1$ 이므로 $0 \leq a^{2^n} < 1$ 이고 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 에 대하여 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ 이므로 아래의 부등식이 성립한다.

$$(1 - a^{2^n})^2 = a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n}(-1) \leq a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta \leq a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \cdot 1 = (1 + a^{2^n})^2$$

위 부등식에 밑이 1보다 큰 로그함수가 증가함수인 것을 적용하면 아래의 부등식이 성립한다.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - a^{2^n})^2 d\theta \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + a^{2^n})^2 d\theta$$

위 부등식의 왼쪽과 오른쪽 적분에서 $\ln(1 \pm a^{2^n})^2 = 2 \ln(1 \pm a^{2^n})$ 는 변수 θ 에 대하여 상수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 \pm a^{2^n})^2 d\theta = 2 \ln(1 \pm a^{2^n}) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = 2\pi \ln(1 \pm a^{2^n})$$

가 되어 아래의 부등식이 성립한다.

$$2\pi \ln(1 - a^{2^n}) \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta \leq 2\pi \ln(1 + a^{2^n})$$

1-(5)

[풀이] 문항 (3)과 문항 (4)에 의하여 아래의 부등식이 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$$\frac{2\pi \ln(1 - a^{2^n})}{2^n} \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta \leq \frac{2\pi \ln(1 + a^{2^n})}{2^n}$$

위 부등식에서 $-1 < a < 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2^n} = 0$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ 이며 로그함수의 연속성에 의하여

$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + a^{2^n}) = \ln 1 = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 - a^{2^n}) = \ln 1 = 0$ 이 성립한다.

그러므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi \ln(1 + a^{2^n})}{2^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi \ln(1 - a^{2^n})}{2^n} = 0$ 이 성립하여 사잇값 정리에 의하여

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = 0 \quad \text{이다.}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	다음 등식이 성립함을 보이시오. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta$	5점
	$\theta = -t$로 치환함. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin t)(-1) dt$ 임을 보임. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin t)(-1) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin t) dt$ 임을 보임.	
1-(2)	치환적분을 적용하여 문항 (1)로부터 다음 등식을 유도하시오. $2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \sin \theta) d\theta$	15점
	문항 (1)에 의하여 아래의 등식이 성립함을 보임. $2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta$ $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta$ $1 - 2 \sin^2 \theta = \cos 2\theta$임을 이용하여 아래의 등식이 성립함을 보임. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta$ $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2(1 - 2 \sin^2 \theta)) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos 2\theta) d\theta$ $2\theta = t$로 치환하여 아래의 등식이 성립함을 보임. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt$ 적분 $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt$가 두 적분 $\int_{-\pi}^0 \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt + \int_0^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt$로 나누어짐을 보임. $x = t + \frac{\pi}{2}$로 치환하여 아래의 등식을 유도함. $\int_{-\pi}^0 \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \sin x) dx$ $y = t - \frac{\pi}{2}$로 치환하여 아래의 등식을 유도함. $\int_0^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 - 2a^2 \sin y) dy$ 문항 (1)로부터 또는 $\theta = -y$로 치환하여 아래의 등식을 얻음. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 - 2a^2 \sin y) dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \sin \theta) d\theta$	

하위 문항	채점 기준	배점
	문항 (2)로부터 다음 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2^n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta$	10점
1-(3)	$n = 1$일 때, 문항 (2)에 의하여 주어진 등식이 성립함을 언급함. $n = k$일 때, 아래의 주어진 등식이 성립한다고 가정함. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2^k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}} + 1 + 2a^{2^k} \sin \theta) d\theta$ 위의 식에서 $0 \leq a^{2^{k+1}} < 1$, $a^{2^{k+1}} = (a^{2^k})^2$, $a^{2^{k+2}} = (a^{2^{k+1}})^2$임을 언급함. $n = k$일 때 성립한다는 가정과 위의 식으로부터 아래의 식을 유도함. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2^{k+1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+2}} + 1 + 2a^{2^{k+1}} \sin \theta) d\theta$ 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 기술함.	
	다음 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오. $2\pi \ln(1 - a^{2^n}) \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta \leq 2\pi \ln(1 + a^{2^n})$	5점
1-(4)	$0 \leq a^{2^n} < 1$임을 언급함. $(1 - a^{2^n})^2 \leq a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta \leq (1 + a^{2^n})^2$임을 보임. 위 부등식에 로그함수를 적용하여 아래의 부등식을 유도함. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - a^{2^n})^2 d\theta \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + a^{2^n})^2 d\theta$	
	다음 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 다음 정적분을 계산하시오. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta$	5점
1-(5)	모든 자연수 n에 대하여 아래의 부등식을 유도함. $\frac{2\pi \ln(1 - a^{2^n})}{2^n} \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta \leq \frac{2\pi \ln(1 + a^{2^n})}{2^n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi \ln(1 + a^{2^n})}{2^n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi \ln(1 - a^{2^n})}{2^n} = 0$임을 구함. 사잇값 정리에 의하여 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = 0$을 얻음.	

자연 I · 문항 2

[문항 2] 함수 $f(x) = x^2 e^x$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

- (1) 함수 $f(x)$ 의 극댓값 M 과 극솟값 m 을 구하시오.
- (2) $-3 \leq a \leq 2$ 인 정수 a 에 대하여 함숫값 $f(a)$ 를 크기순으로 나열하시오. (단, $2.7 < e$)
- (3) 부등식 $m \leq f(b) \leq M$ 을 만족시키는 정수 b 를 모두 구하시오.
- (4) 방정식 $f(x) = k$ 의 실근이 모두 정수인 양의 실수 k 의 최솟값을 구하시오.

■ 예시 답안

2-(1)

[풀이]

$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$ 이므로 $f'(x) = 0$ 이 $x = -2, x = 0$ 을 근으로 갖는다. 구간 $(-\infty, -2)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이고 $f(x)$ 가 증가하며 구간 $(-2, 0)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이고 $f(x)$ 가 감소한다. 구간 $(0, \infty)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 가 증가한다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값 $M = f(-2) = 4e^{-2}$ 과 $x = 0$ 에서 극솟값 $m = f(0) = 0$ 을 갖는다.

2-(2)

[풀이]

$-3 \leq a \leq 2$ 인 정수 a 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ 이고 함숫값은 $f(-3) = 9e^{-3}, f(-2) = 4e^{-2}, f(-1) = e^{-1}, f(0) = 0, f(1) = e, f(2) = 4e^2$ 이다.

무리수 e 가 $2 < e < 3$ 이므로 $0 < e < 4e^2$ 이고 $0 < e^{-1} < 4e^{-2} < e$ 이며, $\frac{9}{4} < 2.7 < e$ 이므로 $e^{-1} < 9e^{-3} < 4e^{-2}$ 이다. 따라서 $0 < e^{-1} < 9e^{-3} < 4e^{-2} < e < 4e^2$ 이다.

2-(3)

[풀이]

$x > 0$ 일 때 $f(x)$ 는 증가이고 문항 (2)에 따라 $f(1) = e > 4e^{-2} = M$ 이므로 부등식 $0 \leq f(b) \leq 4e^{-2}$ 을 만족하는 양의 정수 b 는 존재하지 않는다. $x \leq 0$ 일 때 $f(x) \geq 0$ 이고 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, -2)$ 에서 증가이고 구간 $(-2, 0)$ 에서 감소이다. 따라서 $x \leq 0$ 일 때 함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 극대이면서 최대이고 $x = 0$ 에서 최소이다. 그러므로 $b \leq 0$ 인 모든 정수는 부등식 $0 \leq f(b) \leq 4e^{-2}$ 을 만족한다. 따라서 구하는 정수 b 는 $b \leq 0$ 인 모든 정수이다.

2-(4)

[풀이]

$k > 0$ 에 대하여 방정식 $f(x) = k$ 는 $0 < k < M = 4e^{-2}$ 일 때 서로 다른 세 실근을 갖고 $k = 4e^{-2}$ 일 때 서로 다른 두 실근을 가지며 $k > M = 4e^{-2}$ 일 때 한 개의 실근을 갖는다.

(ㄱ) $0 < k < 4e^{-2}$ 일 때 방정식 $f(x) = k$ 가 서로 다른 세 정수근을 가지려면 $f(x)$ 가 감소하는 구간 $-2 < x < 0$ 에서 $x = -1$ 이 항상 방정식의 근이 된다. 이때 $f(x) = e^{-1} = f(-1)$ 의 다른 두 근 중의 하나인 α 는 양의 정수이어야 한다. 그런데 문항 (2)에 따라서 $f(0) = 0 < e^{-1} (= f(\alpha)) < e = f(1)$ 이므로 α 는 정수가 아니다. 그러므로 $0 < k < 4e^{-2}$ 에서 주어진 조건을 만족하는 k 는 없다.

(ㄴ) $k = 4e^{-2}$ 일 때 방정식 $f(x) = 4e^{-2}$ 가 $x = -2$ 와 양의 실수 β 를 근으로 갖는다. 문항 (2)에 따라서 $f(0) = 0 < 4e^{-2} (= f(\beta)) < e = f(1)$ 이므로 β 는 정수가 아니다. 그러므로 $k = 4e^{-2}$ 는 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ㄷ) $k > 4e^{-2}$ 일 때 방정식 $f(x) = k$ 는 한 개의 양의 실근을 갖는다. $x > 0$ 일 때 $f(1) = e > 4e^{-2}$ 이고 $f(x)$ 가 증가하므로 조건을 만족하는 최솟값 k 는 $x = 1$ 일 때 $f(1) = e$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	함수 $f(x)$ 의 극댓값 M 과 극솟값 m 을 구하시오.	4점
	도함수 $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$ 를 구함. $f'(x) = 0$ 의 근 $x = -2, x = 0$ 를 찾음. 구간 $(-\infty, -2)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이라서 $f(x)$ 가 증가하고, 구간 $(-2, 0)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이라서 $f(x)$ 가 감소하고, 구간 $(0, \infty)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이라서 $f(x)$ 가 증가함을 설명함. $x = -2$ 에서 극댓값 $f(-2) = 4e^{-2}$ 과 $x = 0$ 에서 극솟값 $f(0) = 0$ 을 구함.	

하위 문항	채점 기준	배점
2-(2)	$-3 \leq a \leq 2$ 인 정수 a 에 대하여 함숫값 $f(a)$ 를 크기순으로 나열하시오. (단, $2.7 < e$)	4점
	$f(-3) = 9e^{-3}$, $f(-2) = 4e^{-2}$, $f(-1) = e^{-1}$, $f(0) = 0$, $f(1) = e$, $f(2) = 4e^2$ 을 구함 부등식 $9e^{-3} < 4e^{-2}$ 를 $\frac{9}{4} < 2.7 < e$ 또는 극댓값을 이용해서 논리적으로 설명함. $0 < e^{-1} < 9e^{-3} < 4e^{-2} < e < 4e^2$ 의 대소관계를 올바르게 구함.	
2-(3)	부등식 $m \leq f(b) \leq M$ 을 만족시키는 정수 b 를 모두 구하시오.	6점
	$x > 0$ 일 때, $f(x)$ 는 증가이고, 부등식 $e > 4e^{-2}$ 을 기술함. 양의 정수 b 는 존재하지 않는다고 설명함. $x \leq 0$ 에서 최댓값과 최솟값을 기술함. 구하는 정수 b 는 $b \leq 0$ 인 모든 정수라고 설명함.	
2-(4)	방정식 $f(x) = k$ 의 실근이 모두 정수인 양의 실수 k 의 최솟값을 구하시오.	16점
	$0 < k < 4e^{-2}$ 일 때 서로 다른 세 실근, $k = 4e^{-2}$ 일 때 서로 다른 두 실근, $k > 4e^{-2}$ 일 때 한 개의 실근을 갖는 3가지 경우를 언급함. ① $0 < k < 4e^{-2}$ 인 경우 : 서로 다른 세 실근 중 $f(x)$ 가 감소하는 구간 $-2 < x < 0$ 에서 $x = -1$ 이 방정식의 근이 됨을 기술함. $f(x) = e^{-1} = f(-1)$ 의 다른 두 근 중 하나가 양수 α 임을 설명함. 문항 (2)에서 도출한 부등식 $f(0) = 0 < e^{-1} < e = f(1)$ 을 언급함. α 는 정수가 아님을 기술함. 주어진 조건을 만족하는 k 는 없다거나 서로 다른 세 실근이 모두 정수가 될 수 없다는 결론을 기술함. ② $k = 4e^{-2}$ 인 경우 : 서로 다른 두 실근 중 $x = -2$ 가 방정식의 근이 됨을 기술함. $f(x) = 4e^{-2} = f(-2)$ 의 다른 근이 양수 β 임을 설명함. 문항 (2)에서 도출한 부등식 $f(0) = 0 < 4e^{-2} < e = f(1)$ 을 언급함. β 는 정수가 아님을 기술함. 주어진 조건을 만족하는 k 는 없다거나 서로 다른 두 실근이 모두 정수가 될 수 없다는 결론을 기술함. ③ $k > 4e^{-2}$ 인 경우 : 방정식 $f(x) = k$ 는 한 개의 양의 실근을 가짐을 설명함. 부등식 $f(1) = e > 4e^{-2}$ 과 $x > 0$ 일 때 $f(x)$ 가 증가함을 기술함. 최솟값 $k = e$ 를 구함.	

자연 I · 문항 3

[문항 3] 좌표평면의 원 $x^2 + y^2 = 16$ 위의 두 점 $A(\sqrt{6} + \sqrt{2}, \sqrt{6} - \sqrt{2})$, $B(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

- (1) 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.
- (2) 호 AB의 길이를 구하시오. (단, 호 AB는 제1사분면에 있다.)
- (3) 문항 (2)의 호 AB와 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.
- (4) 좌표평면의 집합 $C = \{(\cos \theta - 1, \sin \theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 에 속하는 점 $P(\cos \theta - 1, \sin \theta)$ 에 대하여 문항 (2)의 호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $S(\theta)$ 의 최댓값을 구하시오.

■ 예시 답안

3-(1)

[풀이]

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = -1$ 이므로 구하는 직선의 방정식은 $y = -1 \cdot (x - \sqrt{6} - \sqrt{2}) + \sqrt{6} - \sqrt{2} = -x + 2\sqrt{6}$ 이다.

[별해]

두 점 A, B가 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B를 지나는 직선은 $y = x$ 에 수직이다. 따라서 구하는 직선의 기울기는 -1 이고 직선의 방정식은 $y = -1 \cdot (x - \sqrt{6} - \sqrt{2}) + \sqrt{6} - \sqrt{2} = -x + 2\sqrt{6}$ 이다.

3-(2)

[풀이]

두 선분 OA, OB가 x 축과 이루는 각을 각각 α, β 라고 하면 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$ 이고 $\tan \beta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}$ 이다. 탄젠트함수의 덧셈정리에 따라

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} = \frac{2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})}{1 + (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{3}$$

이므로 원점 O에 대하여 두 선분 OA, OB가 이루는 각은 $\beta - \alpha = \frac{\pi}{3}$ 이다. 원의 반지름이 4이므로 구하는 호의 길이는 $4 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ 이다.

[별해]

선분 AB의 길이를 구하면

$$\sqrt{\{(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})\}^2 + \{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - (\sqrt{6} - \sqrt{2})\}^2} = 4$$

이다. 두 선분 OA, OB의 길이가 주어진 원의 반지름 4이므로 삼각형 AOB는 정삼각형이다. 따라서 원점 O에 대하여 두 선분 OA, OB가 이루는 각은 $\frac{\pi}{3}$ 이다. 원의 반지름이 4이므로 구하는 호의 길이는 $4 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ 이다.

3-(3)

[풀이]

호 AB와 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 AOB의 넓이에서 삼각형 AOB의 넓이를 뺀 것이다. 문항 (2)에서 구한 중심각이 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$ 이고 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$ 이므로 구하는 넓이는 $\frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ 이다.

3-(4)

[풀이]

집합 C의 점은 $(x+1)^2 + y^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 으로 나타나는 원의 점이다. 이 원의 한 점과 문항 (1)에서 구한 직선 사이의 거리가 최대일 때 구하는 도형의 넓이가 최대가 된다. 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 의 중심 $(-1, 0)$ 과 문항 (1)에서 구한 직선 $x + y - 2\sqrt{6} = 0$ 과의 거리가

$$\frac{|(-1) + 0 - 2\sqrt{6}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3}$$

이므로 이 값에 반지름 1을 더하면 최대 거리가 $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3} + 1$ 이다. 선분 AB의 길이가

$$\sqrt{\{(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - (\sqrt{6} + \sqrt{2})\}^2 + \{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - (\sqrt{6} - \sqrt{2})\}^2} = 4$$

이므로 도형의 넓이 $S(\theta)$ 가 최댓값일 때의 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3} + 1 \right) = \sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2 \text{이다.}$$

문항 (3)에서 구한 호 AB와 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이 $\frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ 를 더하면 구하는 넓이의 최댓값은 $\left(\frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3} \right) + (\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2) = \frac{8\pi}{3} + \sqrt{2} + 2$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.	4점
	기울기의 공식으로 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기 -1 를 바르게 구함. 직선의 방정식 $y = -x + 2\sqrt{6}$ 을 바르게 구함.	
3-(1) 별해	두 점 A, B가 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B를 지나는 직선이 $y = x$ 에 수직임을 이용하여 구하는 직선의 기울기 -1 을 바르게 구함. 직선의 방정식 $y = -x + 2\sqrt{6}$ 을 바르게 구함.	
3-(2)	호 AB의 길이를 구하시오. (단, 호 AB는 제1사분면에 있다.)	8점
	두 선분 OA, OB가 x 축과 이루는 각 α, β 에 대하여 $\tan \alpha = 2 - \sqrt{3}$ 이고 $\tan \beta = 2 + \sqrt{3}$ 임을 바르게 구함. 탄젠트함수의 덧셈정리를 활용하여 $\tan(\beta - \alpha) = \sqrt{3}$ 을 바르게 구함. 두 선분 OA, OB가 이루는 각 $\beta - \alpha = \frac{\pi}{3}$ 를 구함. 호 AB의 길이 $4 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ 를 바르게 구함.	
3-(2) 별해	선분 AB의 길이 4를 바르게 구함. 두 선분 OA, OB의 길이가 주어진 원의 반지름 4이므로 삼각형 AOB는 정삼각형임을 바르게 설명함. 원점 O에 대하여 두 선분 OA, OB가 이루는 각 $\frac{\pi}{3}$ 를 바르게 구함. 호 AB의 길이 $4 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ 를 바르게 구함.	
3-(3)	문항 (2)의 호 AB와 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.	7점
	호 AB와 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 AOB의 넓이에서 삼각형 AOB의 넓이를 뺀 것임을 바르게 설명함. 부채꼴의 넓이 $\frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$ 를 구함. 삼각형의 넓이 $\frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$ 을 구함. 호 AB와 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ 임을 구함.	
3-(4)	좌표평면의 집합 $C = \{(\cos \theta - 1, \sin \theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 에 속하는 점 $P(\cos \theta - 1, \sin \theta)$ 에 대하여 문항 (2)의 호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $S(\theta)$ 의 최댓값을 구하시오.	11점

하위 문항	채점 기준	배점
	집합 C의 점은 $(x+1)^2 + y^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$으로 나타나는 원의 점이며, 이 원의 한 점과 문항 (1)에서 구한 직선 사이의 거리가 최대일 때 구하는 도형의 넓이가 최대가 됨을 설명함. 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$의 중심 $(-1, 0)$과 문항 (1)에서 구한 직선 $x + y - 2\sqrt{6} = 0$과의 거리 $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3}$를 바르게 구하고 이 값에 반지름 1을 더하여 최대 거리가 $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{3} + 1$를 구함. 선분 AB의 길이 4를 바르게 구하고 도형의 넓이 $S(\theta)$가 최댓값일 때의 삼각형 PAB의 넓이는 $\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2$를 구함. 문항 (3)에서 도형의 넓이 $\frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$를 더하여 구하는 넓이의 최댓값은 $\frac{8\pi}{3} + \sqrt{2} + 2$를 구함.	

자연 II · 문항 1

[문항 1] 실수 a 가 $-1 < a < 1$ 일 때 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta$$

(2) 문항 (1)로부터 다음 등식이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2^n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta$$

(3) 다음 부등식이 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 보이시오.

$$2\pi \ln(1 - a^{2^n}) \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta \leq 2\pi \ln(1 + a^{2^n})$$

(4) 다음 정적분을 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 계산하시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta$$

■ 예시 답안

1-(1)

[풀이]

$\theta = -t$ 로 치환하면 $dt = -d\theta$, $t \in [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$, $\sin \theta = \sin(-t) = -\sin t$ 가 성립하므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin t)(-1) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin t) dt$$

1-(2)

[풀이]

수학적 귀납법을 사용하여 증명한다. 먼저 $n = 1$ 일 때 주어진 등식이 성립하는지 확인한다. 문항 (1)에 의하여

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta$$

가 성립한다. 위 등식의 우변을 정리하면 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{\ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) + \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta)\} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 - 4a^2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2(1 - 2\sin^2 \theta)) d\theta \quad (1 - 2\sin^2 \theta = \cos 2\theta) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos 2\theta) d\theta \quad \left(t = 2\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{2} dt, t \in [-\pi, \pi]\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt \end{aligned}$$

여기에서 $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt$ 를 아래와 같이 표현할 수 있다.

우선 $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt = \int_{-\pi}^0 \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt + \int_0^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt$ 로 분리하여, 우변의 첫 번째 적분에는 $t = x - \frac{\pi}{2}$ 로 치환하여 $dt = dx$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos t = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$ 를 활용하고, 두 번째 적분에는 $t = y + \frac{\pi}{2}$ 로 치환하여 $dt = dy$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos t = \cos(y + \frac{\pi}{2}) = -\sin y$ 를 활용한다. 이 치환적분의 결과와 문항 (1)에 의하여 아래의 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt &= \int_{-\pi}^0 \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt + \int_0^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \sin x) dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 - 2a^2 \sin y) dy \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

위의 두 등식을 정리하면 아래가 성립한다.

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \sin \theta) d\theta$$

따라서 $n = 1$ 일 때 주어진 등식이 성립한다.

$n = k$ 일 때 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2^k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}} + 1 + 2a^{2^k} \sin \theta) d\theta$ 이 성립한다고 가정하자.

위의 식에서 $a^{2^k} = \beta$ 라고 하면 $a^{2^{k+1}} = a^{2^k \cdot 2} = (a^{2^k})^2 = \beta^2$ 이고 $\beta^4 = (\beta^2)^2 = a^{2^{k+2}}$ 이 성립한다. 이때 $-1 < a < 1$ 이므로 $0 \leq a^{2^k} = \beta < 1$ 이고, $0 \leq a^{2^{k+1}} = \beta^2 < 1$ 이다. 그러므로 $n = 1$ 일 때의 식에서 a 에 β 를 대입하면,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\beta^2 + 1 + 2\beta \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\beta^4 + 1 + 2\beta^2 \sin \theta) d\theta$$

이 성립하고

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta &= \frac{1}{2^k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}} + 1 + 2a^{2^k} \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2^k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\beta^2 + 1 + 2\beta \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\beta^4 + 1 + 2\beta^2 \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+2}} + 1 + 2a^{2^{k+1}} \sin \theta) d\theta \end{aligned}$$

이 성립하여 $n = k + 1$ 일 때 주어진 등식이 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

1-(3)

[풀이]

$-1 < a < 1$ 이므로 $0 \leq a^{2^n} < 1$ 이고 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 에 대하여 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ 이므로 아래의 부등식이 성립한다.

$$(1 - a^{2^n})^2 = a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n}(-1) \leq a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta \leq a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \cdot 1 = (1 + a^{2^n})^2$$

위 부등식에 밑이 1보다 큰 로그함수가 증가함수인 것을 적용하면 아래의 부등식이 성립한다.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - a^{2^n})^2 d\theta \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + a^{2^n})^2 d\theta$$

위 부등식의 왼쪽과 오른쪽 적분에서 $\ln(1 \pm a^{2^n})^2 = 2 \ln(1 \pm a^{2^n})$ 는 변수 θ 에 대하여 상수이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 \pm a^{2^n})^2 d\theta = 2 \ln(1 \pm a^{2^n}) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = 2\pi \ln(1 \pm a^{2^n})$$

가 되어 아래의 부등식이 성립한다.

$$2\pi \ln(1 - a^{2^n}) \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta \leq 2\pi \ln(1 + a^{2^n})$$

1-(4)

[풀이]

문항 (2)와 문항 (3)에 의하여 아래의 부등식이 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$$\frac{2\pi \ln(1 - a^{2^n})}{2^n} \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta \leq \frac{2\pi \ln(1 + a^{2^n})}{2^n}$$

위 부등식에서 $-1 < a < 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2^n} = 0$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ 이며 로그함수의 연속성에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + a^{2^n}) = \ln 1 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 - a^{2^n}) = \ln 1 = 0$$

이 성립한다. 그러므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi \ln(1 + a^{2^n})}{2^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi \ln(1 - a^{2^n})}{2^n} = 0$ 이 성립하여 사잇값 정리에 의하여

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = 0 \quad \text{이다.}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-(1)	다음 등식이 성립함을 보이시오. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta$	5점
	$\theta = -t$로 치환 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin t)(-1) dt$ 임을 보임. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin t)(-1) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin t) dt$ 임을 보임.	
1-(2)	문항 (1)로부터 다음 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2^n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta$	25점
	문항 (1)에 의하여 아래의 등식을 유도함. $2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta$ $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 - 2a \sin \theta) d\theta$ $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2(1 - 2\sin^2 \theta)) d\theta$ $1 - 2\sin^2 \theta = \cos 2\theta$임을 이용하고, $2\theta = t$를 치환하여 아래의 등식이 성립함을 보임. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2(1 - 2\sin^2 \theta)) d\theta$ $= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\pi}^0 \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt + \int_0^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt \right\}$ $x = t + \frac{\pi}{2}$로 치환하여 아래의 등식을 유도함. $\int_{-\pi}^0 \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \sin x) dx$ $y = t - \frac{\pi}{2}$로 치환하여 아래의 등식을 유도함. $\int_0^{\pi} \ln(a^4 + 1 + 2a^2 \cos t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4 + 1 - 2a^2 \sin y) dy$ 위의 식을 정리하여, $n = 1$일 때 주어진 등식이 성립함을 확인함. $n = k$일 때 아래의 주어진 등식이 성립한다고 가정함. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2^k} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}} + 1 + 2a^{2^k} \sin \theta) d\theta$ 위의 식에서 $0 \leq a^{2^{k+1}} < 1$, $a^{2^{k+1}} = (a^{2^k})^2$, $a^{2^{k+2}} = (a^{2^{k+1}})^2$임을 언급함. $n = k$일 때 성립한다는 가정과 위의 식으로부터 아래의 식을 유도함.	

하위 문항	채점 기준	배점
	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2^{k+1}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+2}} + 1 + 2a^{2^{k+1}} \sin \theta) d\theta$ 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 기술함.	
	다음 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오. $2\pi \ln(1 - a^{2^n}) \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta \leq 2\pi \ln(1 + a^{2^n})$	5점
1-(3)	$(1 - a^{2^n})^2 \leq a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta \leq (1 + a^{2^n})^2$ 임을 보임. 위 부등식에 로그함수를 적용하여 아래의 부등식을 유도함. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - a^{2^n})^2 d\theta \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \sin \theta) d\theta \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + a^{2^n})^2 d\theta$	
	다음 정적분을 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 계산하시오. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta$	5점
1-(4)	모든 자연수 n에 대하여 아래의 부등식을 유도함. $\frac{2\pi \ln(1 - a^{2^n})}{2^n} \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta \leq \frac{2\pi \ln(1 + a^{2^n})}{2^n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi \ln(1 + a^{2^n})}{2^n} = 0$ 임을 보임. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi \ln(1 - a^{2^n})}{2^n} = 0$ 임을 보임. 사잇값 정리에 의하여 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 + 1 + 2a \sin \theta) d\theta = 0$을 얻음.	

자연 II · 문항 2

함수 $f(x) = x^2 e^x$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

- (1) 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 구하시오.
- (2) 부등식 $a^2 e^a < 4e^{-2} < (a+1)^2 e^{a+1}$ 과 $b^2 e^b < e^{-1} < (b+1)^2 e^{b+1}$ 을 만족시키는 정수 a, b 를 모두 구하시오. (단, $2.7 < e$)
- (3) 방정식 $f(x) = k$ 의 실근이 모두 정수인 양의 실수 k 의 최솟값을 구하시오.

■ 예시 답안

2-(1)

[풀이] $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$ 이므로 $f'(x) = 0$ 이 $x = -2, x = 0$ 을 근으로 갖는다. 구간 $(-\infty, -2)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이고 $f(x)$ 가 증가하며, 구간 $(-2, 0)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이고 $f(x)$ 가 감소한다. 구간 $(0, \infty)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 가 증가한다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값 $f(-2) = 4e^{-2}$ 과 $x = 0$ 에서 극솟값 $f(0) = 0$ 을 갖는다.

2-(2)

[풀이] 모든 실수 x 에 대하여 함수 $f(x) \geq 0$ 이고 구간 $(-\infty, -2)$ 와 구간 $(0, \infty)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 가 구간 $x < -2$ 또는 $x > 0$ 에서 증가하고, 구간 $(-2, 0)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 $f(x)$ 가 구간 $(-2, 0)$ 에서 감소한다. $f(x)$ 의 그래프의 개형을 통해 $y = f(x)$ 는 직선 $y = 4e^{-2}$ 과 서로 다른 두 점에서 만나고, 직선 $y = e^{-1}$ 과는 서로 다른 세 점과 만난다.

(ㄱ) 주어진 부등식 $f(a) = a^2e^a < 4e^{-2} < (a+1)^2e^{a+1} = f(a+1)$ 을 만족하는 정수 a 는 $a \geq 0$ 이고 이 구간에서 한 개가 존재한다. 이때 무리수 e 는 부등식 $2 < e$ 를 만족하므로 $f(0) = 0 < 4e^{-2} < e = f(1)$ 이다. 이로부터 구하는 정수 a 는 0이다.

(ㄴ) 부등식 $f(b) < e^{-1} < f(b+1)$ 을 만족하는 정수 b 는 구간 $(-\infty, -2)$ 와 구간 $(0, \infty)$ 에 구간별로 한 개씩 존재할 수 있다. 이때 무리수 e 는 부등식 $2.7 < e < 3$ 를 만족하므로 $16 < 2.7^3 < e^3$ 이 성립한다. 따라서, $f(-4) = 16e^{-4} < e^{-1} < 9e^{-3} = f(-3)$ 와 $f(0) = 0 < e^{-1} < e = f(1)$ 가 성립한다. 이로부터 구하는 정수 b 는 -4와 0이다.

2-(3)

[풀이] $k > 0$ 에 대하여 방정식 $f(x) = k$ 는 $0 < k < 4e^{-2}$ 일 때 서로 다른 세 실근을 갖고 $k = 4e^{-2}$ 일 때 서로 다른 두 실근을 가지며 $k > 4e^{-2}$ 일 때 한 개의 실근을 갖는다.

(ㄱ) $0 < k < 4e^{-2}$ 일 때 방정식 $f(x) = k$ 가 서로 다른 세 정수근을 가지려면 $f(x)$ 가 감소하는 구간 $-2 < x < 0$ 에서 $x = -1$ 이 항상 방정식의 근이 된다. 이때 $f(x) = e^{-1} = f(-1)$ 의 다른 두 근 중의 하나인 α 는 양의 정수이어야 한다. 그런데 문항 (2)에 따라서 $f(0) = 0 < e^{-1} (= f(\alpha)) < e = f(1)$ 이므로 α 는 정수가 아니다. 그러므로 $0 < k < 4e^{-2}$ 에서 주어진 조건을 만족하는 k 는 없다.

(ㄴ) $k = 4e^{-2}$ 일 때 방정식 $f(x) = 4e^{-2}$ 가 $x = -2$ 와 양의 실수 β 를 근으로 갖는다. 문항 (2)에 따라서 $f(0) = 0 < 4e^{-2} (= f(\beta)) < e = f(1)$ 이므로 β 는 정수가 아니다. 그러므로 $k = 4e^{-2}$ 는 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ㄷ) $k > 4e^{-2}$ 일 때 방정식 $f(x) = k$ 는 한 개의 양의 실근을 갖는다. $x > 0$ 일 때 $f(1) = e > 4e^{-2}$ 이고 $f(x)$ 가 증가하므로 조건을 만족하는 최솟값 k 는 $x = 1$ 일 때 $f(1) = e$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-(1)	함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 구하시오.	4점
	도함수 $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$ 를 구함. $f'(x) = 0$ 의 근 $x = -2, x = 0$ 를 찾음. 구간 $(-\infty, -2)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이라서 $f(x)$ 가 증가하고, 구간 $(-2, 0)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이라서 $f(x)$ 가 감소하고, 구간 $(0, \infty)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이라서 $f(x)$ 가 증가함을 설명함. $x = -2$ 에서 극댓값 $f(-2) = 4e^{-2}$ 과 $x = 0$ 에서 극솟값 $f(0) = 0$ 을 구함.	
2-(2)	부등식 $a^2e^a < 4e^{-2} < (a+1)^2e^{a+1}$ 과 $b^2e^b < e^{-1} < (b+1)^2e^{b+1}$ 을 만족시키는 정수 a, b 를 모두 구하시오. (단, $2.7 < e$)	9점
	$y = f(x)$ 와 직선 $y = 4e^{-2}$ 이 서로 다른 두 점에서 만나고, 직선 $y = e^{-1}$ 과는 서로 다른 세 점에서 만나는 2가지 경우로 구분함.	

하위 문항	채점 기준	배점
	① 부등식 $a^2e^a < 4e^{-2} < (a+1)^2e^{a+1}$: 정수 a는 $a \geq 0$임을 설명함. 부등식 $0 < 4e^{-2} < e$임을 언급함. 정수 $a = 0$임을 구함. ② 부등식 $b^2e^b < e^{-1} < (b+1)^2e^{b+1}$: 정수 b가 구간 $(-\infty, -2)$와 구간 $(0, \infty)$에 구간 별로 한 개씩 존재함을 설명함. 부등식 $16e^{-4} < e^{-1} < 9e^{-3}$을 언급함. 부등식 $0 < e^{-1} < e$을 언급함. 정수 $b = -4, 0$임을 구함.	
2-(3)	방정식 $f(x) = k$의 실근이 모두 정수인 양의 실수 k의 최솟값을 구하시오. $0 < k < 4e^{-2}$일 때 서로 다른 세 실근, $k = 4e^{-2}$일 때 서로 다른 두 실근, $k > 4e^{-2}$일 때 한 개의 실근을 갖는 3가지 경우를 언급함. ① $0 < k < 4e^{-2}$인 경우 : 서로 다른 세 실근 중 $f(x)$가 감소하는 구간 $-2 < x < 0$에서 $x = -1$이 방정식의 근이 됨을 기술함. $f(x) = e^{-1} = f(-1)$의 다른 두 근 중 하나가 양수 α임을 설명함. 문항 (2)에서 도출한 부등식 $f(0) = 0 < e^{-1} < e = f(1)$을 언급함. α는 정수가 아님을 기술함. 주어진 조건을 만족하는 k는 없다거나 서로 다른 세 실근이 모두 정수가 될 수 없다는 결론을 기술함. ② $k = 4e^{-2}$인 경우 : 서로 다른 두 실근 중 $x = -2$가 방정식의 근이 됨을 기술함. $f(x) = 4e^{-2} = f(-2)$의 다른 근이 양수 β임을 설명함. 문항 (2)에서 도출한 부등식 $f(0) = 0 < 4e^{-2} < e = f(1)$을 언급함. β는 정수가 아님을 기술함. 주어진 조건을 만족하는 k는 없다거나 서로 다른 두 실근이 모두 정수가 될 수 없다는 결론을 기술함. ③ $k > 4e^{-2}$인 경우 : 방정식 $f(x) = k$는 한 개의 양의 실근을 가짐을 설명함. 부등식 $f(1) = e > 4e^{-2}$과 $x > 0$일 때 $f(x)$가 증가함을 기술함. 최솟값 $k = e$를 구함.	17점

자연 II · 문항 3

좌표평면의 원 $x^2 + y^2 = 16$ 위의 두 점 $A(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $B(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.
[30점]

- (1) 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.
- (2) 호 AB의 길이를 구하시오. (단, 호 AB는 제1사분면에 있다.)
- (3) 좌표평면의 집합 $C = \{(\cos \theta - 1, \sin \theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 에 속하는 점 $P(\cos \theta - 1, \sin \theta)$ 에 대하여 문항 (2)의 호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $S(\theta)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때 $(M - m)^2$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

3-(1)

[풀이] 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{2\sqrt{2} - (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2\sqrt{2} - (\sqrt{6} - \sqrt{2})} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}}{3},$$

즉 $x + \sqrt{3}y - (2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) = 0$ 이다.

3-(2)

[풀이] 두 선분 OA, OB가 x 축과 이루는 각을 각각 α, β 라고 하면 $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$ 이고 $\tan \beta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}$ 이다. 탄젠트함수의 덧셈정리에 의해

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} = \frac{(2 + \sqrt{3}) - 1}{1 + (2 + \sqrt{3}) \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

이므로 원점 O에 대하여 두 선분 OA, OB가 이루는 각이 $\beta - \alpha = \frac{\pi}{6}$ 이다. 원의 반지름이 4이므로 호 AB의 길이는 $4 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ 이다.

[별해] 선분 AB의 길이의 제곱을 구하면

$$\{2\sqrt{2} - (\sqrt{6} - \sqrt{2})\}^2 + \{2\sqrt{2} - (\sqrt{6} + \sqrt{2})\}^2 = 32 - 16\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

두 선분 OA, OB가 주어진 원의 반지름이므로 두 선분의 길이는 모두 4이다. 두 선분 OA, OB가 이루는 각을 γ 라 할 때 코사인 법칙에 의해

$$\cos \gamma = \frac{4^2 + 4^2 - (32 - 16\sqrt{3})}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다. 따라서 원점 O에 대하여 두 선분 OA, OB가 이루는 각이 $\gamma = \frac{\pi}{6}$ 이다. 원의 반지름이 4이므로 호 AB의 길이는 $4 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ 이다.

3-(3)

[풀이] 호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이는 모두 호 AB와 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이와 선분 AB를 밑변으로 하고 집합 C의 한 점 $P(\cos \theta - 1, \sin \theta)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이의 합과 같다. 따라서 이 삼각형의 넓이가 최대일 때 구하는 넓이 $S(\theta)$ 가 최대이고 삼각형의 넓이가 최소일 때 구하는 넓이도 최소이다.

집합 C의 점은 $(x+1)^2 + y^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 으로 나타나는 원의 점이다. 집합 C가 나타내는 원의 한 점과 문항 (1)에서 구한 직선과의 거리가 최대인 h_1 일 때 넓이 $S(\theta)$ 가 최대가 되고 거리가 최소인 h_2 일 때 넓이 $S(\theta)$ 가 최소가 된다. 따라서 $S(\theta)$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 의 차 $M - m$ 은 선분 AB를 공통인 밑변으로 하고 높이가 h_1 인 삼각형의 넓이와 높이가 h_2 인 삼각형의 넓이의 차이이므로

$$M - m = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h_1 - \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h_2 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot (h_1 - h_2)$$

이다. 직선 $x + \sqrt{3}y - (2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) = 0$ 에서 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 와의 거리가 최대 또는 최소가 되는 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 위의 점은 이 원과 기울기가 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 인 접선이 만나는 두 점이다. 이 두 접선이 직선 $x + \sqrt{3}y - (2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) = 0$ 에 평행하고 원 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 의 반지름이 1이므로 $h_1 = h_2 + 2 \cdot 1 = h_2 + 2$ 이다. 따라서 $h_1 - h_2 = 2$ 이다. 선분 AB의 길이의 제곱이

$$\{2\sqrt{2} - (\sqrt{6} - \sqrt{2})\}^2 + \{2\sqrt{2} - (\sqrt{6} + \sqrt{2})\}^2 = 32 - 16\sqrt{3}$$

이므로 구하는 값은

$$(M - m)^2 = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot (h_1 - h_2) \right\}^2 = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot 2 \right\}^2 = \overline{AB}^2 = 32 - 16\sqrt{3} \text{ 이다.}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3-(1)	두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.	4점
	두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 을 구함. 직선의 방정식 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}}{3}$ 을 구함.	
3-(2)	호 AB의 길이를 구하시오. (단, 호 AB는 제1사분면에 있다.)	8점
	두 선분 OA, OB가 x 축과 이루는 각 α, β 에 대하여 $\tan \alpha = 1$ 과 $\tan \beta = 2 + \sqrt{3}$ 를 구함. 탄젠트함수의 덧셈정리를 활용하여 $\tan(\beta - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 을 구함. 두 선분 OA, OB가 이루는 각 $\beta - \alpha = \frac{\pi}{6}$ 를 구함. 호 AB의 길이 $4 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ 를 구함.	
3-(2) 별해	선분 AB의 길이의 제곱이 $32 - 16\sqrt{3}$ 임을 바르게 구함. 두 선분 OA, OB가 이루는 각 γ 에 대해 코사인법칙을 활용하여 $\cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 구함. 두 선분 OA, OB가 이루는 각 $\gamma = \frac{\pi}{6}$ 를 바르게 구함. 호 AB의 길이 $4 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ 를 바르게 구함.	
3-(3)	좌표평면의 집합 $C = \{(\cos \theta - 1, \sin \theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ 에 속하는 점 $P(\cos \theta - 1, \sin \theta)$ 에 대하여 문항 (2)의 호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $S(\theta)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때 $(M - m)^2$ 의 값을 구하시오.	18점
	호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이는 모두 호 AB와 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이와 선분 AB를 밑변으로 하고 집합 C 의 한 점 $P(\cos \theta - 1, \sin \theta)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이의 합과 같음을 서술하고 이 삼각형의 넓이가 최대일 때 구하는 넓이 $S(\theta)$ 가 최대이고 삼각형의 넓이가 최소일 때 구하는 넓이도 최소임을 바르게 설명함. 집합 C 의 점은 $(x + 1)^2 + y^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 으로 나타나는 원의 점임을 바르게 설명함. 집합 C 가 나타내는 원의 한 점과 문항 (1)에서 구한 직선과의 거리가 최대인 h_1 일 때 넓이 $S(\theta)$ 가 최대가 되고 거리가 최소인 h_2 일 때 넓이 $S(\theta)$ 가 최소가 됨을 바르게 설명함. $S(\theta)$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 의 차 $M - m$ 이 선분 AB를 공통인 밑변으로 하고 높이가 h_1 인 삼각형의 넓이와 높이가 h_2 인 삼각형의 넓이의 차이이므로 $M - m = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot (h_1 - h_2)$ 임을 바르게 설명함. 직선 $x + \sqrt{3}y - (2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) = 0$ 에서 원 $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ 와의 거리가 최대 또는 최소가 되는 원 $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ 위의 점이 이 원과 기울기가 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 인 접선이 만나는 두 점임을 설명하고 이를 근거로 $h_1 - h_2 = 2$ 를 바르게 구함. 선분 AB의 길이의 제곱 $32 - 16\sqrt{3}$ 을 구하여 $(M - m)^2 = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot (h_1 - h_2) \right\}^2 = \overline{AB}^2 = 32 - 16\sqrt{3}$ 를 바르게 구함.	

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다