

한국외대논술

자연계

목차

2026학년도 자연계열 논술고사 (일요일 T4, 수학 I · 수학 II, 90분)	3
문항 1	3
문항 2	5
문항 3	7
문항 4	9
문항 5	11
문항 6	13
문항 7	15
 2025학년도 자연계열 논술고사 (일요일 T4, 수학 I · 수학 II, 90분)	 17
문항 1	17
문항 2	20
문항 3	22
문항 4	24
문항 5	26
문항 6	28
문항 7	30
 2024학년도 자연계열 논술고사 (T4, 수학 I · 수학 II, 90분)	 32
문항 1	32
문항 2	34
문항 3	36
문항 4	38
문항 5	41
문항 6	44
문항 7	47

2026학년도

자연계열 논술고사 (일요일 T4, 수학 I · 수학 II, 90분)

문항 1

[문제 1] 함수 $y = \log_2(x + a) + b$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만난다. 이 두 점의 x 좌표가 각각 $-1, 1$ 일 때, 함수 $y = \log_2(x + a) + b$ 의 그래프가 직선 $y = 3$ 과 만나는 점의 x 좌표를 구하시오. (단, a, b 는 상수) (10점)

■ 예시 답안

(i) 함수 $y = \log_2(x + a) + b$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y = \log_2(x + a) + b$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다. (2점)

(ii) 따라서 방정식 $\log_2(x + a) + b = x$ 의 두 근이 $x = -1, 1$ 이므로 대입하면

$$\log_2(a - 1) + b = -1 \quad \text{-----} \quad (1)$$

$$\log_2(a + 1) + b = 1 \quad \text{-----} \quad (2)$$

이다. (1)과 (2)를 연립하면

$$\log_2(a + 1) - \log_2(a - 1) = 2 \quad \text{즉,} \quad \log_2 \frac{a + 1}{a - 1} = 2$$

이므로, $\frac{a + 1}{a - 1} = 4$ 이다. 따라서 $a = \frac{5}{3}$ 이다. (3점)

이때 $a = \frac{5}{3}$ 를 (2)에 대입하면 $\log_2 \frac{8}{3} + b = 1$ 이므로, $b = 1 - \log_2 \frac{8}{3} = \log_2 2 - \log_2 \frac{8}{3} = \log_2 \frac{3}{4}$ 이다.

따라서 주어진 함수는 $y = \log_2\left(x + \frac{5}{3}\right) + \log_2 \frac{3}{4} = \log_2\left(\frac{3x + 5}{4}\right)$ 이다. (2점)

(iii) 함수 $y = \log_2\left(\frac{3x + 5}{4}\right)$ 의 그래프와 직선 $y = 3$ 이 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $\log_2\left(\frac{3x + 5}{4}\right) = 3$ 의 근이다.

이 방정식을 풀면, $\frac{3x + 5}{4} = 8$ 이므로 $x = 9$ 이다. (3점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	함수 $y = \log_2(x + a) + b$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y = \log_2(x + a) + b$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다는 것을 파악한다.	2
전개	함수 $y = \log_2(x + a) + b$ 의 그래프에서 상수 a, b 의 값을 찾는다.	5
결론	함수 $y = \log_2\left(\frac{3x + 5}{4}\right)$ 의 그래프와 직선 $y = 3$ 이 만나는 점의 x 좌표를 찾는다.	3
채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.	
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.	
	3. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.	

문항 2

[문제 2] 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이다.
- (나) $f'(1) = f'(3) = 0$
- (다) 함수 $|f(x)|$ 가 $x = a$ 에서 미분 가능하지 않은 실수 a 의 개수는 3이다.

이때 $f(0)$ 이 정수가 되도록 하는 모든 $f(1)$ 의 값의 합을 구하시오. (12점)

■ 예시 답안

(i) 조건 (나)에 의해 상수 k 에 대하여

$$f'(x) = k(x-1)(x-3) = k(x^2 - 4x + 3) \quad \text{-----} \quad (1)$$

이다. (단, $k \neq 0$)

(1)에 의해 $f(x) = k\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right) + C$ (C 는 상수) 이고, 조건 (가)에 의해 $\frac{1}{3}k = 1$ 이므로 $k = 3$ 이다. 따라서

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + C \quad \text{-----} \quad (2)$$

이다. (5점)

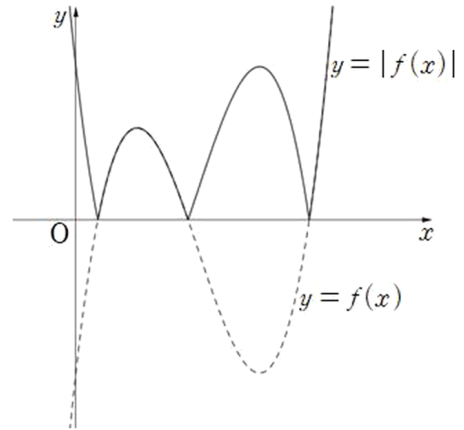
(ii) (2)와 조건 (나)에 의해 삼차함수 $f(x)$ 는

$x = 1$ 에서 극댓값 $f(1) = 4 + C$, $x = 3$ 에서 극솟값 $f(3) = C$ 를 가진다.

조건 (다)에 의해 극댓값 $f(1) = 4 + C > 0$, 극솟값 $f(3) = C < 0$ 이어야 한다. 즉,

$$-4 < C < 0 \quad \text{-----} \quad (3)$$

이다. (4점)



(iii) $f(0) = C$ 가 정수이므로, (3)을 만족시키는 상수 C 의 값은 $-1, -2, -3$ 이 된다.

따라서 $f(1) = 4 + C$ 의 값은 $1, 2, 3$ 이고, 이들의 합은 6이다. (3점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	조건 (나)에 의해 $f'(x)$ 를 $f'(x) = k(x-1)(x-3)$ 으로 나타내고, 조건 (가)에 의해 $f(x)$ 가 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + C$ (C 는 상수)임을 유도한다.	5
전개	조건 (나)와 (다)에 의해 $-4 < C < 0$ 임을 설명한다.	4
결론	$f(0)$ 이 정수가 되도록 하는 C 의 값을 찾고 모든 $f(1)$ 의 값의 합을 구한다.	3
채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.	
	2. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그리지 않아도 된다.	
	3. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.	
	4. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.	

문항 3

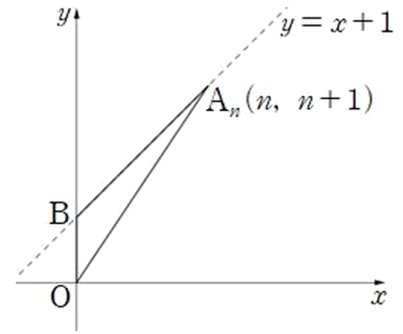
[문제 3] 자연수 n 에 대하여 세 점 $A_n(n, n+1)$, $B(0, 1)$, $O(0, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OA_nB 의 외접원의 넓이를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. (13점)

■ 예시 답안

(i) 모든 자연수 n 에 대하여 점 A_n 과 점 B 는 직선 $y = x + 1$ 위에 있으므로, $\angle OBA_n = \frac{3}{4}\pi$ 이다. 또한 $\overline{OA_n} = \sqrt{n^2 + (n+1)^2}$ 이다. (4점)

(ii) 사인법칙에 의해 삼각형 OA_nB 의 외접원의 반지름의 길이 R 은

$$R = \frac{\overline{OA_n}}{2 \sin B} = \frac{\sqrt{n^2 + (n+1)^2}}{2 \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)} = \sqrt{n^2 + n + \frac{1}{2}} \quad \text{----- (1)}$$



이다. 따라서 (1)에 의해 삼각형 OA_nB 의 외접원의 넓이는 $a_n = \pi R^2 = \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right)\pi$ 이다. (5점)

(iii) 그러므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right)\pi = \pi \left(\sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=1}^{10} n + \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2} \right) \\ &= \left\{ \frac{10(10+1)(2 \times 10 + 1)}{6} + \frac{10(10+1)}{2} + 5 \right\} \pi = (385 + 55 + 5)\pi = 445\pi \end{aligned}$$

이다. (4점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	모든 자연수 n 에 대하여 삼각형 OA_nB 에서 $\angle OBA_n = \frac{3}{4}\pi$ 임을 설명한다.	4
전개	사인법칙에 의해 삼각형 OA_nB 의 외접원의 반지름과 넓이 a_n 을 구한다.	5
결론	$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구한다.	4

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
	2. 삼각형 OA_nB 의 그림은 그리지 않아도 된다.
	3. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
	4. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항 4

[문제 4] n 이 2 이상의 정수일 때, $(\log_a n - 1)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 이때 $\sum_{n=2}^9 n f(n) = 56$ 을 만족시키는 실수 a 의 값을 구하시오. (단, $a > 1$) (14점)

■ 예시 답안

n 이 홀수인지, 짝수인지에 따라 실수 $(\log_a n - 1)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수 $f(n)$ 을 구해보자.

(i) n 이 홀수인 경우, $f(n) = 1$ 이다. (3점)

(ii) n 이 짝수인 경우,

$$\log_a n - 1 < 0 \quad \text{즉, } n < a \quad \text{일 때, } f(n) = 0$$

$$\log_a n - 1 = 0 \quad \text{즉, } n = a \quad \text{일 때, } f(n) = 1$$

$$\log_a n - 1 > 0 \quad \text{즉, } n > a \quad \text{일 때, } f(n) = 2$$

이다. (4점)

(iii) (i)에 의해 $\sum_{n=2}^9 n f(n)$ 에서 n 이 홀수일 때 합은

$$3f(3) + 5f(5) + 7f(7) + 9f(9) = 3 + 5 + 7 + 9 = 24$$

이고, $\sum_{n=2}^9 n f(n) = 56$ 이어야 하므로 n 이 짝수일 때 합은

$$2f(2) + 4f(4) + 6f(6) + 8f(8) = 32 \quad \text{-----} \quad (1)$$

가 된다. 따라서 (ii)에 의해 (1)을 만족시키는 경우는 $f(2) = 0, f(4) = 1, f(6) = f(8) = 2$ 이다. (5점)

(iv) 그러므로 (ii)에 의해 $a = 4$ 이다. (2점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	n 이 홀수인지, 짝수인지에 따라 $f(n)$ 을 구한다.	7
전개	$\sum_{n=2}^9 n f(n) = 56$ 으로부터 n 이 짝수일 때 합과 $f(n)$ 의 값을 구한다.	5
결론	$f(4) = 1$ 로부터 a 의 값을 찾는다.	2
채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.	
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.	
	3. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.	

문항 5

다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 극한값 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$ 가 존재하고, 그 값은 양수이다.

(나) 극한값 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$ 가 존재하고, 그 값은 양수이다.

(다) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{x^4} = 1$

방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 실근이 정수이고 모든 실근의 합이 4일 때, 모든 실근의 곱을 구하시오. (16점)

■ 예시 답안

(i) 조건 (가)에 의해 $f(-1) = 0$ 이고, 조건 (나)에 의해 $f(2) = 0$ 이다. 또한 조건 (다)에 의해 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 또는 -1 인 사차함수이다.

따라서 $f(x)$ 를

$$f(x) = (x+1)(x-2)Q(x) \quad \text{———— (1)}$$

라 두면 $Q(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 또는 -1 인 이차함수이다. (5점)

(ii) 조건 (가)에 의해 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-2)Q(x) = -3Q(-1) > 0$ 이고, 조건 (나)에 의해 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)Q(x) = 3Q(2) > 0$ 이므로,

$$Q(-1) < 0, \quad Q(2) > 0 \quad \text{———— (2)}$$

이다. (3점)

(iii) 방정식 $Q(x) = 0$ 은 (2)에 의해 서로 다른 두 실근 α, β ($\alpha < \beta$)를 가진다. (1)에 의해 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근은 $-1, 2, \alpha, \beta$ 이고, 모든 실근의 합이 4이므로

$$\alpha + \beta = 3 \quad (\text{단, } \alpha, \beta \text{는 정수}) \quad \text{———— (3)}$$

이어야 한다. (3점)

(iv) 이차함수 $Q(x)$ 의 최고차항의 계수가 1 또는 -1 인지에 따라 (2)와 (3)을 만족하는 α, β 를 구해보자.

$Q(x)$ 의 최고차항의 계수가 1인 경우, (2)에 의해 $\alpha < -1 < \beta < 2$ 이고, 이때 (3)을 만족하는 정수 α, β 는 존재하지 않는다.

$Q(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1 인 경우, (2)에 의해 $-1 < \alpha < 2 < \beta$ 이고, 이때 (3)을 만족하는 정수 α, β 는 $\alpha = 0, \beta = 3$ 이다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 실근은 $-1, 0, 2, 3$ 이고, 이들의 곱은 0이다. (5점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	조건 (가), (나), (다)에 의해 $f(x)$ 를 $f(x) = (x+1)(x-2)Q(x)$ 로 나타낸다.	5
전개	조건 (가), (나)에 의해 $Q(-1) < 0, Q(2) > 0$ 임을 설명한다.	3
결론	조건을 모두 만족시키는 α, β 의 값을 찾는다.	8

채점 유의사항

- 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
- 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
- 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항 6

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $T_n = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|$ 이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{T_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 30이고 공차는 정수이다.

(나) $T_{10} = T_{11}$

이때 $T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오. (17점)

■ 예시 답안

(i) 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 할 때, 조건 (가)에 의해

$$a_n = 30 + (n-1)d \quad \text{———— (1)}$$

이다. 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 이라 할 때,

$$S_n = \frac{n\{60 + (n-1)d\}}{2} \quad \text{———— (2)}$$

이고, $T_n = |S_n|$ 이다. (3점)

(ii) 조건 (나)에서 $|S_{10}| = |S_{11}| = |S_{10} + a_{11}|$ 이므로,

$$|S_{10} + a_{11}| = |S_{10}| \quad \text{———— (3)}$$

이다. (3)에서

$S_{10} + a_{11} = S_{10}$ 인 경우, $a_{11} = 0$ 이다. 따라서 (1)에 의해

$$a_{11} = 30 + 10d = 0 \quad \text{즉, } d = -3 \text{이다.}$$

$S_{10} + a_{11} = -S_{10}$ 인 경우, $a_{11} = -2S_{10}$ 이다. 따라서 (1)과 (2)에 의해

$$-2S_{10} = -2 \times \frac{10(60 + 9d)}{2} = 30 + 10d = a_{11} \quad \text{즉, } d = -\frac{63}{10} \text{이다.}$$

조건 (가)에 의해 공차 d 는 정수이므로 $d = -3$ 이다. (6점)

(iii) $T_n = \left| \frac{n\{60 + (n-1)(-3)\}}{2} \right|$ 이고, $T_{n+1} = \left| \frac{(n+1)\{60 + n(-3)\}}{2} \right|$ 이므로,

부등식 $T_n > T_{n+1}$ 은

$$|n(21-n)| > |(n+1)(20-n)| \quad \text{———— (4)}$$

이다. (4)에서

$1 \leq n \leq 20$ 인 경우, $n(21-n) > (n+1)(20-n)$ 이다. 즉, $-n^2 + 21n > -n^2 + 19n + 20$ 이므로 $n > 10$ 이다. 따라서 (4)를 만족시키는 자연수 $n = 11, 12, \dots, 20$ 이다.

$n \geq 21$ 인 경우, $n(21-n) < (n+1)(20-n)$ 이다. 따라서 $n < 10$ 이므로 (4)를 만족시키는 자연수 n 이 존재하지 않는다. (6점)

그러므로, $T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 11, 최댓값은 20이고, 이들의 합은 31이다. (2점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	조건 (가)에 의해 a_n 과 T_n 을 구한다.	3
전개	등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차 d 의 값을 찾는다.	6
결론	$T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값을 찾는다.	8

채점 유의사항

- 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
- 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
- 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항 7

실수 t 에 대하여, $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - 2|x - t| + 1$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 이때 $\int_{-3}^2 g(t)dt$ 의 값을 구하시오. (18점)

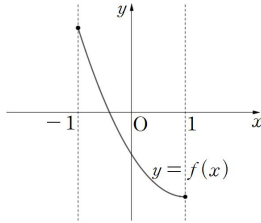
■ 예시 답안

(i) $f(x) = x^2 - 2|x - t| + 1$ 에서

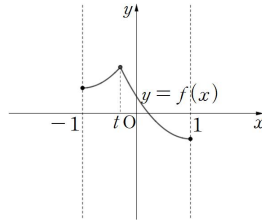
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2t + 1 = (x+1)^2 - 2t & (x < t) \\ x^2 - 2x + 2t + 1 = (x-1)^2 + 2t & (x \geq t) \end{cases} \quad \text{--- (1)}$$

이다. (4점)

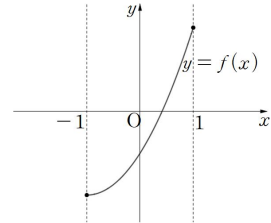
(ii) (1)에 의해 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 t 의 범위에 따라 다음과 같다.



$t \leq -1$ 인 경우



$-1 < t < 1$ 인 경우



$t \geq 1$ 인 경우

$t \leq -1$ 인 경우, $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) = (x-1)^2 + 2t$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최댓값을 가진다. 즉, $g(t) = f(-1) = 4 + 2t$ 이다.

$-1 < t < 1$ 인 경우, $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 2t & (-1 \leq x < t) \\ (x-1)^2 + 2t & (t \leq x \leq 1) \end{cases}$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = t$ 에서 최댓값을 가진다. 즉, $g(t) = f(t) = t^2 + 1$ 이다.

$t = 1$ 인 경우, $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 2 & (-1 \leq x < 1) \\ (x-1)^2 + 2 & (x = 1) \end{cases}$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최댓값을 가진다. 즉, $g(1) = f(1) = 2$ 이다.

$t > 1$ 인 경우, $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) = (x+1)^2 - 2t$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최댓값을 가진다. 즉, $g(t) = f(1) = 4 - 2t$ 이다.

따라서 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값 $g(t)$ 는

$$g(t) = \begin{cases} 4 + 2t & (t \leq -1) \\ t^2 + 1 & (-1 < t < 1) \\ 4 - 2t & (t \geq 1) \end{cases}$$

이다. (9점)

(iii) 그러므로, $\int_{-3}^2 g(t)dt = \int_{-3}^{-1} (4 + 2t)dt + \int_{-1}^1 (t^2 + 1)dt + \int_1^2 (4 - 2t)dt = \frac{11}{3}$ 이다. (5점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	$f(x)$ 를 $x < t$ 와 $x \geq t$ 에 따라 나타낸다.	4
전개	t 의 범위에 따라 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = f(x)$ 를 파악하고, $g(t)$ 를 구한다.	9
결론	$\int_{-3}^2 g(t)dt$ 의 값을 구한다.	5

채점 유의사항

- 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
- 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그리지 않아도 된다.
- 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
- 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

2025학년도 자연계열 논술고사 (일요일 T4, 수학 I · 수학 II, 90분)

문항 1

자연수 n 에 대한 다음의 명제가 모든 자연수 n 에 대하여 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오. (10점)

중심이 원점이고 반지름의 길이가 45^n 인 원 위에는 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점이 있다.

■ 예시 답안

문제에서 주어진 자연수 n 에 대한 명제를 $p(n)$ 이라고 하자.

(i) $n = 1$ 일 때

$$(45^n)^2 = 45^2 = 3^4 \times 5^2 = 3^4 \times (3^2 + 4^2) = (3^2 \times 3)^2 + (3^2 \times 4)^2 = 27^2 + 36^2$$

이므로 점 $(27, 36)$ 은 원 $x^2 + y^2 = 45^2$ 위의 점이다. 따라서 명제 $p(n)$ 은 $n = 1$ 일 때 성립한다. (3점)

(ii) $n = k$ ($k \geq 1$)일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면

$$(45^k)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{----- (1)}$$

을 만족시키는 두 자연수 a 와 b 가 존재한다. (2점)

$n = k + 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} (45^{k+1})^2 &= (45^k)^2 \times 45^2 \\ &= (a^2 + b^2) \times 45^2 \quad ((1)\text{에 의해}) \\ &= (45a)^2 + (45b)^2 \end{aligned}$$

이 성립하므로 $(45a, 45b)$ 는 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 원 $x^2 + y^2 = (45^{k+1})^2$ 위의 점이 된다. 따라서 명제 $p(n)$ 은 $n = k + 1$ 일 때도 성립한다. (5점)

그러므로 (i)과 (ii)에 의해 명제 $p(n)$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

[별해]

문제에서 주어진 자연수 n 에 대한 명제를 $p(n)$ 이라고 하자.

(i) $n = 1$ 일 때

$$(45^n)^2 = 45^2 = 3^4 \times 5^2 = 3^4 \times (3^2 + 4^2) = (3^2 \times 3)^2 + (3^2 \times 4)^2 = 27^2 + 36^2 \quad \text{----- (1)}$$

이므로 점 $(27, 36)$ 은 원 $x^2 + y^2 = 45^2$ 위의 점이다. 따라서 명제 $p(n)$ 은 $n = 1$ 일 때 성립한다. (3점)

(ii) $n = k$ ($k \geq 1$)일 때 명제 $p(n)$ 이 성립한다고 가정하면

$$(45^k)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{----- (2)}$$

을 만족시키는 두 자연수 a 와 b 가 존재한다. (2점)

$n = k + 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} (45^{k+1})^2 &= (45^k)^2 \times 45^2 \\ &= (a^2 + b^2) \times 45^2 \quad ((2)\text{에 의해}) \\ &= (a^2 + b^2) \times (27^2 + 36^2) \quad ((1)\text{에 의해}) \\ &= (27a)^2 + (27b)^2 + (36a)^2 + (36b)^2 \\ &= (27a + 36b)^2 + (36a - 27b)^2 \quad \text{----- (3)} \\ &= (-27a + 36b)^2 + (36a + 27b)^2 \quad \text{----- (4)} \end{aligned}$$

이다. 만약 $36a - 27b \neq 0$ 라면 (3)에 의해 c 와 d 를

$$c = 27a + 36b, \quad d = |36a - 27b|$$

라 하고, 만약 $36a - 27b = 0$ 이면 (4)에 의해 c 와 d 를

$$c = |-27a + 36b|, \quad d = 36a + 27b$$

라 하면 점 (c, d) 는 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 원 $x^2 + y^2 = (45^{k+1})^2$ 위의 점이 된다. 따라서 명제 $p(n)$ 은 $n = k + 1$ 일 때도 성립한다. (5점)

그러므로 (i)과 (ii)에 의해 명제 $p(n)$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	$n = 1$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립함을 보인다.	3
전개	$n = k$ 일 때 명제 $p(n)$ 이 성립함을 가정하고 $n = k + 1$ 일 때도 명제 $p(n)$ 이 성립함을 보인다.	7
결론	명제 $p(n)$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다고 결론을 내린다.	0
채점 유의 사항	1. 수학적 귀납법이 아닌 증명은 인정하지 않는다.	
	2. $n = 1$ 일 때 원 $x^2 + y^2 = 45^2$ 위의 점으로 $(36, 27)$ 을 제시해도 된다.	
	3. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.	

문항 2

함수

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & (x < 3) \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{5}\right)^{3+a} + 8 & (x \geq 3) \end{cases}$$

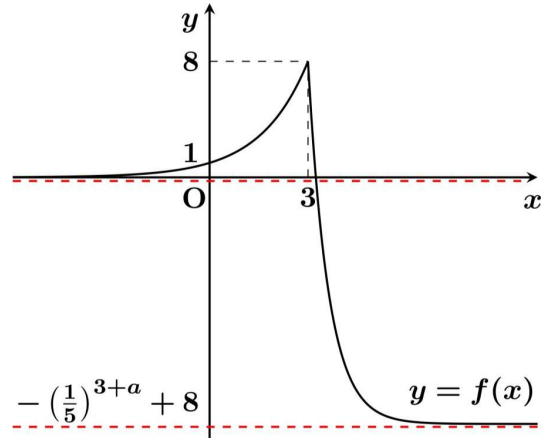
에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 정수인 점의 개수가 32일 때, 정수 a 의 값을 구하시오. (12점)

■ 예시 답안

함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x < 3$ 일 때 그래프의 점근선은 $y = 0$,

$x \geq 3$ 일 때 그래프의 점근선은 $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^{3+a} + 8$ 이다.



곡선 $y = f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 0 이상의 정수인 점은

(i) $x < 3$ 일 때 y 좌표가 각각 1, 2, 3, ..., 7인 점 7개

(ii) $x \geq 3$ 일 때 y 좌표가 각각 8, 7, 6, ..., 1, 0인 점 9개

이므로 개수는 $7 + 9 = 16$ 이다. (5점)

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 정수인 점의 개수는 32이므로

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 음의 정수인 점의 개수는 $32 - 16 = 16$ ----- (1)

이다. 앞에 주어진 함수 $f(x)$ 의 그래프를 참고하면 곡선

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{5}\right)^{3+a} + 8 = \left(\frac{1}{5}\right)^a \times \left(\frac{1}{5}\right)^x - \left\{ \left(\frac{1}{5}\right)^{3+a} - 8 \right\}$$

은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이고 점근선은 직선 $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^{3+a} + 8$ 이다. (1)에 의해

$$-17 \leq -\left(\frac{1}{5}\right)^{3+a} + 8 < -16 \quad \text{즉,} \quad 24 < 5^{-(3+a)} \leq 25 \quad \text{----- (2)}$$

가 된다. (5점)

지수함수 $y = 5^x$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이고 a 는 정수이므로 (2)에 의해

$$-(3+a) = 2 \quad \text{즉,} \quad a = -5$$

이다. (2점)

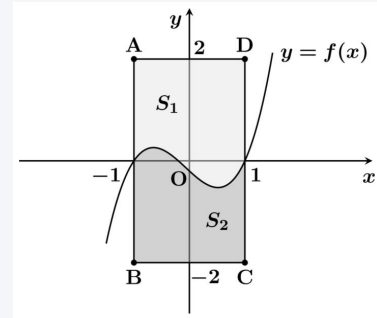
■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	곡선 $y = f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 0 이상의 정수인 점의 개수가 16임을 확인한다.	5
전개	곡선 $y = f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 음의 정수인 점의 개수가 16이 될 a 의 조건을 찾는다.	5
결론	a 의 값을 구한다.	2

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
	2. 함수 $f(x)$ 의 그래프는 그리지 않아도 된다.
	3. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
	4. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항 3

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점이 $A(-1, 2)$, $B(-1, -2)$, $C(1, -2)$, $D(1, 2)$ 인 직사각형의 네 변으로 둘러싸인 도형은 함수 $f(x) = (x+1)(x-a)(x-1)$ 의 그래프에 의해 두 부분으로 나뉘어진다. 나누어진 부분 중 위쪽과 아래쪽의 넓이를 각각 S_1 , S_2 라고 할 때 $S_1 : S_2 = 5 : 4$ 이다. 이때 상수 a 의 값을 구하시오. (단, $-1 < a < 0$) (13점)



■ 예시 답안

직사각형 ABCD의 네 변으로 둘러싸인 도형은 곡선 $y = f(x)$ 에 의해 두 부분으로 나누어지므로

$$S_1 + S_2 = \text{직사각형 ABCD의 넓이} = 8$$

이다. 게다가 $S_1 : S_2 = 5 : 4$ 이므로

$$S_1 = \frac{5}{5+4} \times 8 = \frac{40}{9} \quad \text{----- (1)}$$

이다. (4점)

한편 두 부분 중 위쪽 부분은 곡선 $y = f(x)$ 와 세 직선 $y = 2$, $x = -1$, $x = 1$ 로 둘러싸인 도형이므로

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^1 \{2 - f(x)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 \{2 - (x^3 - ax^2 - x + a)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 \{(-x^3 + x) + (ax^2 + 2 - a)\} dx \\ &= 2 \int_0^1 (ax^2 + 2 - a) dx \quad (\text{곡선 } y = -x^3 + x \text{와 } y = ax^2 + 2 - a \text{는 각각 원점과 } y\text{-축에 대칭이므로}) \\ &= 2 \left[\frac{a}{3} x^3 + (2 - a)x \right]_0^1 \\ &= 4 - \frac{4a}{3} \quad \text{----- (2)} \end{aligned}$$

이다. (7점)

따라서 (1)과 (2)에 의해

$$4 - \frac{4a}{3} = \frac{40}{9} \quad \text{즉, } a = -\frac{1}{3}$$

이다. (2점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	S_1 과 S_2 의 비를 이용하여 S_1 의 값을 찾는다.	4
전개	정적분을 이용하여 삼차함수의 곡선과 세 직선으로 둘러싸인 도형의 면적 S_1 을 구한다.	7
결론	두 가지 방법으로 구한 S_1 을 비교하여 a 의 값을 찾는다.	2
채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.	
	2. 그래프가 원점 또는 y -축 대칭인 함수에 관한 정적분의 성질을 사용하지 않아도 된다.	
	3. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.	
	4. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.	

문항 4

다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 상수 a 의 값을 구하시오. (단, $a > 0$) (14점)

(가) $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

(나) $f(a) = 0$

(다) 모든 실수 x 에 대하여 $(x - 2a)f(x) \geq 0$

(라) $f(x)$ 의 극솟값은 -500 이다.

■ 예시 답안

조건 (가)와 (나)에 의해

$$f(x) = (x - a)(x^2 + bx + c) \quad (b, c \text{는 상수}) \quad \text{----- (1)}$$

이다. (2점)

그러면 조건 (다)에 의해

$$\text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } (x - 2a)(x - a)(x^2 + bx + c) \geq 0 \quad \text{----- (2)}$$

이 성립하는데 사차함수 그래프의 개형으로부터

$$\text{방정식 } (x - 2a)(x - a)(x^2 + bx + c) = 0 \text{의 해는 } a \text{와 } 2a \text{뿐이다.} \quad \text{----- (3)}$$

(4점)

또한, $a < x < 2a$ 인 모든 x 에 대하여 $(x - a)(x - 2a) < 0$ 이므로 (2)와 (3)에 의해 $a < x < 2a$ 인 모든 x 에 대하여 $x^2 + bx + c < 0$ 이다. 따라서 이차함수 그래프의 개형으로부터

$$\text{방정식 } x^2 + bx + c = 0 \text{은 실수 전체의 집합에서 서로 다른 2개의 해를 갖는다.} \quad \text{---- (4)}$$

이제 (3)과 (4)에 의해 $x^2 + bx + c = (x - a)(x - 2a)$ 이고, (1)로부터

$$f(x) = (x - a)^2(x - 2a) = x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3$$

이다. (3점)

$f(x)$ 를 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 - 8ax + 5a^2 = (3x - 5a)(x - a)$$

이므로 삼차함수 그래프의 개형으로부터 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극댓값, $x = \frac{5a}{3}$ 에서 극솟값을 갖는다. 그러면 조건 (라)에 의해

$$f\left(\frac{5a}{3}\right) = -500 \quad \text{즉,} \quad -\frac{4a^3}{27} = -500$$

이 되고, $a = 15$ 이다. (5점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	조건 (가)와 (나)로부터 $f(x)$ 를 $f(x) = (x - a)(x^2 + bx + c)$ 로 나타낸다.	2
전개	조건 (다)에 의해 식 $f(x) = (x - a)^2(x - 2a)$ 을 도출한다.	7
결론	조건 (라)로부터 $f\left(\frac{5a}{3}\right) = -500$ 을 얻고 a 의 값을 찾는다.	5

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
	3. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항 5

함수 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 12x + 8 & (x < 0) \\ 2x^2 - 8x + 8 & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 n 의 값의 합을 구하시오.
(16점)

함수 $g(x) = \begin{cases} 2f(x) & (x < a) \\ 6n - f(x) & (x \geq a) \end{cases}$ 이 모든 실수 x 에서 연속이 되도록 하는 상수 a 의 개수는 4이다.

■ 예시 답안

먼저 함수 $f(x)$ 는 0이 아닌 모든 실수 x 에서 연속이다. 또한

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (3x^2 + 12x + 8) = 8, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (2x^2 - 8x + 8) = 8, \quad f(0) = 8$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서도 연속이다. (3점)

따라서 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $g(x)$ 는 a 가 아닌 모든 실수 x 에서 연속이다. 또한

$$\lim_{x \rightarrow a-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} 2f(x) = 2f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a+} \{6n - f(x)\} = 6n - f(a), \quad g(a) = 6n - f(a)$$

이므로 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이 되기 위한 상수 a 의 조건은

$$2f(a) = 6n - f(a) \quad \text{즉,} \quad f(a) = 2n$$

이다. 정리하면, 정수 n 이 문제의 조건을 만족시킨다는 것은

$$\text{곡선 } y = f(x) \text{와 직선 } y = 2n \text{이 만나는 점의 개수가 4} \quad \text{----- (1)}$$

인 것과 같다. (8점)

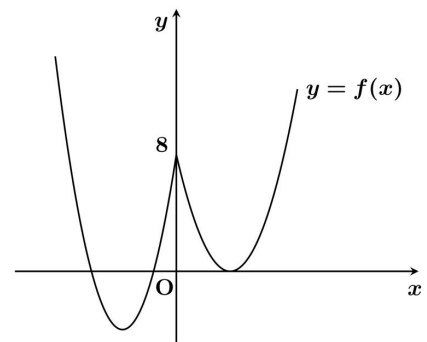
함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아서 정수 n 이 조건 (1)을 만족한다는 것은

$$0 < 2n < 8$$

이라는 것을 알 수 있다. 그러므로 문제의 조건을 만족하는 정수 n 은 1, 2, 3이고, 이러한 모든 정수 n 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 = 6$$

이다. (5점)



■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속임을 보인다.	3
전개	정수 n 이 문제의 조건을 만족시킨다는 것은 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 2n$ 이 만나는 점의 개수가 4라는 것임을 보인다.	8
결론	문제의 조건을 만족시키는 정수 n 을 모두 찾고 합을 구한다.	5
채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.	
	2. 도입단계에서 함수 $f(x)$ 의 그래프를 통해 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속임을 보여도 된다. 결론 단계에서 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그리지 않아도 된다.	
	3. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.	
	4. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.	

문항 6

세 자연수 a, b, c 에 대하여 함수 $f(x) = a \sin bx + c$ 가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $a \times b \times c$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오. (17점)

(가) $f(0) \leq 10$

(나) $0 < x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $f(x) = a^2$ 의 해의 개수는 5이다.

■ 예시 답안

함수 $f(x)$ 에 $x = 0$ 을 대입을 하면 $f(0) = c$ 이고, 조건 (가)는

$$c \leq 10 \quad \text{----- (1)}$$

가 된다. 또한, 조건 (나)는

$$0 < x < 2\pi \text{일 때 곡선 } y = f(x) \text{와 직선 } y = a^2 \text{이 만나는 점의 개수가 } 5 \quad \text{----- (2)}$$

가 된다. (2점)

함수 $f(x) = a \sin bx + c$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이고, 최댓값과 최솟값은 각각 $a + c$, $-a + c$ 이다. 만약 a^2 이 $a + c$, c , $-a + c$ 와 모두 다르다면 $0 < x < 2\pi$ 일 때 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = a^2$ 이 만나는 점의 개수는 0 또는 $2b$ 가 되고 조건 (2)는 성립하지 않게 된다. 따라서 조건 (2)가 성립한다는 것은

$$a^2 = a + c \text{이고 } b = 5 \quad \text{또는} \quad a^2 = c \text{이고 } b = 3 \quad \text{또는} \quad a^2 = -a + c \text{이고 } b = 5 \quad \text{----- (3)}$$

인 것과 같다. (6점)

이제 조건 (1)과 (3)을 만족시키는 a, b, c 를 모두 찾으면 다음과 같다.

$$\begin{cases} a = 2, b = 5, c = 2 \\ a = 3, b = 5, c = 6 \\ a = 1, b = 3, c = 1 \\ a = 2, b = 3, c = 4 \\ a = 3, b = 3, c = 9 \\ a = 1, b = 5, c = 2 \\ a = 2, b = 5, c = 6 \end{cases}$$

(7점)

그러므로 $a \times b \times c$ 의 최댓값과 최솟값은 각각 90, 3이다. (2점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	조건 (가)는 $c \leq 10$ 라는 것이고, 조건 (나)는 $0 < x < 2\pi$ 일 때 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = a^2$ 이 만나는 점의 개수가 5라는 것임을 확인한다.	2
전개	조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 세 자연수 a, b, c 를 모두 찾는다.	13
결론	$a \times b \times c$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 구한다.	2
채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.	
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.	
	3. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.	

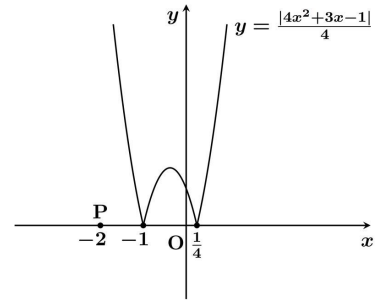
문항 7

점 $P(-2, 0)$ 을 지나는 직선 l 이 곡선 $y = \frac{|4x^2 + 3x - 1|}{4}$ 과 서로 다른 세 점에서 만날 때, 직선 l 과 곡선 $y = \frac{|4x^2 + 3x - 1|}{4}$ 이 만나는 모든 점의 x 좌표의 합을 구하시오. (18점)

■ 예시 답안

곡선 $y = \frac{|4x^2 + 3x - 1|}{4}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

직선 l 은 점 $P(-2, 0)$ 을 지나고 곡선 $y = \frac{|4x^2 + 3x - 1|}{4}$ 과 서로 다른 세 점에서 만나므로 직선 l 은 $-1 < x < \frac{1}{4}$ 일 때 곡선 $y = \frac{-(4x^2 + 3x - 1)}{4}$ 위의 한 점 Q 에서의 접선이 된다. 함수 $f(x) = \frac{-(4x^2 + 3x - 1)}{4}$ 이라 하고 점 Q 의 x 좌표를 c 라고 하면 $f'(x) = \frac{-(8x + 3)}{4}$ 이므로 직선 l 의 방정식은



$$y - \frac{-(4c^2 + 3c - 1)}{4} = \frac{-(8c + 3)}{4}(x - c) \quad \text{----- (1)}$$

이다. 또한 직선 l 은 점 $P(-2, 0)$ 을 지나므로

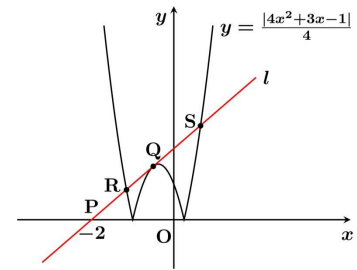
$$\frac{4c^2 + 3c - 1}{4} = \frac{-(8c + 3)}{4}(-2 - c)$$

가 성립하고 이를 풀면 $c = -\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{7}{2}$ 이다. 점 Q 의 위치에 의해 $-1 < c < \frac{1}{4}$ 이므로 $c = -\frac{1}{2}$ 이고 (1)로부터 직선 l 의 방정식은

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

이다. (10점)

오른쪽 그림과 같이 직선 l 과 곡선 $y = \frac{|4x^2 + 3x - 1|}{4}$ 이 만나는 점 중 Q 가 아닌 두 점을 R 과 S 라고 하면 두 점은 곡선 $y = \frac{4x^2 + 3x - 1}{4}$ 위에 있다. 두 점 R 과 S 의 x 좌표는



$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{4x^2 + 3x - 1}{4} \quad \text{즉, } 4x^2 + 2x - 3 = 0$$

의 두 근이고, 따라서 두 점 R 과 S 의 x 좌표의 합은 $-\frac{1}{2}$ 이다. (6점)

그러므로 직선 l 과 곡선 $y = \frac{|4x^2 + 3x - 1|}{4}$ 이 만나는 모든 점의 x 좌표의 합은

$$\text{점 } Q \text{의 } x \text{좌표} + (\text{점 } R \text{의 } x \text{좌표} + \text{점 } S \text{의 } x \text{좌표}) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

이다. (2점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	직선 l 의 방정식을 찾는다.	10
전개	한 점에서 접하는 직선 l 과 곡선 $y = \frac{ 4x^2 + 3x - 1 }{4}$ 이 추가로 만나는 두 점의 x 좌표의 합을 구한다.	6
결론	직선 l 과 곡선 $y = \frac{ 4x^2 + 3x - 1 }{4}$ 이 만나는 모든 점의 x 좌표의 합을 구한다.	2
채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.	
	2. 함수 $f(x)$ 의 그래프는 그리지 않아도 된다.	
	3. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.	
	4. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.	

2024학년도 자연계열 논술고사 (T4, 수학 I · 수학 II, 90분)

문항 1

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하자. 다음 조건이 모두 성립할 때, S_{20} 의 값을 구하시오. (10점)

(가) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2$

(나) $S_{2n+1} = S_{2n} + 3n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(다) $S_{2n+2} = S_{2n+1} + 2^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

■ 예시 답안

(i) 조건 (나)에 의해

$$a_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} = 3n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

이므로 수열 $a_3, a_5, a_7, \dots$ 은 첫째항이 $a_3 = 4$ 이고 공차가 3인 등차수열이다. (2점)

(ii) 조건 (다)에 의해

$$a_{2n+2} = S_{2n+2} - S_{2n+1} = 2^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

이므로 수열 $a_4, a_6, a_8, \dots$ 은 첫째항이 $a_4 = 2$ 이고 공비가 2인 등비수열이다. (2점)

(iii) 조건 (가)와 (i), (ii)를 이용해서 다음을 계산한다.

$$\begin{aligned} S_{20} &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} \\ &= a_1 + a_2 + \underbrace{(a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{19})}_{9\text{개항}} + \underbrace{(a_4 + a_6 + a_8 + \dots + a_{20})}_{9\text{개항}} \\ &= 1 + 2 + \frac{9(a_3 + a_{19})}{2} + \frac{a_4(2^9 - 1)}{2 - 1} \quad \left(\text{또는, } 1 + 2 + \sum_{n=1}^9 (3n + 1) + \sum_{n=1}^9 2^n \right) \\ &= 1 + 2 + \frac{9(4 + 28)}{2} + 2(2^9 - 1) \\ &= 1169 \end{aligned}$$

(6점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	조건 (나)와 (다)로부터 수열 $a_3, a_5, a_7, \dots$ 이 등차수열이고 수열 $a_4, a_6, a_8, \dots$ 이 등비수열임을 파악한다.	4
전개	$S_{20} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$ 을	6
결론	$S_{20} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_5 + a_7 + \dots + a_{19}) + (a_4 + a_6 + a_8 + \dots + a_{20})$ 으로 묶어주고, 등차수열과 등비수열의 합의 공식을 통해 S_{20} 의 값을 계산한다.	
채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.	
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.	
	3. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.	

문항 2

다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. (10점)

(가) 모든 실수 x 에 대해 $|f(x) - x^2| \leq 2$

(나) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{3x^2 - x - 2} = \frac{2}{5}$

■ 예시 답안

(i) 조건 (가)에 의해 부등식

$$x^2 - 2 \leq f(x) \leq x^2 + 2 \quad (x \text{는 실수})$$

가 성립하는데 모든 항을 x^2 (단, $x \neq 0$)으로 나누면

$$1 - \frac{2}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq 1 + \frac{2}{x^2}$$

가 된다. 여기서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ 이 성립한다. 따라서 다항함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \quad \text{-----} \quad (1)$$

이다. (3점)

(ii) 조건 (나)와 (1)에 의해

$$\frac{2}{5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{3x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{(3x + 2)(x - 1)}$$

이므로

$$f(x) = (x - 1)(x + c) \quad (c \text{는 상수}) \quad \text{-----} \quad (2)$$

이다. (3점)

다시 한번 조건 (나)와 (2)에 의해

$$\frac{2}{5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{3x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + c)}{(3x + 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + c}{3x + 2} = \frac{1 + c}{5}$$

이므로, $c = 1$ 임을 찾는다. 따라서 $f(x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ 이다. (3점)

(iii) 구하고자 하는 $f(2)$ 의 값은 $f(2) = 2^2 - 1 = 3$ 이다. (1점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	조건 (가)의 부등식을 변형하여 $1 - \frac{2}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq 1 + \frac{2}{x^2}$ 를 유도하고 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ 임을 설명한다. 이로부터 $f(x) = x^2 + ax + b$ 를 얻어낸다.	3
전개	조건 (나)를 이용하여 $f(x) = x^2 - 1$ 임을 보인다.	6
결론	$f(2)$ 의 값을 계산한다.	1
채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.	
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.	
	3. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.	

문항 3

다음 조건을 만족시키는 실수 t 의 개수를 구하시오. (14점)

(가) $-6 \leq t \leq 6$

(나) $\sin^2(t^2 - 1) + \sin(t^2 - 1) - 1 = 0$

■ 예시 답안

(i) 이차방정식 $x^2 + x - 1 = 0$ 의 근은 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ 이고 $-1 \leq \sin(t^2 - 1) \leq 1$ (t 는 실수)이므로, 실수 t 가 조건 (나)를 만족한다는 것은

$$\sin(t^2 - 1) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

뿐이다. (4점)

(ii) 함수 $y = \sin x$ 의 그래프의 개형을 고려해볼 때 다음 두 조건을 만족하는 실수 α 는 유일하게 존재한다.

$$\sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

또한, 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 $\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 를 만족하는 실수 x 는 열린구간 $(0, \pi)$ 에 속하는 α 와 $\pi - \alpha$ 둘 뿐이다.

따라서 $\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 가 되는 실수 x 는

$$\alpha + 2n\pi, \quad (\pi - \alpha) + 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

이다. (4점)

(iii) 과정 (i)과 (ii)에 의해 조건 (가)와 (나)를 만족시키는 실수 t 의 개수는 함수 $y = x^2 - 1$ ($-6 \leq x \leq 6$)의 그래프와 직선들

$$y = \alpha + 2n\pi, \quad y = (\pi - \alpha) + 2n\pi \quad (n \text{은 정수}) \quad \text{-----} \quad (1)$$

의 교점의 개수이다. (2점)

함수 $y = x^2 - 1$ ($-6 \leq x \leq 6$)의 그래프는 y 축 대칭이고, 함수의 최솟값과 최댓값인 -1 과 35 는 다음을 만족한다.

$$-\pi < -1, \quad 11\pi < 35 < 12\pi$$

따라서 (1)에서 주어진 직선들 중 함수 $y = x^2 - 1$ ($-6 \leq x \leq 6$)의 그래프와 교점을 가지는 것은

$$y = \alpha + 2n\pi, \quad y = (\pi - \alpha) + 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

총 $2 \times 6 = 12$ 개이고, 각각 두 개씩 교점을 갖는다. 그러므로 조건 (가)와 (나)를 만족시키는 실수 t 는 총 $12 \times 2 = 24$ 개이다. (4점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	실수 t 가 조건 (나)를 만족시킬 조건은 $\sin(t^2 - 1) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 임을 설명한다.	4
전개	$\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 를 만족하는 모든 실수 x 를 나타내는 일반적인 표현을 찾는다.	4
결론	$-6 \leq t \leq 6$ 범위에서 $\sin(t^2 - 1) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 를 만족하는 실수 t 의 개수를 구한다.	6
채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.	
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.	
	3. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.	

문항 4

삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최솟값을 구하시오.
(14점)

(가) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 12이다.

(나) $f(0) = f(2) = 0$

(다) $x < 0$ 이면 $f(x) < 0$

(라) $x > 2$ 이면 $f(x) > 0$

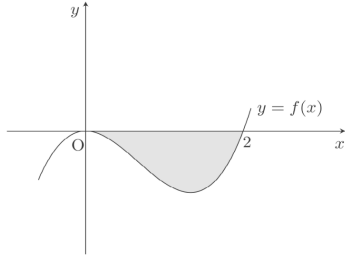
■ 예시 답안

(i) 조건 (가)와 (나)에 의해 삼차함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

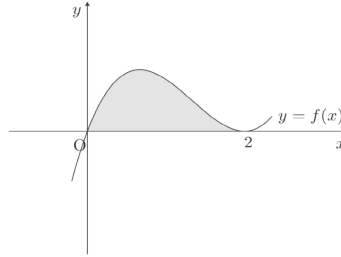
$$f(x) = 12x(x-2)(x-\alpha) = 12\{x^3 - (2+\alpha)x^2 + 2\alpha x\} \quad (\text{단, } \alpha \text{는 상수})$$

게다가 조건 (다)와 (라)에 의해 $0 \leq \alpha \leq 2$ 임을 알 수 있다. (2점)

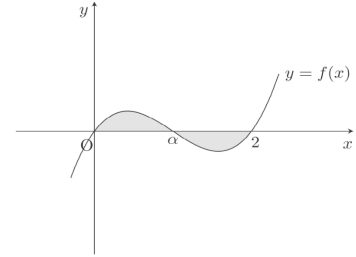
함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 아래와 같다.



$\alpha = 0$ 일 때



$\alpha = 2$ 일 때



$0 < \alpha < 2$ 일 때

(ii) 함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라고 하자. $\alpha = 0$ 인 경우

$$S = -\int_0^2 f(x)dx = -\int_0^2 12(x^3 - 2x^2)dx = -[3x^4 - 8x^3]_0^2 = 16$$

이고, $\alpha = 2$ 인 경우

$$S = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 12(x^3 - 4x^2 + 4x)dx = [3x^4 - 16x^3 + 24x^2]_0^2 = 16$$

이다. (2점)

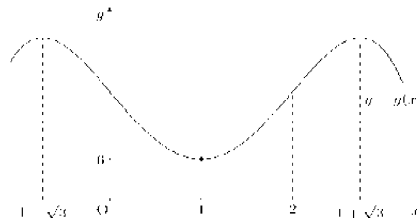
$0 < \alpha < 2$ 인 경우

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\alpha f(x)dx - \int_\alpha^2 f(x)dx \\ &= \int_0^\alpha 12\{x^3 - (2+\alpha)x^2 + 2\alpha x\}dx - \int_\alpha^2 12\{x^3 - (2+\alpha)x^2 + 2\alpha x\}dx \\ &= [3x^4 - 4(2+\alpha)x^3 + 12\alpha x^2]_0^\alpha - [3x^4 - 4(2+\alpha)x^3 + 12\alpha x^2]_\alpha^2 \\ &= -2\alpha^4 + 8\alpha^3 - 16\alpha + 16 \end{aligned}$$

이다. (4점)

(iii) 함수 $g(x) = -2x^4 + 8x^3 - 16x + 16$ 을 미분하면

$$g'(x) = -8x^3 + 24x^2 - 16 = -8(x-1)(x^2 - 2x - 2)$$



이므로 $g'(x) = 0$ 을 만족하는 x 는 $x = 1, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$ 이다. 따라서 사차함수 $g(x)$ 는 총 세 개의 극값을 갖는다. 또한 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 그래프의 개형을 고려해 볼 때 $0 < x < 2$ 의 범위에서 $g(x)$ 의 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $g(1) = 6$ 이다. (5점)

(iv) 따라서 $0 < \alpha < 2$ 인 경우 S 는 $\alpha = 1$ 일 때 최솟값 6을 가지게 되고, 과정 (ii)에 의해 $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최솟값은 6이다. (1점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	주어진 조건을 통해 $f(x) = 12x(x-2)(x-\alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq 2$)임을 파악한다.	2
전개	$\alpha = 0$, $\alpha = 2$, $0 < \alpha < 2$ 인 경우로 나눠서 정적분을 통해 함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구한다. 특히 $0 < \alpha < 2$ 인 경우 α 에 대한 사차함수로 표현되는 S 의 최솟값을 구한다.	11
결론	S 의 최솟값은 6이라고 결론 내린다.	1
채점 유의 사항	1. 그래프는 그리지 않아도 된다.	
	2. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.	
	3. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.	

문항 5

1보다 큰 두 자연수 x 와 y 가 다음 조건을 만족시킨다. (16점)

(가) $3(\log_x y - \log_y x^2)$ 의 값은 자연수이다.

(나) 0 또는 1의 값을 가지는 어떤 100개의 수 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ 에 대해

$$\log_x y = 2 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_{100}}{2^{100}}$$

(다) 0 또는 1의 값을 가지는 어떤 100개의 수 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{100}$ 에 대해

$$\log_y x = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \dots + \frac{b_{100}}{2^{100}}$$

이때, $\sum_{n=1}^{100} (a_n + b_n)$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

(i) $t = \log_x y$ 라고 하면 $\log_y x = \frac{1}{\log_x y} = \frac{1}{t}$ 이므로 조건 (가)에 의해 $3\left(t - \frac{2}{t}\right)$ 는 자연수이다. (2점)

조건 (나)에서 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ 은 0 또는 1이므로 부등식

$$2 \leq t \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{100}} = 2 + \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{100}} < 3$$

을 찾는다. $2 \leq t < 3$ 이므로 $\frac{1}{3} < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2}$ 이고 $-1 \leq -\frac{2}{t} < -\frac{2}{3}$ 이다. 따라서 $1 \leq t - \frac{2}{t} < \frac{7}{3}$ 이고

$$3 \leq 3\left(t - \frac{2}{t}\right) < 7$$

을 얻는다. 이때 $3\left(t - \frac{2}{t}\right)$ 는 자연수이므로 될 수 있는 값은

$$3\left(t - \frac{2}{t}\right) = 3, 4, 5, 6 \quad \text{-----} \quad (1)$$

이다. (5점)

(ii) 조건 (나)에 의해 t 가 유리수임을 주목한다. (1점)

$k = 3\left(t - \frac{2}{t}\right)$ 라고 하면 $3t^2 - kt - 6 = 0$ 인데, t 는 양수이므로 $t = \frac{k + \sqrt{k^2 + 72}}{6}$ 이다. (1)에 의해 k 는 3, 4, 5, 6이 될 수 있고 각각의 경우 $\frac{k + \sqrt{k^2 + 72}}{6}$ 을 계산하면 차례대로

$$\frac{3 + \sqrt{81}}{6}, \quad \frac{4 + \sqrt{88}}{6}, \quad \frac{5 + \sqrt{97}}{6}, \quad \frac{6 + \sqrt{108}}{6}$$

이다. 이 값이 유리수가 되는 경우는 $k = 3$ 일 때이다. 따라서

$$t = \frac{3 + \sqrt{81}}{6} = 2 \quad \text{-----} \quad (2)$$

이다. (5점)

(iii) 조건 (나)와 (2)로부터 $2 = 2 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_{100}}{2^{100}}$ 이 성립하는데, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ 은 0 또는 1이므로

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{100} = 0 \quad \text{-----} \quad (3)$$

을 찾는다. 또한 조건 (다)와 (2)로부터 $\frac{1}{2} = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \dots + \frac{b_{100}}{2^{100}}$ 이 성립하는데, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{100}$ 은 0 또는 1이므로

$$b_1 = 1, \quad b_2 = b_3 = \dots = b_{100} = 0 \quad \text{-----} \quad (4)$$

을 찾는다. (2점)

따라서 (3)과 (4)로부터 $\sum_{n=1}^{100} (a_n + b_n) = 1$ 이다. (1점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	$t = \log_x y$ 라고 할 때, 조건 (가)와 (나)로부터 $3\left(t - \frac{2}{t}\right)$ 가 될 수 있는 값이 3, 4, 5, 6임을 보인다.	7
전개	조건 (나)로부터 t 가 유리수임을 주목하고, 이차방정식 계산을 통해 $t = 2$ 임을 보인다.	6
결론	조건 (나)와 (다)로부터 $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{100} = 0$ 이고 $b_1 = 1, b_2 = b_3 = \dots = b_{100} = 0$ 임을 유도하여 $\sum_{n=1}^{100} (a_n + b_n)$ 을 계산한다.	3

채점 유의 사항	1. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
	2. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.
	3. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항 6

임의의 함수 $f(x)$ 에 대해 실수 $\langle f(x) \rangle$ 를 다음과 같이 정의하자. (16점)

$$\langle f(x) \rangle = \begin{cases} -1 & (f(x) \text{가 } x=0 \text{에서 불연속일 때}) \\ 0 & (f(x) \text{가 } x=0 \text{에서 연속이지만 미분가능하지 않을 때}) \\ 1 & (f(x) \text{가 } x=0 \text{에서 미분가능할 때}) \end{cases}$$

각각의 자연수 n 에 대해 함수 $f_n(x)$ 를

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n(1+|x|)}{|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

이라 할 때, $\langle f_1(x) \rangle + \langle f_2(x) \rangle + \cdots + \langle f_{100}(x) \rangle$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

(i) $n = 1$ 일 때,

$$f_n(x) = f_1(x) = \begin{cases} \frac{x(1-x)}{-x} = -1+x & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ \frac{x(1+x)}{x} = 1+x & (x > 0) \end{cases}$$

이다. 이때,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1+x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x) = 1$$

이므로 $f_1(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이다. 따라서 $\langle f_1(x) \rangle = -1$ 이다. (2점)

(ii) $n = 2$ 일 때,

$$f_n(x) = f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2(1-x)}{-x} = -x+x^2 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ \frac{x^2(1+x)}{x} = x+x^2 & (x > 0) \end{cases}$$

이다. 이때,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x+x^2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+x^2) = 0, \quad f_2(0) = 0$$

이므로 $f_2(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다. (2점)

한편,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f_2(0+h) - f_2(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-h+h^2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1+h) = -1, \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f_2(0+h) - f_2(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h+h^2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (1+h) = 1 \end{aligned}$$

이므로 $f_2(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다. 따라서 $\langle f_2(x) \rangle = 0$ 이다. (4점)

(iii) $n \geq 3$ 일 때,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n(1-x)}{-x} = -x^{n-1}+x^n & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ \frac{x^n(1+x)}{x} = x^{n-1}+x^n & (x > 0) \end{cases}$$

이다. 이때,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^{n-1}+x^n) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{n-1}+x^n) = 0, \quad f_n(0) = 0$$

이므로 $f_n(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이다. (2점)

한편, $n-2 \geq 1$ 임을 주목하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f_n(0+h) - f_n(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-h^{n-1}+h^n) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-h^{n-2}+h^{n-1}) = 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f_n(0+h) - f_n(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h^{n-1}+h^n) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (h^{n-2}+h^{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $f_n(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하다. 따라서 $\langle f_n(x) \rangle = 1$ 이다. (4점)

(iv) 그러므로 $\langle f_1(x) \rangle + \langle f_2(x) \rangle + \langle f_3(x) \rangle + \cdots + \langle f_{100}(x) \rangle = -1 + 0 + (1 \times 98) = 97$ 이다. (2점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
도입	$n = 1, 2$ 일 때 $\langle f_n(x) \rangle$ 값을 찾는다.	8
전개	$n \geq 3$ 일 때 $\langle f_n(x) \rangle = 1$ 임을 보인다.	6
결론	$\langle f_1(x) \rangle + \langle f_2(x) \rangle + \langle f_3(x) \rangle + \cdots + \langle f_{100}(x) \rangle = 97$ 을 계산한다.	2

채점 유의 사항	1. 풀이과정 (iii)에서 $f_n(x)$ 가 $x = 0$ 에서 연속임을 보이지 않고 미분가능하다는 것만 보인 후 $\langle f_n(x) \rangle = 1$ 이라고 해도 감점 없이 6점으로 인정한다.
	2. 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.
	3. 타당한 설명이 없이 답만 기술하는 경우 0점 처리한다.

문항 7

점 $P(a, b)$ 가 곡선 $y = x^2 + 2$ 위에 있다. (20점)

- (1) 만약 $a = -\frac{1}{2}$ 이면 아래의 조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 원이 존재하지 않음을 귀류법을 사용하여 증명하시오. 여기서 귀류법이란, 명제의 결론을 부정하여 가정 또는 이미 알려진 사실에 모순됨을 보여서 그 결론이 성립함을 보여주는 증명방식이다.
- (가) 원의 중심은 직선 $y = x$ 위에 있다.
 (나) 점 $P(a, b)$ 는 원과 곡선 $y = x^2 + 2$ 의 단 하나의 교점이 된다.
- (2) 만약 $a \neq -\frac{1}{2}$ 이면 위의 조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 원이 존재함을 보이시오.

■ 예시 답안

(1)

$a = -\frac{1}{2}$ 일 때 조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 원이 존재한다고 가정하자. (1점)

조건 (가)에 의해 원의 중심은 점 (c, c) 이고(c 는 상수), 원의 반지름의 길이를 r 이라고 하면 원의 방정식은

$$(x - c)^2 + (y - c)^2 = r^2 \quad \text{-----} \quad (1)$$

이다. 원과 곡선 $y = x^2 + 2$ 의 교점을 찾기 위해 $y = x^2 + 2$ 를 (1)에 대입하면 $(x - c)^2 + (x^2 + 2 - c)^2 = r^2$ 이 되고, 이를 정리하면 다음과 같다.

$$x^4 + (5 - 2c)x^2 - 2cx + (2c^2 - 4c + 4 - r^2) = 0$$

함수 $f(x)$ 를 $f(x) = x^4 + (5 - 2c)x^2 - 2cx + (2c^2 - 4c + 4 - r^2)$ 이라고 하면 조건 (나)에 의해 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근은 오직 $x = -\frac{1}{2}$ 하나이다. (3점)

게다가 최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프의 개형을 고려해 볼 때

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ 이고 } f(x) > 0 \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$$

여야 한다. 따라서 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{2}$ 에서 극소이고

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{-----} \quad (2)$$

을 만족한다. (3점)

한편, $f(x)$ 를 미분하면 $f'(x) = 4x^3 + 2(5 - 2c)x - 2c$ 이고 $x = -\frac{1}{2}$ 를 대입하면

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{8}\right) + 2(5 - 2c)\left(-\frac{1}{2}\right) - 2c = -\frac{11}{2}$$

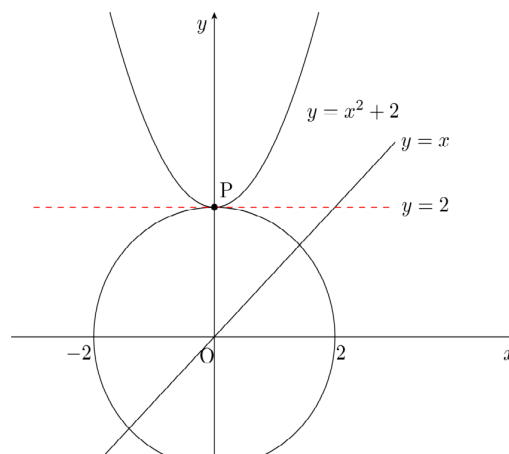
인데 이는 (2)에 모순이다. (3점)

따라서 처음의 가정이 잘못되었고, 두 조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 원은 존재하지 않는다.

(2)

다음과 같이 $a = 0$ 인 경우와 $a \neq 0$ 인 경우로 나누어 생각한다.

먼저, $a = 0$ 이라면 원점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원은 곡선 $y = x^2 + 2$ 와 정확히 한 점 $P(0, 2)$ 에서 만난다. 게다가 원점 O 는 직선 $y = x$ 위에 있으므로 이 원은 조건 (가)와 (나)를 모두 만족한다. (2점)



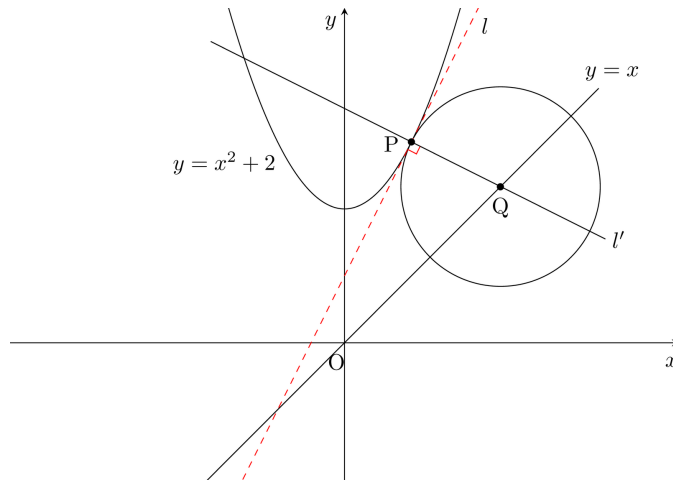
이제 $a \neq 0$ 인 경우를 생각하자. 함수 $y = x^2 + 2$ 를 미분하면 $y' = 2x$ 이므로 곡선 $y = x^2 + 2$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$y - b = 2a(x - a)$$

이다. 여기서 기울기 $2a$ 는 0이 아니므로 점 P 를 지나고 l 에 수직인 직선 l' 의 방정식은

$$y - b = -\frac{1}{2a}(x - a)$$

이다. 전제조건에서 $a \neq -\frac{1}{2}$ 이므로 l' 의 기울기 $-\frac{1}{2a}$ 은 1이 아니고, 따라서 l' 은 직선 $y = x$ 와 평행하지 않고 한 점 Q 에서 만난다. (4점)



이때, 중심이 점 Q 이고 반지름의 길이가 $\overline{PQ}$ 인 원을 생각해보자. 우선 원의 중심 Q 가 직선 $y = x$ 위에 있으므로 조건 (가)를 만족한다. 또한 직선 l 과 선분 PQ 는 점 P 에서 만나고 서로 수직이므로 직선 l 은 원의 점 P 에서의 접선이기도 하다. 오른쪽 그림과 같이 원과 곡선 $y = x^2 + 2$ 는 직선 l 을 기준으로 점 P 를 제외하고 서로 반대쪽에 위치하므로 원과 곡선 $y = x^2 + 2$ 모두 직선 l 과의 교점이 점 P 로 유일하다. 따라서 조건 (나)를 만족한다. (4점)

■ 채점 기준

단계	채점 기준	배점
(1)	도입 $a = -\frac{1}{2}$ 일 때 조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 원이 존재한다고 가정한다.	1
	전개 $f(x) = x^4 + (5 - 2c)x^2 - 2cx + (2c^2 - 4c + 4 - r^2)$ 일 때, 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근은 오직 $x = -\frac{1}{2}$ 하나임을 밝힌다.	3
	결론 $f(x)$ 의 그래프를 분석하여 모순을 도출한다.	6
(2)	도입 $a = 0$ 인 경우, 조건 (가)와 (나)를 만족시키는 원을 제시한다.	2
	전개 $a \neq 0$ 인 경우, 점 $P(a, b)$ 에서 접선에 수직인 직선 l' 는 $y = x$ 와 한 점에서 만남을 보인다.	4
	결론 $a \neq 0$ 인 경우, 조건 (가)와 (나)를 만족시키는 원을 제시한다.	4
채점 유의 사항	1. (1)에서 귀류법을 사용하지 않은 다른 증명은 인정하지 않는다.	
	2. (2)에서 타당한 설명을 통해 온전히 답을 얻었다면, 다른 방법이라도 정답으로 인정한다.	
	3. 단순한 계산 실수와 같은 사소한 실수는 건당 1점씩 감점한다.	

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다