

한양대논술

자연계

목차

2026학년도 자연계열	3
오전 · 문제 1	3
오전 · 문제 2	7
오후1 · 문제 1	11
오후1 · 문제 2	16
오후2 · 문제 1	19
오후2 · 문제 2	22
 2025학년도 자연계열	 26
오전 · 문제 1	26
오전 · 문제 2	27
오후1 · 문제 1	28
오후1 · 문제 2	29
오후2 · 문제 1	30
오후2 · 문제 2	31
 2024학년도 자연계열	 32
오전 · 문제 1	32
오전 · 문제 2	36
오후1 · 문제 1	39
오후1 · 문제 2	42
오후2 · 문제 1	45
오후2 · 문제 2	48

2026학년도 자연계열

오전 · 문제 1

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. $\overline{AB} = 5, \overline{AC} = 3$ 이고 넓이가 $\sqrt{26}$ 인 삼각형 ABC가 있다.
 $\angle A$ 가 예각일 때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 구하시오.
2. 자연수 n 에 대하여 집합 $X = \{a, b, c\}$ 에서 집합 $Y = \{y \mid y \text{는 } n \text{ 이하의 자연수}\}$ 로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 것의 개수를 a_n 이라 하자.

$f(a)$ 는 홀수 또는 $f(b)$ 는 짝수이다.

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때 $\frac{S_9 - S_1}{S_{12}}$ 의 값을 구하시오.

3. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left| (x+2)(x-1)^2 - 4 \sin \frac{(2n-1)\pi}{6} \right| dx < 4$ 를 만족시키고 2026보다 작은 자연수 n 의 개수를 구하시오.

■ 예시 답안

1

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\angle A$ 의 크기를 θ 라고 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 S 라고 하면, $S = \frac{1}{2}bc \sin \theta$ 이므로 $\sin \theta = \frac{2S}{bc} = \frac{2\sqrt{26}}{3 \times 5} = \frac{2\sqrt{26}}{15}$ 이다. $\angle A$ 가 예각이므로 $0 < \cos \theta < 1$ 이고,

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로 } \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{26}}{15}\right)^2} = \sqrt{\frac{225 - 104}{225}} = \sqrt{\frac{121}{225}} = \frac{11}{15} \text{이다.}$$

코사인법칙 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$ 를 이용하면, $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta} = \sqrt{3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \frac{11}{15}} = 2\sqrt{3}$ 이다.

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 이라 할 때, $S = \frac{1}{2}(a + b + c)r$ 이므로

$$r = \frac{2S}{a + b + c} = \frac{2\sqrt{26}}{2\sqrt{3} + 3 + 5} = \frac{\sqrt{26}}{4 + \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{26} - \sqrt{78}}{13}$$

이다.

$$\text{답 : } \frac{4\sqrt{26} - \sqrt{78}}{13}$$

2

a_n 은 (전체 f 의 개수) - ($f(a)$ 가 짝수이면서 $f(b)$ 가 홀수인 f 의 개수)이다. 두 집합 X 와 Y 의 원소의 개수가 각각 3, n 이므로 n 이 주어졌을 때 전체 f 의 개수는 n^3 이다. 한편, $f(a)$ 가 짝수이면서 $f(b)$ 가 홀수인 f 의 개수는 세 사건에 대한 곱의 법칙에 따라 (집합 Y 에서 짝수인 원소의 개수) $\times$ (집합 Y 에서 홀수인 원소의 개수) $\times n$ 이다. 따라서 a_n 은 자연수 k 에 대해

$$a_n = \begin{cases} (2k-1)^3 - (k-1)k(2k-1) = 6k^3 - 9k^2 + 5k - 1 & (n = 2k-1) \\ (2k)^3 - k^2(2k) = 6k^3 & (n = 2k) \end{cases}$$

이다.

$S_1 = a_1 = 1$ 이고 자연수의 거듭제곱의 합을 이용해 $S_9 = \sum_{k=1}^5 (a_{2k-1} + a_{2k}) - a_{10}$, $S_{12} = \sum_{k=1}^6 (a_{2k-1} + a_{2k})$ 을 구하면

$$\begin{aligned} S_9 &= \sum_{k=1}^5 (12k^3 - 9k^2 + 5k - 1) - 6 \times 5^3 = 12 \times \left(\frac{5 \times 6}{2}\right)^2 - 9 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 5 \times \frac{5 \times 6}{2} - 5 - 750 \\ &= 2700 - 495 + 75 - 5 - 750 = 1525, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{12} &= \sum_{k=1}^6 (12k^3 - 9k^2 + 5k - 1) = 12 \times \left(\frac{6 \times 7}{2}\right)^2 - 9 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} + 5 \times \frac{6 \times 7}{2} - 6 \\ &= 5292 - 819 + 105 - 6 = 4572 \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\frac{S_9 - S_1}{S_{12}} = \frac{1525 - 1}{4572} = \frac{1}{3}$$

이다.

$$\text{답 : } \frac{1}{3}$$

3

함수 $f(x), g(c)$ 를 각각 $f(x) = x^3 - 3x + 2, g(c) = \int_{\frac{1}{2}}^2 |(x+2)(x-1)^2 - c| dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 |x^3 - 3x + 2 - c| dx$ 라 하자.

$f(x)$ 의 도함수는 $f'(x) = 3x^2 - 3$ 이며 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 함숫값 $\frac{5}{8}$, $x = 1$ 에서 최솟값 0, $x = 2$ 에서 최댓값 4를 갖는다.

한편, $c = 4 \sin \frac{(2n-1)\pi}{6}$ 의 값은 자연수 k 에 대해 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

$$(i) n = 6k - 1 \text{ 일 때 } c = 4 \sin \frac{(12k-3)\pi}{6} = 4 \sin \frac{3\pi}{2} = -4$$

$$(ii) n = 6k - 2 \text{ 일 때 } c = 4 \sin \frac{(12k-5)\pi}{6} = 4 \sin \frac{7\pi}{6} = -2, n = 6k \text{ 일 때 } c = 4 \sin \frac{(12k-1)\pi}{6} = 4 \sin \frac{11\pi}{6} = -2$$

$$(iii) n = 6k - 5 \text{ 일 때, } c = 4 \sin \frac{(12k-11)\pi}{6} = 4 \sin \frac{\pi}{6} = 2, n = 6k - 3 \text{ 일 때 } c = 4 \sin \frac{(12k-7)\pi}{6} = 4 \sin \frac{5\pi}{6} = 2$$

$$(iv) n = 6k - 4 \text{ 일 때 } c = 4 \sin \frac{(12k-9)\pi}{6} = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4$$

즉, c 는 $-4, -2, 2, 4$ 의 4개의 값만을 가진다. $g(c)$ 는 다음의 3가지 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) $c = -4$ 또는 $c = -2$ 인 경우 $c \leq 0$ 이므로 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 에서 항상 $f(x) \geq c$ 이고

$$g(c) = \int_{\frac{1}{2}}^2 (x^3 - 3x + 2 - c) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + (2-c)x \right]_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{3}{2}c + 1 + \frac{23}{64} = -\frac{3}{2}c + \frac{87}{64}$$

이다. 이때 $g(-4) = 7 + \frac{23}{64} = \frac{471}{64}, g(-2) = 4 + \frac{23}{64} = \frac{279}{64}$ 이다.

(ii) $c = 2$ 일 때는 $f(\sqrt{3}) = 2$ 이므로 $\frac{1}{2} \leq x < \sqrt{3}$ 일 때는 $f(x) < c$ 이고 $\sqrt{3} \leq x \leq 2$ 일 때는 $f(x) \geq c$ 이다. 따라서

$$g(c) = \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}} (-x^3 + 3x) dx + \int_{\sqrt{3}}^2 (x^3 - 3x) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{3}} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{\sqrt{3}}^2 = \frac{5}{2} - \frac{23}{64} = \frac{137}{64}$$

이다.

(iii) $c = 4$ 인 경우 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 에서 항상 $f(x) \leq c$ 이고

$$g(4) = \int_{\frac{1}{2}}^2 (-x^3 + 3x + 2) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{3}{2} \times 4 - 1 - \frac{23}{64} = 5 - \frac{23}{64} = \frac{297}{64}$$

이다.

$4 = \frac{256}{64}$ 이므로 $c = 2$ 일 때만 문제의 조건인 $g(c) < 4$ 를 만족시키며, 이는 어떤 자연수 k 에 대해 $n = 6k - 5$ 또는 $n = 6k - 3$ 인 경우이다. $2025 = 6 \times 338 - 3$ 이므로 $g(c) < 4$ 를 만족시키는 2026보다 작은 자연수 n 의 개수는 총 $2 \times 338 = 676$ 개다.

답 : 676

■ 채점 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	사인법칙을 이용해 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 값을 구할 수 있다.	15
		코사인법칙과 내접원의 성질을 이용해 선분 $\overline{BC}$ 의 길이와 내접원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	15
2	30	경우의 수를 이용하여 a_n 을 구할 수 있다.	15
		자연수의 거듭제곱의 합을 이용해 $\frac{S_9 - S_1}{S_{12}}$ 을 구할 수 있다.	15
3	40	사인함수의 성질을 이용해 자연수 n 에 대해 $4 \sin \frac{(2n-1)\pi}{6}$ 가 가질 수 있는 값을 파악하고 이를 바탕으로 주어진 정적분을 계산할 수 있다.	30
		계산된 정적분 값이 문제에 제시된 조건을 만족하는지 파악하고 최종적으로 4보다 작도록 하는 2026보다 작은 n 의 개수를 구할 수 있다.	10

오전 · 문제 2

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(1) f(x) = \begin{cases} -(e^x - \cos x)^{2026} \sin x & (0 \leq x \leq 2\pi) \\ x - 2\pi & (x > 2\pi) \end{cases}$$

$$(2) x < 0 \text{ 일 때 } f(x) = -f(-x)$$

함수 $g(x) = \left| \int_a^x f(t) dt \right|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 a 의 값을 모두 구하시오.

2. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = a(x - 1)$ ($a > 1$)이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만나고,
원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $y = a(x - 1) + k$ (k 는 양의 실수)가 서로 다른 두 점 R, S에서 만난다.
두 선분 PQ, RS와 길이가 π 보다 작은 두 호 PR, QS로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(k)$ 라 하자.

극한값 $\lim_{k \rightarrow 0+} \frac{S(k)}{k}$ 를 구하시오.

(단, 점 P의 x 좌표는 점 Q의 x 좌표보다 크고, 점 R의 x 좌표는 점 S의 x 좌표보다 크다.)

3. 모든 실수 t 에 대하여 함수 $g(t)$ 가 $g(t) \geq 0$ 이고 이계도함수를 갖는다.
좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($0 \leq t \leq 4$)에서의 위치를 $(t, g(t))$ 라 하자.
점 P, 함수 $f(x)$ 와 함수 $h(t) = f(g(t))$ ($0 \leq t \leq 4$)는 다음 조건을 만족시킨다.

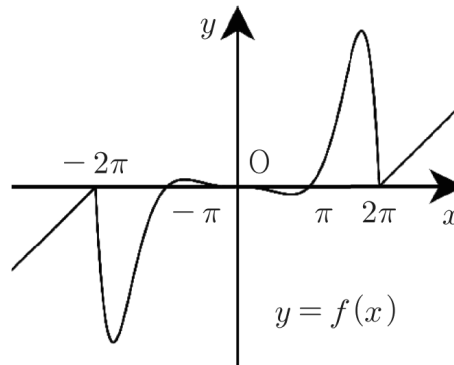
- (1) $t = \frac{1}{4}$ 일 때 점 P는 x 축 위에 있고 가속도는 $(0, 1)$ 이다.
(2) $t = 1$ 일 때 점 P의 속력이 최대가 되고, 이때 속력은 $\sqrt{2}$ 이다.
(3) 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, $x \geq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이다.
(4) $h\left(\frac{1}{4}\right) = 0, h'(1) = \frac{9}{4}, h''\left(\frac{1}{4}\right) = 4, h''(1) = -2$

$f(3)$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

1

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



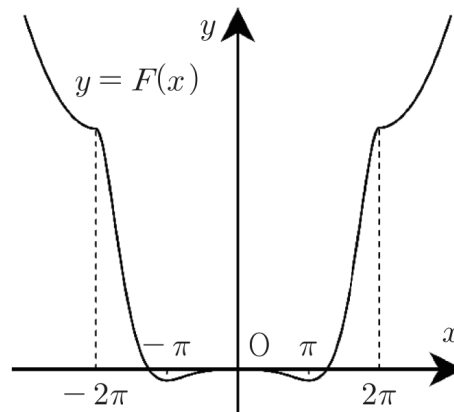
함수 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 라 하자. 함수 $s(t) = e^t - \cos t$ 에 대하여, 열린구간 $(0, 2\pi)$ 에서 $s(t) \geq 0$ 이고 $s'(t) = e^t + \sin t > 0$ 이다. 따라서 열린구간 $(0, 2\pi)$ 에서 함수 $(s(t))^{2026}$ 이 증가한다. $(0, \pi)$ 에서 $(s(t+\pi))^{2026} > (s(t))^{2026}$ 이고 $\sin(t+\pi) = -\sin t$ 이므로

$$F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_{\pi}^{2\pi} f(t)dt + \int_0^{\pi} f(t)dt = \int_0^{\pi} [(s(t+\pi))^{2026} - (s(t))^{2026}] \sin t dt > 0 = F(0)$$

이다.

$x < 0$ 일 때, $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^{-x} \{-f(-s)\}ds = \int_0^{-x} f(s)ds = F(-x)$ 이다.

따라서 함수 $y = F(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$h(x) = \int_a^x f(t)dt$ 라 하면, $h(x) = F(x) + \int_a^0 f(t)dt$ 이고 $h(a) = 0$ 이다. 즉, 함수 $h(x)$ 의 그래프는 함수 $F(x)$ 의 그래프의 y 축 방향으로의 평행이동이며 $h(a) = 0$ 이다. 따라서 함수 $g(x) = |h(x)|$ 가 실수 전체에서 미분가능하려면 곡선 $y = F(x)$ 와 직선 $y = F(a)$ 의 모든 교점에서 함수 $F(x)$ 의 미분계수가 0이 되어야 한다. 함수 $y = F(x)$ 의 그래프에 의하면 이를 만족하는 a 는 $-2\pi, -\pi, \pi, 2\pi$ 이다.

2

연립방정식 $\begin{cases} y = a(x-1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ 을 풀면, 점 P, Q의 좌표는 $P = (1, 0)$, $Q = \left(\frac{a^2-1}{a^2+1}, -\frac{2a}{a^2+1} \right)$

연립방정식 $\begin{cases} y = a(x-1) + k \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ 을 풀면, 점 R의 x 좌표는 $\frac{a^2 - ak + \sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}$ 이고 점 S의 x 좌표는 $\frac{a^2 - ak - \sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}$ 이다. 직선 $y = a(x-1)$ 을 L , 직선 $y = a(x-1) + k$ 를 L' 이라 하자.

점 P, Q에서 직선 L' 에 내린 수선의 발을 각각 점 B, C라 하고, 점 R, S에서 직선 L 에 내린 수선의 발을 각각 점 A, D라 하자.

점 P와 직선 L' 사이의 거리는 $\frac{k}{\sqrt{a^2+1}}$ 이므로, 직사각형 PBCQ의 넓이는 $\frac{k}{\sqrt{a^2+1}}\overline{PQ} = \frac{2k}{a^2+1}$ 이다.

두 점 R, S의 x 좌표의 차를 $d = \frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}$ 라 할 때,

$\overline{RS} = d\sqrt{1+a^2} = \frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{\sqrt{1+a^2}}$ 이므로 직사각형 ARSD의 넓이는

$$\frac{k}{\sqrt{a^2+1}}\overline{RS} = k \cdot \frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}$$

이다.

실수 $0 < k \leq a$ 에 대하여 직선 L' 과 직선 L , 그리고 호 PR, 호 QS로 둘러싸인 영역은 직사각형 ARSD의 내부에 있고 직사각형 PBCQ를 포함하므로,

$$\frac{2k}{a^2+1} \leq S(k) \leq k \cdot \frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}$$

$$\frac{2}{a^2+1} \leq \frac{S(k)}{k} \leq \frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2}$$

$$\frac{2}{a^2+1} \leq \lim_{k \rightarrow 0+} \frac{S(k)}{k} \leq \lim_{k \rightarrow 0+} \frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $\lim_{k \rightarrow 0+} \frac{2\sqrt{1+a^2-(a-k)^2}}{1+a^2} = \frac{2}{1+a^2}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $\lim_{k \rightarrow 0+} \frac{S(k)}{k} = \frac{2}{1+a^2}$ 이다.

*참고: 점 R과 점 S의 x 좌표를 직접 구하지 않고, 근과 계수와의 관계를 통해 이차방정식 $x^2 + (ax - a + k)^2 = 1$ 의 두 근의 차를 구하여 직사각형 ARSD의 넓이를 쉽게 구할 수 있다.

3

등식 $f(g(t)) = h(t)$ 의 양변을 미분하면

$$f'(g(t))g'(t) = h'(t), \quad f''(g(t))\{g'(t)\}^2 + f'(g(t))g''(t) = h''(t) \dots \textcircled{1}$$

조건 (2)에 의하여 $t = 1$ 일 때 점 P의 속력 $\sqrt{1+\{g'(t)\}^2}$ 이 최대가 되므로 $\{g'(t)\}^2$ 의 값도 최대가 된다. 따라서

$2g'(1)g''(1) = 0$ 또한 $\sqrt{1+\{g'(1)\}^2} = \sqrt{2}$ 에서 $g'(1) = 1$ 또는 -1 . 조건 (3), (4)에 의하여 $f'(g(1))g'(1) = h'(1) = \frac{9}{4}$ 이고

$f'(g(1)) > 0$ 이므로 $g'(1) > 0$

따라서 $g'(1) = 1$ 이고 $g''(1) = 0$. $\textcircled{1}$ 에서

$$f'(g(1)) = h'(1) = \frac{9}{4}, \quad f''(g(1)) = h''(1) = -2 \dots \textcircled{2}$$

조건 (1)에 의하여 $g\left(\frac{1}{4}\right) = 0, g''\left(\frac{1}{4}\right) = 1$. 따라서 $f(0) = f\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right) = h\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \dots \textcircled{3}$

또한 $g(t) \geq 0 = g\left(\frac{1}{4}\right)$ 이므로 $g'\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ 이고 ㉠에서 $f'(0) = f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right) = f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right)g''\left(\frac{1}{4}\right) = h''\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \dots \dots$ ㉡

㉢, ㉡에서 $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x$ (a 는 실수)

$g(1) = b \geq 0$ 이라 하면 ㉣에서 $3b^2 + 2ab + \frac{7}{4} = 0$, $3b + a = -1$. 연립하면 $a = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{7}{6} < 0$ 또는 $a = -\frac{5}{2}$,

$$b = \frac{1}{2} \geq 0$$

따라서 $a = -\frac{5}{2}$ 이고 $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x$. 그러므로 $f(3) = \frac{33}{2}$

답 : $\frac{33}{2}$

■ 채점 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 파악하였는가?	10
		함수 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 의 그래프의 개형을 파악하고 조건을 만족시키는 실수 a 의 값을 모두 구하였는가?	20
2	30	점 P, Q, R, S의 좌표를 구하였는가?	10
		극한값 $\lim_{k \rightarrow 0+} \frac{S(k)}{k}$ 을 구하였는가?	20
3	40	주어진 조건을 이용하여 함수 $g(x)$ 에 대한 식을 얻고 삼차함수 $f(x)$ 를 구하였는가?	30
		$f(3)$ 의 값을 구하였는가?	10

오후1 · 문제 1

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

제시문

[가] 곡선 $y = 2^x$ 위에 x 좌표가 6 이상인 점 A_1 이 있다. 자연수 n 에 대하여 n 이 홀수이면 점 A_{n+1} 은 점 A_n 에서 x 축에 내린 수선과 곡선 $y = 2^{x-3} + 35$ 가 만나는 점이고, n 이 짝수이면 점 A_{n+1} 은 점 A_n 에서 y 축에 내린 수선과 곡선 $y = 2^x$ 이 만나는 점이다. 자연수 k 에 대하여 점 A_{2k-1} 의 y 좌표를 y_k 라 하자.

[나] $a^2 + b^2 = 1$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = \int_0^x (a \sin t + b |\sin(2t)|) dt$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (1) 함수 $f(x)$ 가 구간 $(0, \pi)$ 에서 증가하거나 구간 $(0, \pi)$ 에서 감소한다.
- (2) 함수 $f(x)$ 가 구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 증가하거나 구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 감소한다.

1. $\overline{A_2 A_3} = 1$ 일 때 두 선분 $A_1 A_2, A_2 A_3$ 과 곡선 $y = 2^x$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.
2. $y_5 = \frac{10725}{256}$ 일 때 y_1 의 값을 구하시오.
3. 정적분 $\int_0^{2026\pi} |f'(x)| dx$ 의 값이 최소가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b) 와 그 최솟값을 구하시오.

■ 예시 답안

1

A_1 의 x 좌표를 s_1 , A_3 의 x 좌표를 s_2 라 하자. 주어진 조건에 의해 $s_1 = s_2 + 1$ 이다. A_2 의 y 좌표는 $2^{s_1-3} + 35$ 이므로 $s_2 = \log_2(2^{s_1-3} + 35)$ 이다. $s_2 = \log_2(2^{s_1-3} + 35) = s_1 - 1$ 이므로 $2^{s_1-3} + 35 = 2^{s_1-1}$ 이고, $2^{s_1} = \frac{280}{3}$, $s_1 = \log_2 \frac{280}{3}$ 이다.

그러므로 $s_2 = \log_2\left(\frac{280}{3}\right) - 1 = \log_2 \frac{140}{3}$ 이다.

A_1 에서 x 축으로 내린 수선의 발을 점 B, A_3 에서 x 축으로 내린 수선의 발을 점 C라 하자.

곡선 $y = 2^x$ 와 선분 A_1B , 선분 BC, 선분 CA_3 로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\int_{s_2}^{s_1} 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_{s_2}^{s_1} = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{280}{3} - \frac{140}{3} \right) = \frac{140}{3 \ln 2}$$

이다. 그러므로 구하고자 하는 영역의 넓이는

$$\frac{140}{3 \ln 2} - \frac{140}{3} = \frac{140}{3} \left(\frac{1}{\ln 2} - 1 \right)$$

이다.

2

A_{2k-1} 의 y 좌표가 y_k 이므로 A_{2k-1} 의 x 좌표는 $\log_2 y_k$ 이다.

그러므로 A_{2k+1} 의 y 좌표는 $y_{k+1} = 2^{\log_2 y_k - 3} + 35 = \frac{1}{8}y_k + 35$ 이다. 이를 이용하면 $y_2 = \frac{1}{8}y_1 + 35$,

$$y_3 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8}y_1 + 35 \right) + 35 = \frac{1}{8^2}y_1 + 35 \left(1 + \frac{1}{8} \right), \quad y_4 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8^2}y_1 + 35 \left(1 + \frac{1}{8} \right) \right) + 35 = \frac{1}{8^3}y_1 + 35 \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} \right),$$

$$y_5 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8^3}y_1 + 35 \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} \right) \right) + 35 = \frac{1}{8^4}y_1 + 35 \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} \right)$$

을 얻는다.

$$y_5 = \frac{1}{8^4}y_1 + 35 \left(1 + \frac{1}{8^1} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} \right) = \frac{10725}{256}$$

이고,

$$\text{양변에 } 8^4 \text{을 곱하면 } y_1 + 35(8^4 + 8^3 + 8^2 + 8^1) = y_1 + 35 \frac{8(8^4 - 1)}{8 - 1} = y_1 + 40 \times 63 \times 65 = 5 \times 33 \times 65 \times 2^4$$

을 얻는다.

$$y_1 = 40 \times 65 \times (2 \times 33 - 63) = 7800$$

이므로 구하는 값은 7800이다.

3

함수 $g(t) = a \sin t + b |\sin(2t)|$ 라 하자. $g(t) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ 이므로 조건 (1)에 의하여 열린구간 $(0, \pi)$ 에서 $g(t) \geq 0$ 이거나 열린구간 $(0, \pi)$ 에서 $g(t) \leq 0$ 이고, 조건 (2)에 의하여 열린구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 $g(t) \geq 0$ 이거나 열린구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 $g(t) \leq 0$ 이다.

(i) $a = 0$ 일 때

가능한 순서쌍 (a, b) 는 $(0, 1)$, $(0, -1)$ 이고 $|f'(x)| = |g(x)| = |\sin(2x)| \geq 0$ 이다. 함수 $|\sin(2x)|$ 의 주기가 $\frac{\pi}{2}$

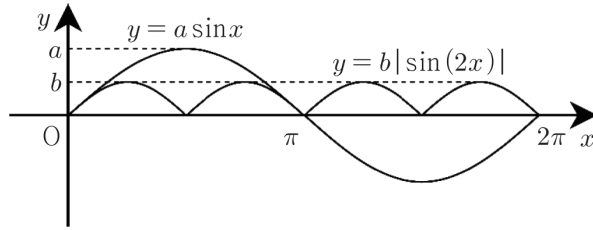
이므로

$$\int_0^{2026\pi} |f'(x)| dx = 4052 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(2x)| dx = 4052$$

이다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

① $a > 0, b \geq 0$ 일 때



$g\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -a < 0$ 이므로 열린구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 $g(t) \leq 0$ 이다.

즉, $a \sin t \leq b \sin(2t) = 2b \sin t \cos t$ 이다.

열린구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 $\sin t < 0$ 이므로 열린구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서

$a \geq 2b \cos t$ 이다. 열린구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 $-1 \leq \cos t \leq 1$ 이므로 $a \geq 2b$ 이다.

$a^2 + b^2 = 1$ 이므로 $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq a \leq 1$ 이다. 열린구간 $(0, \pi)$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이고 열린구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 $g(x) \leq 0$

이므로

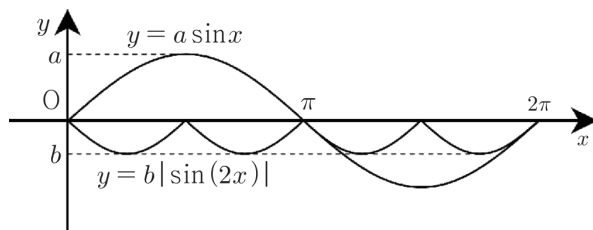
$\sin(x + \pi) = -\sin x$ 와 $\sin(2x) = \sin(2(x + \pi))$ 를 이용하면

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |g(x)| dx &= \int_0^{\pi} g(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-g(x)) dx \\ &= \int_0^{\pi} (a \sin x + b |\sin(2x)|) dx - \int_{\pi}^{2\pi} (a \sin x + b |\sin(2x)|) dx \\ &= 2a \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= 4a \end{aligned}$$

함수 $|g(x)|$ 의 주기가 2π 이므로 $\int_0^{2026\pi} |g(x)| dx = 1013 \int_0^{2\pi} |g(x)| dx = 4052a$ 이다.

$\frac{2}{\sqrt{5}} \leq a \leq 1$ 이므로 $\int_0^{2026\pi} |f'(x)| dx$ 의 최솟값은 $\frac{8104}{\sqrt{5}}$ 이고 이때의 순서쌍 (a, b) 는 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 이다.

② $a > 0, b < 0$ 일 때



$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = a > 0$ 이고 열린구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 $\sin t < 0$ 이므로

①과 같은 방법으로 $a \geq -2b$ 이고 $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq a \leq 1$ 이다.

열린구간 $(0, \pi)$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이고

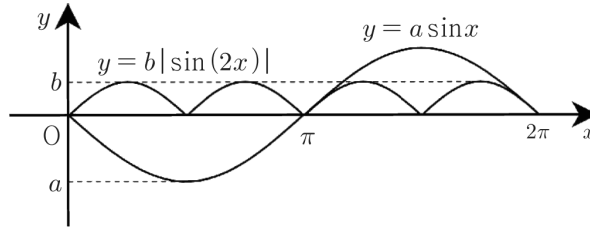
열린구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 $g(x) \leq 0$ 이므로 ①과 같이

$$\int_0^{2\pi} |g(x)| dx = \int_0^{\pi} g(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-g(x)) dx = 4a \text{이며}$$

$$\int_0^{2026\pi} |g(x)| dx = 4052a \text{이다.}$$

따라서 $\int_0^{2026\pi} |f'(x)| dx$ 의 최솟값은 $\frac{8104}{\sqrt{5}}$ 이고, 이때의 순서쌍 (a, b) 는 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 이다.

③ $a < 0, b \geq 0$ 일 때



$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = a < 0$ 이고 열린구간 $(0, \pi)$ 에서 $\sin t > 0$ 이므로

①과 같은 방법으로

$$-a \geq 2b \text{이고 } \frac{2}{\sqrt{5}} \leq -a \leq 1 \text{이다.}$$

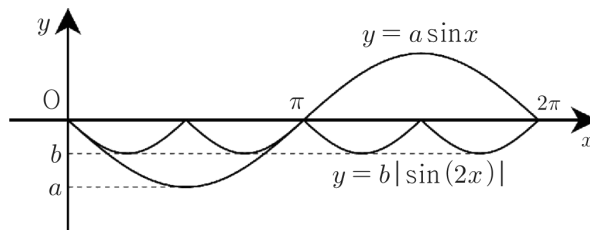
열린구간 $(0, \pi)$ 에서 $g(x) \leq 0$ 이고 열린구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |g(x)| dx &= \int_0^{\pi} (-g(x)) dx + \int_{\pi}^{2\pi} g(x) dx \\ &= \int_0^{\pi} (-a \sin x - b |\sin(2x)|) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (a \sin x + b |\sin(2x)|) dx \\ &= -2a \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= -4a \end{aligned}$$

따라서 $\int_0^{2026\pi} |g(x)| dx = -4052a$ 이고 $\int_0^{2026\pi} |f'(x)| dx$ 의 최솟값은 $\frac{8104}{\sqrt{5}}$ 이다.

이때의 순서쌍 (a, b) 는 $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 이다.

④ $a < 0, b < 0$ 일 때



$g\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -a > 0$ 이고 열린구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 $\sin t < 0$ 이므로

①과 같은 방법으로 $-a \geq -2b$ 이고 $\frac{2}{\sqrt{5}} \leq -a \leq 1$ 이다.

열린구간 $(0, \pi)$ 에서 $g(x) \leq 0$ 이고 열린구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서

$$g(x) \geq 0 \text{이므로 ③과 같이 } \int_0^{2\pi} |g(x)| dx = \int_0^{\pi} (-g(x)) dx + \int_{\pi}^{2\pi} g(x) dx = -4a \text{이며}$$

$$\int_0^{2026\pi} |g(x)| dx = -4052a \text{이다.}$$

따라서 $\int_0^{2026\pi} |f'(x)| dx$ 의 최솟값은 $\frac{8104}{\sqrt{5}}$ 이고, 이때의 순서쌍 (a, b) 는 $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 이다.

(i), (ii)에 의해 $\int_0^{2026\pi} |f'(x)| dx$ 의 최솟값은 $\frac{8104}{\sqrt{5}}$ 이고,

이때의 순서쌍 (a, b) 는 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 이다.

■ 채점 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	A_1 과 A_2 의 x 좌표를 로그의 값으로 표현했는가?	15
		지수함수의 적분을 이용하여 두 직선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구했는가?	15
2	30	두 항 y_k, y_{k+1} 사이의 관계식을 구했는가?	15
		$y_5 = \frac{10725}{256}$ 이 되도록 하는 y_1 의 값을 구했는가?	15
3	40	$a \neq 0$ 일 때 조건 (1)의 필요충분조건이 $ a \geq 2 b $ 임을 구하였는가?	10
		a 와 b 의 부호에 따라 경우를 나누고, 각각의 경우에 주어진 정적분의 최솟값을 구하였는가?	20
		정적분이 최소가 되도록 하는 순서쌍 (a, b) 를 모두 구하고 그 최솟값을 구하였는가?	10

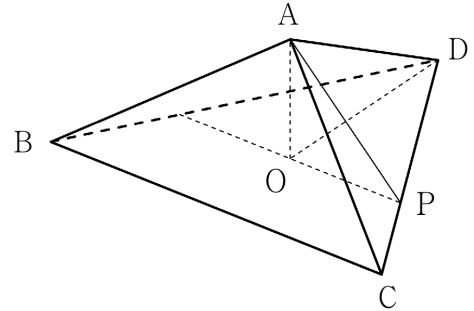
오후1 · 문제 2

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

제시문

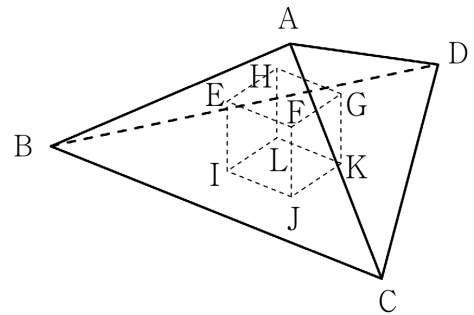
[가] 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = a$ 이고 $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DB} = 6$ 인 사면체 ABCD가 있다.

점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 O,
점 O를 지나고 직선 BC에 평행한 직선이 선분 CD와 만나는 점
을 P라 하자. (단, $a > 2\sqrt{3}$)



[나] 제시문 <가>에서 주어진 사면체 ABCD에 대하여 정육면체 EFGH-IJKL은 다음 조건을 만족시킨다.

- (1) 정사각형 IJKL은 면 BCD에 포함되고,
직선 IJ와 직선 BC는 서로 평행하다.
- (2) 선분 EF는 면 ABC에 포함된다.
- (3) 점 G는 면 ACD에, 점 H는 면 ABD에 포함된다.



1. 네 삼각형 DOP, AOD, AOP, APD의 넓이의 곱을 a 에 관한 식으로 표현하시오.
2. 평면 ACD가 평면 EFGH와 이루는 예각의 크기를 θ_1 , 평면 ACD가 평면 FJKG와 이루는 예각의 크기를 θ_2 ,
평면 ACD가 평면 EIJF와 이루는 예각의 크기를 θ_3 이라 하자.
 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 중 가장 작은 것을 θ 라 할 때, $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이 되도록 하는 a 의 값을 모두 구하시오.
3. $a = 4$ 일 때 정사각형 EIJF의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.

■ 예시 답안

1

점 O에서 점 B, C, D까지의 거리가 모두 같으므로 점 O는 삼각형 BCD의 외심이고, 삼각형 BCD는 정삼각형이므로 점 O는 삼각형 BCD의 무게중심이다. 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 직선 AO와 직선 DM은 서로 수직이고 점 O에서 만난다. 삼수선의 정리에 의해 직선 AM과 직선 BC는 서로 수직이다.

$\overline{DM} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{MC}^2} = 3\sqrt{3}$ 이고, $\overline{DM} : \overline{DO} = \overline{DC} : \overline{DP} = \overline{MC} : \overline{OP} = 3 : 2$ 이므로 $\overline{DO} = 2\sqrt{3}$, $\overline{DP} = 4$, $\overline{OP} = 2$ 이다.

또한, $\overline{OM} = \overline{DM} - \overline{DO} = \sqrt{3}$ 이고 $\overline{AM} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{MC}^2} = \sqrt{a^2 - 9}$ 이므로 $\overline{AO} = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{a^2 - 12}$ 이다.

따라서,

$$\triangle DOP = \frac{1}{2} \times \overline{DO} \times \overline{OP} = 2\sqrt{3},$$

$$\triangle AOD = \frac{1}{2} \times \overline{DO} \times \overline{AO} = \sqrt{3(a^2 - 12)},$$

$$\triangle AOP = \frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \overline{OP} = \sqrt{a^2 - 12},$$

$$\triangle APD = \frac{2}{3} \triangle ACD = \frac{2}{3} \triangle ABC = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \overline{AM} \times \overline{BC} = 2\sqrt{a^2 - 9}$$

이고, 삼각형 DOP, AOD, AOP, APD의 넓이의 곱은 $12(a^2 - 12)\sqrt{a^2 - 9}$ 이다.

답: $12(a^2 - 12)\sqrt{a^2 - 9}$

2

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 중 가장 작은 것이 θ 이므로 $\cos \theta$ 는 $\cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3$ 중 가장 큰 것이다.

$$\cos \theta_1 = \frac{\triangle DOP}{\triangle APD} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 - 9}},$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\triangle AOD}{\triangle APD} = \frac{\sqrt{3(a^2 - 12)}}{2\sqrt{a^2 - 9}},$$

$$\cos \theta_3 = \frac{\triangle AOP}{\triangle APD} = \frac{\sqrt{a^2 - 12}}{2\sqrt{a^2 - 9}}$$

이므로 $\cos \theta_2 > \cos \theta_3$ 이다. 한편, $\cos \theta_1 > \cos \theta_2 \Leftrightarrow 2 > \sqrt{a^2 - 12} \Leftrightarrow 4 > a^2 - 12 \Leftrightarrow a < 4$ 이다.

(i) $2\sqrt{3} < a < 4$ 일 때, $\frac{\sqrt{6}}{3} = \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 - 9}}$ 이므로 $a^2 - 9 = \frac{9}{2}$ 이고 $a = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ 이다.

(ii) $a \geq 4$ 일 때, $\frac{\sqrt{6}}{3} = \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{3(a^2 - 12)}}{2\sqrt{a^2 - 9}}$ 이므로 $24(a^2 - 9) = 27(a^2 - 12)$ 이고 $a = 6$ 이다.

따라서 $a = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ 또는 $a = 6$ 이다.

답: $a = \frac{3\sqrt{6}}{2}, a = 6$

3

평면 EFGH가 선분 AB, 선분 AC, 선분 AD와 만나는 점을 각각 B', C', D'이라 하고, 선분 AM과 선분 B'C'이 만나는 점을 M'이라 하자. 정육면체 EFGH-IJKL의 한 변의 길이를 x 라 하면 삼각형 B'C'D'이 정삼각형이므로

$$\overline{M'D'} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x \text{이다.}$$

한편, 점 M' 에서 선분 DM 에 내린 수선의 발을 N 이라 하면 삼수선의 정리에 의하여 직선 MN 과 직선 BC 는 서로 수직이므로 점 N 은 선분 MO 위의 점이다. 두 삼각형 AMO 와 $M'MN$ 은 닮음이므로 $\overline{M'M} : \overline{M'N} = \overline{AM} : \overline{AO} = \sqrt{7} : 2$ 로부터

$$\overline{M'M} = \frac{\sqrt{7}}{2}x \text{를 얻는다. 따라서 } \overline{AM'} = \overline{AM} - \overline{M'M} = \sqrt{7}\left(1 - \frac{x}{2}\right) \text{이다.}$$

또한 두 삼각형 AMD 와 $AM'D'$ 는 닮음이므로 $\sqrt{7}\left(1 - \frac{x}{2}\right) : \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x = \overline{AM'} : \overline{M'D'} = \overline{AM} : \overline{MD} = \sqrt{7} : 3\sqrt{3}$ 이다.

$$\text{즉, } \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x = 3\sqrt{3}\left(1 - \frac{x}{2}\right) \text{이고 이를 정리하면 } x = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1} = \frac{18-3\sqrt{3}}{11} \text{이다.}$$

따라서, 정사각형 $EIJF$ 의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는

$$x^2 \cos \theta_3 = \left(\frac{18-3\sqrt{3}}{11}\right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{351\sqrt{7}-108\sqrt{21}}{847}$$

이다.

$$\text{답 : } \frac{351\sqrt{7}-108\sqrt{21}}{847}$$

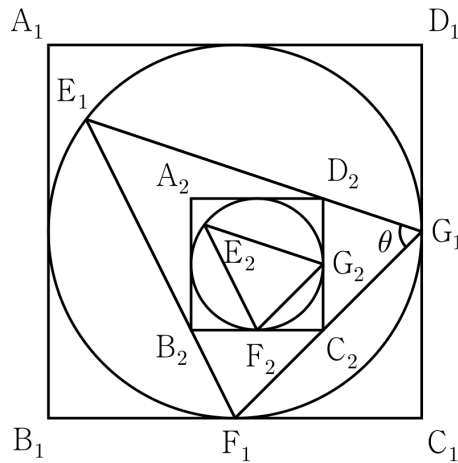
■ 채점 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	삼수선의 정리를 이용하여 주어진 공간도형을 이해하였는가?	10
		삼각형 DOP , AOD , AOP , APD 의 넓이의 곱을 구하였는가?	20
2	30	$\cos \theta_1$, $\cos \theta_2$, $\cos \theta_3$ 을 구하였는가?	15
		a 의 값을 모두 구하였는가?	15
3	40	정사각형 $EIJF$ 의 넓이를 구하였는가?	20
		정사각형 $EIJF$ 의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이를 구하였는가?	20

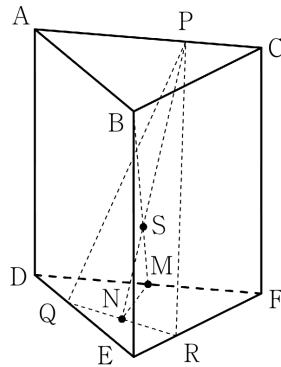
오후2 · 문제 1

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

- 좌표평면 위에 있는 5개의 점 $P_1(-6, -3), P_2(-6, 3), P_3(-3, 6), P_4(6, 3), P_5(6, -3)$ 중에서 서로 다른 3개를 선택하여 그 점들을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 만들 때, 그 삼각형의 무게중심과 직선 $y = -2x + 30$ 사이의 거리가 $6\sqrt{5}$ 이하가 되는 경우의 수를 구하시오.
- 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에 대하여 선분 B_1C_1 의 중점을 F_1 , 선분 C_1D_1 의 중점을 G_1 이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에 내접하는 원 위의 점 E_1 에 대하여 $\theta = \angle E_1G_1F_1$ 이라 할 때, $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 를 만족시킨다. 세 점 B_2, C_2, D_2 는 각각 선분 E_1F_1, F_1G_1, E_1G_1 위의 점이며, 두 직선 B_1C_1 과 B_2C_2 가 서로 평행하고 두 직선 C_1D_1 과 C_2D_2 가 서로 평행하며, 사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 는 정사각형이다. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에도 같은 방법을 적용하여, 선분 B_2C_2 의 중점을 F_2 , 선분 C_2D_2 의 중점을 G_2 라 하자. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 에 내접하는 원 위의 점 E_2 는 $\angle E_1G_1F_1 = \angle E_2G_2F_2$ 를 만족시킨다. 이와 같은 과정을 반복하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 과 세 점 E_n, F_n, G_n ($n \geq 3$)을 얻을 수 있다. 모든 자연수 n 에 대하여 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 의 넓이를 S_n 이라 하자. $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 합을 구하시오.



- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EF} = 3, \angle ABC = \angle DEF = \frac{\pi}{2}, \overline{AD} = 6$ 인 삼각기둥 $ABC-DEF$ 가 있다. 점 P 는 선분 AC 를 $2:1$ 로 내분하는 점이고, 점 M 은 선분 DF 의 중점이다. 선분 DE 위의 점 Q 는 $\overline{EQ} = t$ ($0 < t < 3$), 선분 EF 위의 점 R 은 $\overline{ER} = 3 - t$ 를 만족시킨다. 직선 BM 이 평면 PQR 과 만나는 점을 S 라 할 때, $\overline{BS} : \overline{SM} = 2 : 1$ 이다. 점 N 은 직선 PS 와 직선 QR 의 교점이다. 직선 MN 과 직선 QR 이 서로 수직일 때, 평면 PQR 이 평면 DEF 와 이루는 예각의 크기 θ 에 대하여 $\cos \theta$ 의 값을 구하시오.



■ 예시 답안

1

삼각형의 무게중심이 (a, b) 일 때, 점 (a, b) 에서 직선 $2x + y - 30 = 0$ 까지의 거리는 $\frac{|2a + b - 30|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$ 이다. $\frac{|2a + b - 30|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \leq 6\sqrt{5}$ 일 필요충분조건은 $|2a + b - 30| \leq 30$ 이다. 선택된 세 점 A, B, C와 이 점들로 만들어진 삼각형의 무게중심 (a, b) 와 $|2a + b - 30|$ 의 값은 다음과 같다.

점 A	$(-6, -3)$	$(-6, -3)$	$(-6, -3)$	$(-6, -3)$	$(-6, -3)$	$(-6, -3)$
점 B	$(-6, 3)$	$(-6, 3)$	$(-6, 3)$	$(-3, 6)$	$(-3, 6)$	$(6, -3)$
점 C	$(-3, 6)$	$(6, -3)$	$(6, 3)$	$(6, -3)$	$(6, 3)$	$(6, 3)$
무게중심 (a, b)	$(-5, 2)$	$(-2, -1)$	$(-2, 1)$	$(-1, 0)$	$(-1, 2)$	$(2, -1)$
$ 2a + b - 30 $	38	35	33	32	30	27

점 A	$(-6, 3)$	$(-6, 3)$	$(-6, 3)$	$(-3, 6)$
점 B	$(-3, 6)$	$(-3, 6)$	$(6, -3)$	$(6, -3)$
점 C	$(6, -3)$	$(6, 3)$	$(6, 3)$	$(6, 3)$
무게중심 (a, b)	$(-1, 2)$	$(-1, 4)$	$(2, 1)$	$(3, 2)$
$ 2a + b - 30 $	30	28	25	22

그러므로 $|2a + b - 30| \leq 30$ 을 만족하는 총 경우의 수는 6이다.

2

각 $F_1E_1G_1$ 은 호 F_1G_1 에 대한 원주각이므로 $\angle F_1E_1G_1 = \frac{\pi}{4}$ 이다. 삼각형 $E_1F_1G_1$ 에서 $\angle E_1F_1G_1 = \frac{3\pi}{4} - \theta$ 이고 삼각형 $C_1F_1G_1$ 에서 $\overline{C_1F_1} = \overline{C_1G_1}$ 이므로 $\angle C_1F_1G_1 = \frac{\pi}{4}$ 이다. 그러므로 $\angle B_1F_1E_1 = \theta$ 이다.

두 직선 B_1C_1 과 B_2C_2 가 평행하므로 $\angle C_2B_2F_1 = \angle B_1F_1E_1 = \theta$, $\angle B_2C_2F_1 = \angle C_1F_1C_2 = \frac{\pi}{4}$ 이다.

또한, 두 직선 C_1D_1 과 C_2D_2 가 평행하므로 $\angle D_2C_2G_1 = \angle C_1G_1C_2 = \frac{\pi}{4}$ 이다. 그러므로 두 삼각형 $B_2C_2F_1$ 과 $G_1C_2D_2$ 는 서로 닮음이다. $\overline{C_2F_1} = a$ 라 하면 $\overline{C_2G_1} = \sqrt{2} - a$ 이고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이를 r 이라 하면 두 삼각형 $B_2C_2F_1$ 과 $G_1C_2D_2$ 는 서로 닮음이므로 $\overline{C_2D_2} : \overline{C_2G_1} = \overline{C_2F_1} : \overline{C_2B_2} \Leftrightarrow r : (\sqrt{2} - a) = a : r \Leftrightarrow r^2 = a(\sqrt{2} - a)$ 이다.

삼각형 $B_2C_2F_1$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{C_2F_1}}{\sin \angle C_2B_2F_1} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\sin \angle B_2F_1C_2} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \theta)}$$

이다. 사인함수의 덧셈정리에 의하여

$$r = a \frac{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2} a (1 + \cot \theta)$$

이다. a 와 r 이 만족시키는 두 식으로부터

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{(1 + \cot \theta)^2 + 2}, \quad r = \frac{2(1 + \cot \theta)}{(1 + \cot \theta)^2 + 2}$$

이다. $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 이므로 $\cot \theta = \frac{1}{2}$, $r = \frac{12}{17}$ 이고,

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 은 첫째항이 4, 공비가 $\frac{r^2}{4}$ 인 등비급수이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{4}{1 - \frac{r^2}{4}} = \frac{1156}{253}$ 이다.

3

두 직선 BM과 PN은 점 S에서 만나므로 두 직선은 하나의 평면을 결정한다. 두 직선 BP와 MN은 한 평면 위에 있으면서 서로 평행한 두 평면 ABC와 DEF에 각각 포함되어 있으므로, 이 두 직선은 서로 평행하다. 점 P에서 평면 DEF에 내린 수선의 발을 P'이라 하면 두 직선 EP'과 MN도 서로 평행하며 두 직선 EP'과 QR은 서로 수직이다. 그러므로 점 P'에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라 하면, 두 삼각형 P'EH와 RQE는 서로 닮음임을 알 수 있다.

점 P'은 선분 DF를 2 : 1로 내분하므로 $\overline{P'F} = \sqrt{2}$ 이며 $\overline{P'H} = \overline{HF} = 1$ 이고 따라서 $\overline{EH} = 2$ 이다.

그러므로 $\overline{EQ} : \overline{ER} = \overline{EH} : \overline{P'H} \Leftrightarrow t : (3-t) = 2 : 1$ 이고 $t = 2$ 이다.

$\overline{ER} = 1$ 이므로 $\overline{RH} = 1$, $\overline{P'R} = \sqrt{2}$ 이고 $\overline{PR} = \sqrt{\overline{PP'}^2 + \overline{P'R}^2} = \sqrt{38}$ 이다. 점 P' 에서 선분 EQ 에 내린 수선의 발은 선분 EQ 의 중점이 되므로 $\overline{P'Q} = \overline{P'E} = \sqrt{5}$ 이고 $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PP'}^2 + \overline{P'Q}^2} = \sqrt{41}$ 이다.

삼각형 PQR 에서 코사인법칙에 의하여 $\cos \angle QPR = \frac{41 + 38 - 5}{2\sqrt{41} \times \sqrt{38}} = \frac{37}{\sqrt{1558}}$ 이므로 $\sin \angle QPR = \frac{3\sqrt{21}}{\sqrt{1558}}$ 이다.

즉, 삼각형 PQR 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{PR} \times \sin \angle QPR = \frac{3\sqrt{21}}{2}$ 이다. 삼각형 PQR 의 평면 DEF 위로의 정사영은 삼각형 $P'QR$ 이고 삼각형 $P'QR$ 의 넓이는 (삼각형 DEF 의 넓이) - (삼각형 DQP' 의 넓이) - (삼각형 QER 의 넓이) - (삼각형 $P'RF$ 의 넓이) $= \frac{9}{2} - 1 - 1 - 1 = \frac{3}{2}$ 이다. 따라서 $\cos \theta = \frac{\sqrt{21}}{21}$ 이다.

■ 채점 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	20	삼각형을 구성하는 세 점의 무게중심의 좌표를 모두 구하였는가?	10
		조건에 맞는 경우의 수를 모두 구하였는가?	10
2	40	삼각형 $B_2C_2F_1$ 과 $G_1C_2D_2$ 가 닮음을 보였는가?	15
		정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이와 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 합을 구하였는가?	25
3	40	조건을 만족하는 t 의 값을 구하였는가?	20
		$\cos \theta$ 의 값을 구하였는가?	20

오후2 · 문제 2

[문제 2] 다음 물음에 답하십시오. (50점)

1. 자연수
- n
- (
- $n \geq 3$
-)에 대하여 닫힌구간
- $[0, 1]$
- 에서 정의된 함수

$$f(x) = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^n}$$

의 최댓값과 최솟값을 구하십시오.

2. $k > 1$ 인 실수 k 에 대하여 함수 $f(x) = -x^3 + \left(\frac{1}{k} + 1\right)x^2 - \left(\frac{1}{k} + 1\right)x$ 가 있고, $0 \leq s \leq 1$ 인 실수 s 에 대하여 두 점 $A(\sqrt[8]{1-s^8}, s)$ 와 $B(\sqrt[8]{1-(f(s))^8}, f(s))$ 가 있다. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ 인 점 $M(g(s), h(s))$ 가 $(g(s))^8 + (h(s))^8 \geq 1 - \frac{1}{k^8}$ 을 만족시킬 때, $\{\sqrt[8]{1-s^8} - \sqrt[8]{1-(f(s))^8}\}^8 + \{s - f(s)\}^8$ 의 최댓값을 구하십시오. (단, O 는 원점이다.)
3. 자연수 n 에 대하여 함수 $g(x)$ 는 $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2nx + n^2 + 2 & (x \leq 0) \\ x^2 - 6nx + n^2 + 2 & (x > 0) \end{cases}$ 이다. 다음 조건을 만족시키는 양수 k 를 a_n 이라 하자.

실수 s 에 대하여 곡선 $y = |g(x) + k|$ 와 직선 $y = s$ 의 교점의 개수를 $h(s)$ 라 하자.

함수 $h(s)$ 가 $s = p$ 에서 불연속이 되도록 하는 실수 p 의 개수는 2이다.

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하십시오.

■ 예시 답안

1

$$f(x) = \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^n} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= n \cdot \frac{((1+x)^{n-1} - (1-x)^{n-1})(1+x^n) - x^{n-1}((1+x)^n + (1-x)^n)}{(1+x^n)^2} \\ &= n \cdot \frac{(1+x)^{n-1}((1+x^n) - x^{n-1}(1+x)) - (1-x)^{n-1}((1+x^n) + (1-x)x^{n-1})}{(1+x^n)^2} \\ &= n \cdot \frac{(1+x)^{n-1}(1-x^{n-1}) - (1-x)^{n-1}(1+x^{n-1})}{(1+x^n)^2} \quad \dots(*) \end{aligned}$$

$0 < x < 1$ 이면 $x^{n-1} < x$ 이므로

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{n-1} \geq \frac{1+x}{1-x} > \frac{1+x^{n-1}}{1-x^{n-1}}$$

그러므로

$$(1+x)^{n-1}(1-x^{n-1}) > (1+x^{n-1})(1-x)^{n-1}$$

즉, (*)의 분자의 값이 양수이다.

열린구간 $(0, 1)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로, 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(1) = 2^{n-1}$ 이고, 최솟값은 $f(0) = 2$ 이다.

2

문제 (1)로부터, $0 \leq x \leq 1$ 에 대하여 $F(x) = \frac{(1+x)^8 + (1-x)^8}{1+x^8} \geq 2$ 이다.

실수 a, b 에 대하여

(i) $a, b > 0$ 이면서 $a \geq b > 0$ 인 경우, $1 \geq \frac{b}{a} > 0$ 이므로 $F\left(\frac{b}{a}\right) \geq 2$ 이다.

(ii) $a, b > 0$ 이면서 $b \geq a > 0$ 인 경우, 마찬가지로 $F\left(\frac{a}{b}\right) \geq 2$ 이다. 따라서, 두 경우 모두 $(a+b)^8 + (a-b)^8 \geq 2(a^8 + b^8)$ 이다.

따라서 (i)과 (ii)에 의하여,

$$a, b > 0 \text{이면 } (a+b)^8 + (a-b)^8 \geq 2(a^8 + b^8) \dots \textcircled{A}$$

(iii) $a > 0, -b > 0$ 인 경우, $-a > 0, b > 0$ 인 경우, $-a > 0, -b > 0$ 인 경우 모두 $\textcircled{A}$ 에 의하여 $(a+b)^8 + (a-b)^8 \geq 2(a^8 + b^8)$ 이다. 또한, $a = 0$ 또는 $b = 0$ 인 경우, $(a+b)^8 + (a-b)^8 \geq 2(a^8 + b^8)$ 이다.

따라서,

$$\text{실수 } a, b \text{에 대하여 } (a+b)^8 + (a-b)^8 \geq 2(a^8 + b^8) \dots \textcircled{B}$$

함수 $F(x)$ 는 $x = 0$ 에서 최솟값을 가지므로

부등식 $(a+b)^8 + (a-b)^8 \geq 2(a^8 + b^8)$ 의 등호가 성립하는 경우는 $a = 0$ 또는 $b = 0$ 이다. $\dots(*)$

한편, $0 \leq s \leq 1$ 에 대하여 $f(s) = -s^3 + \left(\frac{1}{k} + 1\right)s^2 - \left(\frac{1}{k} + 1\right)s = -s(s-1)\left(s - \frac{1}{k}\right) - s$ 는 $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ 이다.

그리고 $f'(s) = -3s^2 + 2\left(\frac{1}{k} + 1\right)s - \left(\frac{1}{k} + 1\right)$ 의 이차항의 계수가 음수이고,

$k > 1$ 에서 판별식 $\left(\frac{1}{k} + 1\right)^2 - 3\left(\frac{1}{k} + 1\right) = \left(\frac{1}{k} - 2\right)\left(\frac{1}{k} + 1\right) < 0$ 이므로 $f'(s) < 0$ 이다. 따라서 $-1 \leq f(s) \leq 0$ 을 만족시킨다.

$$a = \frac{\sqrt[8]{1-s^8} + \sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2}, b = \frac{\sqrt[8]{1-s^8} - \sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2} \text{이면, } a+b = \sqrt[8]{1-s^8}, a-b = \sqrt[8]{1-(f(s))^8}.$$

$\textcircled{B}$ 에 $a+b, a-b$ 를 대입하면

$$(1-s^8) + (1-(f(s))^8) \geq 2 \left(\left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8} + \sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2} \right)^8 + \left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8} - \sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2} \right)^8 \right) \dots \textcircled{C}$$

한편, ㉠에 $a = \frac{s+f(s)}{2}$, $b = \frac{s-f(s)}{2}$ 을 대입하면

$$s^8 + (f(s))^8 \geq 2 \left(\left(\frac{s+f(s)}{2} \right)^8 + \left(\frac{s-f(s)}{2} \right)^8 \right) \dots \textcircled{B}$$

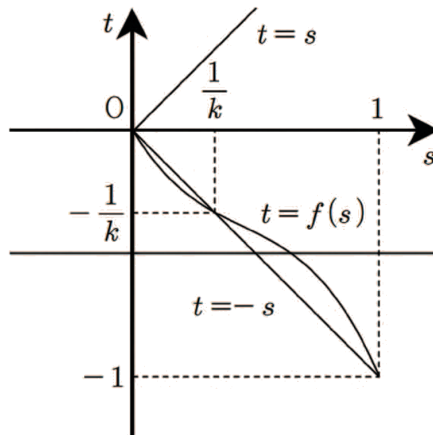
㉡과 ㉢를 더하면

$$\begin{aligned} 2 &= (1-s^8) + (1-(f(s))^8) + s^8 + (f(s))^8 \\ &\geq 2 \left(\left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8} + \sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2} \right)^8 + \left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8} - \sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2} \right)^8 + \left(\frac{s+f(s)}{2} \right)^8 + \left(\frac{s-f(s)}{2} \right)^8 \right) \\ &= 2 \left((g(s))^8 + \left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8} - \sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2} \right)^8 + (h(s))^8 + \left(\frac{s-f(s)}{2} \right)^8 \right) \\ &\quad \left(\because \frac{\sqrt[8]{1-s^8} + \sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2} = g(s), \frac{s+f(s)}{2} = h(s) \right) \\ &\geq 2 \left(1 - \left(\frac{1}{k} \right)^8 + \left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8} - \sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2} \right)^8 + \left(\frac{s-f(s)}{2} \right)^8 \right) \\ &\quad \left(\because (g(s))^8 + (h(s))^8 \geq 1 - \frac{1}{k^8} \right) \end{aligned}$$

따라서

$$\left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8} - \sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2} \right)^8 + \left(\frac{s-f(s)}{2} \right)^8 \leq \left(\frac{1}{k} \right)^8 \dots \textcircled{C}$$

따라서, (*)에 의하여 ㉢의 등호가 성립하기 위해서는 $s = f(s)$ 혹은 $s = -f(s)$ 이므로,



이 경우를 만족시키는 s 의 값은 $0, 1, \frac{1}{k}$ 이다.

① $s = 0$ 인 경우, $f(0) = 0$ 이므로, ㉢의 좌변이 0이다.

② $s = 1$ 인 경우, $f(1) = -1$ 이므로, $(g(s), h(s)) = (0, 0)$.

따라서, $(g(s))^8 + (h(s))^8 \geq 1 - \frac{1}{k^8}$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.

③ $s = \frac{1}{k}$ 인 경우, $f\left(\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k}$ 이므로, ㉢의 좌변이 $\left(\frac{1}{k}\right)^8$ 이다. 따라서, 등호가 성립한다.

또한, $\left(g\left(\frac{1}{k}\right)\right)^8 + \left(h\left(\frac{1}{k}\right)\right)^8 = 1 - \frac{1}{k^8}$ 이다.

그러므로, ①과 ③에 의하여 $\left(\frac{\sqrt[8]{1-s^8} - \sqrt[8]{1-(f(s))^8}}{2}\right)^8 + (s-f(s))^8$ 의 최댓값은 $\frac{256}{k^8}$ 이다.

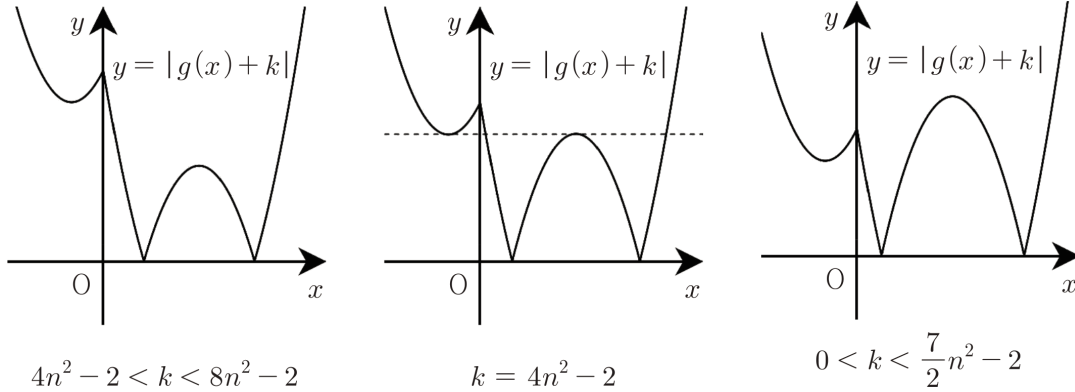
*참고 : 함수 $F(x)$ 의 최댓값이 2^7 임을 이용하여 부등식 ㉠을 증명할 수 있다.

양수 $a > b > 0$ 에 대하여, $u = \frac{a+b}{2}$, $v = \frac{a-b}{2}$ 라 하면 $u > v > 0$. $F\left(\frac{v}{u}\right) \leq 2^7$ 이므로,
 $(a+b)^8 + (a-b)^8 \geq 2(a^8 + b^8)$.

3

k 의 값을 기준으로 경우를 나누면 다음과 같다.

- (i) $k \geq 8n^2 - 2$ 일 때, 함수 $h(s)$ 는 $s = k + n^2 + 2, k + 2, k - 8n^2 + 2$ 에서 불연속임을 알 수 있다.
 - (ii) $4n^2 - 2 < k < 8n^2 - 2$ 일 때, 함수 $h(s)$ 는 $s = k + n^2 + 2, k + 2, -k + 8n^2 - 2, 0$ 에서 불연속이다.
 - (iii) $k = 4n^2 - 2$ 일 때, 함수 $h(s)$ 는 $s = k + n^2 + 2, 0$ 에서 불연속이다.
 - (iv) $\frac{7}{2}n^2 - 2 < k < 4n^2 - 2$ 일 때, 함수 $h(s)$ 는 $s = k + n^2 + 2, -k + 8n^2 - 2, k + 2, 0$ 에서 불연속이다.
 - (v) $k = \frac{7}{2}n^2 - 2$ 일 때, 함수 $h(s)$ 는 $s = k + n^2 + 2, k + 2, 0$ 에서 불연속이다.
 - (vi) $0 < k < \frac{7}{2}n^2 - 2$ 일 때, 함수 $h(s)$ 는 $s = -k + 8n^2 - 2, k + n^2 + 2, k + 2, 0$ 에서 불연속이다.
- (ii), (iii), (vi)의 경우 함수 $|g(x) + k|$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $a_n = 4n^2 - 2$ 이고 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 4 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 2 \times 10 = 1520$ 이다.

■ 채점 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	함수 $f'(x)$ 를 구하였는가?	10
		닫힌구간에서 함수 $f(x)$ 가 증가함을 파악하고 $f(x)$ 의 최솟값과 최댓값을 구하였는가?	20
2	40	닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 파악하였는가?	20
		문항 1로부터 얻어지는 부등식을 이용하여 주어진 함수의 최댓값을 찾았는가?	20
3	30	k 의 값을 기준으로 경우를 나누어 $h(s)$ 가 불연속인 s 의 값을 찾았는가?	20
		여러 가지 수열의 합을 구하였는가?	10

2025학년도 자연계열

오전 · 문제 1

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

제시문

각 자릿수가 0 또는 1이고, 일의 자리를 제외한 각 자리에 나타나는 0의 개수의 합이 1 이하인 모든 자연수의 집합을 A 라 하자. 또한 자연수 n 에 대하여 집합 $A_n = \{x \mid x \in A \text{ 이고 } n-1 \leq \log_{10} x < n\}$ 이라 하자. 예를 들어, 11101110, 11111110은 집합 A_8 의 원소이고 11111001은 집합 A_8 의 원소가 아니다.

60보다 큰 자연수 r 에 대하여, 집합 A 의 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열하여 첫 번째부터 r 번째까지의 숫자를 크기와 모양이 같은 카드에 한 개씩 적어 상자에 넣었다. 이 상자에서 임의로 한 장의 카드를 뽑을 때 그 카드에 적힌 숫자가 10^5 보다 크고 10^9 보다 작은 수일 확률이 $\frac{4}{7}$ 이다. 이 상자에서 임의로 한 장의 카드를 뽑아 그 카드에 적힌 숫자에 나타나는 0의 개수를 확률변수 X 라 하자.

1. r 의 값을 구하시오.
2. $V(X)$ 의 값을 구하시오.
3. 집합 A_n 의 원소에 나타나는 숫자 1의 총 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어, $A_2 = \{10, 11\}$ 이므로 $a_2 = 3$ 이다. 이때 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값을 구하시오.

※ 대학에서 이 문항의 예시답안과 채점기준을 공개하지 않았습니다.

오전 · 문제 2

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

제시문

[가] 함수 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ 과 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 인 실수 t 에 대하여 점 $A(t, f(t))$ 가 있다. 점 A 가 아닌 곡선 $y = f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 B, C 에 대하여 점 B 에서의 접선과 점 C 에서의 접선이 모두 점 A 를 지날 때, 직선 AB , 직선 AC 와 x 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $g(t)$ 라 하자.

[나] 자연수 n 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 40n^4$ 과 직선 $y = -3x + 10n$ 이 만나는 서로 다른 두 점을 P_n, Q_n 이라 하자. 선분 P_nQ_n 위의 점 중 x 좌표가 정수인 점의 개수를 T_n 이라 하자.

[다] 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n a_k = T_n + 1$ 을 만족시킨다.

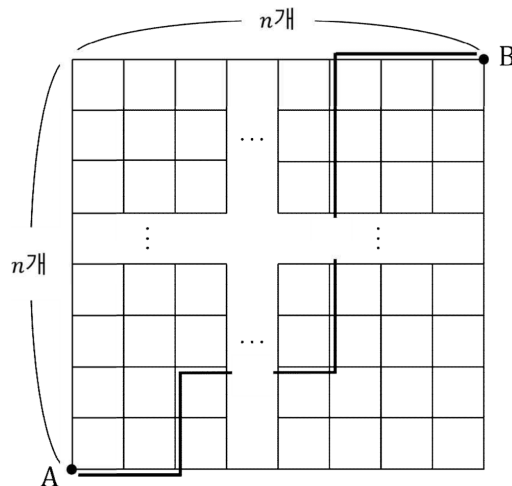
1. $g(t)$ 를 t 에 대한 식으로 나타내시오.
2. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하시오.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g''\left(\frac{a_k + 4}{16n}\right)$ 의 값을 구하시오.

※ 대학에서 이 문항의 예시답안과 채점기준을 공개하지 않았습니다.

오후1 · 문제 1

[문제 1] 다음 물음에 답하십시오. (50점)

- $20 \leq \int_1^2 (2x^3 + 3ax^2 + bx)dx \leq 30$ 을 만족시키는 5 이하의 두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하십시오.
- 그림과 같이 정사각형이 가로로 n 개, 세로로 n 개씩 놓여 있는 정사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 지점 A에서 출발하여 지점 B까지 최단 거리로 갈 때, 지점 A와 지점 B를 제외하고 이동 방향이 바뀌는 지점의 개수가 4인 경우의 수를 $f(n)$, 이동 방향이 바뀌는 지점의 개수가 7인 경우의 수를 $g(n)$ 이라 하자. $f(6)$ 과 $\sqrt{2 \times g(32)}$ 의 값을 구하십시오.
(오른쪽 그림에서 굵은 선은 이동 방향이 바뀌는 지점의 개수가 4인 경로 중 하나이다.)



- 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

제시문

[가] $g(x)$ 는 삼차함수이고, $g(0) = g(3) = 0$, $g'(0) > 0$, $g'(0)g'(3) = 9$ 이다.

[나] 자연수 n 에 대하여 $a_n = 9 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \right)$ 이고,

$a_1 \leq x < a_2$ 일 때 $f(x) = g(x)$,

$a_n \leq x < a_{n+1}$ ($n = 2, 3, 4$)일 때 $f(x) = \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} f \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} (x - a_{n+1}) + 3 \right)$ 이다.

[다] $f(x)$ 는 닫힌구간 $[a_1, a_5]$ 에서 연속이고, 열린구간 (a_1, a_5) 에서 미분가능하다.

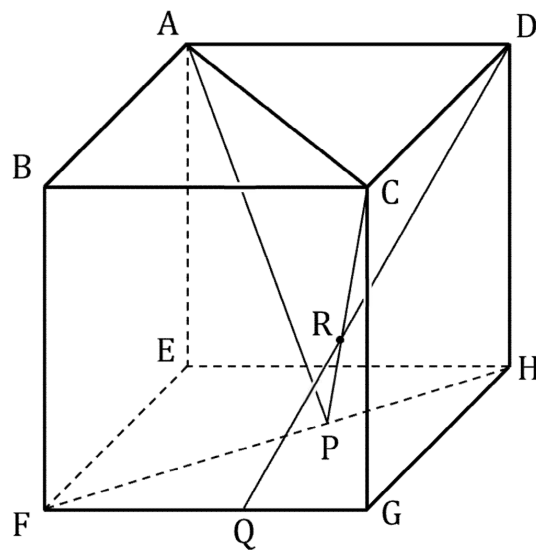
이때 $\int_{a_1}^{a_5} |f(x)| dx$ 의 값을 구하십시오.

※ 대학에서 이 문항의 예시답안과 채점기준을 공개하지 않았습니다.

오후1 · 문제 2

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 자연수 n 에 대하여, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때 두 곡선 $y = \sin x$ 와 $y = \frac{n}{n+1} \tan x$ 가 만나는 점을 P_n 이라 하자. 점 P_n 에서의 곡선 $y = \sin x$ 의 접선을 l_1 , 점 P_n 에서의 곡선 $y = \frac{n}{n+1} \tan x$ 의 접선을 l_2 라 하자. 두 직선 l_1, l_2 와 x 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 S_n$ 의 값을 구하시오.
2. 점 F 를 초점으로 하는 포물선 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) 위에 원점이 아닌 점 $P(x_1, y_1)$ 이 있다. 점 P 에서 포물선에 접하는 직선이 직선 $x = -p$ 와 만나는 점을 Q 라 하고, 점 Q 와 y 좌표가 같은 포물선 위의 점을 P' 이라 하자. 각 FPF' 의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta = \frac{1}{5}$ 이다.
 x_1 을 p 에 대한 식으로 나타내시오.
3. 한 변의 길이가 4인 정육면체 $ABCD - EFGH$ 가 있다. 선분 FH 위의 한 점 P 와 선분 FG 위의 한 점 Q 에 대하여 선분 CP 와 선분 DQ 가 한 점 R 에서 만나고, $\overline{DR} : \overline{RQ} = 4 : 3$ 이다. 평면 APC 와 평면 $EFGH$ 가 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



※ 대학에서 이 문항의 예시답안과 채점기준을 공개하지 않았습니다.

오후2 · 문제 1

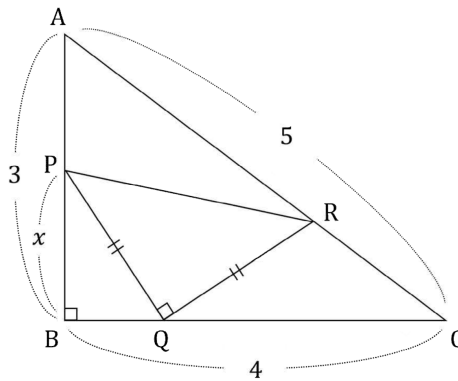
[문제 1] 다음 물음에 답하십시오. (50점)

- 곡선 $y = x^3 + 3x^2 - x - 6$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 곡선을 $y = g(x)$ 라 하자. 모든 실수 x 에 대하여 $g(-x) = -g(x)$ 가 성립할 때, m 과 n 의 값을 구하고, 이 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하십시오.
- 세 변 AB , BC , CA 의 길이가 각각 3, 4, 5인 삼각형 ABC 가 있다. 삼각형 PQR 은 다음 조건을 만족시킨다.

<가> 꼭짓점 P , Q , R 은 각각 선분 AB , BC , CA 위에 있다.

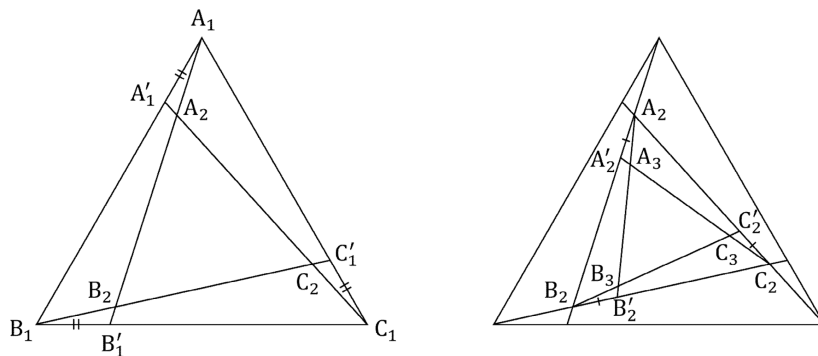
<나> 두 선분 PQ 와 QR 은 서로 수직이고 $\overline{PQ} = \overline{QR}$ 이다.

$\overline{BP} = x$ ($0 \leq x \leq 3$)라 할 때, 삼각형 PQR 의 넓이를 x 에 대한 식으로 나타내고, 삼각형 PQR 의 넓이가 최소가 되게 하는 x 의 값을 구하십시오.



- 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 과 $0 < t < \frac{1}{2}$ 인 상수 t 에 대하여 점 A'_1, B'_1, C'_1 은 각각 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 위에 있고, $\overline{A_1A'_1} = t\overline{A_1B_1}, \overline{B_1B'_1} = t\overline{B_1C_1}, \overline{C_1C'_1} = t\overline{C_1A_1}$ 을 만족시킨다. 아래 그림과 같이 선분 $A_1B'_1$ 과 $C_1A'_1$ 이 만나는 점을 A_2 , 선분 $B_1C'_1$ 과 $A_1B'_1$ 이 만나는 점을 B_2 , 선분 $C_1A'_1$ 과 $B_1C'_1$ 이 만나는 점을 C_2 라 하면 삼각형 $A_2B_2C_2$ 는 정삼각형이다.

정삼각형 $A_2B_2C_2$ 에도 같은 방법을 적용하여, 각각 변 A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2 위에 있고 $\overline{A_2A'_2} = t\overline{A_2B_2}, \overline{B_2B'_2} = t\overline{B_2C_2}, \overline{C_2C'_2} = t\overline{C_2A_2}$ 를 만족시키는 점을 각각 A'_2, B'_2, C'_2 이라 하면 선분 $A_2B'_2$ 과 $C_2A'_2$ 이 만나는 점 A_3 , 선분 $B_2C'_2$ 과 $A_2B'_2$ 이 만나는 점 B_3 , 선분 $C_2A'_2$ 과 $B_2C'_2$ 이 만나는 점 C_3 을 세 꼭짓점으로 하는 정삼각형 $A_3B_3C_3$ 을 얻는다. 이와 같은 과정을 반복하여 정삼각형 $A_nB_nC_n$ ($n \geq 2$)을 얻을 수 있다. 자연수 n 에 대하여 정삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 넓이를 s_n 이라 하자. $s_2 = rs_1$ 을 만족시키는 r 을 t 에 대한 식으로 나타내고, $\sum_{n=1}^{\infty} s_n = 3s_1$ 을 만족시키는 t 의 값을 구하십시오.



※ 대학에서 이 문항의 예시답안과 채점기준을 공개하지 않았습니다.

오후2 · 문제 2

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하십시오. (50점)

제시문

[가] 실수 전체의 집합에서 두 번 미분가능하고 이계도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = e^x(3 \sin x - \cos x) + 2 \int_0^x f''(t)(x-t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t f''(t) dt$$

를 만족시킨다.

[나] 함수 $p(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.(ㄱ) 함수 $p(x)$ 는 사차함수이다.(ㄴ) 모든 실수 x 에 대하여

$$p(x) = 4x^4 + \int_0^x p''(t)(3x-5t) dt + \frac{3}{2} \int_0^2 tp(t) dt$$

이다.

(ㄷ) 함수 $p(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 증가한다.(ㄹ) 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $q(x)$ 를 $q(x) = p(x)$ 로 정의하자.함수 $q(x)$ 의 역함수를 $r(x)$ 라 할 때, x 축, y 축, 직선 $y = 1$ 과곡선 $y = r(x)$ ($q(0) \leq x \leq q(1)$)로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\frac{159}{5}$ 이다.

1. $f(0)$ 의 값을 구하십시오.
2. 제시문 <나>의 조건 중 (ㄱ), (ㄴ)만을 이용하여 $\int_0^3 p(x) dx$ 의 값을 구하십시오.
3. $p(1)$ 의 값을 구하십시오.

※ 대학에서 이 문항의 예시답안과 채점기준을 공개하지 않았습니다.

2024학년도 자연계열

오전 · 문제 1

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

제시문

<가> 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하고,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = -4, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 20$$

이 성립한다.

<나> 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (1) 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α, β ($\alpha < \beta$)를 갖고, $\int_0^{\alpha} |f(x)| dx = \frac{50}{3}$ 이다.
- (2) 함수 $|f(x)|$ 는 $x = 6$ 에서 미분가능하고, 곡선 $y = |f(x)|$ 위의 점 $(6, |f(6)|)$ 에서의 접선의 y 절편이 $|f(0)|$ 이다.

<다> $x > 0$ 에서 정의된 함수 $g(x) = e^{-x} |\cos x|$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (1) $b_1 < 1$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $b_{n+1} < b_n$ 이다.
- (2) $b_1 < k < 1$ 인 모든 실수 k 에 대하여 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수는 1이다.
- (3) 모든 자연수 n 과 $b_{n+1} < k < b_n$ 인 모든 실수 k 에 대하여 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수는 $2n + 1$ 이다.

1. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{4n-1}$ 의 합이 될 수 있는 값을 모두 구하시오.
2. $f(10)$ 의 값을 구하시오.
3. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 합을 구하시오.

■ 예시 답안

1.

$a_n = ar^{n-1}$ ($-1 < r < 1$)이라고 하면 $|a_n| = |a| |r|^{n-1}$, $a_{2n} = ar^{2n-1} = ar \times r^{2(n-1)}$ 이다.

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{ar}{1-r^2} = -4$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{|a|}{1-|r|} = 20$ 이다.

(경우 1) $a > 0$, $0 < r < 1$ 이면, $-4 = \frac{ar}{1-r^2} = \frac{a}{1-r} \frac{r}{1+r} = \frac{20r}{1+r} \Rightarrow 5r = -(1+r) \Rightarrow r = -\frac{1}{6} < 0$ 이다. 따라서 모순이다.

(경우 2) $a > 0$, $-1 < r < 0$ 이면, $-4 = \frac{ar}{1-r^2} = \frac{a}{1+r} \frac{r}{1-r} = \frac{20r}{1-r} \Rightarrow 5r = -(1-r) \Rightarrow r = -\frac{1}{4}$ 이고 $a = 20(1+r) = 15$

(경우 3) $a < 0$, $0 < r < 1$ 이면, $-4 = \frac{ar}{1-r^2} = \frac{-a}{1-r} \frac{-r}{1+r} = -\frac{20r}{1+r} \Rightarrow 5r = 1+r \Rightarrow r = \frac{1}{4}$ 이고 $a = -20(1-r) = -15$

(경우 4) $a < 0$, $-1 < r < 0$ 이면, $-4 = \frac{ar}{1-r^2} = \frac{-a}{1+r} \frac{-r}{1-r} = -\frac{20r}{1-r} \Rightarrow 5r = 1-r \Rightarrow r = \frac{1}{6} > 0$ 이다. 따라서 모순이다.

(참고) $ar = -4(1-r^2) < 0$ 임을 이용하여 (경우 2)와 (경우 3)만 바로 고려할 수 있다.

한편, $a_{4n-1} = ar^{4n-2} = ar^2 \times r^{4(n-1)}$ 이므로 $l = \sum_{n=1}^{\infty} a_{4n-1}$ 이라 하면 $l = \frac{ar^2}{1-r^4}$

$$(a, r) = \left(15, -\frac{1}{4}\right) \text{ 이면 } l = \frac{15 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^2}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^4} = \frac{\frac{15}{4^2}}{\frac{4^4-1^4}{4^4}} = \frac{15 \times 16}{(16+1)(16-1)} = \frac{16}{17},$$

$$(a, r) = \left(-15, \frac{1}{4}\right) \text{ 이면 } l = \frac{-15 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4} = \frac{-\frac{15}{4^2}}{\frac{4^4-1^4}{4^4}} = \frac{-15 \times 16}{(16+1)(16-1)} = -\frac{16}{17}$$

따라서 l 이 될 수 있는 모든 값은 $\frac{16}{17}, -\frac{16}{17}$

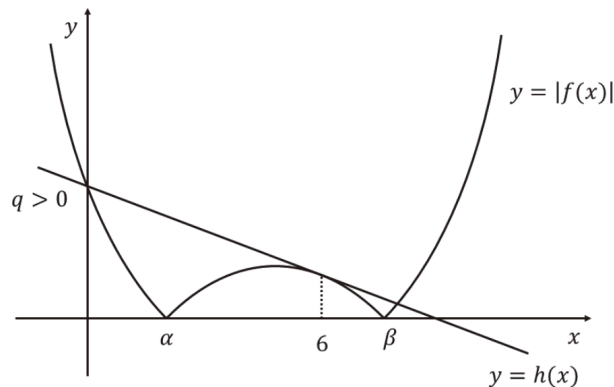
2.

$\alpha = 0$ 이면 $0 = \int_0^{\alpha} |f(x)| dx = \frac{50}{3}$ 이므로 모순이다.

$\alpha < 0$ 이면 $\int_0^{\alpha} |f(x)| dx = -\int_{\alpha}^0 |f(x)| dx$ 이고

$\int_{\alpha}^0 |f(x)| dx$ 은 곡선 $y = |f(x)|$ 과 x 축 및 두 직선 $x = \alpha$, $x = 0$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 양수이다.

$\frac{50}{3} = \int_0^{\alpha} |f(x)| dx < 0$ 이므로 모순이다.



따라서 $0 < \alpha < \beta$ 이고 $f(x) = x^2 + px + q$ 라 하면 $q = \alpha\beta > 0$ 이다. $y = h(x)$ 를 곡선 $y = |f(x)|$ 위의 점 $(6, |f(6)|)$ 에서의 접선의 방정식이라 하자. $f(6) > 0$ 이라 하면,

$$h(x) = f'(6)(x-6) + f(6) = (12+p)(x-6) + (36+6p+q)$$

$$h(0) = -6(12+p) + (36+6p+q) = q-36$$

제시문에 의해 $h(0) = |f(0)| = q$ 이므로 $q-36 = q$ 이지만, 이를 만족시키는 q 는 없으므로 $f(6) > 0$ 이 될 수 없다.

또한 함수 $|f(x)|$ 가 $x=6$ 에서 미분가능하므로 $f(6) \neq 0$ 이다. 따라서 $f(6) < 0$ 이고,

$$h(x) = -f'(6)(x-6) - f(6) = -(12+p)(x-6) - (36+6p+q)$$

$$h(0) = 6(12+p) - (36+6p+q) = 36-q = q, \text{ 즉, } q = 18$$

한편, 이차 방정식의 근과 계수의 관계로부터 $p = -(\alpha + \beta)$, $18 = q = \alpha\beta$ 이다.

따라서 $p = -\left(\alpha + \frac{18}{\alpha}\right)$ 이고 $\alpha^2 < \alpha\beta = 18$, 즉, $0 < \alpha < 3\sqrt{2}$ 또한 $f(6) < 0$ 이므로 $0 < \alpha < 6 < \beta$ 이고 구간 $[0, \alpha)$ 에서 $|f(x)| = f(x) > 0$

$$\int_0^\alpha |f(x)| dx = \int_0^\alpha f(x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}px^2 + qx \right]_0^\alpha = \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}p\alpha^2 + q\alpha = \frac{50}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦의 양변에 6을 곱하면 $2\alpha^3 + 3p\alpha^2 + 6q\alpha = 100$

$$q = 18, p = -\left(\alpha + \frac{18}{\alpha}\right) \text{이므로 } 2\alpha^3 - 3\alpha^2\left(\alpha + \frac{18}{\alpha}\right) + 108\alpha = 2\alpha^3 - 3\alpha^3 - 54\alpha + 108\alpha = -\alpha^3 + 54\alpha = 100$$

이를 정리하면 $\alpha^3 - 54\alpha + 100 = (\alpha-2)(\alpha^2 + 2\alpha - 50) = 0$ 이다. 따라서 $\alpha = 2, -1 - \sqrt{51}, -1 + \sqrt{51}$

그런데 $-1 - \sqrt{51} < 0$ 이고 $-1 + \sqrt{51} > 3\sqrt{2}$ 이므로 $\alpha = 2$ 이다. 그러므로 $\alpha = 2, \beta = 9$ 이고 $p = -(2+9) = -11$

$$f(x) = x^2 - 11x + 18 \text{이므로 } f(10) = 8$$

3.

함수 $P(x)$ 를 $P(x) = e^{-x} \cos x$ 라 하면 $P'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ 라 하면, $P'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin x = \cos x(1 + \tan x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1$

$x = \frac{3\pi}{4}$ 일 때 $\tan x = -1$ 이므로 함수 $P(x)$ 는 $x = \frac{3\pi}{4}$ 에서 극솟값을 갖고 $P\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\pi}$ 이다.

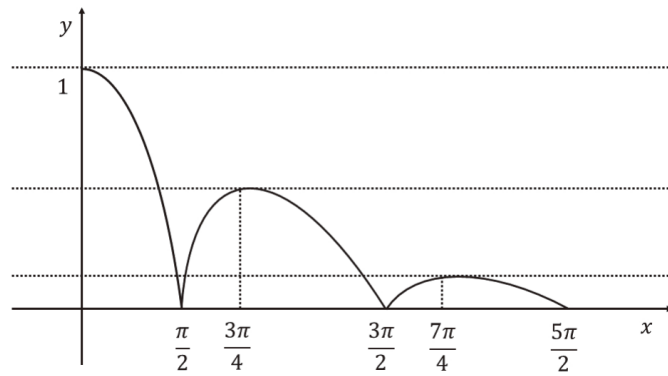
그러므로 함수 $g(x) = |P(x)|$ 는 $x = \frac{3\pi}{4}$ 에서 극댓값을 갖고 $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\pi}$

$\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$ 라 하면, 함수 $g(x) = |P(x)|$ 는 $x = \frac{7\pi}{4}$ 에서 극댓값을 갖고

$g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-2\pi} < g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ 이다. 따라서 $b_1 = g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\pi}$

$\frac{5\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{2}$ 라 하면, 함수 $g(x) = |P(x)|$ 는 $x = \frac{11\pi}{4}$ 에서 극댓값을 갖고

$g\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-3\pi} < g\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ 이다. 따라서 $b_2 = g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-2\pi}$



함수 $y = \tan x$ 가 주기 π 인 주기함수이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\pi}$ 이고 공비가 $e^{-\pi}$ 인 등비수열이다.

$$0 < e^{-\pi} < 1 \text{ 이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}} \times \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)}$$

■ 채점 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	가능한 a 와 r 의 값을 모두 구하였는가?	20
		급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{4n-1}$ 의 합이 될 수 있는 값을 모두 구하였는가?	10
2	40	$\alpha > 0$ 이고 $\beta > 6$ 임을 확인하였는가?	10
		$\alpha\beta = 18$ 을 구하였는가?	10
		$\alpha = 2, \beta = 9$ 및 $f(x) = x^2 - 11x + 18$ 을 얻고 이로부터 $f(10) = 8$ 을 보였는가?	20
3	30	$g(x)$ 의 극댓값을 계산하였는가?	10
		등비수열 b_n 을 구하고, 이로부터 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 합을 구하였는가?	20

오전 · 문제 2

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

제시문

<가> 파란 상자에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있고, 빨간 상자에는 숫자 5가 적혀 있는 공이 4개, 숫자 6이 적혀 있는 공이 3개 들어 있다. 파란 상자에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 공에 적힌 수를 k , 빨간 상자에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때 숫자 5가 적힌 공의 개수를 l 이라 하자.

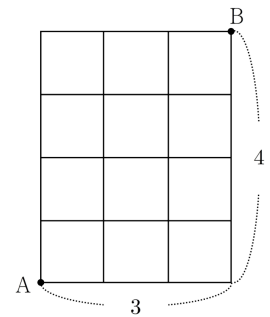
<나>

평균이 10, 표준편차가 4인 확률변수 X 에 대하여, 확률변수 $Y = -0.5X + 5$ 의 평균을 m , 표준편차를 σ 라 하자. 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 추정된 모평균 m 에 대한 신뢰도 98.76%의 신뢰구간은 $a \leq m \leq b$ 이고 신뢰도 86.64%의 신뢰구간은 $c \leq m \leq d$ 이다. 단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, Z 에 대한 확률은 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 계산한다.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

1. 제시문 <가>에서 주어진 k, l 에 대하여 $\frac{k}{l}$ 의 값을 확률변수 W 라 할 때, W 의 기댓값 $E(W)$ 를 구하시오.

2. 제시문 <가>에서 주어진 k, l 에 대하여 가로 길이가 k 이고 세로 길이가 l 인 직사각형을 한 변의 길이가 1인 $k \times l$ 개의 정사각형으로 나눈 도형이 있다. 이 도형의 왼쪽 아래 꼭짓점을 A, 오른쪽 위 꼭짓점을 B라 하자. 예를 들어, 오른쪽 그림은 $k = 3, l = 4$ 인 경우이다. 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변을 따라 점 A에서 점 B까지 최단거리로 이동하는 경우의 수를 확률변수 U 라 할 때, $P(U \leq 10)$ 을 구하시오.



3. 제시문 <나>를 읽고 두 부등식 $1 < b - a$ 와 $d - c < \frac{6}{5}$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

■ 예시 답안

1.

k 는 $\frac{1}{4}$ 의 확률로 1, 2, 3, 4 중 하나의 값을 갖는다. 한편 $l = 1, 2, 3, 4$ 일 때, l 의 값을 확률변수 L 이라 하면, $P(L = l)$ 은 7개의 공에서 5가 적힌 공을 l 개, 6이 적힌 공을 $4 - l$ 개 임의로 동시에 꺼내는 경우의 수를 7개의 공에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수로 나눈 값으로 $P(L = l) = \frac{{}_4C_l \times {}_3C_{4-l}}{{}_7C_4}$ 이다. 확률변수 L 의 확률 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

L	1	2	3	4
$P(L = l)$	$\frac{{}_4C_1 \times {}_3C_3}{{}_7C_4} = \frac{4}{35}$	$\frac{{}_4C_2 \times {}_3C_2}{{}_7C_4} = \frac{18}{35}$	$\frac{{}_4C_3 \times {}_3C_1}{{}_7C_4} = \frac{12}{35}$	$\frac{{}_4C_4 \times {}_3C_0}{{}_7C_4} = \frac{1}{35}$

앞선 결과로부터 확률변수 W 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

W	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4
(k, l)	(1, 4)	(1, 3)	(1, 2), (2, 4)	(2, 3)	(3, 4)	(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)	(4, 3)	(3, 2)	(2, 1), (4, 2)	(3, 1)	(4, 1)
$P(W = w)$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{35} = \frac{1}{140}$	$\frac{1}{4} \times \frac{12}{35} = \frac{12}{140}$	$\frac{1}{4} \times \left(\frac{18+1}{35}\right) = \frac{19}{140}$	$\frac{1}{4} \times \frac{12}{35} = \frac{12}{140}$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{35} = \frac{1}{140}$	$\frac{1}{4} \times \left(\frac{4+12+18+1}{35}\right) = \frac{35}{140}$	$\frac{1}{4} \times \frac{12}{35} = \frac{12}{140}$	$\frac{1}{4} \times \frac{18}{35} = \frac{18}{140}$	$\frac{1}{4} \times \left(\frac{4+18}{35}\right) = \frac{22}{140}$	$\frac{1}{4} \times \frac{4}{35} = \frac{4}{140}$	$\frac{1}{4} \times \frac{4}{35} = \frac{4}{140}$

앞선 표로부터 확률변수 W 의 기댓값은 다음과 같다.

$$E(W) = \frac{1}{140} \left(1 \times \frac{1}{4} + 12 \times \frac{1}{3} + 19 \times \frac{1}{2} + 12 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{3}{4} + 35 \times 1 + 12 \times \frac{4}{3} + 18 \times \frac{3}{2} + 22 \times 2 + 4 \times 3 + 4 \times 4 \right) = \frac{69}{56}$$

2.

k, l 에 대하여 점 A에서 점 B까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 다음과 같다.

$k \backslash l$	1	2	3	4
1	$\frac{2!}{1!1!} = 2$	$\frac{3!}{1!2!} = 3$	$\frac{4!}{1!3!} = 4$	$\frac{5!}{1!4!} = 5$
2	$\frac{3!}{2!1!} = 3$	$\frac{4!}{2!2!} = 6$	$\frac{5!}{2!3!} = 10$	$\frac{6!}{2!4!} = 15$
3	$\frac{4!}{3!1!} = 4$	$\frac{5!}{3!2!} = 10$	$\frac{6!}{3!3!} = 20$	$\frac{7!}{3!4!} = 35$
4	$\frac{5!}{4!1!} = 5$	$\frac{6!}{4!2!} = 15$	$\frac{7!}{4!3!} = 35$	$\frac{8!}{4!4!} = 70$

그리고 k, l 에 대하여 확률변수 U 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

U	2	3	4	5	6	10	15	20	35	70
(k, l)	(1, 1)	(1, 2), (2, 1)	(1, 3), (3, 1)	(1, 4), (4, 1)	(2, 2)	(2, 3), (3, 2)	(2, 4), (4, 2)	(3, 3)	(3, 4), (4, 3)	(4, 4)
$P(U = u)$	$\frac{1}{4} \times \frac{4}{35} = \frac{4}{140}$	$\frac{1}{4} \left(\frac{4}{35} + \frac{18}{35} \right) = \frac{22}{140}$	$\frac{1}{4} \left(\frac{4}{35} + \frac{12}{35} \right) = \frac{16}{140}$	$\frac{1}{4} \left(\frac{4}{35} + \frac{1}{35} \right) = \frac{5}{140}$	$\frac{1}{4} \times \frac{18}{35} = \frac{18}{140}$	$\frac{1}{4} \left(\frac{18}{35} + \frac{12}{35} \right) = \frac{30}{140}$	$\frac{1}{4} \left(\frac{18}{35} + \frac{1}{35} \right) = \frac{19}{140}$	$\frac{1}{4} \times \frac{12}{35} = \frac{12}{140}$	$\frac{1}{4} \left(\frac{12}{35} + \frac{1}{35} \right) = \frac{13}{140}$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{35} = \frac{1}{140}$

이를 근거로 하여 (k, l) 이 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1) 일 때 $U \leq 10$ 을 만족함을 알 수 있다.

$$\text{따라서 } P(U \leq 10) = \frac{4 + 4 + 18 + 4 + 12 + 4 + 1 + 18 + 18 + 12}{140} = \frac{4 \times 4 + 18 \times 3 + 12 \times 2 + 1 \times 1}{35 \times 4} = \frac{19}{28}$$

이다.

3.

$Y = -0.5X + 5$ 이므로 $m = E(Y) = -0.5 E(X) + 5 = 0$, $\sigma = \sigma(Y) = |-0.5| \sigma(X) = 2$ 이다.

표본평균을 $\bar{y}$ 라고 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 98.76%의 신뢰구간은

$\bar{y} - 2.5 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{y} + 2.5 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다. 여기서 $b - a = 2 \times 2.5 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로

$1 < \frac{5\sigma}{\sqrt{n}}$, $\sqrt{n} < 10$, $n < 100$ 가 성립한다.

모평균 m 에 대한 신뢰도 86.64%의 신뢰구간은 $\bar{y} - 1.5 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{y} + 1.5 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.

$d - c = 2 \times 1.5 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로 $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}} < \frac{6}{5}$, $\sqrt{n} > 5$, $n > 25$ 가 성립한다.

따라서 두 부등식 $1 < b - a$ 와 $d - c < \frac{6}{5}$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최댓값과 최솟값은 각각 99와 26이다.

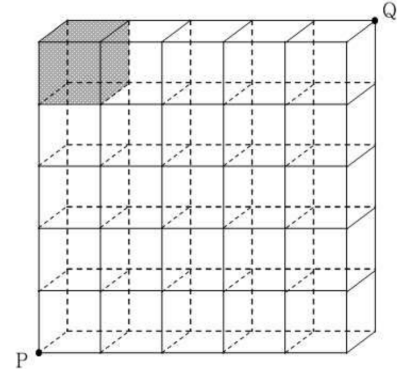
■ 채점 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	k 와 l 에 대하여 확률 $P\left(W = \frac{k}{l}\right)$ 을 구하였는가?	20
		확률변수 W 의 기댓값 $E(W)$ 를 잘 구하였는가?	10
2	40	k 와 l 에 대하여 점 A에서 점 B까지 최단거리로 이동하는 경우의 수를 구하였는가?	20
		앞서 구한 경우의 수를 이용해 $P(U \leq 10)$ 을 잘 구하였는가?	20
3	30	확률변수 $Y = -0.5X + 5$ 의 표준편차와 모평균의 추정된 신뢰구간을 통해 표본의 크기 n 에 대한 부등식을 구하였는가?	20
		부등식을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값과 최솟값을 구하였는가?	10

오후1 · 문제 1

[문제 1] 다음 물음에 답하십시오. (50점)

1. 오른쪽 그림은 크기가 같은 정육면체 25개를 가로로 5개, 세로로 5개씩 쌓아 만든 직육면체이다. 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 P에서 꼭짓점 Q까지 최단거리로 이동할 때, 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나지 않고 이동하는 경우의 수를 구하십시오.



2. 주머니 A에는 숫자 4가 적힌 공이 세 개, 숫자 6이 적힌 공이 두 개, 숫자 8이 적힌 공이 한 개 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 0이 적힌 공이 여섯 개, 숫자 1이 적힌 공이 네 개 들어 있다. 주머니 A에서 한 개의 공을 임의로 꺼낼 때 공에 적힌 수를 a , 주머니 B에서 한 개의 공을 임의로 꺼낼 때 공에 적힌 수를 b 라 하자. 곡선 $y = (x + 7)\left(x^2 - abx + \frac{a}{2} - 6\right)$ 이 x 축과 만나는 세 점 중에서 가장 가까운 두 점 사이의 거리를 확률변수 X 라 할 때, X 의 기댓값 $E(X)$ 를 구하십시오.

3. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{1}{\sin^2 2x}$ 에 대하여 두 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 를

$$g(x) = \int_{\frac{\pi}{6}}^x f(t)dt, \quad h(x) = \int_{\frac{\pi}{6}}^x g(t)dt \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

라 하자. 극한값 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x) + \{g(x)\}^2}{f(x)}$ 을 구하십시오. (단, $\lim_{t \rightarrow 0+} t^2 \ln t = 0$ 이다.)

■ 예시 답안

1.

전체 직육면체에서 꼭짓점 P를 포함하고 정사각형 25개로 이루어진 면을 면 X, 꼭짓점 Q를 포함하고 정사각형 25개로 이루어진 면을 면 Y라고 하자. 꼭짓점 P에서 꼭짓점 Q까지 최단거리로 가려면 가로, 세로 방향으로 정육면체의 모서리를 5개씩 지나고 면 X와 면 Y를 동시에 만나는 정육면체의 모서리를 1개 지난다. 면 X 또는 면 Y에 포함된 정사각형에서 가로 방향으로 이동하는 것을 d , 세로 방향으로 이동하는 것을 e , 면 X와 면 Y를 동시에 만나는 정육면체의 모서리를 따라 이동하는 것을 f 라고 하자. 꼭짓점 Q와 모서리로 연결된 면 X의 꼭짓점을 꼭짓점 R라고 하자. P에서 R까지 최단거리로 이동하는 총 경우의 수는 10개의 문자 $d, d, d, d, d, e, e, e, e, e$ 를 일렬로 나열한 경우의 수로 $\frac{10!}{5! \times 5!} = 252$ 이다.

이 중 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나서 가는 경우의 수는 $1 + 5^2 = 26$ 이다. 그러므로 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나지 않고 P에서 R까지 최단거리로 이동하는 총 경우의 수는 $252 - 26 = 226$ 이다. 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나지 않고 P에서 Q까지 최단거리로 이동하는 경우의 수는 $d, d, d, d, d, e, e, e, e, e, f$ 를 나열하는 경우의 수와 같다. 이러한 나열은 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나지 않고 P에서 R까지 최단거리로 이동하는 경우인 $d, d, d, d, d, e, e, e, e, e$ 문자의 나열에 f 를 하나 넣어서 얻어진다. 각 $d, d, d, d, d, e, e, e, e, e$ 문자의 나열에 f 를 넣는 방법의 수는 11이므로 총 경우의 수는 $226 \times 11 = 2486$ 이다.

2.

$c = ab, d = \frac{a}{2} - 6$ 라 하자. 순서쌍 (a, b) 가 가질 수 있는 값이 $(4, 0), (4, 1), (6, 0), (6, 1), (8, 0), (8, 1)$ 이므로 순서쌍 (c, d) 가 가질 수 있는 값은 $(0, -4), (4, -4), (0, -3), (6, -3), (0, -2), (8, -2)$ 이다. $(ab)^2 - 4\left(\frac{a}{2} - 6\right) = c^2 - 4d \geq 8 > 0$ 이다.

따라서 $(x+7)\left(x^2 - abx + \frac{a}{2} - 6\right) = (x+7)(x^2 - cx + d) = 0$ 은 세 근 $x_1 = -7, x_2 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4d}}{2}, x_3 = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4d}}{2}$ 을 가진다.

(c, d)	$(0, -4)$	$(4, -4)$	$(0, -3)$	$(6, -3)$	$(0, -2)$	$(8, -2)$
x_2	-2	$2 - 2\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	$3 - 2\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	$4 - 3\sqrt{2}$

$x_1 < -2 \leq x_2$ 이므로 $x_1 < x_2 < x_3$ 이다. 세 점 중에서 가장 가까운 두 점 사이의 거리는 $x_2 - x_1 = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4d}}{2} + 7, x_3 - x_2 = \sqrt{c^2 - 4d}$ 를 비교하면 된다.

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 < x_3 - x_2 &\iff \frac{c - \sqrt{c^2 - 4d}}{2} + 7 < \sqrt{c^2 - 4d} \iff c + 14 < 3\sqrt{c^2 - 4d} \text{ 이므로} \\ &\iff c^2 + 28c + 196 < 9(c^2 - 4d) \iff 9d + 49 < c(2c - 7) \end{aligned}$$

순서쌍 (c, d) 가 가질 수 있는 값은 $(6, -3), (8, -2)$, 즉, 순서쌍 (a, b) 가 가질 수 있는 값은 $(6, 1), (8, 1)$ 이다.

한편, $x_2 - x_1 > x_3 - x_2 \iff 9d + 49 > c(2c - 7)$ 이고, 순서쌍 (c, d) 가 가질 수 있는 값은 $(0, -4), (4, -4), (0, -3), (0, -2)$ 이므로, 순서쌍 (a, b) 가 가질 수 있는 값은 $(4, 0), (4, 1), (6, 0), (8, 0)$ 이다.

a	4		6		8	
b	0	1	0	1	0	1
(c, d)	$(0, -4)$	$(4, -4)$	$(0, -3)$	$(6, -3)$	$(0, -2)$	$(8, -2)$
X	4	$4\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$10 - 2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	$11 - 3\sqrt{2}$
$P(X = x)$	$\frac{3}{6} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{10}$	$\frac{3}{6} \times \frac{4}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{2}{6} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{5}$	$\frac{2}{6} \times \frac{4}{10} = \frac{2}{15}$	$\frac{1}{6} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{10}$	$\frac{1}{6} \times \frac{4}{10} = \frac{1}{15}$

확률변수 X 의 기댓값은

$$\begin{aligned} E(X) &= 4 \times \frac{3}{10} + 4\sqrt{2} \times \frac{1}{5} + 2\sqrt{3} \times \frac{1}{5} + (10 - 2\sqrt{3}) \times \frac{2}{15} + 2\sqrt{2} \times \frac{1}{10} + (11 - 3\sqrt{2}) \times \frac{1}{15} \\ &= \frac{49}{15} + \frac{4}{5}\sqrt{2} + \frac{2}{15}\sqrt{3} \end{aligned}$$

3.

함수 $p(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ 에 대해서 $p'(x) = \frac{d}{dx} \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$ 이다. $\frac{d}{dx} p(2x) = 2p'(2x) = -2\frac{1}{\sin^2 2x}$ 을 이용하면

$$g(x) = \int_{\frac{\pi}{6}}^x f(t)dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^x \frac{1}{\sin^2 2t} dt = \left[-\frac{1}{2} p(2t) \right]_{\frac{\pi}{6}}^x = -\frac{\cos 2x}{2 \sin 2x} + \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{2 \sin \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

한편, $\frac{d}{dx} \ln|q(2x)| = \frac{2q'(2x)}{q(2x)}$ 를 이용하면

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{\frac{\pi}{6}}^x g(t)dt = -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^x \left(\frac{\cos 2t}{\sin 2t} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \ln|\sin 2t| - \frac{1}{\sqrt{3}} t \right]_{\frac{\pi}{6}}^x \\ &= -\frac{1}{4} \ln|\sin 2x| + \frac{1}{4} \ln \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}} x - \frac{\pi}{12\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\{g(x)\}^2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\left(-\frac{1}{2} \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2}{\frac{1}{\sin^2 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin 2x \right)^2 = \frac{1}{4} \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{4} \sin^2 2x \ln|\sin 2x| + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin^2 2x + \frac{1}{2\sqrt{3}} x \sin^2 2x - \frac{\pi}{12\sqrt{3}} \sin^2 2x \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} -\frac{1}{4} t^2 \ln|t| = 0 \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x) + \{g(x)\}^2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x)}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\{g(x)\}^2}{f(x)} = \frac{1}{4} \text{ 이다.}$$

■ 채점 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나지 않고 P에서 Q와 연결된 직육면체의 꼭짓점 R까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구했는가?	10
		이를 이용하여 색칠된 정육면체의 꼭짓점을 지나지 않고 P에서 Q까지 최단거리로 가는 총 경우의 수를 구했는가?	20
2	40	곡선이 x 축과 만나는 점 사이의 거리를 잘 비교하여 경우의 수를 구하였는가?	20
		확률분포를 찾고 기댓값을 정확히 구하였는가?	20
3	30	함수 $f(x)$ 를 적분하여 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 를 구하였는가?	20
		주어진 함수를 이용하여 극한값을 구하였는가?	10

오후1 · 문제 2

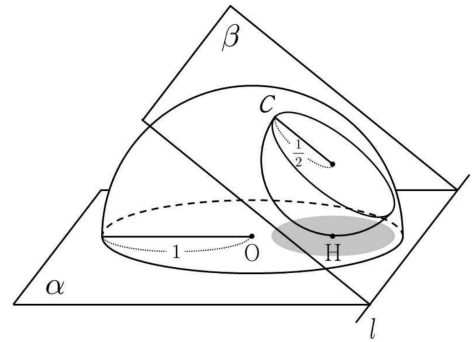
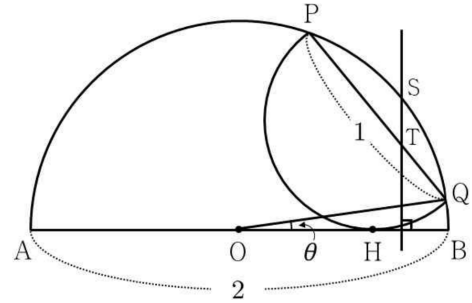
[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

제시문

<가> 오른쪽 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 $QB < PB$ 이고 $PQ = 1$ 인 두 점 P, Q가 있다. 이 반원 안에 선분 PQ를 지름으로 하고 선분 AB와 점 H에서 접하는 반원이 있다.

- (1) 선분 AB의 중점을 O라 할 때, $\angle BOQ = \theta$ 라 하자. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)
- (2) 선분 PQ 위의 점 T에 대하여 점 T를 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 호 AB와 만나는 점을 S라 하자.

<나> 오른쪽 그림과 같이 평면 α 와 평면 β 는 직선 l 에서 만난다. 평면 α 위에 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 이 원을 밑면으로 하는 반구와 평면 β 가 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 원 C이다. 원 C를 밑면으로 하는 반구는 평면 α 와 한 점 H에서만 만난다.



1. 제시문 <가>에서 주어진 각의 크기 θ 에 대하여, $\cos \theta$ 와 $\sin \theta$ 의 값을 구하시오.
2. 제시문 <가>에서 주어진 두 점 S와 T에 대하여, 선분 ST의 길이의 최댓값을 구하시오.
3. 제시문 <나>에서 주어진 원 C의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.

■ 예시 답안

1.

그림과 같이 반원을 좌표평면 위에 두면 Q의 좌표는 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 이고,

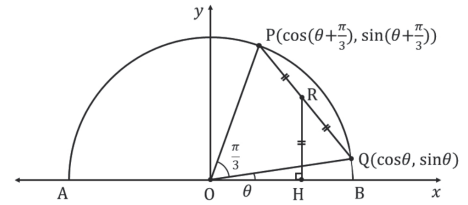
P의 좌표는 $\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right)$ 이다. 선분 PQ의 중점을 R 이라 하면,

선분 RH는 선분 PQ가 지름인 반원의 반지름이므로 $\overline{RH} = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $\frac{1}{2} = \overline{RH} = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sin \theta \right)$ 이고,

삼각함수의 덧셈정리를 사용해서 정리하면 $3 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2$ 이다.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로, 두 식으로부터 $\cos \theta = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$, $\sin \theta = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}$ 을 얻는다 $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.



2.

호 PQ 위의 점 S의 좌표는 $(\cos(\theta + t), \sin(\theta + t))$ 라 할 수 있다 $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}\right)$. (아래 왼쪽 그림)

선분 PQ의 중점 R의 좌표는 $\left(\frac{1}{2} \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \theta \right), \frac{1}{2} \left(\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \sin \theta \right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이므로

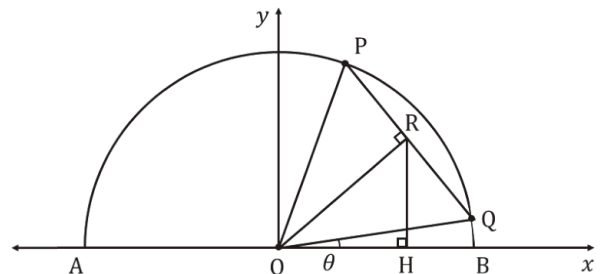
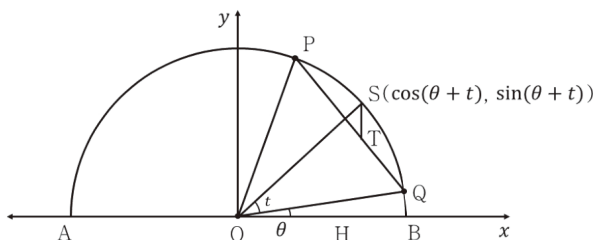
직선 OR의 기울기는 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고, 직선 PQ는 직선 OR과 수직이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\sqrt{2}$ 이다.

따라서 직선 PQ의 방정식은 $y - \frac{1}{2} = -\sqrt{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ 이 되고 정리하면 $y = -\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$ 이다. (아래 가운데 그림)

이로부터 T의 좌표는 $\left(\cos(\theta + t), -\sqrt{2} \cos(\theta + t) + \frac{3}{2}\right)$ 이고,

따라서 $\overline{ST} = f(t) = \sin(\theta + t) - \left(-\sqrt{2} \cos(\theta + t) + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t - \frac{3}{2}$ 이다.

$f'(t) = -\frac{3}{2} \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t$ 이므로, 아래 오른쪽 증가와 감소를 나타내는 표에 따라 $\overline{ST}$ 의 최댓값은 $\sqrt{3} - \frac{3}{2}$ 이다.



t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3} - \frac{3}{2}$	$\searrow$	0

3.

오른쪽 그림에서 직선 l 과 수직이고 원의 중심 O 를 포함하는 평면을 생각하면, 지름이 2인 반구와 지름이 1인 반구가 이 평면과 만나서 생기는 도형은 각각 오른쪽 아래 그림과 같이 $\overline{AB} = 2$ 인 선분 AB 를 지름으로 하는 지름이 2인 반구와 $\overline{PQ} = 1$ 인 선분 PQ 를 지름으로 하는 반구이다.

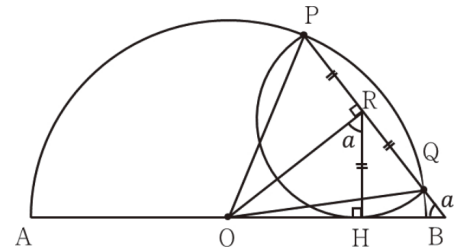
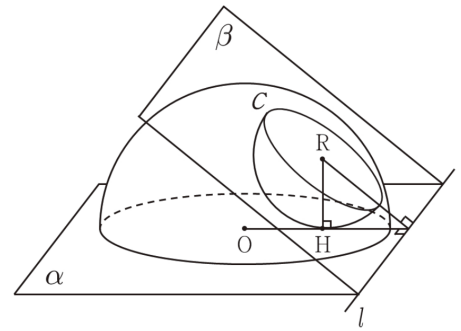
평면 α 와 평면 β 가 이루는 각을 a 라 하면,

그림에서 $a = \angle RBH = \angle ORH$ 이므로 $\cos a = \frac{\overline{RH}}{\overline{OR}}$ 이다.

$\overline{RH} = \frac{1}{2}$ 이고, $\overline{OR}$ 은 한 변의 길이가 1인 정삼각형 OPQ 의 높이이므로

$\overline{OR} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 따라서 $\cos a = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

원 C 의 넓이는 $\frac{\pi}{4}$ 이므로, 구하는 정사영의 넓이는 $\frac{\pi}{4} \cos a = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$ 이다.



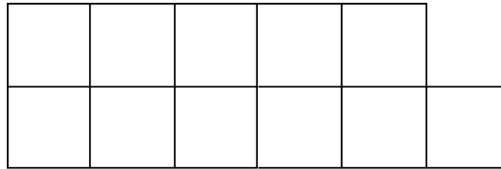
■ 채점 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	40	$\cos \theta$ 와 $\sin \theta$ 가 만족시키는 등식을 구했는가?	20
		$\cos \theta$ 와 $\sin \theta$ 의 값을 구했는가?	20
2	30	선분 ST의 길이를 한 문자에 대한 식으로 나타내었는가?	20
		선분 ST의 길이의 최댓값을 구했는가?	10
3	30	평면 α 와 평면 β 가 이루는 각 a 에 대하여 $\cos a$ 의 값을 구했는가?	20
		원 C 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구했는가?	10

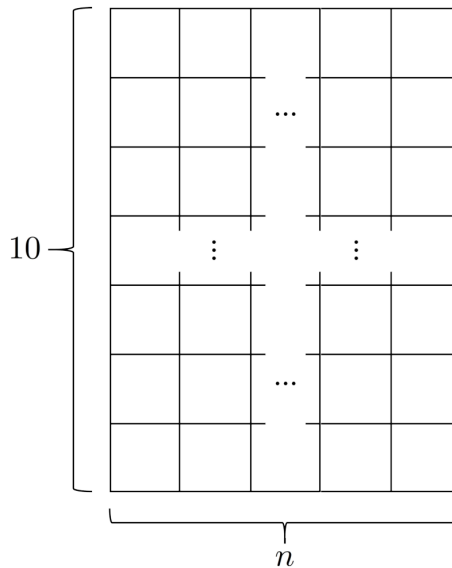
오후2 · 문제 1

[문제 1] 다음 물음에 답하시오. (50점)

1. 그림과 같이 넓이가 1인 정사각형 11개로 이루어진 도형이 있다. 넓이가 1인 각각의 정사각형 내부를 빨간색, 파란색, 노란색의 세 가지 색 중 한 가지 색으로 칠한다. 각각의 가로 행에 빨간색으로 칠해진 정사각형의 개수가 파란색으로 칠해진 정사각형의 개수보다 크고, 각각의 가로 행에 노란색으로 칠해진 정사각형이 2개 이하가 되는 경우의 수를 구하시오.



2. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 가로 길이가 n 이고 세로 길이가 10인 직사각형을 한 변의 길이가 1인 $10 \times n$ 개의 정사각형으로 나눈 도형이 있다. 한 변의 길이가 1인 각각의 정사각형 내부를 빨간색, 파란색, 노란색의 세 가지 색 중 한 가지 색으로 칠한다. 이 도형의 각 세로 열마다 세 가지 색이 적어도 한 번씩 나타나게 칠할 때, 넓이가 $10n$ 인 직사각형에서 빨간색, 파란색, 노란색으로 칠해진 부분의 넓이를 각각 p, q, r 이라 하자. p, q, r 의 모든 순서쌍 (p, q, r) 의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(5) + f(7)$ 의 값을 구하시오.



3. 주머니에 숫자 1이 적힌 공이 한 개, 숫자 2가 적힌 공이 두 개, 숫자 3이 적힌 공이 세 개 들어 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼낼 때 공에 적힌 수를 c 라 하자. 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$ 의 -1 에서 c 까지의 정적분의 값을 확률변수 Y 라 할 때, Y 의 기댓값 $E(Y)$ 를 구하시오.

<가> $f(-1) = 0, f(3) = 0, f'(0) = 18$

<나> 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq f'(\frac{2}{3})$ 이다.

■ 예시 답안

1.

첫 번째 가로 행에서 조건에 맞게 빨간색, 파란색, 노란색으로 칠해진 정사각형의 개수를 a, b, c 라 하면 $a > b, c \leq 2, a + b + c = 5$ 를 만족한다. 이 세 가지 식을 만족하는 자연수 a, b, c 에 대해 첫 번째 가로 행에서 빨간색, 파란색, 노란색으로 칠할 수 있는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의해 $\frac{5!}{a!b!c!}$ 이다.

노란색이 칠해진 개수가 0, 1, 2인 경우를 나누어 계산하여 합하면

$$\left(\frac{5!}{5!0!0!} + \frac{5!}{4!1!0!} + \frac{5!}{3!2!0!}\right) + \left(\frac{5!}{4!0!1!} + \frac{5!}{3!1!1!}\right) + \left(\frac{5!}{3!0!2!} + \frac{5!}{2!1!2!}\right) = 16 + 25 + 40 = 81$$

이다.

두 번째 가로 행에서 조건에 맞게 빨간색, 파란색, 노란색으로 칠해진 정사각형의 개수를 d, e, f 라 하면 $d > e, f \leq 2, d + e + f = 6$ 을 만족한다. 이 세 가지 식을 만족하는 자연수 d, e, f 에 대해 두 번째 가로 행에서 빨간색, 파란색, 노란색으로 칠할 수 있는 경우의 수는 같은 것이 있는 순열의 수에 의해 $\frac{6!}{d!e!f!}$ 이다.

노란색이 칠해진 개수가 0, 1, 2인 경우를 나누어 계산하여 합하면

$$\left(\frac{6!}{6!0!0!} + \frac{6!}{5!1!0!} + \frac{6!}{4!2!0!}\right) + \left(\frac{6!}{5!0!1!} + \frac{6!}{4!1!1!} + \frac{6!}{3!2!1!}\right) + \left(\frac{6!}{4!0!2!} + \frac{6!}{3!1!2!}\right) = 22 + 96 + 75 = 193$$

이다.

그러므로 구하고자 하는 총 경우의 수는 $81 \times 193 = 15633$ 이다.

2.

전체 $10 \times n$ 개의 정사각형 중 빨간색, 파란색, 노란색으로 칠해진 부분의 넓이를 각각 p, q, r 라고 하자. 각 세로 열마다 세 가지 색이 적어도 한 번씩 나타나는 경우를 세기 위해서 각 세로 열에서 빨간색, 파란색, 노란색으로 색칠된 것을 하나씩 미리 제외하고 경우를 세면 충분하다. 그러므로 구하고자 하는 순서쌍 (p, q, r) 의 개수는 $p + q + r = 7n$ 을 만족하는 음이 아닌 세 정수 p, q, r 의 모든 순서쌍의 개수와 같다. 이는 3개의 문자 중에서 $7n$ 개를 택하는 중복조합의 수

$${}_3H_{7n} = {}_{7n+3-1}C_2 = \frac{(7n+2)(7n+1)}{2}$$

이다. 그러므로 $f(5) + f(7) = \frac{37 \times 36}{2} + \frac{51 \times 50}{2} = 666 + 1275 = 1941$ 이다.

3.

$f(-1) = f(3) = 0$ 이므로 $f(x) = r(x+1)(x-3)(x-s)$ 꼴을 가진다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= r(x+1)(x-3) + r(x+1)(x-s) + r(x-3)(x-s) \\ &= r(3x^2 - (4+2s)x - 3 + 2s) \\ &= r\left(3\left(x - \frac{2+s}{3}\right)^2 - \frac{(2+s)^2}{3} - 3 + 2s\right) \end{aligned}$$

$f'(x)$ 가 $x = \frac{2}{3}$ 에서 최댓값을 가지려면, $s = 0$ 이고 $r < 0$ 이어야 한다.

한편, $f'(0) = -3r = 18$ 으로부터 $r = -6$ 을 얻고

$f(x) = -6x(x+1)(x-3) = -6x^3 + 12x^2 + 18x$ 이다.

확률변수 Y 는 $\int_{-1}^c f(x) dx$ 를 계산하여 얻을 수 있다.

$$\int_{-1}^c f(x) \, dx = \left[-\frac{3}{2}x^4 + 4x^3 + 9x^2 \right]_{-1}^c = -\frac{3}{2}c^4 + 4c^3 + 9c^2 - \frac{7}{2}$$

c	1	2	3
Y	8	$\frac{81}{2}$	64
$P(Y = y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

확률변수 Y 의 기댓값은 $E(Y) = 8 \times \frac{1}{6} + \frac{81}{2} \times \frac{2}{6} + 64 \times \frac{3}{6} = \frac{281}{6}$ 이다.

■ 채점 기준

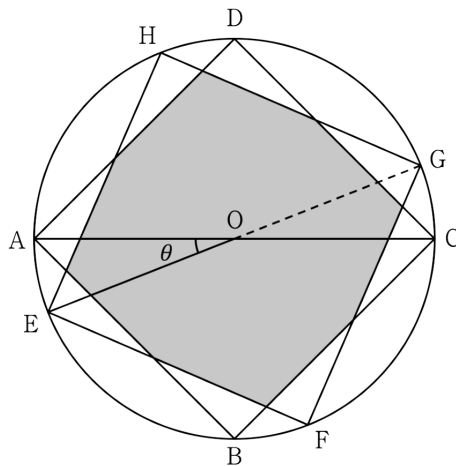
문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	빨간색, 파란색, 노란색으로 칠해진 정사각형의 수가 정해졌을 때, 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 칠할 수 있는 모든 경우의 수를 정확히 구했는가?	20
		위의 경우를 이용하여 전체 경우의 수를 정확히 구했는가?	10
2	30	구하고자 하는 순서쌍의 개수가 $x + y + z = 7n$ 을 만족하는 음이 아닌 세 정수의 순서쌍의 개수와 같음을 보였는가?	20
		${}_3H_{7n}$ 의 값을 정확히 구했는가?	10
3	40	미분을 이용하여 삼차함수 $f(x)$ 를 잘 구하였는가?	10
		삼차 함수 $f(x)$ 의 적분값을 정확히 구하였는가?	10
		경우의 수를 이용하여 기댓값을 정확히 구하였는가?	20

오후2 · 문제 2

[문제 2] 다음 물음에 답하시오. (50점)

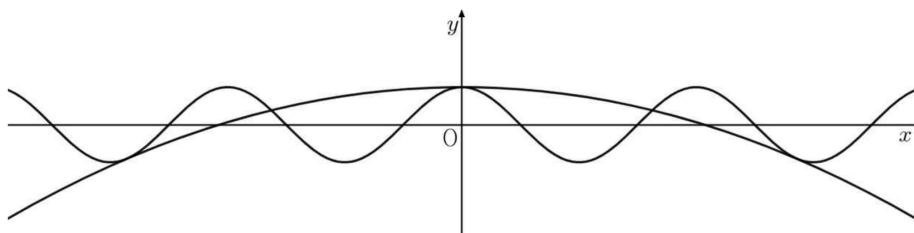
- 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 P와 타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 Q가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. 두 점 A(-1, 0), B(0, -1)에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}$ 의 최댓값을 구하시오.
- 오른쪽 그림과 같이 길이가 $\sqrt{2}$ 인 선분 AC를 지름으로 하고 중심이 O인 원이 있다. 이 원 위에 $\angle AOE = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)가 되도록 점 E를 잡고, 직선 EO가 원과 만나는 점 중 E가 아닌 점을 G라 하자. 대각선이 선분 AC인 정사각형 ABCD의 내부와 대각선이 선분 EG인 정사각형 EFGH의 내부의 공통부분의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자.

함수 $S(\theta)$ 에 대하여 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 에서의 미분계수 $S'(\frac{\pi}{3})$ 를 구하시오.



- 자연수 n 에 대하여 두 곡선 $y = \cos x$ 와 $y = 1 - ax^2$ 이 만나는 점의 개수가 $4n + 1$ 이 되도록 하는 양수 a 를 a_n 이라 하자. 예를 들어, 아래 그림은 $n = 1$ 인 경우이다.

극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \sqrt{\frac{2}{a_n} - 4}$ 를 구하시오.



■ 예시 답안

1.

점 P의 좌표를 (a, b) 라 두면 점 Q의 좌표는 (b, a) 이고, a, b 의 관계식 $\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{2} = 1$ 로부터

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = (a+1, b) \cdot (b, a+1) = 2b(a+1) = \pm 2\sqrt{2}(a+1)\sqrt{1 - \frac{a^2}{3}}$$

를 얻는다.

따라서, 닫힌구간 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 에서 함수 $f(a) = 2\sqrt{2}(a+1)\sqrt{1 - \frac{a^2}{3}}$ 의 최댓값과 함수 $-f(a)$ 의 최댓값 중 큰 값이 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}$ 의 최댓값이다. 함수 $f(a)$ 를 미분하면 $f'(a) = -\frac{2\sqrt{2}(2a+3)(a-1)}{\sqrt{3(3-a^2)}}$ 이고 $f'(a) = 0$ 으로부터

$a = -\frac{3}{2}, 1$ 을 얻는다.

함수의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$-\sqrt{3}$	...	$-\frac{3}{2}$	...	1	...	$\sqrt{3}$
$f'(a)$		-	0	+	0	-	
$f(a)$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

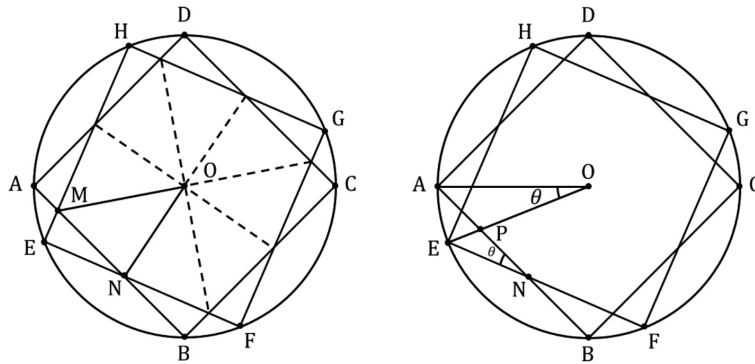
함수 $f(a)$ 의 최댓값은 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 이고 함수 $-f(a)$ 의 최댓값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}$ 의 최댓값은 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 이다.

답: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

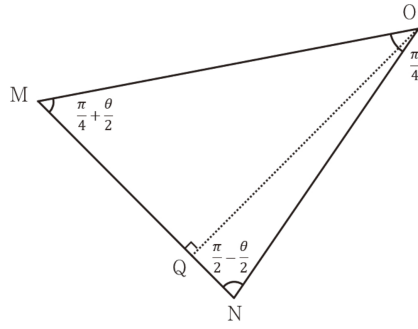
2.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 일 때 $S(\theta)$ 를 구해보자. 선분 AB와 선분 EH가 만나는 점을 M, 선분 AB와 선분 EF가 만나는 점을 N이라 두면 $S(\theta)$ 는 삼각형 OMN의 넓이의 8배이다.

선분 AN과 선분 EO가 만나는 점을 P라 두면, $\angle PEN = \angle OAP = \frac{\pi}{4}$ 이고 $\angle EPN = \angle APO$ 이므로 $\angle PNE = \angle AOP = \theta$ 이다.



따라서, $\pi = \angle PNE + \angle PNO + \angle ONF = \theta + 2\angle PNO$ 로부터 $\angle PNO = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ 를 얻고, $\angle MON = \frac{\pi}{4}$ 로부터 $\angle OMN = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$ 를 얻는다. 점 O에서 선분 MN에 내린 수선의 발을 Q라 하면 선분 OQ의 길이는 $\frac{1}{2}$ 이므로



$$S(\theta) = 8 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2} \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1 - \tan(\theta/2)}{1 + \tan(\theta/2)} + \tan \frac{\theta}{2}$$

이다.

$$\text{함수 } S(\theta) \text{를 미분하면 } S'(\theta) = -\frac{\sec^2(\theta/2)}{(1 + \tan(\theta/2))^2} + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{이므로 } S'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{(2/\sqrt{3})^2}{(1 + 1/\sqrt{3})^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2\sqrt{3} - \frac{10}{3} \text{이다.}$$

$$\text{답 : } 2\sqrt{3} - \frac{10}{3}$$

3.

두 곡선 $y = \cos x$ 와 $y = 1 - ax^2$ 이 $4n + 1$ 개의 점에서 만나려면 구간 $(2n\pi, (2n + 1)\pi)$ 에서 교점의 개수가 1이고 그 점에서 접선의 기울기가 같아야 한다.

이 구간에서 두 곡선이 만나는 점의 x 좌표를 x_n 이라 두면, $\cos x_n = 1 - a_n x_n^2$ 과 $-\sin x_n = -2a_n x_n$ 이 성립한다.

식 $1 = \cos^2 x_n + \sin^2 x_n = (1 - a_n x_n^2)^2 + (2a_n x_n)^2$ 을 정리하면

$$a_n^2 x_n^2 \left(x_n^2 - \frac{2}{a_n} + 4 \right) = 0$$

인테, a_n 과 x_n 은 모두 양수이므로 $x_n^2 = \frac{2}{a_n} - 4$ 를 얻는다.

따라서 $\cos \sqrt{\frac{2}{a_n} - 4} = \cos x_n = 1 - a_n x_n^2 = 1 - \frac{2x_n^2}{x_n^2 + 4}$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \sqrt{\frac{2}{a_n} - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2x_n^2}{x_n^2 + 4} \right) = -1$$

이다.

$$\text{답 : } -1$$

■ 채점 기준

문항	배점	세부 평가 기준	세부 배점
1	30	$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}$ 의 값을 함수로 잘 나타내었는가?	20
		함수의 최댓값을 통해 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}$ 의 최댓값을 구하였는가?	10
2	40	주어진 도형의 넓이를 함수 $S(\theta)$ 로 나타내었는가?	20
		함수 $S(\theta)$ 의 도함수 $S'(\theta)$ 를 구하고 $S'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 의 값을 구하였는가?	20
3	30	접점의 x 좌표 x_n 과 a_n 의 관계식 $x_n^2 = \frac{2}{a_n} - 4$ 를 구하였는가?	20
		관계식을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \sqrt{\frac{2}{a_n} - 4}$ 의 값을 구하였는가?	10

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다