

중앙대논술

자연계

목차

2026학년도 자연계열 I (1교시) · II (2교시)	3
1교시 · 문제 1	3
1교시 · 문제 2	6
1교시 · 문제 3	9
1교시 · 문제 4	12
2교시 · 문제 1	15
2교시 · 문제 2	19
2교시 · 문제 3	23
2교시 · 문제 4	26
 2025학년도 자연계열 I (1교시) · II (2교시)	 29
1교시 · 문제 1	29
1교시 · 문제 2	32
1교시 · 문제 3	35
1교시 · 문제 4	37
2교시 · 문제 1	40
2교시 · 문제 2	43
2교시 · 문제 3	46
2교시 · 문제 4	49
 2024학년도 자연계열 I (1교시) · II (2교시)	 52
1교시 · 문제 1	52
1교시 · 문제 2	56
1교시 · 문제 3	58
1교시 · 문제 4	60
2교시 · 문제 1	63
2교시 · 문제 2	66
2교시 · 문제 3	69
2교시 · 문제 4	71

2026학년도 자연계열 I (1교시) · II (2교시)

1교시 · 문제 1

[문제 1] 다음 규칙에 따라 시행을 한다. 풀이와 함께 물음에 답하시오.

제시문

- 1학년 학생 1명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 2명, 4학년 학생 3명이 8개의 자리가 있는 원탁에 둘러앉는다.
- 2학년 학생끼리는 서로 이웃하지 않는다.
- 두 2학년 학생은 같은 학생과 서로 이웃하지 않는다.
- 1학년 학생은 3학년 학생과 서로 이웃하지 않는다.
- 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.

위 시행에서 1학년 학생이 2학년 학생과 서로 이웃할 확률을 구하시오. [20점]

■ 예시 답안

(1)

1학년 학생이 1명이므로, 1학년 학생을 기준으로 나머지 학생들의 위치를 고정할 수 있다. 1학년 학생의 시계방향으로 나머지 학생들의 위치를 1, ..., 7이라 하자.

(2)

2학년 학생 2명의 위치를 각각 i, j ($i < j$)라 하자. 2번째, 3번째 조건을 더하면 2학년 학생의 사이 양쪽에 2명 이상의 학생이 있도록 하는 것과 같다. 이를 만족하는 i, j 의 조건은 다음과 같다.

$$i + 2 < j, \quad j + 2 < 8 + i \quad \text{또는} \\ i + 2 < j < i + 6$$

(3)

위 조건을 만족하는 (i, j) 쌍은 다음과 같다.

$$i = 1 : j = 4, 5, 6$$

$$i = 2 : j = 5, 6, 7$$

$$i = 3 : j = 6, 7$$

$$i = 4 : j = 7$$

(4)

(i, j) 쌍 중에서 2학년 학생이 1학년 학생과 이웃하는 경우는 1 또는 7이 포함된 경우로 6가지이며, 2학년 학생 2명의 자리를 바꾸는 경우의 수는 2가지이다. 이때 항상 1명의 2학년 학생이 1학년 학생과 이웃한다. 1학년 학생 옆의 남은 한 자리에 4학년 학생이 들어가야 하므로 4학년 학생 중 1명을 선택하는 경우의 수는 3가지이며, 남은 4학년 학생 2명과 3학년 학생 2명을 남은 자리에 배치하면 된다. 이 경우의 수는 $6 \times 2 \times 3 \times 4! = 864$ 가지이다.

(5)

(i, j) 쌍 중에서 2학년 학생이 1학년 학생과 이웃하지 않는 경우는 남은 3가지이며, 2학년 학생 2명의 자리를 바꾸는 경우의 수는 2가지이다. 이때 1학년 학생 옆의 두 자리에 모두 4학년 학생이 들어가야 하므로 4학년 학생 중 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$ 가지이며, 남은 4학년 학생 1명과 3학년 학생 2명을 남은 자리에 배치하면 된다. 이 경우의 수는 $3 \times 2 \times 6 \times 3! = 216$ 가지이다.

(6)

최종적으로, 구하는 확률은 $\frac{864}{864 + 216} = \frac{864}{1080} = \frac{4}{5}$ 이다.

[별 해]

(1)

(4)-(5)를 다음과 같이 1, 7번 자리 학생의 학년을 기준으로 3가지 경우로 나눌 수 있다.

$$A : 1 - 2\text{학년}, 7 - 4\text{학년}$$

$$B : 1 - 4\text{학년}, 7 - 2\text{학년}$$

$$C : 1 - 4\text{학년}, 7 - 4\text{학년}$$

(2)

A는 $i = 1$ 인 경우이므로 두 2학년 학생이 앉는 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$ 가지이다. 이때 7번 자리에 앉을 4학년 학생을 선택하는 경우의 수는 3가지이다. 남은 3학년 학생 2명과 4학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 $4! = 24$ 가지이므로 A의 경우의 수는 $6 \times 3 \times 24 = 432$ 가지이다.

(3)

B는 $j = 7$ 인 경우이므로 두 2학년 학생이 앉는 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$ 가지이다. 이때 1번 자리에 앉을 4학년 학생을 선택하는 경우의 수는 3가지이다. 남은 3학년 학생 2명과 4학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 $4! = 24$ 가지이므로 B의 경우의 수는 432가지이다.

(4)

C 는 $i \neq 1, j \neq 7$ 인 경우이므로 두 2학년 학생이 앉는 경우의 수는 $3 \times 2! = 6$ 가지이다. 이때 4학년 학생 3명 중 2명이 1학년 학생 옆에 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$ 가지이며, 남은 3학년 학생 2명과 4학년 학생 1명이 앉는 경우의 수는 $3! = 6$ 가지이므로 C 의 경우의 수는 $6 \times 6 \times 6 = 216$ 가지이다.

(5)

A, B, C 는 서로 배반사건이다. 따라서 최종 확률은

$$P(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B)}{n(A) + n(B) + n(C)} = \frac{432 + 432}{432 + 432 + 216} = \frac{4}{5}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	2학년 학생이 앉을 수 있는 전체 경우의 수를 정확히 계산하면 +6점 -다른 방법으로 풀었을 경우, 아래 값들이 정확하면 점수에 합산 2학년 학생이 1학년 학생과 이웃하는 경우의 수를 정확히 계산하면 +6점 2학년 학생이 1학년 학생과 이웃하지 않는 경우의 수를 정확히 계산하면 +6점 최종 확률을 정확히 계산하면 +2점	20

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

1교시 · 문제 2

[문제 2] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하면 다음 식이 성립한다.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

- 함수 $f(x)$ 와 실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 정의되어 있고 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 존재하며 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이라고 한다. 한편, 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 불연속이라고 한다.

2-1 모든 계수가 자연수인 삼차함수 $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + k$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α 와 β 를 갖는다.

(나) $f(1) = 11$

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ 이 최대가 되는 자연수 m, n, k 를 구하시오. [10점]

2-2 모든 실수 x 에서 미분가능한 함수

$$f(x) = \begin{cases} 4 \sin^3 x - 3 \sin x & (x \geq 0) \\ \frac{3}{\pi^2} x^3 + ax & (x < 0) \end{cases} \quad (\text{단, } a \text{는 실수})$$

에 대하여 함수 $g(k)$ 는 $-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 $f(x) = k$ (단, k 는 실수)의 서로 다른 실근의 개수라 정의하자. 실수 a 의 값을 구하고, 함수 $g(k)$ 가 불연속인 실수 k 의 값을 모두 구하시오. [15점]

■ 예시 답안

[문제 2-1]

주어진 $f(x)$ 를 미분하면 $f'(x) = 3x^2 + 2mx + n$ 이다.

$f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 조건은

$D/4 = m^2 - 3n > 0$ 이고, 근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta = -\frac{2m}{3}$, $\alpha\beta = \frac{n}{3}$ 이다.

$f(1) = 11$ 이므로, $m + n + k = 10$ 이며, m, n, k 는 자연수이므로, $1 \leq m, n, k \leq 8$ 이고, $m + n \leq 9$ 이다.

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{2m}{n}$ 이 최대가 되기 위해서는 n 은 크고 m 은 작아야 한다.

$m^2 - 3n > 0$, $m + n \leq 9$ 를 만족하는 m, n 은

(1) $m = 1$ 일 때, n 은 없다. (2) $m = 2$ 일 때, $n = 1$ (3) $m = 3$ 일 때, $n = 1, 2$

(4) $m = 4$ 일 때, $n = 1, 2, \dots, 5$ (5) $m = 5$ 일 때, $n = 1, \dots, 4$

(6) $m = 6$ 일 때, $n = 1, 2, 3$ (7) $m = 7$ 일 때, $n = 1, 2$ (8) $m = 8$ 일 때, $n = 1$

이 중 $m = 4, n = 5$ 일 때, $-\frac{2m}{n} = -\frac{8}{5}$ 이 최대이다. 이때, $k = 1$ 이다.

따라서, $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ 이다.

[문제 2-2]

$x > 0$ 일 때, $f'(x) = 3 \cos x(4 \sin^2 x - 1)$

$x < 0$ 일 때, $f'(x) = \frac{9}{\pi^2}x^2 + a$

$f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능하므로, $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ 이다.

따라서, $a = -3$ 이다.

(i) $-\pi \leq x < 0$ 에서 $f(x) = \frac{3}{\pi^2}x(x^2 - \pi^2)$ 이므로 $f(-\pi) = 0$

$f'(x) = \frac{9}{\pi^2}x^2 - 3$ 이므로 $f'\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0$. 부호 변화를 고려하면 극댓값 $f\left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

(ii) $0 \leq x \leq \pi$ 에서 $f(x) = \sin x(4 \sin^2 x - 3)$ 이므로, $f(0) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f(\pi) = 0$

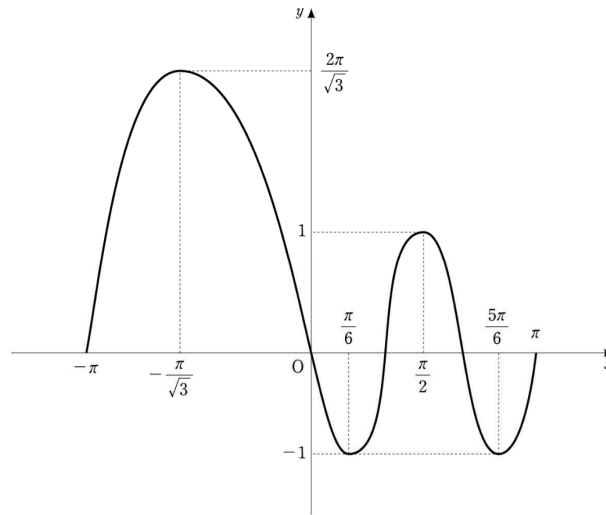
$f'(x) = 3 \cos x(4 \sin^2 x - 1)$ 이므로, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0$

이를 이용한 증가와 감소를 나타낸 표는 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\dots$	$-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{\pi}{6}$	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\dots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\dots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

부호 변화를 고려한 극솟값은 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -1$, 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 이다.

이를 그래프로 그리면



위 그래프의 개형으로부터 불연속인 k 는 다음과 같다.

$$\lim_{k \rightarrow -1-0} g(k) = 0, \lim_{k \rightarrow -1+0} g(k) = 4, g(-1) = 2 \text{ 이므로 } k = -1 \text{에서 불연속}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0-} g(k) = \lim_{k \rightarrow 0+} g(k) = 4, g(0) = 5 \text{ 이므로, } k = 0 \text{에서 불연속}$$

$$\lim_{k \rightarrow 1-0} g(k) = 4, \lim_{k \rightarrow 1+0} g(k) = 2, g(1) = 3 \text{ 이므로, } k = 1 \text{에서 불연속}$$

$$\lim_{k \rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{3}}-0} g(k) = 2, \lim_{k \rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{3}}+0} g(k) = 0, g\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right) = 1 \text{ 이므로, } k = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \text{에서 불연속}$$

그러므로, 불연속인 k 는 $-1, 0, 1, \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2-1	$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{2m}{n}$ 를 얻으면 +4점 m, n 을 판별식 등을 이용하여 경우를 나누거나 혹은 조건을 정확히 이용하여 경우를 줄이면 +4점 모든 계산을 정확히 계산하여 $m = 4, n = 5, k = 1$ 을 얻으면 +2점	10
문제 2-2	$a = -3$ 을 구하면 +3점 증가와 감소 표 혹은 그래프 개형 혹은 극점과 극값을 바르게 구하면 +7점 불연속인 $k = -1, 0, 1, \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ 를 바르게 구하면 +5점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

1교시 · 문제 3

[문제 3] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 를 포함하는 열린구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x)$$

- 미분가능한 함수 $f(x)$ 에서 $f'(a) = 0$ 이고 $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극소이고 극솟값은 $f(a)$ 이다.
- 미분가능한 함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 α 와 β 를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

- 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때, 다음 식이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

3-1 극한값

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(3 + \frac{k}{n}\right) \ln(3n+k) - \left(2 + \frac{k}{n}\right) \ln(2n+k) - \ln n}{\left(2 + \frac{k}{n}\right) \left(3 + \frac{k}{n}\right) \ln\left(2 + \frac{k}{n}\right) \ln\left(3 + \frac{k}{n}\right)}$$

을 구하시오. [10점]

3-2 좌표평면 위의 점 $O(0, 0)$, $P(x, 0)$, $A(t, \sqrt{3t})$, $B(t, -\sqrt{3t})$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \overline{PO} + \overline{PA} + \overline{PB}$$

$f(x)$ 의 최솟값을 $m(t)$ 라 할 때, $\int_{\frac{1}{2}}^4 \ln(m(t))dt = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 7 + d$ 이다. 유리수 a, b, c, d 를 구하시오.

(단, $t > 0$ 이다.) [15점]

■ 예시 답안

[문제 3-1]

$$\begin{aligned}
 & \left(3 + \frac{k}{n}\right) \ln(3n+k) - \left(2 + \frac{k}{n}\right) \ln(2n+k) - \ln n \\
 &= \left(3 + \frac{k}{n}\right) \ln n \left(3 + \frac{k}{n}\right) - \left(2 + \frac{k}{n}\right) \ln n \left(2 + \frac{k}{n}\right) - \ln n \\
 &= \left(3 + \frac{k}{n}\right) \ln \left(3 + \frac{k}{n}\right) - \left(2 + \frac{k}{n}\right) \ln \left(2 + \frac{k}{n}\right) + \left(3 + \frac{k}{n}\right) \ln n - \left(2 + \frac{k}{n}\right) \ln n - \ln n \\
 &= \left(3 + \frac{k}{n}\right) \ln \left(3 + \frac{k}{n}\right) - \left(2 + \frac{k}{n}\right) \ln \left(2 + \frac{k}{n}\right)
 \end{aligned}$$

이므로 주어진 극한값은 다음 정적분이다.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{\left(3 + \frac{k}{n}\right) \ln \left(3 + \frac{k}{n}\right) - \left(2 + \frac{k}{n}\right) \ln \left(2 + \frac{k}{n}\right)}{\left(2 + \frac{k}{n}\right) \left(3 + \frac{k}{n}\right) \ln \left(2 + \frac{k}{n}\right) \ln \left(3 + \frac{k}{n}\right)} \\
 &= \int_0^1 \frac{(3+x) \ln(3+x) - (2+x) \ln(2+x)}{(2+x)(3+x) \ln(2+x) \ln(3+x)} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{(2+x) \ln(2+x)} dx - \int_0^1 \frac{1}{(3+x) \ln(3+x)} dx
 \end{aligned}$$

$y = \ln(2+x)$, $y = \ln(3+x)$ 로 치환적분하여 정리하면 다음과 같다.

$$2 \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2) - \ln(\ln 4) \quad \text{또는} \quad 2 \ln(\ln 3) - 2 \ln(\ln 2) - \ln 2 \quad \text{또는} \quad \ln \left(\frac{(\ln 3)^2}{2(\ln 2)^2} \right)$$

[문제 3-2]

$f(x) = |x| + 2\sqrt{(x-t)^2 + 3t}$ 이고 최솟값을 구하는 문제이므로

$x \geq 0$ 만 고려해도 충분하다.

$$f'(x) = 1 + \frac{2(x-t)}{\sqrt{(x-t)^2 + 3t}} \quad \text{이고} \quad x \geq t \text{이면 } f'(x) \geq 0 \text{ 이므로}$$

구간 $0 \leq x \leq t$ 에서 생각해 보충분하다. $f'(x) = 0$ 에서 $x = t - \sqrt{t}$ 이 나온다.

$0 \leq t \leq 1$ 이면 $t - \sqrt{t} \leq 0$ 이므로 $x = 0$ 에서 최솟값을 갖고 $m(t) = 2\sqrt{t^2 + 3t}$ 이다.

$t \geq 1$ 이면 $0 \leq t - \sqrt{t} \leq t$ 이므로 $x = t - \sqrt{t}$ 에서 최솟값을 갖고 $m(t) = t + 3\sqrt{t}$ 이다.

구하는 적분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{2}}^4 \ln(m(t)) dt &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(2\sqrt{t^2 + 3t}) dt + \int_1^4 \ln(t + 3\sqrt{t}) dt \\
 \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(2\sqrt{t^2 + 3t}) dt &= \frac{1}{2} \ln 2 + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} \ln(t^2 + 3t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 (\ln t + \ln(t+3)) dt = \frac{13}{2} \ln 2 - \frac{7}{4} \ln 7 - \frac{1}{2} \quad \text{이고}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^4 \ln(t + 3\sqrt{t}) dt &= [t \ln(t + 3\sqrt{t})]_1^4 - \int_1^4 t \frac{1 + \frac{3}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{t + 3\sqrt{t}} dt \\ &= [t \ln(t + 3\sqrt{t})]_1^4 - \int_1^4 \frac{\sqrt{t} + \frac{3}{2}}{\sqrt{t} + 3} dt \\ &= 20 \ln 2 - 5 \ln 5 \text{ 이다.}\end{aligned}$$

두 값을 더하면 $\frac{53}{2} \ln 2 - 5 \ln 5 - \frac{7}{4} \ln 7 - \frac{1}{2}$ 이고

$a = \frac{53}{2}, b = -5, c = -\frac{7}{4}, d = -\frac{1}{2}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3-1	• 정적분을 쓸 수 있도록 분자를 변형하면 +4점 • 맞는 정적분 형태로 쓰면 +2점 • $2 \ln(\ln 3) - \ln(\ln 2) - \ln(\ln 4)$ 구하면 +4점	10
문제 3-2	• $f(x) = x + 2\sqrt{(x-t)^2 + 3t}$ 구하면 +3점 • $0 \leq t \leq 1$에서 $m(t) = 2\sqrt{t^2 + 3t}$ 구하면 +3점 • $t \geq 1$에서 $m(t) = t + 3\sqrt{t}$ 구하면 +3점 • $\frac{13}{2} \ln 2 - \frac{7}{4} \ln 7 - \frac{1}{2}$ 구하면 +3점 • $20 \ln 2 - 5 \ln 5$ 구하면 +3점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

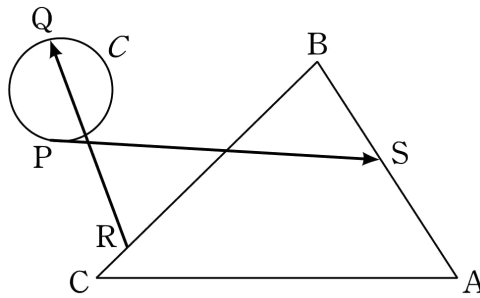
1교시 · 문제 4

[문제 4] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 의 크기와 방향이 같을 때, 두 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$ 는 서로 같다고 하고 기호로 $\vec{u} = \vec{v}$ 와 같이 나타낸다.
- 두 벡터 $\vec{p}, \vec{q}$ 에 대하여 $\vec{p} = \overrightarrow{OP}, \vec{q} = \overrightarrow{OQ}$ 라고 하면 $\vec{p} - \vec{q} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QP}$ 이다.
- 중심이 $C(a, b, c)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ 이다.

- 4-1 그림과 같이 한 점 O와 반지름의 길이가 1인 원 C와 $\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 6, \overline{CA} = 7$ 인 삼각형 ABC가 한 평면 위에 있다. 두 점 P, Q가 원 C 위를 움직이고 두 점 R, S가 삼각형 ABC의 변 위를 움직인다. 같은 평면 위의 점 X가 $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{RQ}$ 를 만족시킬 때, 점 X가 존재하는 영역의 넓이를 구하시오. [15점]

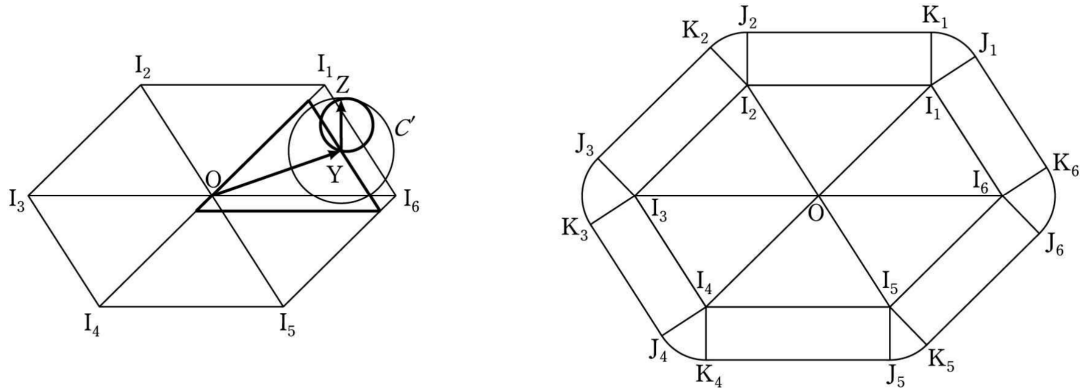


• O

- 4-2 좌표공간에 구 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 100$ 과 점 $T\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}, \frac{14\sqrt{5}}{3}, \frac{5\sqrt{5}}{3}\right)$ 가 있다. 점 T를 지나는 직선이 z 좌표가 0 이하인 점 P에서 구 S에 접한다. 점 P가 나타내는 도형의 넓이를 구하시오. [15점]

■ 예시 답안

[문제 4-1]



$$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{PQ}$$

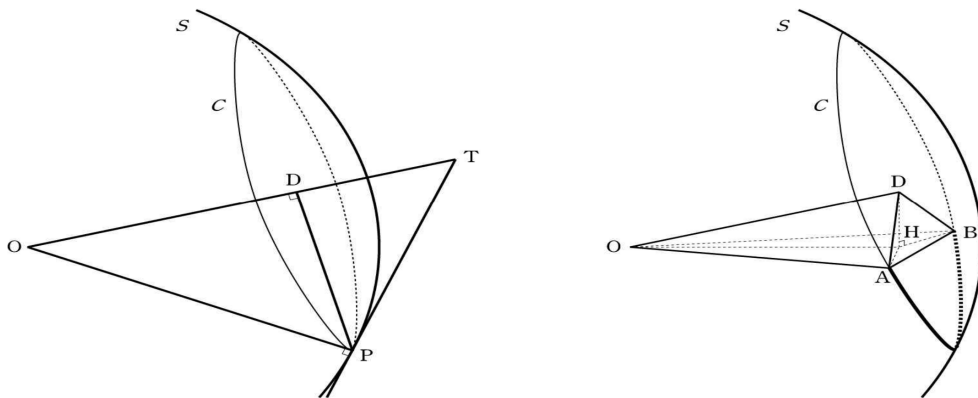
점 O를 한 꼭짓점으로 갖고 삼각형 ABC와 합동인 삼각형 6개를 그림과 같이 맞물리게 이어 붙여, 두 직선 AB와 I_6I_1 이 평행하도록, 육각형 $I_1I_2I_3I_4I_5I_6$ 을 만들자. $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{RS}$ 가 되도록 이 육각형의 변 또는 그 내부에서 점 Y를 잡을 수 있고, 역으로 이 육각형의 변 또는 그 내부의 임의의 점 Y에 대하여 $\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{RS}$ 를 만족시키도록 두 점 R, S를 삼각형 ABC의 변 위에서 잡을 수 있다.

육각형 $I_1I_2I_3I_4I_5I_6$ 의 변 또는 그 내부의 점 Y를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C' 을 생각하자. $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{PQ}$ 가 되도록 원 C' 과 그 내부에서 점 Z를 잡을 수 있고, 역으로 원 C' 과 그 내부의 임의의 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{PQ}$ 를 만족시키도록 두 점 P, Q를 원 C 위에서 잡을 수 있다.

$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{OZ}$ 이므로 점 X가 존재하는 영역은, 6개의 직사각형 $I_iK_iJ_{i+1}I_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$)과 6개의 부채꼴 $I_iJ_iK_i$ 를 육각형 $I_1I_2I_3I_4I_5I_6$ 의 둘레에 그림과 같이 이어 붙여 얻은 영역이다. 여기서 $I_7 = I_1$, $J_7 = J_1$ 로 간주하고 $\overline{I_iJ_i} = 2$ 이다. 6개의 직사각형의 넓이의 합은 $2 \times 2 \times (5 + 6 + 7) = 72$ 이다. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해 $\cos \angle ABC = \frac{1}{5}$ 이어서 $\sin \angle ABC = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ 이고 $\triangle ABC = 6\sqrt{6}$ 이다.

따라서 육각형 $I_1I_2I_3I_4I_5I_6$ 의 넓이는 $36\sqrt{6}$ 이다. 6개의 부채꼴의 중심각의 합은 2π 이므로 그 넓이의 합은 4π 이다. 따라서 점 X가 존재하는 영역의 넓이는 $72 + 36\sqrt{6} + 4\pi$ 이다.

[문제 4-2]

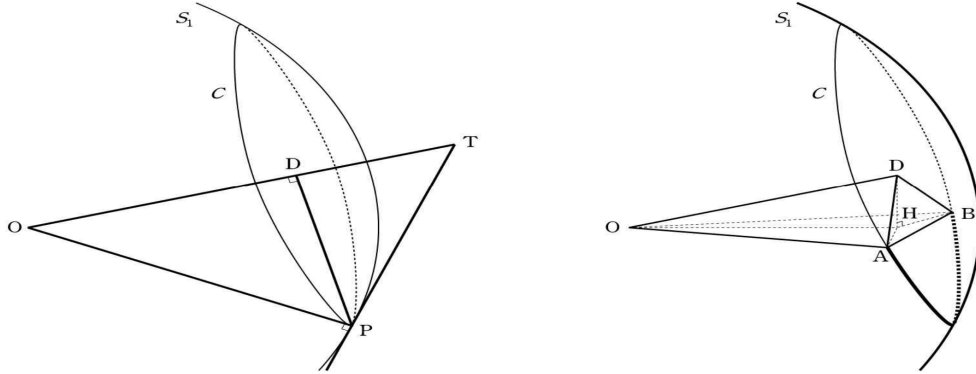


구 S의 중심을 O라 하면 $\overline{OT} = 5\sqrt{5}$ 이고 $\overline{PT} = \sqrt{\overline{OT}^2 - \overline{OP}^2} = 5$ 이다. (그림과 같이 구 S는 평면 OPT와 원에서 만나고 직선 PT는 점 P에서 이 원에 접한다.) 점 P에서 직선 OT에 내린 수선의 발을 D라 하면 $50 = 2 \times \triangle OPT = \overline{OT} \times \overline{DP}$ 에서 $\overline{DP} = 2\sqrt{5}$ 를 얻는다. 따라서 점 P는, 직선 OT에 수직이고 중심이 점 D이고 반

지름이 $2\sqrt{5}$ 인 원 C 위에 있다. 원 C 가 xy 평면과 만나는 두 점을 A, B 라 하면, 점 P 가 나타내는 도형은, 선분 AB 를 포함하는 부채꼴 ADB 의 호 AB 이다.

두 삼각형 OPT 와 ODP 는 닮았으므로 $\overline{OP} : \overline{PT} = \overline{OD} : \overline{DP}$ 에서 $\overline{OD} = 4\sqrt{5}$ 를 얻는다. 점 D 는 선분 OT 를 4 :

1로 내분하므로 그 좌표는 $\left(\frac{8\sqrt{5}}{15}, \frac{56\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$ 이다.



점 D 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H 라 하면, $\overline{DH} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ 이므로 $\overline{OH} = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{DH}^2} = \frac{8\sqrt{10}}{3}$ 이다. 선분 AB 의 중점을 I 라 하면, 닮은 두 직각삼각형 ODH 와 OID 에서 $\overline{OH} : \overline{DH} = \overline{OD} : \overline{ID}$ 이므로 $\overline{ID} = \sqrt{10}$ 이고, 두 직각삼각형 AID 와 BID 에서 $\cos \angle ADI = \cos \angle BDI = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다. 따라서 $\angle ADB = \angle ADI + \angle BDI = \frac{\pi}{2}$ 이고 호 AB 의 길이 l 은 $l = \overline{AD} \times \frac{\pi}{2} = \sqrt{5}\pi$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4-1	$\overline{PS} + \overline{RQ} = \overline{RS} + \overline{PQ}$ 를 찾으면 +2점 $\overline{OY} = \overline{RS}$ 를 만족시키는 점 Y 가 육각형 $I_1I_2I_3I_4I_5I_6$ 의 변 또는 그 내부의 임의의 점인 것을 진술하면 +5점 $\overline{YZ} = \overline{PQ}$ 를 만족시키는 점 Z 가 원 C' 과 그 내부의 임의의 점인 것을 진술하면 +3점 점 X 가 존재하는 영역의 넓이 $72 + 36\sqrt{6} + 4\pi$ 를 구하면 +5점	15
문제 4-2	원 C 의 반지름 $2\sqrt{5}$ 을 구하면 +4점 $\overline{OD} = 4\sqrt{5}$ 를 구하면 +3점 $\overline{DH} = \frac{4\sqrt{5}}{3} \left(= \frac{20}{3\sqrt{5}} \right)$ 를 구하면 +3점 호 AB 의 길이 $\sqrt{5}\pi$ 를 구하면 +5점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

2교시 · 문제 1

[문제 1] 다음 규칙에 따라 시행을 한다. 풀이와 함께 물음에 답하시오.

제시문

- 남학생 2명과 여학생 2명이 두 번의 테스트로 구성된 프로그램에 참여한다.
- 각 테스트가 시작할 때, 남학생 1명과 여학생 1명을 임의로 짝지어 두 개의 팀을 구성하여 테스트에 각각 참여한다.
- 팀은 테스트마다 다시 구성한다.
- 어떤 두 학생이 처음으로 팀이 되었을 때, 그 팀이 테스트를 통과할 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.
- 어떤 두 학생이 두 번 연속으로 같은 팀이 되었을 때, 첫 번째 테스트를 통과했다면 두 번째 테스트를 통과할 확률은 $\frac{3}{4}$ 이다. 그러나 첫 번째 테스트를 통과하지 못했다면 두 번째 테스트를 통과할 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다.
- 두 번의 테스트 동안 어떤 학생이 속한 팀이 한 번 이상 테스트를 통과하면 그 학생은 프로그램에 합격한 것으로 한다.

위 시행에서 4명의 학생 모두 프로그램에 합격할 확률을 구하시오. [20점]

■ 예시 답안

(1)

두 테스트에서 팀이 바뀌지 않는 사건을 A 라 하고, 4명의 학생 모두 프로그램에 합격하는 사건을 B 라 하자. 남학생을 각각 $\neg, \neg$, 여학생을 각각 a, b 라 하자.

(2)

팀이 고정되는 경우는

$$\begin{aligned} &(\neg-a, \neg-b) \rightarrow (\neg-a, \neg-b), \\ &(\neg-b, \neg-a) \rightarrow (\neg-b, \neg-a) \end{aligned}$$

의 두 가지이고, 팀이 바뀌는 경우는

$$\begin{aligned} &(\neg-a, \neg-b) \rightarrow (\neg-b, \neg-a), \\ &(\neg-b, \neg-a) \rightarrow (\neg-a, \neg-b) \end{aligned}$$

의 두 가지이다. 따라서 $P(A) = P(A^c) = \frac{1}{2}$ 이다.

(3)

A 의 경우 B 의 조건부확률 $P(B|A)$ 는 다음과 같이 구한다.

- 첫 번째 테스트에서 두 팀이 모두 통과할 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 이다. 이 경우 두 번째 테스트의 통과 여부와 관계없이 항상 4명 모두 합격이므로, 합격 확률 역시 $\frac{1}{4}$ 이다.
- 첫 번째 테스트에서 두 팀 중 한 팀만 통과할 확률은 $2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ 이다. 이 경우 첫 번째 테스트를 통과한 팀은 항상 합격이며, 첫 번째 테스트를 실패한 팀이 합격할 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다. 따라서 모두 합격할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ 이다.
- 첫 번째 테스트에서 두 팀 모두 실패할 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 이다. 이 경우 두 팀 모두 두 번째 테스트를 통과할 확률은 $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ 이다. 따라서 모두 합격할 확률은 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$ 이다.
- 종합하면, $P(B|A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{25}{64}$ 이다.

(4)

A^c 의 경우 B 의 조건부확률 $P(B|A^c)$ 는 다음과 같이 구한다.

- 첫 번째 테스트에서 두 팀이 모두 통과했을 경우, 두 번째 테스트의 통과 여부와 관계없이 항상 4명이 모두 합격이므로 합격 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다.
- 첫 번째 테스트에서 두 팀 중 한 팀만 통과했을 경우, 두 팀 모두 두 번째 테스트를 통과해야 한다. 예를 들어 첫 번째 테스트에서 $\neg-a$ 팀이 통과하고 $\neg-b$ 팀이 실패했다고 하자. 두 번째 테스트에서 $\neg-b$ 팀만 통과한다면 $\neg$ 은 탈락이며, $\neg-a$ 팀만 통과한다면 b 는 탈락이다. 두 팀 모두 두 번째 테스트를 통과할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 이므로, 모두 합격할 확률은 $2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ 이다.

- 첫 번째 테스트에서 모두 실패했을 경우, 두 팀 모두 두 번째 테스트를 통과해야 한다. 이 확률은 $\frac{1}{4}$ 이므로, 모두 합격할 확률은 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ 이다.
- 종합하면, $P(B|A^c) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$ 이다.

(5)

최종적으로, 구하는 확률은

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) = \frac{1}{2} \times \frac{25}{64} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{16} = \frac{53}{128}$$

이다.

(별 해)

(1)

팀이 고정되었을 경우 두 팀이 각각 한 번 이상 통과하면 전원 합격이다.

- 각 팀이 한 번 이상 통과할 확률은 첫 번째 테스트를 통과하거나 첫 번째 테스트는 실패하고 두 번째 테스트를 통과할 확률과 같으므로 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ 이다.
- 각 팀의 통과 여부는 서로 독립이므로, $P(B|A) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$ 이다.

(2)

팀이 바뀌었을 경우 4개 테스트의 통과 확률은 각각 $\frac{1}{2}$ 이고 통과 여부는 모두 독립이다.

- 4개의 테스트를 모두 통과했다면 전원 합격이다. 이때 확률은 $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ 이다.
- 3개의 테스트를 통과하고 1개는 실패했을 때 역시 어떤 테스트를 통과했는지에 관계없이 전원 합격이다. 이때 확률은 ${}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$ 이다.
- 2개의 테스트를 통과하고 2개는 실패했을 때, 첫 번째 테스트를 2개 통과하거나 두 번째 테스트를 2개 통과해야 한다. 첫 번째 테스트를 1개, 두 번째 테스트를 1개 통과했을 경우 항상 한 명의 탈락자가 발생한다. 이때 확률은 $2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$ 이다.
- 1개 이하의 테스트를 통과했을 때는 전원이 합격할 수 없다.
- 종합하면, $P(B|A^c) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{16}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	$P(A)$ 를 정확히 계산하면 +4점 $P(B A)$ 를 정확히 계산하면 +6점 - 예시 답안대로 풀었을 경우, 각 경우의 확률을 정확히 계산하면 +2점 $P(B A^c)$ 를 정확히 계산하면 +6점 - 예시 답안대로 풀었을 경우, 각 경우의 확률을 정확히 계산하면 +2점 $P(B)$ 를 정확히 계산하면 +4점	20

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

2교시 · 문제 2

[문제 2] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ 일 때 α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

- 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

- 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능하고, $f'(x), g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

2-1 [문제 2-1] 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 3(a_n + 2) & (a_n \text{ 을 } 3\text{으로 나눈 나머지가 } 1\text{인 경우}) \\ 3(a_n + 1) & (a_n \text{ 을 } 3\text{으로 나눈 나머지가 } 2\text{인 경우}) \\ \frac{1}{3}a_n & (a_n \text{ 이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 집합 $A = \{a_n \mid n \text{ 은 자연수}\}$ 의 원소의 개수가 5가 되도록 하는 a_1 을 모두 구하시오. [10점]

2-2 [문제 2-2] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $\int_0^x u f'(x - u)du = -xe^{-x} + x^2 + ax$ (단, a 는 실수)를 만족시킨다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 y 절편을 $g(t)$ 라 할 때, $\int_{\ln 2}^{\ln 4} g(t)dt = 4 \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$ 이다. 실수 a 의 값과 $g(t)$ 의 극댓값과 극솟값을 구하시오. [15점]

■ 예시 답안

[문제 2-1]

집합 A 의 원소의 개수가 5이므로 $\{a_n\}$ 의 어느 항 이후 수열의 항들이 반복되어야 하고 반복되는 서로 다른 수는 많아야 5개이다.

$n(A) = 5$ 를 만족하는 수열의 어느 항 이후 반복될 부분 5개를 생각해보자.

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \eta \quad (a_m = \alpha, a_{m+1} = \beta, a_{m+2} = \gamma, a_{m+3} = \delta, a_{m+4} = \eta)$$

모든 수가 3의 배수이면 계속 감소하므로 적어도 하나는 3의 배수가 아니고 α 가 3의 배수가 아니라고 가정해도 무방하다.

$\alpha = 3k + 1$ 또는 $3k + 2$ (k 는 0이상인 정수)라면

$\beta = 9(k+1), \gamma = 3(k+1), \delta = k+1$ 이고, $\eta = \frac{1}{3}(k+1)$ ($k+1$ 이 3의 배수인 경우) 또는 $\eta = 3(k+2)$ (k 가 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 경우) 또는 $\eta = 3(k+3)$ (k 가 3의 배수인 경우)이다.

(i) $\beta = \alpha$ 인 경우는 수열의 정의에서 가능하지 않다.

(ii) $\gamma = \alpha$ 인 경우는 $3(k+1) = 3k+1$ 또는 $3(k+1) = 3k+2$ 인데 이를 만족하는 정수 k 는 없다.

(iii) α, β, γ 가 다른 수이고 $\delta = \alpha$ 인 경우는 $k+1 = 3k+1$ 또는 $k+1 = 3k+2$ 인데 이를 만족하는 $k = 0, \alpha = 1$ 이다. 그러므로, $1 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$ 처럼 반복가능하다.

(iv) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 가 다른 수이고 $\eta = \alpha$ 인 경우는 $3k+1 = \frac{1}{3}(k+1)$ 또는 $3(k+2)$ 또는 $3(k+3)$ 이거나 $3k+2 = \frac{1}{3}(k+1)$ 또는 $3(k+2)$ 또는 $3(k+3)$ 인데 이를 만족하는 양의 정수 k 는 존재하지 않는다.

(v) $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ 가 모두 다른 수이고 η 다음에 α 가 오는 경우

$$(\eta, \alpha) = \left(\frac{1}{3}(k+1), \frac{1}{9}(k+1)\right), \left(\frac{1}{3}(k+1), k+4\right), \left(\frac{1}{3}(k+1), k+7\right), (3(k+2), k+2), (3(k+3), k+3)$$

인데, (앞의 3경우는 k 가 3으로 나누었을 때, 나머지가 2인 경우, 뒤의 두 경우는 각각 k 가 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 경우와 3의 배수인 경우) $\alpha \neq 1$ 이면서 가능한 k 는 존재하지 않는다.

따라서, $n(A) = 5$ 인 경우는 a_1, a_2 가 9, 3, 1과 다른 자연수로 a_3 이후 9, 3, 1이 반복되는 경우이다.

$a_3 = 1, 3$ 이 되는 경우 a_2 는 각각 3, 9만 가능한데 이는 다른 수가 아니므로, 가능한 경우는 $a_3 = 9$ 뿐이다.

$a_3 = 9$ 인 경우 $a_2 = 1, 2, 27$ 이 가능하고 이 중 1이 아닌 경우는 2, 27이다.

· $a_2 = 2$ 인 경우 $a_1 = 6$

· $a_2 = 27$ 인 경우 $\frac{1}{3}a_1 = 27$ 혹은 $3(a_1 + 1) = 27$ 혹은 $3(a_1 + 2) = 27$ 이므로, $a_1 = 81, 8, 7$

그러므로, 가능한 $a_1 = 6, 7, 8, 81$ 이다.

(별해)

집합 A 의 원소의 개수가 5이므로 $\{a_n\}$ 의 어떤 특정한 항들이 반복되어야 한다.

(i) 서로 다른 2개의 수가 반복되는 경우

반복되는 다른 두 수를 α, β 라 하면 $\dots \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \dots$ 이고 두 수 중 하나는 3의 배수이고 다른 하나는 3의 배수가 아니어야 한다. α 가 3의 배수가 아니라고 가정해도 무방하므로, $\alpha = 3k+1$ 또는 $3k+2$ (k 는 0이상인 정수)라면 $\beta = 9(k+1), \alpha = 3(k+1)$ 로 이를 만족하는 k 는 존재하지 않는다.

(ii) 서로 다른 3개의 수가 반복되는 경우

반복되는 다른 세 수를 α, β, γ 라 하면 $\dots \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha \rightarrow \dots$ 이고 세 수 중 적어도 하나는 3의 배수가 아니어야 한다. α 가 3의 배수가 아니라고 가정해도 무방하므로, $\alpha = 3k+1$ 또

는 $3k+2$ (k 는 0이상인 정수)라면 $\beta = 9(k+1)$, $\gamma = 3(k+1)$, $\alpha = k+1$ 로 만족하는 $k=0$, $\alpha=1$ 이다. 그러므로, $1 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$ 처럼 반복가능하다.

(iii) 서로 다른 4개의 수가 반복되는 경우

반복되는 다른 네 수를 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 하면 $\dots \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \alpha \rightarrow \dots$ 이고 네 수 중 적어도 하나는 3의 배수가 아니어야 한다. α 가 3의 배수가 아니라고 가정해도 무방하므로, $\alpha = 3k+1$ 또는 $3k+2$ (k 는 0이상인 정수)라면 $\beta = 9(k+1)$, $\gamma = 3(k+1)$, $\delta = k+1$ 이고, $\alpha = \frac{1}{3}(k+1)$ 또는 $3(k+2)$ 또는 $3(k+3)$ 인데, 이를 만족하는 k 는 존재하지 않는다.

(iv) 서로 다른 5개의 수가 반복되는 경우

반복되는 다른 다섯개의 수를 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ 라 하면 $\dots \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \eta \rightarrow \alpha \rightarrow \dots$ 이고 다섯 개의 수 중 적어도 하나는 3의 배수가 아니므로, α 가 3의 배수가 아니라고 가정해도 무방하다. $\alpha = 3k+1$ 또는 $3k+2$ (k 는 0이상인 정수)라면 $\beta = 9(k+1)$, $\gamma = 3(k+1)$, $\delta = k+1$ 이고,

$$(\eta, \alpha) = \left(\frac{1}{3}(k+1), \frac{1}{9}(k+1)\right), \left(\frac{1}{3}(k+1), k+4\right), \left(\frac{1}{3}(k+1), k+7\right), (3(k+2), k+2), (3(k+3), k+3)$$

인데, (앞의 세 경우는 k 가 3으로 나누었을 때, 나머지가 2인 경우, 뒤의 두 경우는 각각 k 가 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 경우와 3의 배수인 경우) $\alpha \neq 1$ 이면서 가능한 k 는 존재하지 않는다.

따라서, $n(A) = 5$ 인 경우는 a_1, a_2 가 9, 3, 1과 다른 자연수로 a_3 이후 9, 3, 1이 반복되는 경우이다.

$a_3 = 1, 3$ 이 되는 경우 a_2 는 각각 3, 9만 가능한데 이는 다른 수가 아니므로, 가능한 경우는 $a_3 = 9$ 뿐이다.

$a_3 = 9$ 인 경우 $a_2 = 1, 2, 27$ 이 가능하고 이 중 1이 아닌 경우는 2, 27이다.

· $a_2 = 2$ 인 경우 $a_1 = 6$

· $a_2 = 27$ 인 경우 $\frac{1}{3}a_1 = 27$ 혹은 $3(a_1+1) = 27$ 혹은 $3(a_1+2) = 27$ 이므로, $a_1 = 81, 8, 7$

그러므로, 가능한 $a_1 = 6, 7, 8, 81$ 이다.

[문제 2-2]

$x-u=t$ 라 치환하면 $\int_0^x u f'(x-u) du = - \int_x^0 (x-t) f'(t) dt = \int_0^x (x-t) f'(t) dt$ 이다.

제시문의 부분적분을 적용하면

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t) f'(t) dt &= x \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x t f'(t) dt \\ &= x(f(x) - f(0)) - [t f(t)]_0^x + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt - x f(0) \text{ 를 얻는다.} \end{aligned}$$

주어진 식에 의하여 $\int_0^x f(t) dt = -x e^{-x} + x^2 + ax + x f(0)$ 이고 양변을 미분하면

$$f(x) = (x-1)e^{-x} + 2x + f(0) + a$$

위 식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $a=1$ 이다.

따라서, $f(x) = (x-1)e^{-x} + 2x + 1 + f(0)$ 이고, $f'(x) = (2-x)e^{-x} + 2$ 이다.

이를 이용하면 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = ((2-t)e^{-t} + 2)(x-t) + (t-1)e^{-t} + 2t + 1 + f(0) \text{ 이고}$$

$$g(t) = (t^2 - t - 1)e^{-t} + 1 + f(0) \text{ 이다.}$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} g(t)dt = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (t^2 - t - 1)e^{-t} + (1 + f(0))dt$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} t^2 e^{-t} dt = [-t^2 e^{-t}]_{\ln 2}^{2\ln 2} + 2 \int_{\ln 2}^{2\ln 2} t e^{-t} dt = [-t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}]_{\ln 2}^{\ln 4} = -\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{2},$$

$$-\int_{\ln 2}^{\ln 4} te^{-t} dt = [(t+1)e^{-t}]_{\ln 2}^{\ln 4} = -\frac{1}{4}, \quad -\int_{\ln 2}^{\ln 4} e^{-t} dt = [e^{-t}]_{\ln 2}^{\ln 4} = -\frac{1}{4} \text{ 이다.}$$

따라서, $\int_{\ln 2}^{\ln 4} (t^2 - t - 1)e^{-t} + (1 + f(0))dt = -\frac{1}{2}(\ln 2)^2 + (f(0) + 1)\ln 2$ 이고, 문제의 조건에 의해 $f(0) = 3$ 이다.

$g(t) = (t^2 - t - 1)e^{-t} + 4$, $g'(t) = (-t^2 + 3t)e^{-t}$ 이므로 $t = 0, 3$ 에서 극값을 갖는다.

$t < 0$ 인 경우 $g'(t) < 0$, $0 < t < 3$ 인 경우 $g'(t) > 0$, $t > 3$ 인 경우 $g'(t) < 0$ 이므로,

$t = 0$ 인 경우 극솟값 $g(0) = 3$

$t = 3$ 인 경우 극댓값 $g(3) = 5e^{-3} + 4$ 를 갖는다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2-1	$9 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow$ 과 같이 9, 3, 1이 반복되는 것을 찾으면 +4점 1, 3, 9를 제외하고 반복되는 다른 경우가 없음을 보이면 +3점 $a_1 = 6, 7, 8, 81$ 를 얻으면 +3점	10
문제 2-2	$\int_0^x f(t)dt = -xe^{-x} + x^2 + ax + xf(0)$ 또는 $f(x) = (x-1)e^{-x} + 2x + f(0) + a$ 를 구하면 +3점 $a = 1$ 를 구하면 +2점 접선의 방정식에 대입하여 $g(t) = (t^2 - t - 1)e^{-t} + 1 + f(0)$ 를 얻으면 +3점 정적분을 계산하여 $f(0) = 3$ 을 얻으면 +4점 $t = 0$ 일 때, 극솟값 $g(0) = 3$, $t = 3$ 일 때, 극댓값 $g(3) = 5e^{-3} + 4$ 를 얻으면 +3점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

2교시 · 문제 3

[문제 3] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 의 도함수 $g'(t)$ 가 $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ 일 때 α, β 를 포함하는 구간에서 연속이면 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

- 미분가능한 함수 $f(x)$ 에서 $f'(a) = 0$ 이고 $x = a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극대이고 극댓값은 $f(a)$ 이다.

3-1 [문제 3-1] 두 곡선 $y = \frac{3e^{2x} - 6}{e^{2x} + 3e^x + 2}$ 과 $y = e^x - \frac{3}{2}$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [10점]

3-2 [문제 3-2] $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고 $\angle BAC \leq \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 1인 원에 내접한다. $\overline{BC} = 2x$ 라 할 때 함수 $f(x)$ 를 $f(x) = \overline{BC}^4 + \frac{15}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)$ 으로 정의하자. $f(x)$ 의 최댓값을 구하시오. [15점]

■ 예시 답안

[문제 3-1]

$\frac{3e^{2x}-6}{e^{2x}+3e^x+2} = e^x - \frac{3}{2}$ 를 풀면 $(e^x-1)(e^x-2)(2e^x+3) = 0$ 이다. 두 곡선이 만나는 x 좌표는 0, $\ln 2$ 이다.

$\frac{3e^{2x}-6}{e^{2x}+3e^x+2} = 3 - \frac{9e^x+12}{(e^x+1)(e^x+2)} = 3 - \frac{3}{(e^x+1)} - \frac{6}{(e^x+2)}$ 이므로 구하는 넓이는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \left(\frac{3(e^{2x}-2)}{e^{2x}+3e^x+2} - e^x + \frac{3}{2} \right) dx &= \int_0^{\ln 2} \left(3 - \frac{3}{(e^x+1)} - \frac{6}{(e^x+2)} - e^x + \frac{3}{2} \right) dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \left(3 - \frac{3e^{-x}}{(1+e^{-x})} - \frac{6e^{-x}}{(1+2e^{-x})} - e^x + \frac{3}{2} \right) dx \\ &= 3 \ln 2 + [3 \ln(1+e^{-x})]_0^{\ln 2} + [3 \ln(1+2e^{-x})]_0^{\ln 2} + \frac{3}{2} \ln 2 - 1 \\ &= \frac{3}{2} \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

[문제 3-1 별해]

$\frac{3e^{2x}-6}{e^{2x}+3e^x+2} = e^x - \frac{3}{2}$ 를 풀면 $(e^x-1)(e^x-2)(2e^x+3) = 0$ 이다. 두 곡선이 만나는 x 좌표는 0, $\ln 2$ 이고 구하는 넓이는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \left(\frac{3(e^{2x}-2)}{e^{2x}+3e^x+2} - e^x + \frac{3}{2} \right) dx &= \int_0^{\ln 2} \left(\frac{3(e^x-2e^{-x})}{e^x+3+2e^{-x}} - e^x + \frac{3}{2} \right) dx \\ &= [3 \ln(e^x+3+2e^{-x})]_0^{\ln 2} - [e^x]_0^{\ln 2} + \frac{3}{2} \ln 2 \\ &= \frac{3}{2} \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

[문제 3-2]

$\angle BAC \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로 원의 중심이 삼각형 내부나 선분 $\overline{BC}$ 위에 있다.

$\overline{BC} = 2x$ ($0 \leq x \leq 1$)라 하면 $\overline{BC}^2 = 4x^2$ 이고 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$ 이다.

따라서

$$\overline{BC}^4 + \frac{15}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) = 16x^4 + 15(1 + \sqrt{1-x^2})$$

이고 $x^2 = t$ ($0 \leq t \leq 1$)로 놓고 함수 $f(t) = 16t^2 + 15(1 + \sqrt{1-t})$ 의 최댓값을 구하면 된다.

미분하면 $f'(t) = 32t - \frac{15}{2} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 이고 $f'(0) = -\frac{15}{2}$ 이다.

$f'(t) = 0$ 을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (64)^2 t^3 - (64)^2 t^2 + (15)^2 &= (16t)^3 - 16(16t)^2 + (15)^2 \\ &= (16t-15)((16t)^2 - 16t - 15) \end{aligned}$$

$g(t) = (16t)^2 - 16t - 15$ 는 중심축이 $\frac{1}{32}$ 이고 $g(0) < 0$, $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ 이므로 음근과 양근 α ($\frac{1}{32} < \alpha < \frac{1}{2}$)를

찾는다. $f'(t)$ 의 부호를 고려하여 곡선의 증가, 감소를 보면 $t = \alpha$ 에서 극소, $t = \frac{15}{16}$ 에서 극대이다. $f(0) = 30$

이고 $f(1) = 31$ 이다.

$f\left(\frac{15}{16}\right) = \frac{525}{16} (> 32)$ 이므로 구하는 최댓값은 $\frac{525}{16}$ 이다.

[문제 3-2 별해]

$\angle BAC \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로 원의 중심이 삼각형 내부나 선분 $\overline{BC}$ 위에 있다. $\overline{BC} = 2x$ ($0 \leq x \leq 1$)라 하면 $\overline{BC}^2 = 4x^2$ 이고 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$ 이다. 따라서

$$\overline{BC}^4 + \frac{15}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) = 4\left(4x^4 + \frac{15}{4}(1 + \sqrt{1-x^2})\right)$$

이고 $x = \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$f(t) = 16\sin^4 t + 15(1 + \cos t) = 16(1 - \cos^2 t)^2 + 15(1 + \cos t)$ 의 최댓값을 구하면 된다.

여기서 다시 $\cos t = s$ 로 놓고 $g(s) = 16(1 - s^2)^2 + 15(1 + s)$ 의 최댓값을 구하면 된다.

미분하면 $g'(s) = (4s)^3 - 16(4s) + 15 = (4s - 1)(16s^2 + 4s - 15)$ 이다. $g'(s)$ 의 부호를 고려하며 $s = \frac{1}{4}$ 에서 극대이다. $g(0) = 31$ 이고 $g(1) = 30$ 이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{525}{16} (> 32)$ 이므로 구하는 최댓값은 $\frac{525}{16}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3-1	• $0, \ln 2$ 구하면 +3점 • 넓이를 구하는 정적분을 잘 쓰면 +2점 • 적분 계산하여 $\frac{3}{2}\ln 2 - 1$ 구하면 +5점	10
문제 3-2	• 식 $f(x) = 16x^4 + 15(1 + \sqrt{1-x^2})$을 세우면 +4점 • $f'(x)$ 부호를 살피고 $x^2 = \frac{15}{16}$에서 극대임을 구하면 +8점 • 양 끝점 $x = 0, x = 1$에서의 값과 비교하여 최댓값 $\frac{525}{16}$을 구하면 +3점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

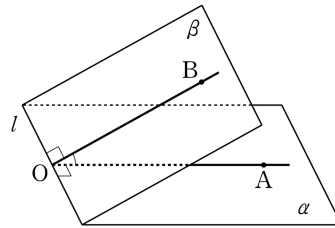
※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

2교시 · 문제 4

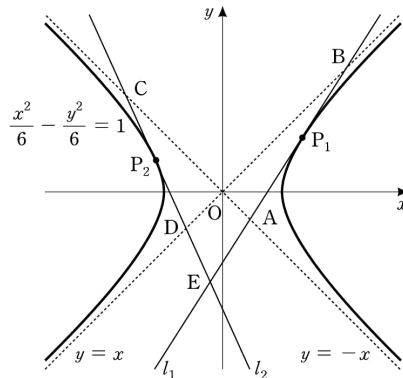
[문제 4] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

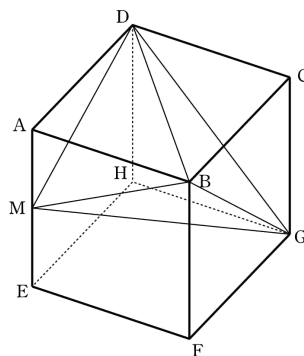
- 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 이다.
- 오른쪽 그림과 같이 직선 l 을 공유하는 두 반평면 α, β 로 이루어진 도형을 이면각이라고 한다. 직선 l 위의 한 점 O 를 지나고 l 에 수직인 두 반직선 OA, OB 를 각각 반평면 α, β 위에 그을 때, $\angle AOB$ 의 크기는 점 O 의 위치에 관계없이 일정하다. 이때 이 각의 크기를 이면각의 크기라고 한다.



- 4-1** [문제 4-1] 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P_1 에서의 접선 l_1 이 두 직선 $y = -x, y = x$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 쌍곡선 위의 제2사분면에 있는 점 P_2 에서의 접선 l_2 가 두 직선 $y = -x, y = x$ 와 만나는 점을 각각 C, D라 하고, 두 접선 l_1 과 l_2 의 교점을 E라 하자. $\overline{OA} : \overline{OD} = 2 : 3$ 이고 삼각형 ADE의 넓이가 4일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) **[15점]**



- 4-2** [문제 4-2] 오른쪽 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정육면체 $ABCD - EFGH$ 에서 변 AE의 중점을 M이라 하자. 삼각형 BMG의 넓이를 S , 사면체 BDMG의 부피를 V , 두 평면 DMB와 DMG가 이루는 예각을 α 라 할 때, $SV \sin \alpha$ 를 구하시오. **[15점]**



■ 예시 답안

[문제 4-1]

점 P_1 의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 하자. 접선 l_1 의 방정식 $\frac{x_1x}{6} - \frac{y_1y}{6} = 1$ 과 두 직선의 방정식 $y = -x$, $y = x$ 를 연립하여 계산한 두 점 A, B의 x 좌표의 값에 $\sqrt{2}$ 를 곱해 $\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{x_1}{6} + \frac{y_1}{6}}$, $\overline{OB} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{x_1}{6} - \frac{y_1}{6}}$ 를 얻는다. 따라서

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\frac{x_1}{6} + \frac{y_1}{6}} \times \frac{\sqrt{2}}{\frac{x_1}{6} - \frac{y_1}{6}} = 6 \text{이다. 비슷한 방법으로 } \triangle OCD = 6 \text{이다.}$$

$\overline{OA} = 2t$, $\overline{OD} = 3t$ ($t > 0$)라 놓으면, $\triangle ODA = 3t^2$ 이고, $\triangle OAB = \triangle OCD = 6$ 이므로 $\overline{OB} = \frac{6}{t}$, $\overline{OC} = \frac{4}{t}$ 이다. 따라서 $\triangle OBC = \frac{12}{t^2}$ 이고, 사각형 ABCD의 넓이를 S 라 하면 $S = \triangle ODA + \triangle OAB + \triangle OCD + \triangle OBC = 3t^2 + 12 + \frac{12}{t^2}$ 이다.

$\overline{OA} : \overline{OD} = \overline{OC} : \overline{OB}$ 이므로 두 직각삼각형 ODA와 OBC는 닮은꼴이고 $\angle ODA = \angle OBC$ 이다. 따라서 두 선분 AD와 BC는 평행하고 두 삼각형 ADE와 BCE도 닮았다. 삼각형 ODA에서 $\overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OD}^2 = 13t^2$ 이고 삼각형 OBC에서 $\overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \frac{52}{t^2}$ 이므로 두 삼각형 ADE와 BCE의 넓이의 비는 $t^2 : \frac{4}{t^2}$ 이다.

$x = t^2$ ($x > 0$)이라 놓으면, $\triangle BCE = S + 4 = 3x + 16 + \frac{12}{x}$ 이므로

$$x : \frac{4}{x} = \triangle ADE : \triangle BCE = 4 : 3x + 16 + \frac{12}{x} \text{에서}$$

$$0 = 3x^3 + 16x^2 + 12x - 16 = (x+2)(x+4)(3x-2) \text{를 얻는다. } x > 0 \text{이므로 } x = \frac{2}{3} \text{이고 } S = 3x + 12 + \frac{12}{x} = 32 \text{이다.}$$

[문제 4-2]

피타고라스의 정리에 의해 $\overline{BG} = \overline{GD} = \overline{DB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{MB} = \overline{MD} = \sqrt{5}$, $\overline{MG} = 3$ 임을 알 수 있다. 이로부터 이 등변삼각형 DMB와 정삼각형 BGD의 넓이는 각각 $\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$ 임을 쉽게 알 수 있다. $\theta = \angle MBG$ 라 하면 삼각형 BMG에서 $\cos \theta = \frac{5+8-9}{2 \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 이므로 $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 이다. 따라서 삼각형 BMG의 넓이 S 는 $S = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{2} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = 3$ 이다. 비슷한 방법으로 삼각형 DMG의 넓이도 3이다.

직선 AC와 직선 BD의 교점을 B'이라 하면, 삼각형 MBB'과 삼각형 MDB'이 합동이므로 선분 MB'과 선분 BD는 서로 수직이다. 그리고 삼각형 GBB'과 삼각형 GDB'이 합동이므로 선분 GB'과 선분 BD는 서로 수직이다. $\overline{BB'} = \sqrt{2}$ 이므로 직각삼각형 MBB'에서 $\overline{MB'} = \sqrt{\overline{MB}^2 - \overline{BB'}^2} = \sqrt{3}$ 이고 직각삼각형 GBB'에서 $\overline{GB'} = \sqrt{\overline{BG}^2 - \overline{BB'}^2} = \sqrt{6}$ 이다. 따라서 $\overline{MG}^2 = \overline{MB'}^2 + \overline{GB'}^2$ 이고 $\angle MB'G = 90^\circ$ 이다. 즉, 두 평면 DMB와 BGD는 수직으로 만난다. 두 평면 DMB와 BGD가 수직으로 만나므로 점 M에서 평면 BGD에 내린 수선의 발은 점 B'이다. 따라서 사면체 BDMG의 부피 V 는

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle BGD \times \overline{MB'} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2$$

점 B에서 평면 DMG에 내린 수선의 발을 I라고 하면, $V = \frac{1}{3} \times \triangle DMG \times \overline{BI}$ 에서 $\overline{BI} = 2$ 이다. 점 B에서 직선 MD에 내린 수선의 발을 J라고 하면, $\overline{BJ} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ 임을 $\triangle DMB = \frac{1}{2} \times \overline{MD} \times \overline{BJ}$ 에서 알 수 있다.

삼수선의 정리에 의해 두 직선 MD와 IJ는 수직으로 만난다. 따라서 $\alpha = \angle BJI$ 이고 $\sin \alpha = \frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$ 이고 $SV \sin \alpha = \sqrt{30}$ 이다.

[문제 4-2 별해]

피타고라스의 정리에 의해 $\overline{BG} = \overline{GD} = \overline{DB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{MB} = \overline{MD} = \sqrt{5}$, $\overline{MG} = 3$ 임을 알 수 있다. 이로부터 이 등변삼각형 DMB와 정삼각형 BGD의 넓이는 각각 $\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$ 임을 쉽게 알 수 있다. $\theta = \angle MBG$ 라 하면 삼각형 BMG에서 $\cos \theta = \frac{5+8-9}{2 \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 이므로 $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 이다. 따라서 삼각형 BMG의 넓이 S는 $S = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{2} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = 3$ 이다. 비슷한 방법으로 삼각형 DMG의 넓이도 3이다.

직선 AC와 직선 BD의 교점을 B'이라 하면, 삼각형 MBB'과 삼각형 MDB'이 합동이므로 선분 MB'과 선분 BD는 서로 수직이다. 그리고 삼각형 GBB'과 삼각형 GDB'이 합동이므로 선분 GB'과 선분 BD는 서로 수직이다. $\overline{BB'} = \sqrt{2}$ 이므로 직각삼각형 MBB'에서 $\overline{MB'} = \sqrt{\overline{MB}^2 - \overline{BB'}^2} = \sqrt{3}$ 이고 직각삼각형 GBB'에서 $\overline{GB'} = \sqrt{\overline{BG}^2 - \overline{BB'}^2} = \sqrt{6}$ 이다. 따라서 $\overline{MG}^2 = \overline{MB'}^2 + \overline{GB'}^2$ 이고 $\angle MB'G = 90^\circ$ 이다. 즉, 두 평면 DMB와 BGD는 수직으로 만난다. 두 평면 DMB와 BGD가 수직으로 만나므로 점 M에서 평면 BGD에 내린 수선의 발은 점 B'이다. 따라서 사면체 BDMG의 부피 V는

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle BGD \times \overline{MB'} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2$$

삼각형 DMB'은 삼각형 DMG의 평면 DMB 위로의 정사영이므로

$$\cos \alpha = \frac{\triangle DMB'}{\triangle DMG} = \frac{\triangle DMB}{2 \triangle DMG} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

따라서 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$ 이고 $SV \sin \alpha = \sqrt{30}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4-1	$\triangle OAB = \triangle OCD = 6$ 을 구하면 +5점 사각형 ABCD의 넓이 S를 $S = 3t^2 + 12 + \frac{12}{t^2}$ 로 표현하면 +3점 두 삼각형 ADE와 BCE의 넓이의 비 $t^2 : \frac{4}{t^2}$ 를 구하면 +3점 사각형 ABCD의 넓이 $S = 32$ 를 구하면 +4점	15
문제 4-2	$S = 3$ 을 구하면 +4점 $V = 2$ 를 구하면 +5점 $SV \sin \alpha = \sqrt{30}$ 을 구하면 +6점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

2025학년도 자연계열 I (1교시) · II (2교시)

1교시 · 문제 1

[문제 1] 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다. 풀이와 함께 물음에 답하시오.

제시문

- 주머니에 빨간색 공 4개, 파란색 공 3개, 초록색 공 3개가 들어 있다.
- 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수의 합이 4 이하이면, 주머니에서 임의로 공 2개를 동시에 꺼낸다. 만일 눈의 수의 합이 5 이상이면, 주머니에서 임의로 공 1개를 꺼낸다.
- 꺼낸 공 중에서 빨간색 공의 개수를 점수로 얻는다.
- 꺼낸 공을 모두 주머니에 다시 넣는다.

위 시행을 2회 반복할 때, 얻은 점수의 합이 2 이상일 확률을 구하시오. [20점]

■ 예시 답안

- (1) 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 수의 눈의 합이 4 이하인 사건을 A 라고 하자. 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 수의 눈의 합이 4 이하인 경우의 수는 $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의 6가지이므로, 사건 A 가 일어날 확률은 $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ 이다.

- (2) 시행을 2회 반복할 때 얻은 점수의 합이 0인 사건과 점수의 합이 1인 사건은 서로 배반사건이므로, 점수의 합이 2 미만일 확률은 점수의 합이 0인 확률과 점수의 합이 1인 확률의 합과 같다. 또한, 점수의 합이 2 이상인 사건은 점수의 합이 2 미만인 사건의 여사건이다. 따라서,

$$P(\text{점수의 합} \geq 2) = 1 - P(\text{점수의 합} \leq 1) = 1 - P(\text{점수의 합} = 0) - P(\text{점수의 합} = 1)$$

으로 구할 수 있다.

- (3) 문제의 시행을 1회 했을 때 얻은 점수를 X 라 하고, $X = 0$ 인 사건을 C , $X = 1$ 인 사건을 D 라 하자. 각 시행은 독립시행이므로 $P(\text{점수의 합} = 0) = \{P(C)\}^2$ 이며, 점수의 합이 1이려면 첫 번째 시행에서 0점, 두 번째 시행에서 1점을 얻거나 첫 번째 시행에서 1점, 두 번째 시행에서 0점을 얻으면 되므로

$$P(\text{점수의 합} = 1) = P(C) \times P(D) + P(D) \times P(C) = 2 \times P(C) \times P(D)$$

이다.

- (4) 확률의 곱셈정리와 덧셈정리를 이용하면, $P(C)$, $P(D)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap A^c) = P(A)P(C|A) + P(A^c)P(C|A^c)$$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap A^c) = P(A)P(D|A) + P(A^c)P(D|A^c)$$

- (5) $P(C|A)$ 와 $P(D|A)$, $P(C|A^c)$ 와 $P(D|A^c)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(C|A) = \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}, \text{ (나머지 색깔 중에서만 2개를 꺼낼 확률)}$$

$$P(D|A) = \frac{{}_6C_1 \times {}_4C_1}{{}_{10}C_2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}, \text{ (빨간색 공 1개, 나머지 색깔 중 1개를 꺼낼 확률)}$$

$$P(C|A^c) = \frac{{}_6C_1}{{}_{10}C_1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \text{ (나머지 색깔 중에서만 1개를 꺼낼 확률)}$$

$$P(D|A^c) = \frac{{}_4C_1}{{}_{10}C_1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \text{ (빨간색 공 1개를 꺼낼 확률)}$$

- (6) (4), (5)를 종합하면, $P(C)$, $P(D)$ 는 다음과 같다.

$$P(C) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9},$$

$$P(D) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{8}{15}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{19}{45}$$

- (7) 최종적으로, 구하는 확률은 다음과 같다.

$$1 - \{P(C)\}^2 - 2 \times P(C) \times P(D) = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2 - \left(2 \times \frac{5}{9} \times \frac{19}{45}\right) = 1 - \frac{25}{81} - \frac{38}{81} = \frac{18}{81} = \frac{2}{9}$$

별 해

- (1) 여사건을 활용하지 않고 직접 답을 구할 수 있다. $X = 2$ 인 사건을 E 라 하면

$$P(E) = \left(\frac{1}{6} \times \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}\right) + \left(\frac{5}{6} \times 0\right) = \frac{1}{45}$$

이며, 이때

$$\text{점수의 합이 2일 확률} = 2 \times P(C) \times P(E) + \{P(D)\}^2 = \frac{2}{81} + \frac{361}{45^2} = \frac{411}{45^2}$$

$$\text{점수의 합이 3일 확률} = 2 \times P(D) \times P(E) = \frac{38}{45^2}$$

$$\text{점수의 합이 4일 확률} = \{P(E)\}^2 = \frac{1}{45^2}$$

$$\text{이므로 모두 더하면 } \frac{411 + 38 + 1}{45^2} = \frac{450}{45^2} = \frac{2}{9} \text{ 이다.}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	사건 A 의 확률을 정확히 계산하면 +2점 사건 C, D 의 조건부확률을 정확히 계산하면 +8점 - $P(C A), P(D A), P(C A^c), P(D A^c)$ 를 정확히 계산하면 각 +2점 사건 C, D 의 확률을 정확히 계산하면 +8점 - $P(C), P(D)$ 를 정확히 계산하면 각 +4점 최종 확률을 정확히 계산하면 +2점	20

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

1교시 · 문제 2

[문제 2] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면 일반항과 수열의 합의 관계는 다음과 같다.

$$a_1 = S_1, \quad a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

- 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 미분가능할 때, 다음 식이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

2-1 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 다음을 만족시킬 때, a_1 을 구하시오. [10점]

$$(가) S_n = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n - 2 & (n \text{이 짝수인 경우}) \\ 2a_n + 3 & (n \text{이 3 이상인 홀수인 경우}) \end{cases}$$

$$(나) S_8 = 2025$$

2-2 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 \cos(\pi x) & (-1 \leq x < 0) \\ x^2 \cos(\pi x) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = \frac{1}{2}f(x-2) - \frac{3}{2}$ 을 만족시킨다. 이때, 정적분 $\int_{-4}^{-1} f(x)dx$ 의 값을 구하시오.

[15점]

■ 예시 답안

[문제 2-1]

제시문에서 주어진 식 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)를 이용하면

$$n = 2m + 2 \ (m \geq 0) \text{인 경우, } S_{2m+2} = \frac{1}{2}(S_{2m+2} - S_{2m+1}) - 2,$$

즉, $S_{2m+2} = -S_{2m+1} - 4$ 를 얻는다.

$$n = 2m + 1 \ (m \geq 1) \text{인 경우, } S_{2m+1} = 2(S_{2m+1} - S_{2m}) + 3,$$

즉, $S_{2m+1} = 2S_{2m} - 3$ 을 얻는다.

그러므로, $S_{2m+2} = -(2S_{2m} - 3) - 4 = -2S_{2m} - 1$ 이고, 반복하여 대입하면

$$S_8 = -2S_6 - 1 = 4S_4 + 1 = -8S_2 - 3 \text{ 을 얻는다. 따라서, } S_2 = -\frac{507}{2} \text{ 이고,}$$

$$S_2 = -S_1 - 4 \text{ 를 이용하면, } S_1 = a_1 = \frac{499}{2} \text{ 이다.}$$

(별해) 주어진 제시문을 이용하여 $S_2 - S_1 = \frac{1}{2}a_2 - 2 - a_1 = a_2$ 이므로, $a_2 = -2a_1 - 4$,

$S_2 = -a_1 - 4$ 를 얻는다. $S_3 - S_2 = 2a_3 + 3 - (-a_1 - 4) = a_3$ 이므로, $a_3 = -a_1 - 7$,

$S_3 = -2a_1 - 11$ 을 얻고, 동일한 방법으로 $a_4 = 4a_1 + 18$, $S_4 = 2a_1 + 7$,

$a_5 = 2a_1 + 4$, $S_5 = 4a_1 + 11$, $a_6 = -8a_1 - 26$, $S_6 = -4a_1 - 15$,

$a_7 = -4a_1 - 18$, $S_7 = -8a_1 - 33$,

$a_8 = 16a_1 + 62$, $S_8 = 8a_1 + 29$ 를 얻는다. 따라서, $a_1 = \frac{499}{2}$ 를 얻는다.

[문제 2-2]

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x-2) - \frac{3}{2} \text{ 이므로 } f(x-2) = 2f(x) + 3$$

즉, $f(x) = 2f(x+2) + 3 = 4f(x+4) + 9$ 이다.

따라서, $-4 \leq x < -3$ 일 때, $f(x) = 4(x+4)^2 \cos(\pi(x+4)) + 9$ 이고,

$-3 \leq x < -2$ 일 때, $f(x) = -2(x+2)^2 \cos(\pi(x+2)) + 3$,

$-2 \leq x < -1$ 일 때, $f(x) = 2(x+2)^2 \cos(\pi(x+2)) + 3$ 이다.

구하는 정적분을

$$\begin{aligned} \int_{-4}^{-1} f(x)dx &= 4 \int_{-4}^{-3} (x+4)^2 \cos \pi(x+4)dx - 2 \int_{-3}^{-2} (x+2)^2 \cos \pi(x+2)dx \\ &\quad + 2 \int_{-2}^{-1} (x+2)^2 \cos \pi(x+2)dx + 15 \\ &= 4 \int_0^1 x^2 \cos(\pi x)dx - 2 \int_0^1 x^2 \cos(\pi x)dx + 2 \int_0^1 x^2 \cos(\pi x)dx + 15 \\ &= 4 \int_0^1 x^2 \cos \pi x dx + 15 \quad \cdots(*) \end{aligned}$$

로 정리할 수 있다.

주어진 제시문의 부분적분에 의해

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos \pi x dx &= \frac{1}{\pi} x^2 \sin \pi x - \frac{2}{\pi} \int x \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi} x^2 \sin \pi x + \frac{2}{\pi^2} x \cos \pi x - \frac{2}{\pi^2} \int \cos \pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} x^2 \sin \pi x + \frac{2}{\pi^2} x \cos \pi x - \frac{2}{\pi^3} \sin \pi x + C \end{aligned}$$

이다.

따라서, $(*) = 4 \left[\frac{1}{\pi} x^2 \sin \pi x + \frac{2}{\pi^2} x \cos \pi x - \frac{2}{\pi^3} \sin \pi x \right]_0^1 + 15 = -\frac{8}{\pi^2} + 15$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2-1	$S_{2m+2} = -S_{2m+1} - 4$ 혹은 $S_{2m+1} = 2S_{2m} - 3$ 를 얻으면 +2점 $S_{2m+2} = -2S_{2m} - 1$ 을 얻으면 +5점 모든 계산을 정확히 계산하여 $a_1 = \frac{499}{2}$ 을 얻으면 +3점	10
문제 2-2	각 구간에서 함수의 형태를 바르게 구하면 +5점 적분식을 계산하여 $(*) = 4 \int_0^1 x^2 \cos \pi x dx + 15$ 를 바르게 얻으면 +5점 부정적분 $\int x^2 \cos \pi x dx = \frac{1}{\pi} x^2 \sin \pi x + \frac{2}{\pi^2} x \cos \pi x - \frac{2}{\pi^3} \sin \pi x + C$ 를 바르게 계산하 여 정답 $-\frac{8}{\pi^2} + 15$ 를 얻으면 +5점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

1교시 · 문제 3

[문제 3] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
- 모든 실수 α, β 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$
- 미분가능한 함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 α 와 β 를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

- 3-1** 좌표평면 위에 점 $A(3, 0)$, $B(4, 2)$ 가 있다. 방정식 $y^3 - 3e^{2x}y + 2e^{3x} = 0$ 을 만족시키는 점 $P(x, y)$ 에 대하여 삼각형 PAB 의 넓이의 최솟값을 구하시오. (단, $y \geq 0$ 이다.) [10점]
- 3-2** $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 1$ 이고 $\angle BAC = 3x$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 선분 BC 위의 점 D 를 $\angle BAD = x$ 가 되도록 잡자. 선분 AD 의 길이를 $f(x)$ 라 할 때, 정적분 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) \sin^3 x dx$ 의 값을 구하시오. [15점]

■ 예시 답안

[문제 3-1]

$0 = y^3 - 3e^{2x}y + 2e^{3x} = (y - e^x)^2(y + 2e^x)$ 이므로 $P(x, y)$ 는 $y = e^x$ 또는 $y = -2e^x$ 위에 있다. $y \geq 0$ 이므로 $y = e^x$ 위에 있다. 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은 $2x - y - 6 = 0$ 이다. $y = e^x$ 에서 기울기가 2인 점은 $(\ln 2, 2)$ 이고, 이 점에서 직선 $2x - y - 6 = 0$ 까지의 거리는 $\frac{8 - 2\ln 2}{\sqrt{5}}$ 이다. $\overline{AB} = \sqrt{5}$ 이므로 삼각형의 넓이의 최솟값은 $4 - \ln 2$ 이다.

[문제 3-2]

두 삼각형의 넓이의 합이 전체 삼각형의 넓이와 같다는 것을 이용하면

$$2 \sin 3x = 2f(x) \sin x + f(x) \sin 2x$$

이고 $\sin 3x = \sin(x + 2x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x$ 를 이용하여 정리하면

$$f(x) = \frac{4 \cos^2 x - 1}{1 + \cos x}$$

이다. $\cos x = y$ 로 치환하여 적분하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4 \cos^2 x - 1}{1 + \cos x} \sin^3 x dx &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{4y^2 - 1}{y + 1} (1 - y^2) dy \\ &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (4y^2 - 1)(1 - y) dy = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{3}{16} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3-1	$y = e^x$ 을 구하면 +4점 점 $(\ln 2, 2)$ 을 구하면 +3점 거리 $\frac{8 - 2\ln 2}{\sqrt{5}}$ 을 구하고 삼각형의 넓이 $4 - \ln 2$ 를 구하면 +3점	10
문제 3-2	$2 \sin 3x = 2f(x) \sin x + f(x) \sin 2x$ 을 구하면 +4점 $f(x) = \frac{4 \cos^2 x - 1}{1 + \cos x}$ 을 구하면 +4점 정적분 값 $\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{3}{16}$ 을 구하면 +7점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

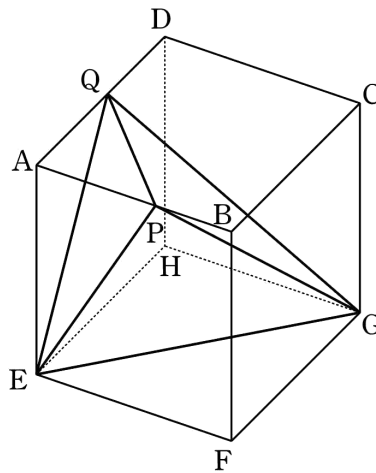
1교시 · 문제 4

[문제 4] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 평면 α 위에 있지 않은 점 P, 평면 α 위의 점 O, 점 O를 지나지 않는 α 위의 직선 l , 직선 l 위의 점 H에 대하여 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp l$ 이면 $\overline{PH} \perp l$ 이다.
- 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ 이다.
- 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 이다.

- 4-1 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD-EFGH의 선분 AB, AD 위에 점 P, Q가 각각 놓여 있다. 삼각형 PEG, QEG의 넓이가 각각 $\sqrt{10}$ 과 3일 때, 삼각형 EPQ의 넓이를 구하시오. [15점]



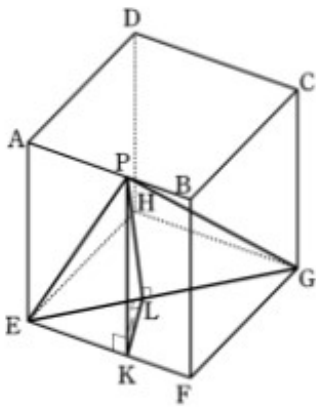
- 4-2 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)인 쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = 1$ 위의 점 $P(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 Q, 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선과 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 OQR의 넓이를 x 축이 이등분할 때, 점 F와 직선 $F'P$ 사이의 거리를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [15점]

■ 예시 답안

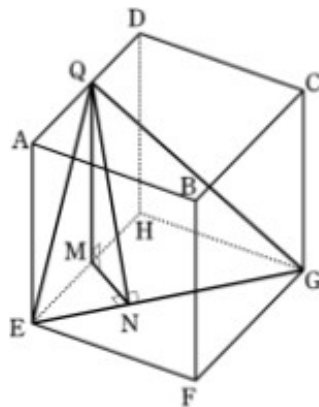
[문제 4-1]

그림 (가), (나)와 같이 점 P, Q에서 선분 EF, EH에 내린 수선의 발을 각각 K, M이라고 하고 점 K, M에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 각각 L, N이라고 하자. 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PL} \perp \overline{EG}$ 이고 $\overline{QN} \perp \overline{EG}$ 이다. 직각이등변삼각형 EFG에서 $\overline{EG} = 2\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{10} = \Delta PEG = \frac{\overline{EG} \times \overline{PL}}{2}$ 에서 $\overline{PL} = \sqrt{5}$ 이고 $3 = \Delta QEG = \frac{\overline{EG} \times \overline{QN}}{2}$ 에서 $\overline{QN} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ 이다.

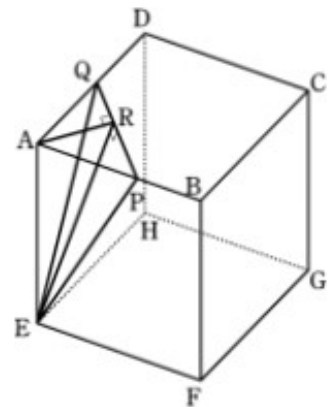
직각삼각형 PKL, QMN에서 $\overline{KL} = \sqrt{\overline{PL}^2 - \overline{PK}^2} = 1$ 이고 $\overline{MN} = \sqrt{\overline{QN}^2 - \overline{QM}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.



(가)



(나)



(다)

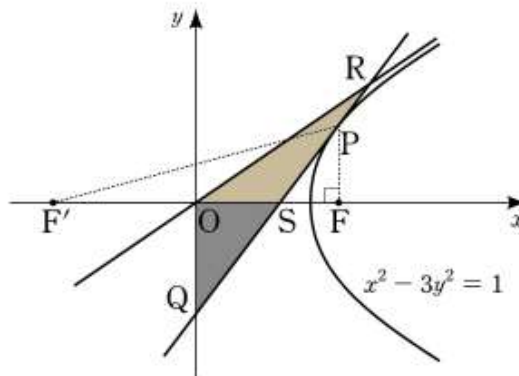
직각이등변삼각형 KLE, ENM에서 $\overline{AP} = \overline{EK} = \sqrt{\overline{EL}^2 + \overline{KL}^2} = \sqrt{\overline{KL}^2 + \overline{KL}^2} = \sqrt{2}$ 와 $\overline{AQ} = \overline{EM} = \sqrt{\overline{EN}^2 + \overline{MN}^2} = \sqrt{\overline{MN}^2 + \overline{MN}^2} = 1$ 을 얻는다.

그림 (다)와 같이 점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 R라 하면 $\overline{PQ} \perp \overline{ER}$ 이다. 직각삼각형 QAP에서 $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2} = \sqrt{3}$ 이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{AP} \times \overline{AQ}}{2} = \Delta APQ = \frac{\overline{PQ} \times \overline{AR}}{2}$ 에서 $\overline{AR} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 이다. 직각삼각형

RAE에서 $\overline{ER} = \sqrt{\overline{AR}^2 + \overline{AE}^2} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$ 이므로

$$\Delta EPQ = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{ER} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

[문제 4-2]



$c = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 에서 두 초점 F, F'의 좌표는 각각 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right), \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 이므로 $\overline{F'F} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이다. 점 P에서의 접선의 방정식 $ax - 3by = 1$ 과 점근선의 방정식 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 을 연립하여 점 R의 x 좌표가 $\frac{1}{a - \sqrt{3}b}$ 임을 알 수 있다. 접선 $ax - 3by = 1$ 이 x 축과 만나는 점을 S라 할 때, 점 S의 x 좌표는 $\frac{1}{a}$ 이다.

$$\frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times (\text{점 R의 } x\text{좌표}) = \Delta OQR = 2\Delta OQS = 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times (\text{점 S의 } x\text{좌표})$$

에서 $a = 2\sqrt{3}b$ 를 얻는다. 점 P(a, b)가 쌍곡선 위의 점이므로 $a^2 - 3b^2 = 1$ 이므로 $a = 2\sqrt{3}b$ 를 대입하여 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}, b = \frac{1}{3}$ 이다. 따라서 $\overline{FP} = \frac{1}{3}, \overline{F'P} = 2 + \overline{FP} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ 이고 삼각형 F'FP는 직각삼각형이다. 점 F에서 직선 F'P에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{FH} \times \overline{F'P} = 2 \times \Delta F'FP = \overline{F'F} \times \overline{FP}$ 에서 $\overline{FH} = \frac{4\sqrt{3}}{21}$ 을 얻는다. 따라서 점 F와 직선 F'P 사이의 거리는 $\frac{4\sqrt{3}}{21}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4-1	$\overline{AP} = \sqrt{2}$ 를 구하면 +5점 $\overline{AQ} = 1$ 을 구하면 +5점 $\Delta EPQ = \frac{\sqrt{14}}{2}$ 를 구하면 +5점	15
문제 4-2	$c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 를 구하면 +3점 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 을 구하면 +3점 $b = \frac{1}{3}$ 을 구하면 +3점 점 F와 직선 F'P 사이의 거리 $\frac{4\sqrt{3}}{21} = \left(\frac{4}{7\sqrt{3}}\right)$ 를 구하면 +6점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

2교시 · 문제 1

[문제 1] 다음 규칙에 따라 상금을 받는 시행을 한다. 풀이와 함께 물음에 답하시오.

제시문

- (가) 주머니 A에는 빨간색 공 1개가 들어 있고, 주머니 B에는 파란색 공 5개가 들어 있다. 두 주머니의 공을 주머니 C에 합친 후 임의로 1개를 꺼내서 그 공이 빨간색 공일 때 100만 원의 상금을 받는다. 만일 파란색 공을 꺼낸 경우 상금은 0원이다.
- (나) 주머니 C에 합치기 전에, 회당 2만 원의 비용을 지불하면 주머니 A 또는 B를 선택한 후 선택한 주머니에서 임의로 1개의 공을 택하여 제거한다.
- (다) (나)는 최대 2회 가능하며, k ($k = 1$ 또는 2)번째에서 주머니를 선택하는 규칙은 다음과 같다.
- 주머니 A를 선택할 확률은 $\frac{a}{k}$ 이고, 주머니 B를 선택할 확률은 $1 - \frac{a}{k}$ 이다.
 - 주머니 A에 공이 없는 경우 주머니 B에서 공을 택한다.
- (라) 공을 제거할 때 지불하는 비용은 상금에서 차감된다. 따라서 상금의 값은 음수가 될 수 있다.

위 시행에서 공을 2회 제거할 때의 상금의 기댓값이 공을 1회 제거할 때의 상금의 기댓값보다 크거나 같도록 하는 a 의 최댓값을 구하시오. (단, $0 < a < 1$ 이다.) [20점]

■ 예시 답안

- (1) 공을 1회 제거할 때의 상금을 X (단위: 만 원)라고 하자. X 가 가질 수 있는 값은 -2 또는 98 이므로, 각각에 대한 확률을 구한다. $X = -2$ 인 사건을 A , $X = 98$ 인 사건을 B 라 하자.

- (2) $P(A)$ 는 파란색 공을 꺼낼 확률과 같다. 파란색 공을 꺼내는 사건은 1) 빨간색 공이 제거되어 선택하지 못하는 사건과 2) 빨간색 공이 남아 있지만 꺼내지 못하는 사건으로 나눌 수 있다. 따라서 빨간색 공이 제거된 사건을 E 라고 하면, 확률의 덧셈정리와 곱셈정리에 의해 $P(A)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(A) = P(E)P(A|E) + P(E^c)P(A|E^c)$$

- (3) 문제의 조건에 의해 $P(E) = a$ 이다. 빨간색 공이 제거되었다면 조건에 의해 선택할 수 없으므로 $P(A|E) = 1$ 이다. 빨간색 공이 제거되지 않았다면 남아 있는 5개의 공 중에 파란색 공이 4개이므로

$$P(A|E^c) = \frac{4}{5} \text{이다. 따라서}$$

$$P(A) = (a \times 1) + \left\{ (1-a) \times \frac{4}{5} \right\} = \frac{1}{5}a + \frac{4}{5} \text{이다.}$$

- (4) 빨간색 공이 제거되었다면 조건에 의해 선택할 수 없으므로 $P(B|E) = 0$ 이다. 빨간색 공이 제거되지 않았다면 남아 있는 5개의 공 중에 빨간색 공이 1개이므로 $P(B|E^c) = \frac{1}{5}$ 이다. 따라서 $P(B) = (a \times 0) +$

$$\left\{ (1-a) \times \frac{1}{5} \right\} = -\frac{1}{5}a + \frac{1}{5} \text{이다. 혹은, } X = -2 \text{인 사건과 } X = 98 \text{인 사건은 여사건이므로,}$$

$$P(B) = 1 - P(A) = -\frac{1}{5}a + \frac{1}{5} \text{임을 간단하게 구할 수 있다.}$$

- (5) 따라서, 1개의 공을 제거할 때의 상금의 기댓값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(X) &= \{(-2) \times P(A)\} + \{98 \times P(B)\} = \left\{ (-2) \times \left(\frac{1}{5}a + \frac{4}{5} \right) \right\} + \left\{ 98 \times \left(-\frac{1}{5}a + \frac{1}{5} \right) \right\} \\ &= (-100) \times \frac{1}{5}a + \frac{90}{5} = -20a + 18 \end{aligned}$$

- (6) 공을 2회 제거할 때의 상금을 Y (단위: 만 원)라고 하자. Y 가 가질 수 있는 값은 -4 또는 96 이다. $Y = -4$ 인 사건을 C , $Y = 96$ 인 사건을 D 라 하자.

- (7) $P(C)$ 는 파란색 공을 꺼낼 확률과 같으므로, 빨간색 공이 제거된 사건을 F 라고 하면 $P(C)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P(C) = P(F)P(C|F) + P(F^c)P(C|F^c)$$

- (8) 빨간색 공이 제거되지 않을 확률은 $P(F^c) = (1-a)\left(1-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}a + 1$ 이다. 따라서 $P(F) = 1 - P(F^c) = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a$ 이다.

- (9) 빨간색 공이 제거되었다면 조건에 의해 선택할 수 없으므로 $P(C|F) = 1$ 이다. 빨간색 공이 제거되지 않았다면 남아 있는 4개의 공 중에 파란색 공이 3개이므로 $P(C|F^c) = \frac{3}{4}$ 이다. 따라서

$$P(C) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a \right) \times 1 \right\} + \left\{ \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}a + 1 \right) \times \frac{3}{4} \right\} = -\frac{1}{8}a^2 + \frac{3}{8}a + \frac{3}{4}$$

이다.

- (10) 빨간색 공이 제거되었다면 조건에 의해 선택할 수 없으므로 $P(D|F) = 0$ 이다. 빨간색 공이 제거되지 않았다면 남아 있는 4개의 공 중에 빨간색 공이 1개이므로 $P(D|F^c) = \frac{1}{4}$ 이다. 따라서

$$P(D) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a \right) \times 0 \right\} + \left\{ \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}a + 1 \right) \times \frac{1}{4} \right\} = \frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{8}a + \frac{1}{4}$$

이다.

혹은, (4)와 마찬가지로 $P(D) = 1 - P(C) = \frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{8}a + \frac{1}{4}$ 임을 간단하게 구할 수도 있다.

(11) 따라서, 공을 2회 제거할 때의 상금의 기댓값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \{(-4) \times P(C)\} + \{96 \times P(D)\} \\ &= \left\{ (-4) \times \left(-\frac{1}{8}a^2 + \frac{3}{8}a + \frac{3}{4} \right) \right\} + \left\{ 96 \times \left(\frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{8}a + \frac{1}{4} \right) \right\} \\ &= (100) \times \left(\frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{8}a \right) + \frac{84}{4} = \frac{25}{2}a^2 - \frac{75}{2}a + 21 \end{aligned}$$

(12) 조건을 만족하는 a 의 최댓값을 구하기 위해서 다음의 2차 부등식을 풀면 된다.

$$\begin{aligned} E(Y) &\geq E(X) \\ \Leftrightarrow \frac{25}{2}a^2 - \frac{75}{2}a + 21 &\geq -20a + 18 \\ \Leftrightarrow 25a^2 - 35a + 6 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (5a - 1)(5a - 6) &\geq 0 \end{aligned}$$

따라서, $0 < a < 1$ 을 만족하는 a 의 최댓값은 $\frac{1}{5}$ 이다.

*별 해

(1) 제거를 1회 할 때, -2 의 비용은 1의 확률로 발생한다. 따라서

$$E(X) = 100 \times P(B) - 2 = 100 \times \left(-\frac{1}{5}a + \frac{1}{5} \right) - 2 = -20a + 18$$

이다.

(2) 제거를 2회 할 때, -4 의 비용은 1의 확률로 발생한다. 따라서

$$E(Y) = 100 \times P(D) - 4 = 100 \times \left(\frac{1}{8}a^2 - \frac{3}{8}a + \frac{1}{4} \right) - 4 = \frac{25}{2}a^2 - \frac{75}{2}a + 21$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	$P(A)$ 또는 $P(B)$ 를 정확히 계산하면 +4점 $P(C)$ 또는 $P(D)$ 를 정확히 계산하면 +4점 X 의 기댓값과 Y 의 기댓값을 정확히 계산하면 각 +4점 (총 +8점) 문제의 조건을 만족하는 이차부등식이 정확하면 +2점 a 의 최댓값을 정확히 계산하면 +2점	20

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

2교시 · 문제 2

[문제 2] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 함수 $y = f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 미분계수는 다음과 같다.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서 $f''(x) > 0$ 이면 곡선 $y = f(x)$ 는 이 구간에서 아래로 볼록하다.
- 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

- 두 수 α, β 를 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 다음과 같다.

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

- 미분가능한 함수 $g(t)$ 에 대하여 $x = g(t)$ 로 놓으면 $\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt$ 이다.

2-1 [문제 2-1] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ 의 값을 구하시오. [10점]

(가) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{f(x)} - e}{x - 1} = 0$ 이다.

(나) $f''(-1) > 0$ 이다.

(다) 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선과 곡선 $y = f(x)$ 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{53}{12}$ 이다.

2-2 [문제 2-2] 좌표평면 위의 곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = \frac{1}{t+1}x + e^{\frac{t^2-2}{t+1}}$ (단, $t > -1$)가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(t)$ 라 하자. 정적분 $\int_0^1 S(t) dt$ 의 값을 구하시오. [15점]

■ 예시 답안

[문제 2-1]

극한 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{f(x)} - e}{x - 1}$ 이 존재하므로, $f(1) = 1$ 이다.

$g(x) = e^{f(x)}$ 라 놓으면, $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ 이고, 주어진 조건으로부터

$g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 0$ 이므로, $f'(1) = 0$ 이다.

따라서, $x = 1$ 이 $f(x) - 1 = 0$ 의 중근임을 알 수 있다. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수는 $f(x) - 1 = (x - 1)^2(x - b)$ 로 놓을 수 있다.

$f'(x) = (x - 1)(3x - 2b - 1)$ 이므로, $f'(-1) = 4(b + 2)$ 이고, $f(-1) = -4b - 3$ 이다.

그러므로, 점 $(-1, f(-1))$ 에서 접선의 방정식은 $y = 4(b + 2)x + 5$ 이다.

제시문에 의해 $x = -1$ 을 포함하는 어떤 구간에서 $y = f(x)$ 가 아래로 볼록이므로 접선의 방정식이 $y = f(x)$ 의 그래프보다 아래에 있고, 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^0 \{(x - 1)^2(x - b) - 4(b + 2)x - 4\}dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{b + 2}{3}x^3 - \frac{2b + 7}{2}x^2 - (b + 4)x \right]_{x=-1}^0 = -\left(\frac{17}{12} + \frac{b}{3} \right)$$

이다. 따라서, $b = -\frac{35}{2}$ 이다.

이를 대입하면 $f'(x) = (x - 1)(3x + 34)$ 이므로, $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{70}{3}$ 이다.

[문제 2-2]

곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = \frac{1}{t+1}x + e^{\frac{t^2-2}{t+1}}$ 가 만나는 점의 x 좌표는 $x^2 - \frac{1}{t+1}x - e^{\frac{t^2-2}{t+1}} = 0$ 을 만족하므로, 두 점의 좌표를 (α, α^2) , (β, β^2) 이라 놓을 수 있다. 따라서, 근과 계수의 관계에 의해 두 근의 합과 곱은 각각

$$\alpha + \beta = \frac{1}{t+1}, \quad \alpha\beta = -e^{\frac{t^2-2}{t+1}}$$

를 만족한다.

정삼각형의 넓이 $S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{PQ}^2$ 이고, 여기서, 두 점 사이의 거리를 이용하면

$\overline{PQ}^2 = \left(\sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2} \right)^2 = (\beta - \alpha)^2(1 + (\beta + \alpha)^2)$ 이다.

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{1}{(t+1)^2} + 4e^{\frac{t^2-2}{t+1}}$ 이다. 따라서, 구하는 정적분은

$$\begin{aligned} \int_0^1 S(t)dt &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{(t+1)^2} + 1 \right) \left(\frac{1}{(t+1)^2} + 4e^{\frac{t^2-2}{t+1}} \right) dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{(t+1)^4} dt + 4 \int_0^1 e^{t-1-\frac{1}{t+1}} \left(1 + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt \right\} \end{aligned}$$

이다.

$$\left(t - 1 - \frac{1}{t+1} \right)' = 1 + \frac{1}{(t+1)^2}$$

이므로,

$$\int e^{t-1-\frac{1}{t+1}} \left(1 + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = e^{t-1-\frac{1}{t+1}} + C$$

이다.

따라서, 주어진 정적분을 계산하면

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left[-\frac{1}{3(t+1)^3} - \frac{1}{t+1} + 4e^{t-1-\frac{1}{t+1}} \right]_{t=0}^1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{19}{24} + 4e^{-\frac{1}{2}} - 4e^{-2} \right)$$

이다.

정리하면 $\frac{19}{96}\sqrt{3} + \sqrt{3}(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-2})$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2-1	$f'(1) = 0$ 을 얻으면 +2점 접선의 방정식을 얻고 $f''(-1) > 0$ 을 이용하여 접선이 $y = f(x)$ 아래에 있음을 얻으면 +3점 도형의 넓이를 바르게 계산하여 $b = -\frac{35}{2}$ 를 얻으면 +3점 $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{70}{3}$ 를 구하면 +2점	10
문제 2-2	근과 계수의 관계로 $\alpha + \beta = \frac{1}{t+1}$, $\alpha\beta = -e^{\frac{t^2-2}{t+1}}$ 를 구하면 +3점 $\overline{PQ}^2 = \left(\frac{1}{(t+1)^2} + 1 \right) \left(\frac{1}{(t+1)^2} + 4e^{\frac{t^2-2}{t+1}} \right)$ 를 얻으면 +3점 부정적분 $\frac{\sqrt{3}}{4} \left(-\frac{1}{3(t+1)^3} - \frac{1}{t+1} + 4e^{t-1-\frac{1}{t+1}} \right)$ 를 얻으면 +5점 정적분을 계산하여 정답 $\sqrt{3} \left(\frac{19}{96} + e^{-\frac{1}{2}} - e^{-2} \right)$ 을 얻으면 +4점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

2교시 · 문제 3

[문제 3] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때, 다음이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

- 좌표평면에서 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 이다.
- 미분가능한 함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 α 와 β 를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_\alpha^\beta f(t) dt$$

- 3-1** [문제 3-1] 좌표평면 위의 세 직선 $y = 0$, $x = 1$, $x = e$ 와 곡선 $y = (\ln x)^n$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 a_n 이라 하자. 수열의 합 $\sum_{n=1}^{13} \{a_{n+1} + (n+1)a_n\} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln\left(\frac{n}{15}\right) \ln\left(\frac{n+1}{15}\right)}$ 을 구하시오. [10점]

- 3-2** [문제 3-2] 좌표평면 위의 점 $A(1, t)$, $B(-1, t)$, $P(x, 0)$ 이 있다. 실수 t ($t > 0$)에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $f(x) = \ln \overline{PA} + \ln \overline{PB}$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 $g(t)$ 라 할 때, 정적분 $\int_{\frac{1}{2}}^2 2tg(t) dt$ 의 값을 구하시오. [15점]

■ 예시 답안

[문제 3-1]

$a_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$ 이고 부분적분을 적용하여

$$a_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx = [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - \int_1^e (n+1)(\ln x)^n dx = e - (n+1)a_n$$

을 얻을 수 있다. 정리하면 $a_{n+1} + (n+1)a_n = e$ 이다. 구하는 수열의 합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e \sum_{n=1}^{13} \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\ln\left(\frac{n}{15}\right) \ln\left(\frac{n+1}{15}\right)} &= e \sum_{n=1}^{13} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{15}\right) - \ln\left(\frac{n}{15}\right)}{\ln\left(\frac{n}{15}\right) \ln\left(\frac{n+1}{15}\right)} \\ &= e \sum_{n=1}^{13} \left\{ \frac{1}{\ln \frac{n}{15}} - \frac{1}{\ln \frac{n+1}{15}} \right\} \\ &= e \left(\frac{1}{\ln \frac{1}{15}} - \frac{1}{\ln \frac{14}{15}} \right) = e \left(\frac{1}{\ln \frac{15}{14}} - \frac{1}{\ln 15} \right) \text{이다.} \end{aligned}$$

[문제 3-2]

$\ln \overline{PA} + \ln \overline{PB} = \frac{1}{2} \ln(\overline{PA}^2 \overline{PB}^2)$ 이고 $\overline{PA}^2 \overline{PB}^2 = ((x-1)^2 + t^2)((x+1)^2 + t^2)$ 이다. 식을 정리하면

$$(x^2 + 1 + t^2 + 2x)(x^2 + 1 + t^2 - 2x) = (x^2 + 1 + t^2)^2 - 4x^2 = (x^2 + t^2 - 1)^2 + 4t^2$$

이다.

$0 < t < 1$ 이면 $x = \pm\sqrt{1-t^2}$ 에서 최솟값 $g(t) = \ln(2t)$ 를 갖는다.

$t \geq 1$ 이면 $x = 0$ 에서 최솟값 $g(t) = \ln(t^2 + 1)$ 을 갖는다.

구하는 정적분은 $\int_{\frac{1}{2}}^2 2tg(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 2t \ln(2t) dt + \int_1^2 2t \ln(t^2 + 1) dt$ 이다.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 2t \ln(2t) dt = [t^2 \ln(2t)]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 t dt = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

이고

$$\int_1^2 2t \ln(t^2 + 1) dt = 5 \ln 5 - 2 \ln 2 - 3$$

이다. 답은 $5 \ln 5 - \ln 2 - \frac{27}{8}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3-1	$a_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ 임을 구하면 +2점 $a_{n+1} + (n+1)a_n = e$ 을 구하면 +4점 수열의 합 $e \left(\frac{1}{\ln \frac{15}{14}} - \frac{1}{\ln 15} \right)$ 을 계산하면 +4점	10
문제 3-2	$0 < t < 1$ 이면 $g(t) = \ln(2t)$ 를 구하면 +4점 $t \geq 1$ 이면 $g(t) = \ln(t^2 + 1)$ 을 구하면 +4점 $\int_{\frac{1}{2}}^1 2t \ln(2t) dt = \ln 2 - \frac{3}{8}$ 을 구하면 +4점 $\int_1^2 2t \ln(t^2 + 1) dt = 5 \ln 5 - 2 \ln 2 - 3$ 을 구하면 +3점	15

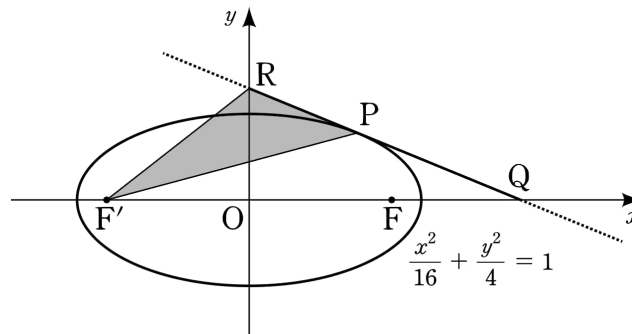
2교시 · 문제 4

[문제 4] 다음을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

제시문

- 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은 $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ 이다.
- 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 이다.
- 두 평면벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 이다.

- 4-1 [문제 4-1] 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ ($c > 0$)인 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 P 에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 Q, R 라 하자. 선분 QR 의 길이가 최소일 때, 삼각형 PRF' 의 넓이를 구하시오. (단, 점 P 는 제1사분면 위의 점이다.) [15점]



- 4-2 [문제 4-2] $(m-5)^2 + (n-4)^2 < 9$ 를 만족시키는 두 정수 m, n 에 의하여 정의된 좌표평면 위의 점 $P(m, n)$ 과 원 $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 1$ 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 내적 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [15점]

■ 예시 답안

[문제 4-1]

$c = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$ 이므로 두 초점 F, F' 의 좌표는 각각 $(2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0)$ 이다.

접선의 기울기를 m ($m < 0$)이라 하면 그 방정식은 $y = mx + \sqrt{16m^2 + 4}$ 로 주어진다. 접선의 x 절편과 y 절편을 구하여 점 Q, R 의 좌표가 각각 $\left(\sqrt{16 + \frac{4}{m^2}}, 0\right), (0, \sqrt{16m^2 + 4})$ 임을 알 수 있다. $\overline{QR}^2$ 의 값이 최소일 때, $\overline{QR}$ 의 값이 최소이다.

$$\overline{QR}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2 = 16 + \frac{4}{m^2} + 16m^2 + 4 = 20 + 16m^2 + \frac{4}{m^2} \geq 20 + 2\sqrt{16m^2 \times \frac{4}{m^2}} = 36$$

위 부등식에서 등호는 $16m^2 = \frac{4}{m^2}$ 일 때 성립한다. 즉, $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때이다. 따라서 점 Q, R 는 각각 $(2\sqrt{6}, 0)$ 과 $(0, 2\sqrt{3})$ 이다. 또, $\overline{F'Q} = 2\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1), \overline{RO} = 2\sqrt{3}$ 이다(O 는 원점).

점 P 의 좌표를 (a, b) 라 하면, 접선의 방정식은 $\frac{ax}{16} + \frac{by}{4} = 1$ 로 주어지고 그 기울기는 $-\frac{a}{4b} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다. $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} = 1$ 와 연립하여 $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ($\because b > 0$)이다. 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\overline{PH} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 이므로

$$\Delta PRF' = \Delta QRF' - \Delta QPF' = \frac{1}{2} \times \overline{F'Q} \times \overline{RO} - \frac{1}{2} \times \overline{F'Q} \times \overline{PH} = 4(\sqrt{2} + 1)$$

[문제 4-2]

$(m-5)^2 + (n-4)^2 < 9$ 이므로 두 정수 $m-5, n-4$ 은 모두 $-2, -1, 0, 1, 2$ 중 하나이다. 즉, 점 P 의 좌표의 집합은 $S = \{(m, n) \mid m, n \text{은 } 3 \leq m \leq 7, 2 \leq n \leq 6 \text{인 정수}\}$ 이다.

원 $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 1$ 의 중심 $Z(-1, 8)$ 과 좌표가 집합 S 에 속하는 각각의 점 $P(m, n)$ 에 대하여 $\overline{OP}, \overline{OZ}$ 가 이루는 각은 예각이다. 두 벡터 $\overline{OP}$ 와 $\overline{OZ}$ 가 이루는 각을 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \overline{OQ} &= \overline{OP} \cdot (\overline{OZ} + \overline{ZQ}) = \overline{OP} \cdot \overline{OZ} + \overline{OP} \cdot \overline{ZQ} \\ &= \overline{OP} \cdot \overline{OZ} + |\overline{OP}| |\overline{ZQ}| \cos \theta = \overline{OP} \cdot \overline{OZ} + |\overline{OP}| \cos \theta \end{aligned}$$

이므로 $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ 는 $\theta = 0$ 일 때 최댓값 $\overline{OP} \cdot \overline{OZ} + |\overline{OP}|$ 를 갖는다.

m 을 고정하였을 때, n 이 클수록 두 벡터 $\overline{OP}, \overline{OZ}$ 가 이루는 각이 작아지고 $|\overline{OP}|$ 는 커지므로 $n = 6$ 일 때, $\overline{OP} \cdot \overline{OZ} + |\overline{OP}|$ 가 최대로 커진다. 따라서 $\overline{OP} \cdot \overline{OZ} + |\overline{OP}|$ 의 최댓값을 찾기 위하여 점 P 의 좌표가 $(3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (7, 6)$ 인 경우를 고려하면 된다.

실수에서 정의된 함수 $f(x) = (x, 6) \cdot (-1, 8) + \sqrt{x^2 + 36} = -x + 48 + \sqrt{x^2 + 36}$ 의 도함수 $f'(x)$ 는 $f'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 36}} < 0$ 을 만족시키므로 $f(x)$ 는 감소함수이다. 따라서 점 P 의 좌표가 $(3, 6)$ 일 때, $\overline{OP} \cdot \overline{OZ} + |\overline{OP}|$ 가 최댓값을 갖고 이때 $\overline{OP} \cdot \overline{OZ} + |\overline{OP}| = 45 + \sqrt{45}$ 이다. 그러므로 $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ 의 최댓값은 $45 + \sqrt{45} = 45 + 3\sqrt{5}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4-1	$c = 2\sqrt{3}$ 을 구하면 +2점 점 P에서의 접선의 기울기 $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 를 구하면 +4점 점 P의 y좌표 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 을 구하면 +4점 삼각형 PRF'의 넓이 $4(\sqrt{2} + 1)$ 를 구하면 +5점	15
문제 4-2	$(m - 5)^2 + (n - 4)^2 < 9$ 을 만족시키는 점 $P(m, n)$ 를 모두 찾으면 +3점 내적 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 를 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OP} \cos \theta$ 로 표현하면 +3점 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 가 최댓값을 갖는 점 $P(3, 6)$ 을 찾으면 +4점 내적 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값 $45 + \sqrt{45} = 45 + 3\sqrt{5}$ 를 구하면 +5점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

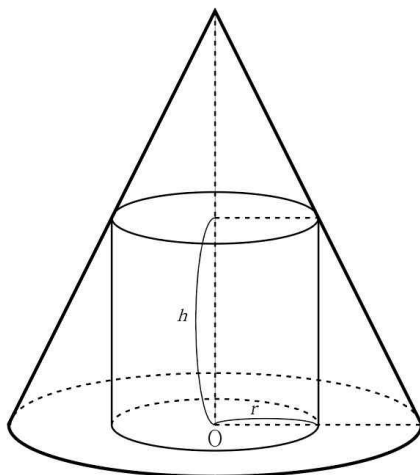
2024학년도 자연계열 I (1교시) · II (2교시)

1교시 · 문제 1

[문제 1] 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

제시문

- 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 10인 원뿔이 있다.
- 주머니 A에는 1, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 1, 2의 숫자가 하나씩 적혀 있는 2개의 공이 들어 있다.
- 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고, 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낸다. 3의 배수가 아니면 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내고, 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.
- 주머니 A와 B에서 꺼낸 공에 적힌 숫자들의 합을 k 라 하자. 이때 반지름의 길이가 $k - 3$ 이고 원뿔에 내접하는 원기둥의 부피를 점수로 한다.
- 다음은 원뿔에 내접하고, 밑면의 반지름의 길이가 r 이고 높이가 h 인 원기둥을 나타낸 것이다.



시행의 결과로 얻은 점수의 기댓값을 구하시오. [20점]

■ 예시 답안

(1)

한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수일 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다. 이때 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 적힌 숫자들의 표본공간은 $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ 이고, 각 경우가 발생할 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다. 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 적힌 숫자들의 표본공간은 $\{1, 2\}$ 이고, 각 경우의 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다. 예를 들어, 주머니 A에서 꺼낸 공이 (1, 2)이고, 주머니 B에서 꺼낸 공이 1일 때 확률은 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$ 이고, 공에 적힌 숫자들의 합 k 는 4이다.

(2)

주사위의 눈의 수가 3의 배수가 아닐 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다. 이때 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 적힌 숫자들의 표본공간은 $\{1, 2, 3\}$ 이고 각 경우의 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고, 주머니 B에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 적힌 숫자들의 표본공간은 $\{(1, 2)\}$ 이고 그때의 확률은 1이다. 예를 들어, 주머니 A에서 꺼낸 공이 1이고, 주머니 B에서 꺼낸 공이 (1, 2)일 때 확률은 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{9}$ 이고, 공에 적힌 숫자들의 합 k 는 4이다.

(3)

위와 같은 방식으로 얻은 시행의 결과는 다음과 같다.

주사위의 눈의 수	주머니 A에서 꺼낸 공	주머니 B에서 꺼낸 공	k	확률
3의 배수인 경우	(1, 2)	1	4	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$
		2	5	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$
	(1, 3)	1	5	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$
		2	6	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$
	(2, 3)	1	6	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$
		2	7	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$
3의 배수가 아닌 경우	1	(1, 2)	4	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{9}$
	2		5	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{9}$
	3		6	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{9}$

(4)

반지름의 길이가 $k - 3$ 인 원기둥의 높이는 그림 1에서 도형의 닮음을 이용하면 $(16 - 2k)$ 로 계산할 수 있고, 원기둥의 부피는 $(k - 3)^2(16 - 2k)\pi$ 이다.

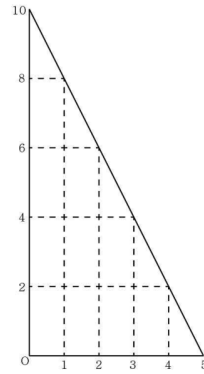


그림 2

(5)

$k = 4$ 일 때의 확률은 $\frac{1}{18} + \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$ 이고, 이때 원기둥의 반지름의 길이는 1, 높이는 8, 부피는 8π 이다.

(6)

$k = 5$ 일 때의 확률은 $\frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{2}{9} = \frac{6}{18}$ 이고, 이때 반지름의 길이는 2, 높이는 6, 부피는 24π 이다.

(7)

$k = 6$ 일 때의 확률은 $\frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{2}{9} = \frac{6}{18}$ 이고, 이때 반지름의 길이는 3, 높이는 4, 부피는 36π 이다.

(8)

$k = 7$ 일 때의 확률은 $\frac{1}{18}$ 이고, 이때 반지름의 길이는 4, 높이는 2, 부피는 32π 이다.

(9)

시행의 결과는 다음과 같고, 이를 이용하여 점수의 기댓값을 계산할 수 있다.

k	확률	원기둥의 밑면의 반지름	원기둥의 높이	원기둥의 부피
4	$\frac{5}{18}$	1	8	8π
5	$\frac{6}{18}$	2	6	24π
6	$\frac{6}{18}$	3	4	36π
7	$\frac{1}{18}$	4	2	32π

$$\begin{aligned}
 \text{기댓값} &= \left(\frac{5}{18} \times 8\pi\right) + \left(\frac{6}{18} \times 24\pi\right) + \left(\frac{6}{18} \times 36\pi\right) + \left(\frac{1}{18} \times 32\pi\right) \\
 &= \frac{\pi}{18} \{(5 \times 8) + (6 \times 24) + (6 \times 36) + (1 \times 32)\} \\
 &= \frac{432}{18} \pi = \frac{216}{9} \pi = 24\pi
 \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	k 의 값, 그때의 확률, 원기둥의 부피를 정확히 계산하면 각 +4점(총 +16점) - k 의 값과 그때의 확률을 정확히 계산하면 +2점 - 원기둥의 높이를 정확히 계산하면 +1점 - 원기둥의 부피를 정확히 계산하면 +1점 원기둥의 부피의 기댓값을 정확히 계산하면 +4점	20

1교시 · 문제 2

[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

제시문

- $a > 0, a \neq 1, N > 0$ 일 때, $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$ 이다. 그리고 $\log_a N^k = k \log_a N$ 이다. (단, k 는 실수)
- $a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1$ 일 때, $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ 이다.
- 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \quad (\text{단, } \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x)$$

- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{단, } \tan \alpha \tan \beta \neq -1)$

2-1 다음 식의 값을 구하시오. [10점]

$$\sum_{k=2}^9 \left(k^{\frac{k \ln 2}{\ln k}} - 2^{\frac{2 \ln k}{\ln 2}} \right)$$

- 2-2 좌표평면에서 직선 $x = 1$ 위를 움직이는 점 $A(1, y_1)$ 과 x 축 위를 움직이는 점 $B(x_1, 0)$ 의 시각 t 에서의 위치는 두 함수 $x_1 = f(t), y_1 = g(t)$ 로 나타내어질 수 있다. 두 점 $A(1, g(t)), B(f(t), 0)$ 은 시각 $t = 0$ 일 때 $(1, 0)$ 에서 출발한 후, $0 < t \leq \frac{\pi}{4}$ 일 때 원점 O 에 대하여 $\angle AOB = t$ 이고 $\angle OAB = \frac{2\pi}{3}$ 를 만족하며 움직인다고 하자. 이때, 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{\pi k}{6n}\right)$ 를 구하시오. (단, $x_1 \geq 1, y_1 \geq 0$ 이다.) [15점]

■ 예시 답안

[문제 2-1]

로그함수의 성질을 이용하여

$$k^{\frac{k \ln 2}{\ln k}} = k^{\frac{\ln 2^k}{\ln k}} = k^{\log_k 2^k} = 2^k, \quad 2^{\frac{2 \ln k}{\ln 2}} = 2^{\frac{\ln k^2}{\ln 2}} = 2^{\log_2 k^2} = k^2$$

로 정리한 후, 아래와 같이 등비수열의 합과 자연수의 거듭제곱의 합에 대한 식을 이용하여 답을 구한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^9 2^k - \sum_{k=2}^9 k^2 &= \sum_{k=2}^9 2^k - \left(\sum_{k=1}^9 k^2 \right) + 1 = \frac{4(2^8 - 1)}{2 - 1} - \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} + 1 \\ &= 1020 - 285 + 1 = 736 \end{aligned}$$

[문제 2-2]

우선 주어진 문제의 조건으로부터 $f(t) = 1 + (\tan t) \left\{ \tan \left(t + \frac{\pi}{6} \right) \right\}$ 를 구한 후, 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 극한값을 $\frac{6}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[1 + (\tan x) \left\{ \tan \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right\} \right] dx$ 로 표현한다. 그리고 제시문에 주어진 탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \frac{6}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \tan x}{\tan \frac{\pi}{6}} dx = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left\{ \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \tan x \right\} dx$$

를 얻는다. 치환적분을 하면 $\tan x$ 의 부정적분이 $-\ln(\cos x) + C$ 임을 알 수 있는데, 이를 이용하여 다음의 답을 얻는다.

$$\frac{6\sqrt{3}}{\pi} \left\{ -\ln\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) + \ln\left(\cos \frac{\pi}{6}\right) + \ln\left(\cos \frac{\pi}{6}\right) - \ln(\cos 0) \right\} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{3}{2}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2-1	로그함수의 성질을 이용하여 $k^{\frac{k \ln 2}{\ln k}} = 2^k$, $2^{\frac{2 \ln k}{\ln 2}} = k^2$ 구하면 +6점 수열의 합공식을 이용하여 정답 736을 얻으면 +4점	10
문제 2-2	주어진 정보로부터 $f(t) = 1 + (\tan t) \left\{ \tan \left(t + \frac{\pi}{6} \right) \right\}$ 구하면 +3점 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 $\frac{6}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[1 + (\tan x) \left\{ \tan \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right\} \right] dx$ 를 얻으면 +4점 탄젠트 함수의 덧셈정리를 이용하여 $1 + (\tan x) \left\{ \tan \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right\} = \frac{\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \tan x}{\tan \frac{\pi}{6}}$ 를 얻으면 +4점 정적분을 계산하여 정답 $\frac{6\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{3}{2}$ 를 얻으면 +4점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

1교시 · 문제 3

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

제시문

- 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S = \int_a^b |f(x)| dx$ 이다.
- 미분가능한 함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a) = \alpha, g(b) = \beta$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 α 와 β 를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

- 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$ 이다.
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ (단, $\tan \alpha \tan \beta \neq 1$)

3-1 $x \geq 0$ 에서 정의된 곡선 $y = \frac{x}{x^2 + 1} \left(\{\ln(x^2 + 1)\}^2 - 6\ln(x^2 + 1) + 5 \right)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. [10점]

3-2 좌표평면 위에 점 $A(-1, 0), B(1, 0)$ 이 있다. 구간 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 정의된 곡선 $y = \sqrt{x + 2}$ 위의 점 P 에 대하여 $\theta = \angle APB$ 라 할 때, $\tan^2 \theta$ 의 최댓값을 구하시오. [15점]

■ 예시 답안

[문제 3-1]

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}(\ln(x^2+1)-1)(\ln(x^2+1)-5)$ 라 하자. $x = 0, \sqrt{e-1}, \sqrt{e^5-1}$ 에서 $f(x) = 0$ 이다. $0 \leq x \leq \sqrt{e-1}$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이고 $\sqrt{e-1} \leq x \leq \sqrt{e^5-1}$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로 구하는 넓이는 $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x)dx - \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^5-1}} f(x)dx$ 이다. $t = \ln(x^2+1)$ 로 치환하여 적분하면

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (t^2 - 6t + 5)dt - \frac{1}{2} \int_1^5 (t^2 - 6t + 5)dt = \frac{7}{6} + \frac{16}{3} = \frac{13}{2}$$

이다.

[문제 3-2]

점 P의 좌표는 $(t, \sqrt{t+2})$ 라 하자.

$\angle PAB = \alpha, \angle PBA = \beta$ 라 하면 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{t+2}}{1+t}, \tan \beta = \frac{\sqrt{t+2}}{1-t}$ 이다. $\theta = \pi - \alpha - \beta$ 이므로 $\tan(\theta) = f(t)$

라 하면 $f(t) = \frac{2\sqrt{t+2}}{t^2+t+1}$ 이다. 미분하면

$$f'(t) = -\frac{3(t^2+3t+1)}{(t^2+t+1)^2\sqrt{t+2}}$$

이다. $t = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 에서 극값을 갖고 $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} < -1 < \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < 1$ 이므로 $t = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 에서 최댓값을 갖는다.

$\tan^2 \theta$ 의 최댓값은 $\left\{ f\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) \right\}^2 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3-1	교점 $x = 0, \sqrt{e-1}, \sqrt{e^5-1}$ 을 구한다. +3점 그래프의 개형을 이해하고 $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x)dx - \int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^5-1}} f(x)dx$ 를 구하면 +3점 치환 적분을 하여 $\frac{13}{2}$ 을 구하면 +4점	10
문제 3-2	$f(t) = \frac{2\sqrt{t+2}}{t^2+t+1}$ 와 $f'(t) = -\frac{3(t^2+3t+1)}{(t^2+t+1)^2\sqrt{t+2}}$ 을 구하면 +8점 $t = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 를 구하고 $t = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 에서 최댓값을 갖는다는 것을 보이면 +4점 최댓값 $\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$ 을 구하면 +3점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ±1점을 부여할 수 있습니다.

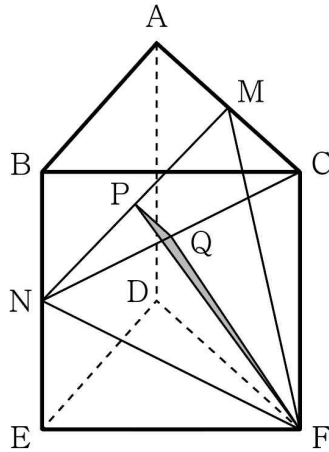
1교시 · 문제 4

[문제 4] 다음을 읽고 문제에 답하십시오.

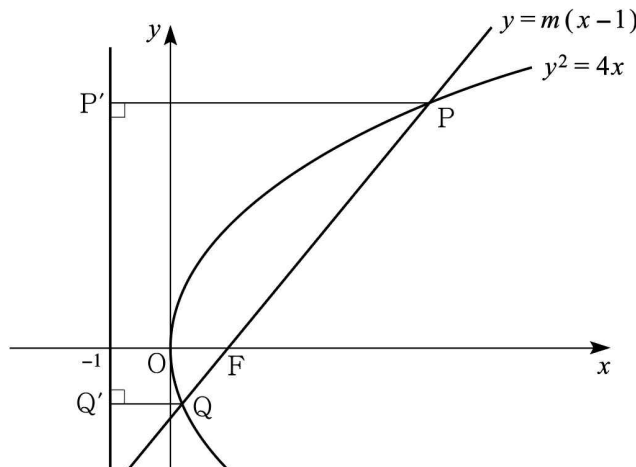
제시문

- 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 이다.
- 삼각형 ABC에서 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 이다.
- 평면 위의 한 점 F와 이 점을 지나지 않는 직선 l 이 주어질 때, 점 F와 직선 l 에 이르는 거리가 같은 점들의 집합을 포물선이라 한다.
- 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ 이고 $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ 이다.

4-1 오른쪽 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정삼각기둥에서 두 선분 AC, BE의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 선분 MN, CN의 중점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 PFQ의 외접원의 반지름의 길이를 구하십시오. [15점]



4-2 아래의 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점 $F(1, 0)$ 을 지나고 $m > 0$ 인 직선 $y = m(x - 1)$ 이 서로 다른 두 점 P, Q에서 포물선과 만난다. 두 점 P, Q에서 준선 $x = -1$ 에 내린 수선의 발을 각각 P', Q' 이라 하자. 사각형 $PP'Q'Q$ 의 둘레의 길이가 40일 때, 이 사각형의 넓이를 구하십시오. [15점]

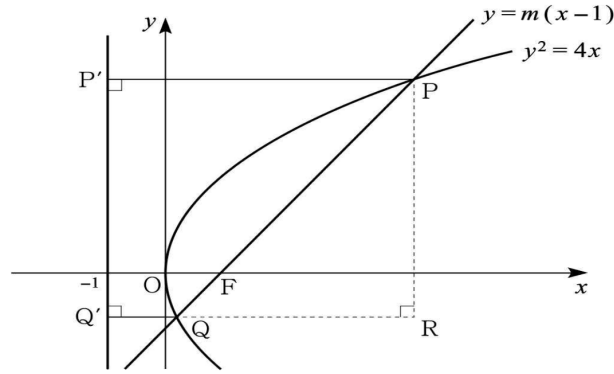


$r = \sqrt{\frac{m^2 + 1}{m^2}}$ 라 놓아 얻은 이차방정식 $8r^2 + 4r = 40$ 에서 $r > 0$ 이므로

$$r = \sqrt{\frac{m^2 + 1}{m^2}} = 2$$

따라서 $m^2 = \frac{1}{3}$ 이고

$$\text{사각형 } PP'Q'Q \text{의 넓이} = \frac{1}{2} \overline{P'Q'} \cdot (\overline{PP'} + \overline{QQ'}) = \frac{1}{2} \overline{P'Q'} \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 = 64$$



■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4-1	$\overline{PF} = 2$ 를 구하면 +5점 $\overline{QF} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ 을 구하면 +5점 $R = \frac{\sqrt{39}}{6}$ 를 구하면 +5점	15
문제 4-2	$\overline{PQ} = \frac{4(m^2 + 1)}{m^2}$ 을 구하면 +5점 방정식 $\frac{8(m^2 + 1)}{m^2} + 4\sqrt{\frac{m^2 + 1}{m^2}} = 40$ 을 찾으면 +5점 사각형 $PP'Q'Q$ 의 넓이 64를 구하면 +5점 (사각형 $PP'Q'Q$ 의 넓이 64 이외의 것을 더 찾으면 -2점)	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

2교시 · 문제 1

[문제 1] 좌표평면의 원점 O 에 있는 점 A 는 다음과 같은 규칙에 따라 이동한다.

제시문

- 주머니에 숫자 2가 적힌 공 1개와 숫자 3이 적힌 공 1개가 들어 있다.
- 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낸 후 그 공에 적힌 숫자를 m 이라 하자. 점 A 는 $\frac{1}{m}$ 의 확률로 원점 O 와 점 $P(12, 0)$ 을 이은 선분 OP 를 $m : 1$ 로 내분하는 점으로 이동하거나, $1 - \frac{1}{m}$ 의 확률로 선분 OP 를 $1 : m$ 으로 외분하는 점으로 이동한다. 이때 이동한 점을 $A_1(x_1, 0)$ 이라 하고, 꺼낸 공은 다시 집어넣지 않는다.
- 주머니에 남아 있는 공에 적힌 숫자를 n 이라 하자. 점 A_1 은 $\frac{2}{n}$ 의 확률로 점 A_1 과 점 $Q(x_1, 8)$ 을 이은 선분 A_1Q 를 $1 : n$ 으로 내분하는 점으로 이동하거나, $1 - \frac{2}{n}$ 의 확률로 선분 A_1Q 를 $n : 1$ 로 외분하는 점으로 이동한다. 이때 이동한 점을 $A_2(x_1, y_1)$ 이라 한다.

두 점 $A_2(x_1, y_1)$, $P(12, 0)$ 사이의 거리가 $|x_1|$ 보다 작을 확률을 구하시오. [20점]

■ 예시 답안

(1)

선분의 내분점과 외분점은 다음과 같이 정의된다.

- 좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 를 이은 선분 AB 를 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$ 이다. ($m > 0, n > 0$)
- 선분 AB 를 $m:n$ 으로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$ 이다. ($m > 0, n > 0, m \neq n$)

(2)

일반적으로 (m, n) 인 경우 $A_1(x_1, 0)$ 과 $A_2(x_1, y_1)$ 은 다음과 같이 계산할 수 있다.

선분 OP	$A_1(x_1, 0)$	확률	선분 A_1Q	$A_2(x_1, y_1)$	확률
$m:1$ 로 내분	$\left(\frac{12m}{m+1}, 0\right)$	$\frac{1}{m}$	$1:n$ 으로 내분	$\left(x_1, \frac{8}{1+n}\right)$	$\frac{2}{n}$
$1:m$ 으로 외분	$\left(\frac{12}{1-m}, 0\right)$	$1 - \frac{1}{m}$	$n:1$ 로 외분	$\left(x_1, \frac{8n}{n-1}\right)$	$1 - \frac{2}{n}$

(3)

$m=2, n=3$ 인 경우

- 선분 OP 를 $2:1$ 로 내분한 점은 $(8, 0)$ 이고, $1:2$ 로 외분한 점은 $(-12, 0)$ 이다. 즉, 점 A 는 $\frac{1}{2}$ 의 확률로 $A_1(8, 0)$ 으로 이동하거나, $\frac{1}{2}$ 의 확률로 $A_1(-12, 0)$ 으로 이동한다.
- 점 $A_1(8, 0)$ 일 때, 선분 A_1Q 를 $1:3$ 으로 내분한 점은 $(8, 2)$ 이고, $3:1$ 로 외분한 점은 $(8, 12)$ 이다. 즉, 점 A_1 은 $\frac{2}{3}$ 의 확률로 $A_2(8, 2)$ 로 이동하거나, $\frac{1}{3}$ 의 확률로 $A_2(8, 12)$ 로 이동한다.
- 점 $A_1(-12, 0)$ 일 때, 점 A_1 은 $\frac{2}{3}$ 의 확률로 $A_2(-12, 2)$ 로 이동하거나, $\frac{1}{3}$ 의 확률로 $A_2(-12, 12)$ 로 이동한다.

(4)

$m=3, n=2$ 인 경우

- 선분 OP 를 $3:1$ 로 내분한 점은 $(9, 0)$ 이고, $1:3$ 으로 외분한 점은 $(-6, 0)$ 이다. 즉, 점 A 는 $\frac{1}{3}$ 의 확률로 $A_1(9, 0)$ 으로 이동하거나, $\frac{2}{3}$ 의 확률로 $A_1(-6, 0)$ 으로 이동한다.
- 점 $A_1(9, 0)$ 일 때, 선분 A_1Q 를 $1:2$ 로 내분한 점은 $\left(9, \frac{8}{3}\right)$ 이고, $2:1$ 로 외분한 점은 $(9, 16)$ 이다. 즉, 점 A_1 은 1 의 확률로 $A_2\left(9, \frac{8}{3}\right)$ 로 이동한다.
- 점 $A_1(-6, 0)$ 일 때, 점 A_1 은 1 의 확률로 $A_2\left(-6, \frac{8}{3}\right)$ 로 이동한다.

(5)

모든 경우를 고려하여 계산한 확률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

m, n	확률	$A_1(x_1, 0)$	확률	$A_2(x_1, y_1)$	확률	$A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$ 일 확률
$m=2$ $n=3$	$\frac{1}{2}$	$A_1(8, 0)$	$\frac{1}{2}$	$A_2(8, 2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$
			$\frac{1}{2}$	$A_2(8, 12)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$
	$\frac{1}{2}$	$A_1(-12, 0)$	$\frac{1}{2}$	$A_2(-12, 2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$
			$\frac{1}{2}$	$A_2(-12, 12)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

$m = 3$ $n = 2$	$\frac{1}{2}$	$A_1(9, 0)$	$\frac{1}{3}$	$A_2\left(9, \frac{8}{3}\right)$	1	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
				$A_2(9, 16)$	0	0
		$A_1(-6, 0)$	$\frac{2}{3}$	$A_2\left(-6, \frac{8}{3}\right)$	1	$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
				$A_2(-6, 16)$	0	0

(6)

두 점 A_2 와 점 P 사이의 거리는 거리 공식을 통해서 다음과 같이 계산할 수 있고, $|x_1|$ 보다 작은 경우는 $A_2(8, 2)$ 와 $A_2\left(9, \frac{8}{3}\right)$ 이며 그때의 확률은 $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ 이다.

$A_2(x_1, y_1)$	확률	$ x_1 $	점 A_2 와 점 P 사이의 거리	$ x_1 > \text{거리}$
$A_2(8, 2)$	$\frac{1}{6}$	8	$\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$	O
$A_2(8, 12)$	$\frac{1}{12}$	8	$\sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{160}$	X
$A_2(-12, 2)$	$\frac{1}{6}$	12	$\sqrt{24^2 + 2^2} = \sqrt{580}$	X
$A_2(-12, 12)$	$\frac{1}{12}$	12	$\sqrt{24^2 + 12^2} = \sqrt{720}$	X
$A_2\left(9, \frac{8}{3}\right)$	$\frac{1}{6}$	9	$\sqrt{3^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{145}{9}}$	O
$A_2\left(-6, \frac{8}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	6	$\sqrt{18^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{324 + \frac{64}{9}}$	X

* 확률이 0인 $A_2(9, 16)$ 과 $A_2(-6, 16)$ 의 경우는 거리 계산에서 제외하였다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 1	$m = 2, n = 3$ 인 경우 점 A_1 과 A_2 의 좌표와 그에 해당하는 확률을 정확히 계산하면 +8점 - 점 A_1 의 좌표를 정확히 계산하면 +3점 - 점 A_2 의 좌표를 정확히 계산하면 +3점 - 점 A_1 과 A_2 가 일어날 확률과 $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$ 일 확률을 정확히 계산하면 +2점 $m = 3, n = 2$ 인 경우 점 A_1 과 A_2 의 좌표와 그에 해당하는 확률을 정확히 계산하면 +8점 - 점 A_1 의 좌표를 정확히 계산하면 +3점 - 점 A_2 의 좌표를 정확히 계산하면 +3점 - 점 A_1 과 A_2 가 일어날 확률과 $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2$ 일 확률을 정확히 계산하면 +2점 두 점 사이의 거리를 정확히 계산하고 $ x_1 $ 와 정확히 비교해서 정답을 찾아내면 +4점	20

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

2교시 · 문제 2

[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

제시문

- 함수 $f(t)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (\text{단, } a < x < b)$$

- 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하고 $x = a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$ 이다.
- 함수 $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 미분가능할 때, 그 구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가하고, $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다.
- 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x, y)$ 의 시각 t 에서의 위치가 함수 $x = f(t), y = g(t)$ 로 나타내어질 때, $t = a$ 에서 $t = b$ 까지 점 P 가 움직인 거리는 $s = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$ 이다.
- 미분가능한 함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a) = \alpha, g(b) = \beta$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 α 와 β 를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

2-1 닫힌구간 $[-1, 5]$ 에서 함수

$$f(x) = \int_{-1}^x (t^2 + 5) \left\{ 1 - 2 \sin \left(\frac{\pi t}{t^2 + 5} \right) \right\} dt$$

의 최댓값을 구하시오. [10점]

2-2 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 좌표 (x, y) 가

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t, \quad y = \sqrt{3} \ln \left(1 + \frac{\sin^2 t}{8} \right)$$

일 때, 시각 $t = 0$ 에서 $t = \pi$ 까지 점 P 가 움직인 거리를 구하시오. [15점]

■ 예시 답안

[문제 2-1]

$f'(x) = (x^2 + 5) \left\{ 1 - 2 \sin \left(\frac{\pi x}{x^2 + 5} \right) \right\}$ 이므로 $f(x)$ 는 $\frac{\pi x}{x^2 + 5} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{\pi x}{x^2 + 5} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ 일 때, 극값을 가질 수 있다. 하지만 $f'(0) \neq 0$ 이고, $x \neq 0$ 일 때 $\left| \frac{\pi x}{x^2 + 5} \right| = \frac{\pi}{|x| + \frac{5}{|x|}} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{5}} < \frac{\pi}{4}$ 이므로, $\frac{\pi x}{5 + x^2} = \frac{\pi}{6}$ 인 경우, 즉 $x = 1, 5$ 일 때 극값을 가진다.

도함수 $f'(x)$ 의 부호를 조사하기 위해, $g(x) = 1 - 2 \sin \left(\frac{\pi x}{x^2 + 5} \right)$ 라 정의하고 이 함수의 도함수 $g'(x) = 2 \cos \left(\frac{\pi x}{x^2 + 5} \right) \frac{\pi(x^2 - 5)}{(x^2 + 5)^2}$ 를 구한다. 이로부터 $g(x)$ 가 구간 $(-1, \sqrt{5})$ 에서 감소하고, 구간 $(\sqrt{5}, 5)$ 에서는 증가한다는 것을 알 수 있다. 그런데 $g(1) = g(5) = 0$ 이므로, 구간 $(-1, 1)$ 에서 $g(x) > 0$ 이고 $f(x)$ 는 증가하며, 구간 $(1, 5)$ 에서는 $g(x) < 0$ 이고 $f(x)$ 는 감소한다. 따라서 $x = 1$ 일 때 $f(x)$ 는 최댓값을 가진다. 마지막으로 $(x^2 + 5) \sin \left(\frac{\pi x}{x^2 + 5} \right)$ 의 그래프의 형태를 생각해 보면 정적분 $\int_{-1}^1 (x^2 + 5) \sin \left(\frac{\pi x}{x^2 + 5} \right) dx = 0$ 이라는 것을 알 수 있다. 따라서, 최댓값은 $f(1) = \int_{-1}^1 (t^2 + 5) dt = \frac{32}{3}$ 이다.

[문제 2-2]

x 와 y 를 t 에 대해 미분하여

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} &= \sqrt{\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3} \sin t \cos t}{8 + \sin^2 t} \right)^2} \\ &= \frac{\sin t}{\sqrt{3}(8 + \sin^2 t)} \sqrt{(8 + \sin^2 t)^2 + 36 \cos^2 t} = \frac{\sin t(10 - \sin^2 t)}{\sqrt{3}(8 + \sin^2 t)} \end{aligned}$$

를 구한다. 따라서 $u = \cos t$ 로 치환하여,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt &= \int_0^\pi \frac{\sin t(9 + \cos^2 t)}{\sqrt{3}(9 - \cos^2 t)} dt = \int_{-1}^1 \frac{9 + u^2}{\sqrt{3}(9 - u^2)} du = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{9 + u^2}{9 - u^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \left(-1 + \frac{3}{3 - u} + \frac{3}{3 + u} \right) du = \frac{2}{\sqrt{3}} (-1 + 3 \ln 2) \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} \ln 2 \end{aligned}$$

를 구한다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 2-1	$x = 1, 5$ 일 때 $f'(x) = 0$ 인 것을 확인하면 +3점 $f(x)$ 의 증가, 감소 구간을 조사하여 $f(1)$ 이 최대라는 것을 보이면 +4점 $f(1) = \frac{32}{3}$ 를 구하면 +3점	10
문제 2-2	$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{\sin t(10 - \sin^2 t)}{\sqrt{3}(8 + \sin^2 t)}$ 를 구하면 +5점 $u = \cos t$ 로 치환하여, $\int_{-1}^1 \frac{9 + u^2}{\sqrt{3}(9 - u^2)} du$ 를 구하면 +5점 정적분을 $\frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 \left(-1 + \frac{3}{3-u} + \frac{3}{3+u}\right) du$ 형태로 정리한 후, 계산하여 정답 $\frac{2}{\sqrt{3}}(-1 + 3 \ln 2)$ 를 얻으면 +5점	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

2교시 · 문제 3

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하십시오.

제시문

- 좌표평면에서 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 이다.
- 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.
- 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하고 $x = a$ 에서 극값을 가지면 $f'(a) = 0$ 이다.

3-1 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이 $a_n = \int_0^{\ln(n+1)} (2e^{2x} - e^x)dx$ 일 때, 다음 식의 값을 구하십시오. [10점]

$$\sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + 1 \right) \frac{1}{a_k}$$

3-2 좌표평면 위의 세 점 $A(5, 0)$, $B(0, 5)$, $P(7 \cos \theta, 7 \sin \theta)$ 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m^2 의 값을 구하십시오. (단, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 이다.) [15점]

■ 예시 답안

[문제 3-1]

정적분하면 $a_n = \int_0^{\ln(n+1)} (2e^{2x} - e^x) dx = [e^{2x} - e^x]_0^{\ln(n+1)} = n(n+1)$ 이다.

$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ 이므로 주어진 식의 값은

$$\sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + 1\right) \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{9999}{10000} + \frac{99}{100} = \frac{19899}{10000}$$

이다.

[문제 3-2]

함수 $f(\theta)$ 를 $\overline{AP} + \overline{BP} = f(\theta) = \sqrt{74 - 70 \cos \theta} + \sqrt{74 - 70 \sin \theta}$ 라 하자.

$f'(\theta) = \frac{35 \sin \theta}{\sqrt{74 - 70 \cos \theta}} - \frac{35 \cos \theta}{\sqrt{74 - 70 \sin \theta}}$ 이므로 $f'(\theta) = 0$ 을 정리하면

$37(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - 35(\sin^3 \theta - \cos^3 \theta) = 0$ 이다. 정리하면

$(\sin \theta - \cos \theta)[37(\sin \theta + \cos \theta) - 35(1 + \sin \theta \cos \theta)] = 0$ 이다.

$\sin \theta - \cos \theta = 0$ 일 때, $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이고 $\sin \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

$37(\sin \theta + \cos \theta) = 35(1 + \sin \theta \cos \theta)$ 일 때, 제곱하고 $X = \sin \theta \cos \theta$ 로 써서 정리하면 $(25 \times 49)X^2 - 288X - 144 = (25X - 12)(49X + 12) = 0$ 이다. 범위가 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \theta \cos \theta = \frac{12}{25}$ 이다. $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ 와 연

립하여 근을 구하면 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ 를 만족하는 α 와 $\sin \beta = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$ 을 만족하는 β 가 있다.

$\theta = 0, \alpha, \frac{\pi}{4}, \beta, \frac{\pi}{2}$ 에서 $\{f(\theta)\}^2$ 값을 계산하자.

$$\{f(0)\}^2 = \left\{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 = 78 + 4\sqrt{74}, \{f(\alpha)\}^2 = \{f(\beta)\}^2 = 98,$$

$$\left\{f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 = 296 - 140\sqrt{2} \text{이다. 최솟값은 } 98 \text{이다.}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 3-1	$a_n = n(n+1)$ 를 구하면 +5점 $\frac{1}{a_k} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ 을 이용하여 식의 값 $\frac{19899}{10000}$ 을 구하면 +5점	10
문제 3-2	$f(\theta)$ 를 미분하여 $\sin \theta - \cos \theta = 0$, $37(\sin \theta + \cos \theta) = 35(1 + \sin \theta \cos \theta)$ 를 구하면 +7점 $\sin \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ 를 구하면 +6점 함수값을 비교하여 최솟값 $7\sqrt{2}$ 을 구하면 +2점	15

2교시 · 문제 4

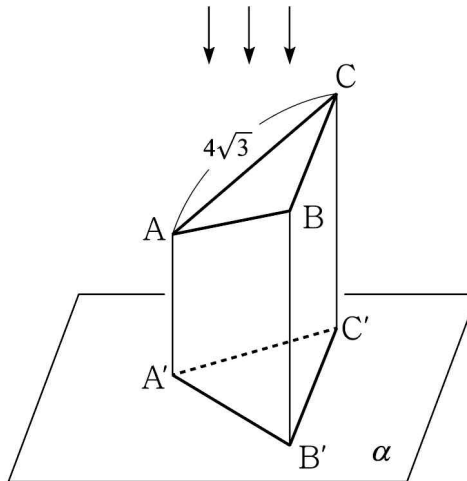
[문제 4] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

제시문

- 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은 $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ 이다.
- 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ 이고 $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ 이다.
- 평면 β 위에 있는 도형의 넓이를 S , 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S' 이라 할 때, 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ 라 하면 $S' = S \cos \theta$ 이다.

4-1 직선 $y = \sqrt{3}$ 위의 점 $P(k, \sqrt{3})$ 에서 타원 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 에 그은 두 접선이 이루는 예각이 45° 일 때, k^2 의 값을 구하시오. [15점]

4-2 넓이가 $6\sqrt{3}$ 이고 $\overline{AC} = 4\sqrt{3}$ 인 삼각형 ABC 가 평면 α 와 만나지 않게 놓여 있다. 평면 α 에 수직으로 입사하는 빛에 의한 삼각형 ABC 의 그림자가 평면 α 위에서 그림과 같이 정삼각형 $A'B'C'$ 을 이룬다. $\overline{AA'} + \overline{CC'} = 2\overline{BB'} = 10$ 일 때, 삼각형 ABC 의 내접원의 그림자의 넓이를 구하시오. [15점]



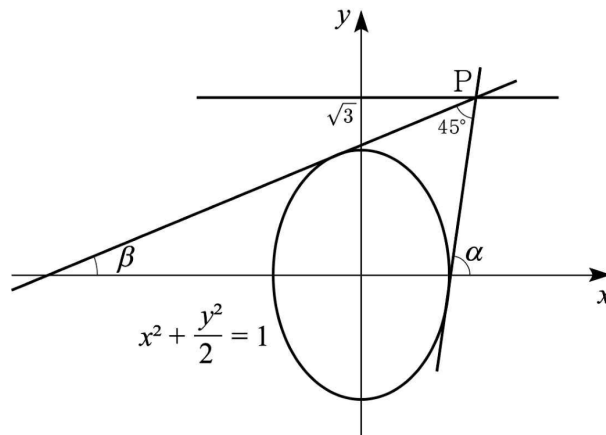
■ 예시 답안

[문제 4-1]

$k = \pm 1$ 인 경우, 두 접선이 이루는 각이 45° 가 아님을 쉽게 알 수 있다. 따라서 $k \neq \pm 1$ 이라 가정할 수 있다. 접선을 $y = mx \pm \sqrt{m^2 + 2}$ 라 놓자. 접선이 점 $P(k, \sqrt{3})$ 을 지나므로 대입하여 정리하여 m 에 대한 이차방정식 $(k^2 - 1)m^2 - 2\sqrt{3}km + 1 = 0$ 을 얻는다. 아래 그림과 같이 두 접선이 x 축과 이루는 각을 α, β ($\alpha > \beta$)라 하면 $\tan \alpha, \tan \beta$ 는 이 이차방정식의 두 근이고, 근과 계수의 관계에 의하여 $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{2\sqrt{3}k}{k^2 - 1}$ 과 $\tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{k^2 - 1}$ 이다. $\alpha - \beta = 45^\circ$ 이므로

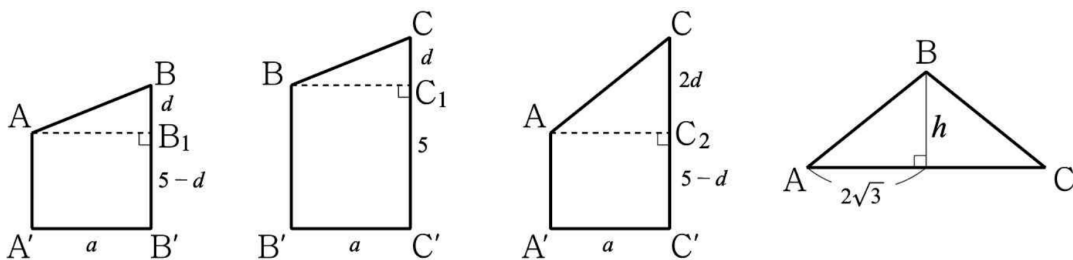
$$\begin{aligned} 1 &= \tan^2(\alpha - \beta) = \left(\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right)^2 \\ &= \frac{(\tan \alpha + \tan \beta)^2 - 4 \tan \alpha \tan \beta}{(1 + \tan \alpha \tan \beta)^2} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{3}k}{k^2 - 1} \right)^2 - \frac{4}{k^2 - 1}}{\left(1 + \frac{1}{k^2 - 1} \right)^2} \end{aligned}$$

정리하여 방정식 $(k^2)^2 - 8k^2 - 4 = 0$ 을 얻는다. $k^2 > 0$ 이므로 $k^2 = 4 + 2\sqrt{5}$



[문제 4-2]

$\overline{AA'} = 5 - d$, $\overline{BB'} = 5$, $\overline{CC'} = 5 + d$ 라 하고, 정삼각형 $A'B'C'$ 의 한 변의 길이를 a 라 하자. 아래 그림과 같이 점 B_1, C_1, C_2 를 선분 BB' 또는 CC' 위에서 잡자.



직각삼각형 AB_1B, BC_1C 에서 $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{a^2 + d^2}$ 이므로 삼각형 ABC 는 이등변삼각형이다. 위 그림과 같이 점 B 와 선분 AC 사이의 거리를 h 라 하면 삼각형 ABC 의 넓이가 $6\sqrt{3}$ 이므로 $h = 3$ 이고 $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{21}$ 이다. 직각삼각형 AB_1B 와 AC_2C 에서 $a^2 + d^2 = 21$, $a^2 + 4d^2 = 48$ 이므로 $a = 2\sqrt{3}$ ($d = \pm 3$)을 얻는다. 따라서 삼각형 $A'B'C'$ 의 넓이는 $3\sqrt{3}$ 이고, 평면 ABC 와 평면 α 가 이루는 각을 θ 라 하면 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 이다. 삼각형 ABC 의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하고 삼각형 ABC 의 넓이를 S 라 하면 $\frac{1}{2}(4\sqrt{3} + 2\sqrt{21})r = S = 6\sqrt{3}$ 이므로 $r = 2(\sqrt{7} - 2)$ 을 얻는다. 삼각형 ABC 의 내접원의 그림자의 넓이는

$$\pi r^2 \cos \theta = \frac{1}{2} \pi r^2 = 2(11 - 4\sqrt{7})\pi \text{ 이다.}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
문제 4-1	접선을 $y = mx \pm \sqrt{m^2 + 2}$라 놓고, $(k^2 - 1)m^2 - 2\sqrt{3}km + 1 = 0$를 얻으면 +5점 두 접선이 x축과 이루는 각을 α, β라 놓고, $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{2\sqrt{3}k}{k^2 - 1}$과 $\tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{k^2 - 1}$을 얻으면 +5점 $k^2 = 4 + 2\sqrt{5}$를 구하면 +5점	15
문제 4-2	$\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{21}$를 구하면 +5점 삼각형 $A'B'C'$의 넓이 $3\sqrt{3}$을 구하면 +5점 그림자의 넓이 $2(11 - 4\sqrt{7})\pi$를 구하면 +5점 (그림자의 넓이를 $\frac{18\pi}{11 + 4\sqrt{7}}$로 구해도 +5점)	15

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 ± 1 점을 부여할 수 있습니다.

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다