

홍익대논술

자연계(서울)

목차

2026학년도 자연계열 (서울캠퍼스) · 수학	3
문제 1	3
문제 2	7
문제 3	11
2025학년도 자연계열 (서울캠퍼스) · 수학	16
문제 1	16
문제 2	18
문제 3	20
2024학년도 자연계열 (서울캠퍼스) · 수학	25
문제 1	25
문제 2	28
문제 3	31

2026학년도 자연계열 (서울캠퍼스) · 수학

문제 1

문제 1 (30점)

홍익이는 최근 흥행한 영화 [아바타: 물의 길]의 핵심 기술인 3D 안경의 원리를 학습하였다. 그 결과 빛(자연광)은 전기장이 모든 방향으로 진동하면서 전파되지만, 스크린에서 송출된 영상은 좌측 안경을 통해 좌원편광(전기장이 시계 방향으로 회전, <그림 1>)만 통과되고, 우측 안경을 통해 우원편광(전기장이 반시계 방향으로 회전, <그림 2>)만 통과되면서, 인체의 좌우 눈에 각각 다른 영상이 전달되어 영상의 입체감을 유발한다는 사실을 알았다.

이에 영감을 얻은 홍익이는 수행평가로 전기장의 세기 및 방향을 제어하는 편광판을 개발하였다. 특수 제작된 조리개를 돌리면 전기장의 진폭 및 y 성분 전기장의 위상차를 θ 만큼 조절할 수 있도록 설계하였으며, 개발한 편광판의 효용성을 입증하기 위해서 다음과 같은 실험을 수행하였다. 먼저, 광원과 편광판을 설치하였고, 편광판이 전기장의 방향과 시간에 따른 경로를 어떻게 조절하는지 검출기 화면을 통해 확인하였다.

홍익이는 검출된 움직임을 수학적으로 분석하니 전기장은 두 개의 직교하는 성분으로 나눌 수 있음을 알았다.

전기장의 x 성분: $x = A \cos 2\pi t$

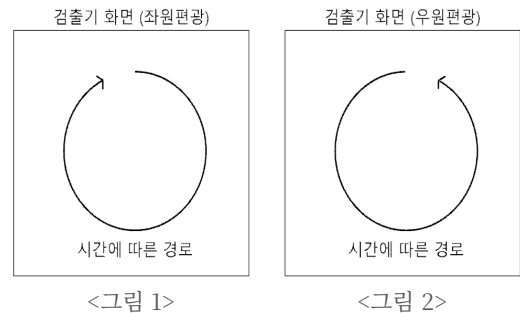
전기장의 y 성분: $y = B \cos(2\pi t + \theta)$

여기서

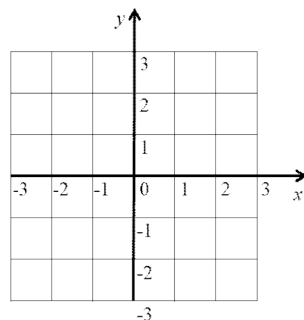
A, B : 진폭

t : 시간

θ : 위상차(상수)



- (1) $A = B = 1, \theta = 0$ 일 때, 전기장의 x 성분과 전기장의 y 성분과의 관계를 좌표평면(오른쪽 좌표평면 참조) 위에 그리시오.



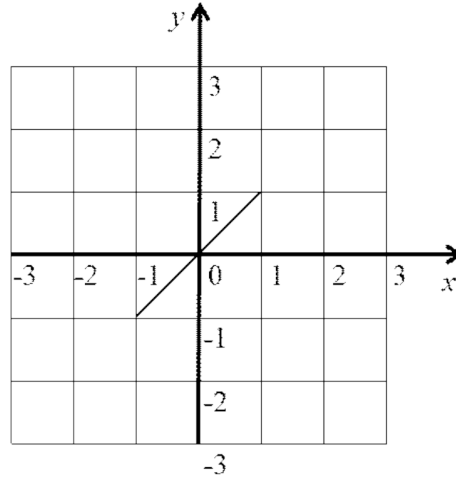
- (2) $A = B = 1, \theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, $\frac{dy}{dx} = a + b \cot 2\pi t$ 이다. 이때, 상수 a, b 를 구하시오. (단, $2t$ 는 정수가 아니다.)
- (3) $A = B = \sqrt{5}, \theta = \frac{\pi}{2}$ 일 때의 주기를 p 라 하자. 시각 $t = 0$ 에서 $t = \frac{p}{4}$ 까지 전기장이 검출되도록 하였다. 이때, 검출기에 그려진 곡선의 길이를 구하고, 편광판을 통과한 전기장이 좌원편광인지 우원편광인지 판단하시오.
- (4) $A = 3, B = 2, \theta = \frac{\pi}{2}$ 일 때, 검출기에 그려진 곡선에서 1사분면에 위치한 임의의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 M, N 이라고 하자. 점 P 에서의 접선의 방정식을 구하고, 삼각형 OMN 넓이의 최솟값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.)

■ 예시 답안

(1) 총 5점

풀이) $A = B = 1, \theta = 0$ 일 때, $x = \cos 2\pi t, y = \cos 2\pi t$ 이다. t 에 따라서 점 $(-1, -1)$ 과 점 $(1, 1)$ 을 연결한 선 위에서 진동한다. 따라서, 정답은 전기장의 x 성분과 전기장의 y 성분의 관계는 $y = x (-1 \leq x \leq 1)$ 이므로 다음과 같다.

답)



(2) 총 7점

풀이)

$x = \cos 2\pi t, \frac{dx}{dt} = -2\pi \sin 2\pi t$ 와 같다.

또한, y 는 삼각함수의 덧셈정리에 의해서 아래와 같이 정의된다.

$$y = \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\pi t \times \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2\pi t \times \sin \frac{\pi}{3} = \cos 2\pi t \times \frac{1}{2} - \sin 2\pi t \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} \cos 2\pi t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\pi t$$

따라서, y 를 t 에 대해서 미분하면,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2\pi}{2} \sin 2\pi t - \frac{2\sqrt{3}\pi}{2} \cos 2\pi t = -\pi \sin 2\pi t - \sqrt{3}\pi \cos 2\pi t$$

이를 이용해 $\frac{dy}{dx}$ 에 대해서 정리하면,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\pi \sin 2\pi t - \sqrt{3}\pi \cos 2\pi t}{-2\pi \sin 2\pi t} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cot 2\pi t$$

(단, $2t$ 는 정수가 아니다.)

다른 풀이)

$x = \cos 2\pi t, \frac{dx}{dt} = -2\pi \sin 2\pi t$ 와 같다.

$y = \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right), \frac{dy}{dt} = -2\pi \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

이를 이용해 $\frac{dy}{dx}$ 에 대해서 정리하면,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\pi \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)}{-2\pi \sin 2\pi t} = \frac{\sin 2\pi t \times \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2\pi t \times \sin \frac{\pi}{3}}{\sin 2\pi t} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cot 2\pi t$$

(단, $2t$ 는 정수가 아니다.)

답) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) 총 8점

풀이) $A = B = \sqrt{5}, \theta = \frac{\pi}{2}$ 일 때, $x = \sqrt{5} \cos 2\pi t, y = \sqrt{5} \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) = -\sqrt{5} \sin 2\pi t$ 이다.

주기 $p = 1$ 이기 때문에 시각 $t = 0$ 에서 $t = \frac{1}{4}$ 까지 이동한 길이는 다음과 같다.

$x = \sqrt{5} \cos 2\pi t, \frac{dx}{dt} = -2\sqrt{5}\pi \sin 2\pi t$ 와 같다.

$y = -\sqrt{5} \sin 2\pi t, \frac{dy}{dt} = -2\sqrt{5}\pi \cos 2\pi t$ 와 같다.

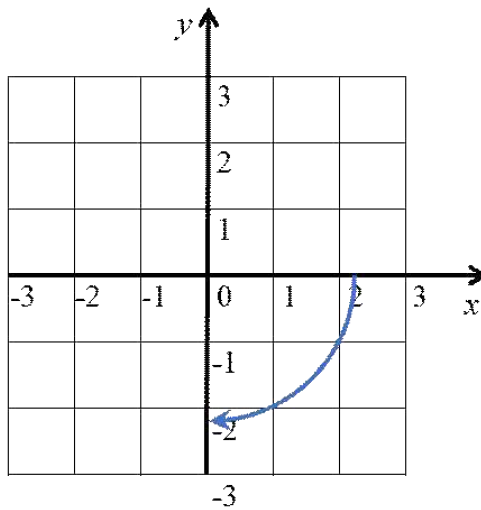
따라서,

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{(2\sqrt{5}\pi)^2 \sin^2 2\pi t + (2\sqrt{5}\pi)^2 \cos^2 2\pi t} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{(2\sqrt{5}\pi)^2 (\sin^2 2\pi t + \cos^2 2\pi t)} dt = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{(2\sqrt{5}\pi)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} 2\sqrt{5}\pi dt = \frac{\sqrt{5}\pi}{2} \end{aligned}$$

다른 풀이) 또한, $x = \sqrt{5} \cos 2\pi t, y = -\sqrt{5} \sin 2\pi t$ 이기 때문에, $x^2 + y^2 = 5$ 임이 성립하며, 원임을 알 수 있다. 따라서, 원주 $2\sqrt{5}\pi$ 에서 4로 나누어 준 값 $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$ 와 같다.

답 1) $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$

풀이) $t = 0$ 일 때, $x = \sqrt{5}, y = 0$ 이며, $t = \frac{1}{4}$ 일 때, $x = 0, y = -\sqrt{5}$ 임을 알 수 있으며, 전기장은 아래 그림과 같이 진행함을 알 수 있다. 따라서 좌원편광임.



답 2) 좌원편광

(4) 총 10점

풀이) $x = 3 \cos 2\pi t, y = -2 \sin 2\pi t$ 이기 때문에, $4x^2 + 9y^2 = 36$ 이므로 타원임을 알 수 있다. 따라서 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은 $4x_1x + 9y_1y = 36$ 이다.

답 1) $4x_1x + 9y_1y = 36$

풀이) x 축, y 축과 만나는 점을 각각 M, N은 $M\left(\frac{9}{x_1}, 0\right), N\left(0, \frac{4}{y_1}\right)$ 이므로 삼각형 OMN 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{9}{x_1} \times \frac{4}{y_1} = \frac{18}{x_1 y_1}$$

점 $P(x_1, y_1)$ 이 타원 위의 점이므로, $4x_1^2 + 9y_1^2 = 36$ 이다. 이때, 산술평균과 기하평균의 관계에 따라

$$36 = 4x_1^2 + 9y_1^2 \geq 2\sqrt{4x_1^2 \times 9y_1^2} = 12x_1 y_1$$

이므로, $x_1 y_1 \leq 3$ 이다.

따라서, $S \geq 6$ 이기 때문에, 삼각형 OMN 넓이의 최솟값은 6이다.

답 2) 6

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	- 점 $(-1, -1)$ 과 점 $(1, 1)$ 을 연결한 선분: 5점. 부분 점수 없음.	5
(2)	- x 를 t 에 대해서 미분: 2점. 부분 점수 없음. - y 를 t 에 대해서 미분: 2점. 부분 점수 없음. - a, b 값: 3점. 부분 점수 없음.	7
(3)	- 곡선의 길이: 4점. 원임을 파악하고 원주를 4로 나누어도 정답. 부분 점수 없음. - 좌원편광 판단: 4점. 부분 점수 없음.	8
(4)	- 접선의 방정식: 2점. 부분 점수 없음 - 넓이를 x_1, y_1 로 정의: 3점. 부분 점수 없음. - 산술평균과 기하평균의 관계에 의한 최솟값: 5점. 부분 점수 없음.	10

문제 2

문제 2 (30점)

제시문

어떤 게임에서 얻는 점수를 확률변수 X 라 하면, n 번째 시행 후 얻는 점수는 X_n 이다. 이 게임의 점수 수열 $\{X_n\}$ 은 다음과 같이 정의된다.

■ 초기 점수 $X_0 = 0$ 이다.

■ 매 시행마다 두 사건 A 와 B 중 한 사건이 일어난다. n 번째 시행의 사건을 각각 A_n, B_n 이라고 하자.

■ 수열 $\{X_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

• 사건 A_n 이 일어나면 점수는 1만큼 증가하고, 사건 B_n 이 일어나면 점수는 0으로 초기화된다. 즉,

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + 1 & (\text{사건 } A_n \text{ 일어남}) \\ 0 & (\text{사건 } B_n \text{ 일어남}) \end{cases}$$

• 사건 A_n 과 B_n 이 일어날 확률은 다음과 같다.

▲ $(n-1)$ 번째 점수가 x 인 사건($X_{n-1} = x$)이 일어났을 때, 사건 A_n 이 일어날 확률은 $\frac{1}{x+2}$ 이다. 즉,

$$P(A_n | X_{n-1} = x) = \frac{1}{x+2}$$

▲ $(n-1)$ 번째 점수가 x 인 사건($X_{n-1} = x$)이 일어났을 때, 사건 B_n 이 일어날 확률은 $\frac{x+1}{x+2}$ 이다. 즉,

$$P(B_n | X_{n-1} = x) = \frac{x+1}{x+2}$$

※ 답안은 기약분수의 형태로 작성하시오.

- (1) 확률변수 X_2 의 확률분포를 표로 나타내시오.
- (2) 3번째 시행 후 얻은 점수가 0일 확률 $P(X_3 = 0)$ 을 구하시오.
- (3) 이 게임을 3번 시행하여 0점이 나온 사건을 C 라 하자. 게임을 3번 시행하는 작업을 m 번 독립적으로 반복할 때, 사건 C 가 일어나는 횟수를 확률변수 Y 라고 하자. $V(2Y + 3) = 280$ 일 때, m 의 값을 구하시오.
- (4) 문항 (3)의 확률변수 Y 에 대하여, $2Y - 3$ 이 a 이상일 확률이 0.5일 때, a 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.)

■ 예시 답안

(1) (8점)

우선 확률변수 X_1 의 확률분포를 구하자. 확률변수 X_1 가 가질 수 있는 값은 0, 1이고,

$$P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) = \frac{1}{2}, P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$P(X_1 = 0) = P(X_0 = 0)P(X_1 = 0 \mid X_0 = 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X_1 = 1) = P(X_0 = 0)P(X_1 = 1 \mid X_0 = 0) = \frac{1}{2}$$

확률변수 X_2 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다:

• $X_2 = 2$; $X_1 = 1$ 이고 $X_2 = 2$ 인 경우

$$P(X_2 = 2) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 2 \mid X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

• $X_2 = 1$; $X_1 = 0$ 이고 $X_2 = 1$ 인 경우

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1 \mid X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

• $X_2 = 0$; $X_1 = 0$ 이고 $X_2 = 0$ 인 경우 또는 $X_1 = 1$ 이고 $X_2 = 0$ 인 경우

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

즉, 확률변수 X_2 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_2	0	1	2	합계
$P(X_2 = x)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	1

(2) (8점)

$X_3 = 0$ 의 확률은 다음과 같이 생각해 볼 수 있다.

$$P(X_3 = 0) = P(X_2 = 0)P(X_3 = 0 \mid X_2 = 0) + P(X_2 \neq 0)P(X_3 = 0 \mid X_2 \neq 0)$$

$$P(X_2 = 0)P(X_3 = 0 \mid X_2 = 0) = \frac{7}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 \neq 0)P(X_3 = 0 \mid X_2 \neq 0) &= P(X_2 = 1)P(X_3 = 0 \mid X_2 = 1) + P(X_2 = 2)P(X_3 = 0 \mid X_2 = 2) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{24} \end{aligned}$$

$$\therefore P(X_3 = 0) = \frac{7}{24} + \frac{7}{24} = \frac{7}{12}$$

[다른 방법]

$$P(X_3 = 3) = P(X_2 = 2)P(X_3 = 3 \mid X_2 = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

$$P(X_3 = 2) = P(X_2 = 1)P(X_3 = 2 \mid X_2 = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(X_3 = 1) = P(X_2 = 0)P(X_3 = 1 \mid X_2 = 0) = \frac{7}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$$

$$\therefore P(X_3 = 0) = 1 - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 2) - P(X_3 = 3) = 1 - \frac{7}{24} - \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{7}{12}$$

(3) (8점)

한 번의 작업에서 사건 C 가 일어날 확률은 $p = P(X_3 = 0) = \frac{7}{12}$ 로 일정하므로, 확률변수 Y 는

이항분포 $B\left(m, \frac{7}{12}\right)$ 를 따른다. $V(2Y + 3) = 2^2 V(Y) = 2^2 \times m \times \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = 280$ 이므로 $m = 288$ 이다.

(4) (6점)

$E(Y) = 288 \times \frac{7}{12} = 168$ 이므로, $E(2Y - 3) = 2E(Y) - 3 = 333$, $V(2Y - 3) = 280$ 이다.

$mp = 288 \times \frac{7}{12} = 168 \geq 5$ 이고 $m(1 - p) = 288 \times \frac{5}{12} = 120 \geq 5$ 이므로 m 은 충분히 크다.

그러므로 이항분포와 정규분포의 관계를 이용하면

$$P(2Y - 3 \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - 333}{\sqrt{280}}\right) = P(Z \geq 0) = 0.5$$

즉, 확률변수 $2Y - 3$ 가 $a = 333$ 이상일 확률이 0.5이다.

$\therefore a = 333$

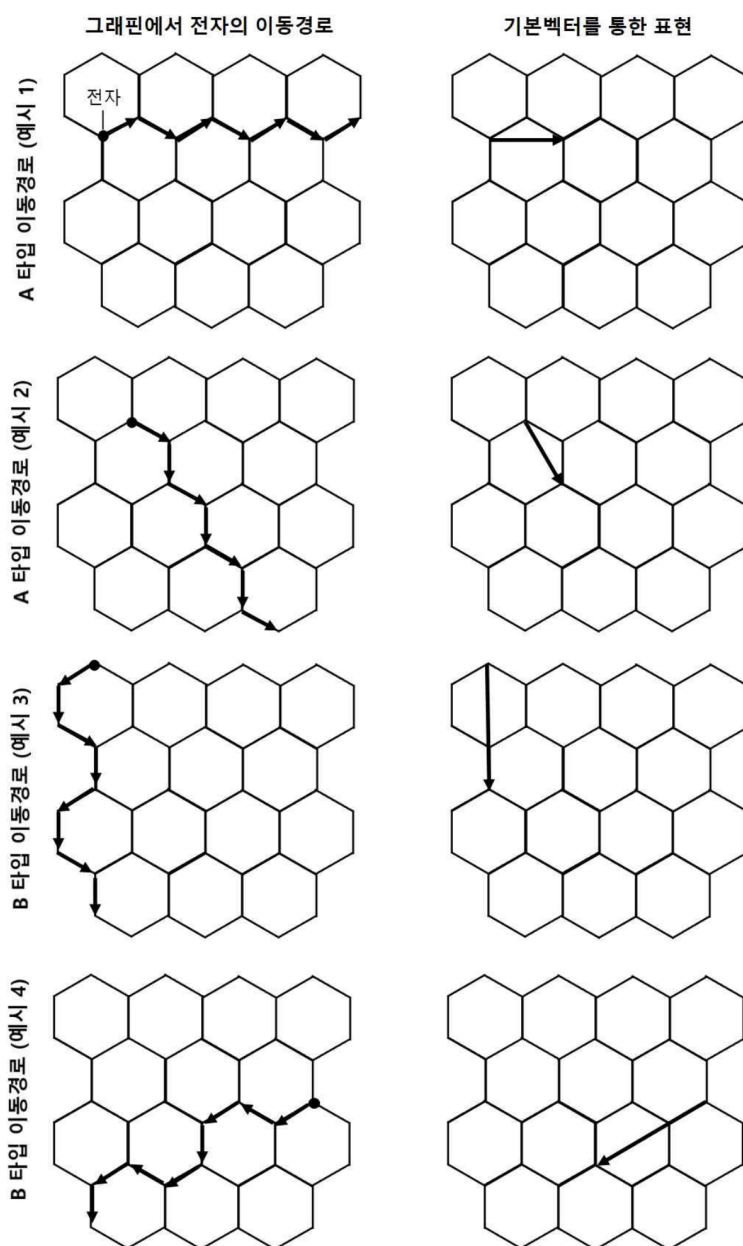
■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	X_1 의 확률분포가 정확한 경우 (2점) $P(X_2 = 2)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (1점) $P(X_2 = 1)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (1점) $P(X_2 = 0)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (3점) 확률분포표가 정확한 경우 (1점) 설명이 없이 맞는 답안만 제시된 경우 (0점) 확률의 수식이 정확하지 않거나 답이 정확하지 않은 경우 (0점)	8
(2)	1. [예시 답안] 방식으로 답을 제출한 경우: $P(X_3 = 0)$ 을 두 확률의 합으로 표현한 수식이 정확한 경우 (2점) $P(X_2 = 0)P(B_3 X_2 = 0)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (2점) $P(X_2 \neq 0)P(B_3 X_2 \neq 0)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (4점) 설명이 없이 맞는 답안만 제시된 경우 (0점) 확률의 수식이 정확하지 않거나 답이 정확하지 않은 경우 (0점) 2. [다른 답안] 방식으로 답을 제출한 경우: $P(X_3 = 3)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (2점) $P(X_3 = 2)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (2점) $P(X_3 = 1)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (2점) $P(X_3 = 0)$ 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (2점) 설명이 없이 맞는 답안만 제시된 경우 (0점) 확률의 수식이 정확하지 않거나 답이 정확하지 않은 경우 (0점)	8
(3)	확률변수 Y 가 이항분포 $B\left(m, \frac{7}{12}\right)$ 을 따르는 것을 정확히 제시한 경우 (4점) $V(2Y + 3)$ 의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (3점) m 의 답이 정확한 경우 (1점) 설명이 없이 맞는 답안만 제시된 경우 (0점) 확률의 수식이 정확하지 않거나 답이 정확하지 않은 경우 (0점)	8
(4)	$E(2Y - 3)$ 와 $V(2Y - 3)$ 의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (1점) m 이 충분히 크다는 사실을 보이는 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (2점) - 만약, 수식 없이 충분히 크다는 사실만 언급한 경우 (0점) 이항분포의 확률을 정규분포의 확률로 변환시키는 수식이 정확한 경우 (1점) $P(Z \geq 0) = 0.5$ 의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (1점) a 의 답이 정확한 경우 (1점) 설명이 없이 맞는 답안만 제시된 경우 (0점) 확률의 수식이 정확하지 않거나 답이 정확하지 않은 경우 (0점)	6

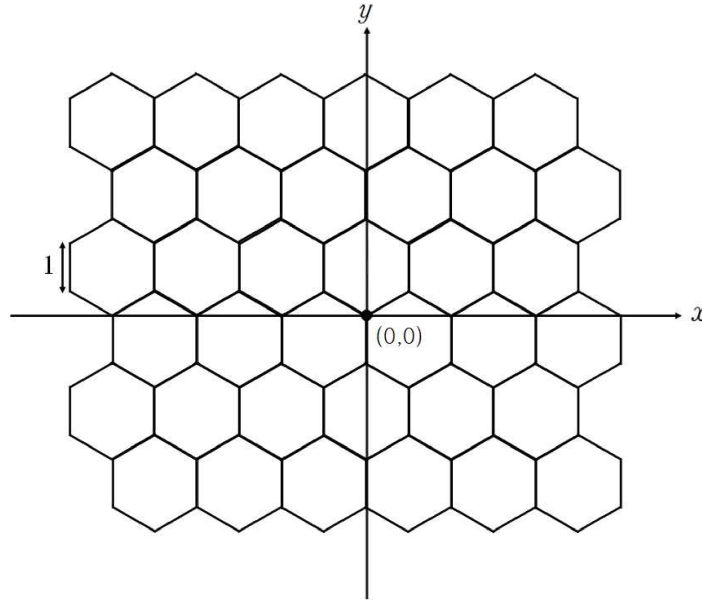
문제 3

문제 3 (30점)

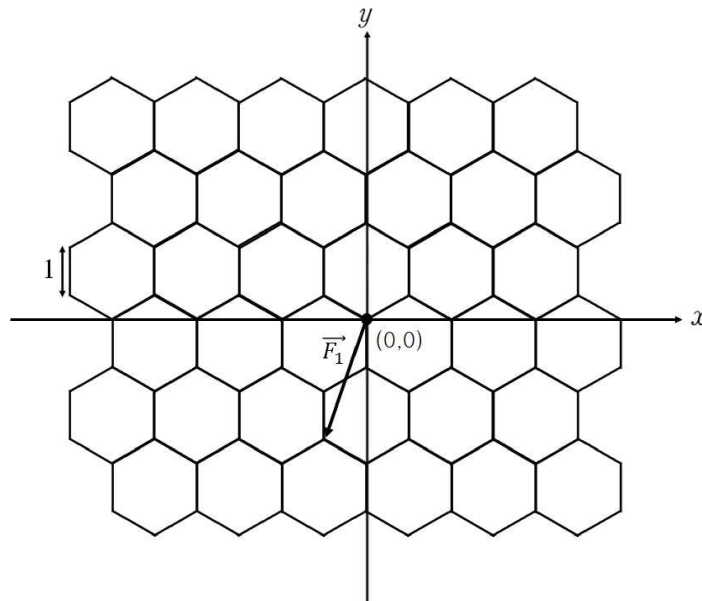
그래핀은 탄소 원자가 정육각형 형태로 무한히 반복되는 벌집모양의 격자구조를 갖는 물질이다. 그래핀의 격자 내 전자는 외부 전자기력에 의해 초기 위치로부터 A 타입 이동경로 (이하 A 경로) 또는 B 타입 이동경로 (이하 B 경로)를 따라 이동한다. 아래 그림은 그래핀 내에서 가능한 A 경로와 B 경로의 예시이며, 각각의 경로는 기본벡터를 사용하여 간략하게 나타낼 수 있다. 이때, 예시 1의 기본벡터와 크기가 같은 기본벡터를 갖는 경로를 ‘A 경로’, 예시 3의 기본벡터와 크기가 같은 기본벡터를 갖는 경로를 ‘B 경로’로 정의한다. 전자는 초기 위치로부터 A 또는 B 경로만을 따라 이동하며, A 경로를 따라 이동하는 중 B 경로를 따라 이동할 수 없으며, B 경로를 따라 이동하는 중 A 경로를 따라 이동할 수 없다. (단, 외부 전자기력이 변화하면 경로변경 가능하다.)



- (1) 아래의 그래핀 격자 내 전자의 초기 위치를 $(0, 0)$ 이라고 할 때, 임의의 외부 전자기력에 대하여 해당 전자가 가질 수 있는 모든 이동경로에 대한 12개의 기본벡터들을 성분으로 나타내시오. 또한, 12개의 기본벡터들을 취하는 경로들이 A인지 B인지 각각 구분하시오. (아래 좌표평면에서 정육각형의 한 변의 길이는 1이다.)



- (2) 전자는 그래핀 격자 내에서 기본벡터 $\vec{u}$ 와 전자기력 벡터 $\vec{F}$ 의 내적 $\vec{u} \cdot \vec{F} > 0$ 이면서, $\vec{u} \cdot \vec{F}$ 가 최소인 경로를 따라 이동한다. 아래 그림과 같이 전자기력 벡터 $\vec{F}_1$ 을 가해 주었을 때, 전자는 문항 (1)에서 도출한 기본벡터들 중, 어떠한 기본벡터를 갖는 경로로 이동할지 그 성분을 나타내시오. 또한, 해당 기본벡터와 $\vec{F}_1$ 의 내적을 구하시오. (단, A 경로와 B 경로의 기본벡터들과 $\vec{F}_1$ 의 내적이 동일한 경우, 전자는 A 경로로 이동한다.)

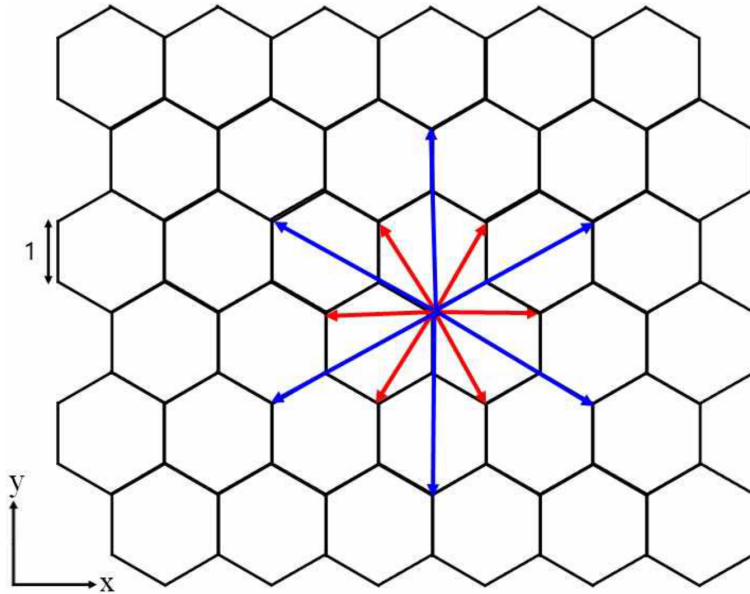


- (3) 문항 (2)에서 전자기력 벡터 $\vec{F}_1$ 을 $\vec{F}_2 = 3\vec{F}_1 + (\sqrt{3}k, 0)$ 로 변화시켰다. 이때, 전자의 이동이 문항 (2)에서 도출된 경로로부터 반대 경로로 변경되는 양의 정수 k 의 최솟값을 구하시오. (단, 반대 경로란 방향이 반대인 기본벡터 $-\vec{u}$ 를 갖는 경로를 의미한다.)

■ 예시 답안

(1)

문항 (1)에서 주어진 좌표평면상에서 전자의 초기 위치 (0,0)으로부터 가능한 모든 A 경로와 B 경로들을 해당 기본벡터들로 표시하면 아래 그림과 같다.



해당 12개 기본벡터들의 성분을 3시 방향으로부터 반시계 방향으로 구하면 아래와 같다.

$$(\sqrt{3}, 0), \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), (0, 3), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), (-\sqrt{3}, 0), \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right),$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right), (0, -3), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

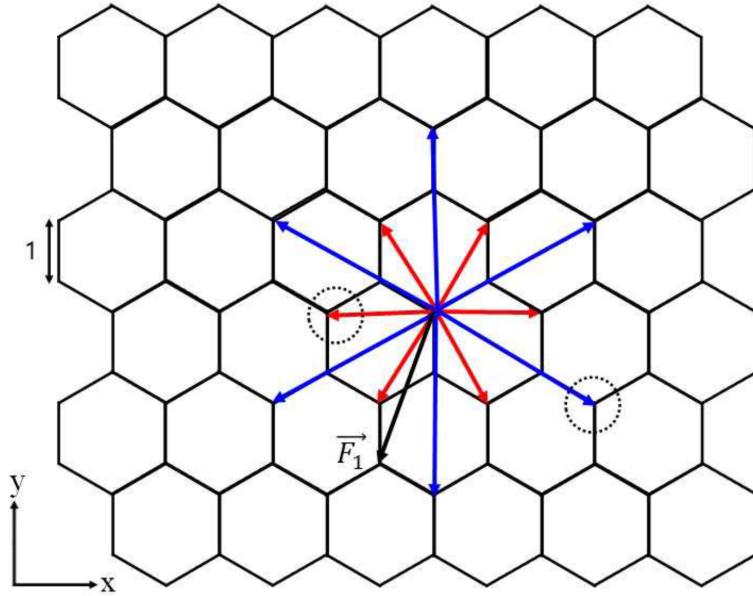
이때, A 경로 기본벡터와 B 경로 기본벡터를 구분하면,

$$\text{A 경로 기본벡터: } (\sqrt{3}, 0), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), (-\sqrt{3}, 0), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{B 경로 기본벡터: } \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), (0, 3), \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right), (0, -3), \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

(2)

좌표평면상에서 $\vec{F}_1$ 의 성분은 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 이며, 이를 문항 (1)로부터 도출한 기본벡터들과 함께 좌표평면에 나타내면 아래와 같다.



$\vec{u} \cdot \vec{F} > 0$ 조건을 만족하면서 내적이 최소인 기본벡터 $\vec{u}$ 는 $(-\sqrt{3}, 0)$, $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 이다. (위의 그림에서 점선 동그라미로 표시) 이 중 전자는 A 경로를 따르므로 $(-\sqrt{3}, 0)$ 의 기본벡터를 따라 이동한다. 또한 $\vec{u} \cdot \vec{F}_1 = (-\sqrt{3}, 0) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$ 이다.

(3)

좌표평면상에서

$$\vec{F}_2 = 3\vec{F}_1 + (\sqrt{3}k, 0) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right) + (\sqrt{3}k, 0) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}k, -\frac{15}{2}\right)$$

문항 (2)에서 도출된 $\vec{u} = (-\sqrt{3}, 0)$ 와 방향이 반대인 기본벡터 $-\vec{u}$ 의 성분은 $(\sqrt{3}, 0)$ 이다.

이때, $(-\vec{u}) \cdot \vec{F}_2 = (\sqrt{3}, 0) \cdot \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}k, -\frac{15}{2}\right) = -\frac{9}{2} + 3k$ 이다.

$k = 1$ 일 때, $(-\vec{u}) \cdot \vec{F}_2 = -\frac{3}{2}$ 이므로 문항 (2)의 $\vec{u} \cdot \vec{F} > 0$ 조건을 만족하지 않아 경로 변경이 불가능하다.

$k = 2$ 일 때, $(-\vec{u}) \cdot \vec{F}_2 = \frac{3}{2}$ 이므로 문항 (2)의 $\vec{u} \cdot \vec{F} > 0$ 조건을 만족한다.

$k = 2$ 일 때, 문항 (1)에서 도출한 나머지 기본벡터들과 $\vec{F}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{15}{2}\right)$ 의 내적을 계산하면 아래와 같다.

우선, $\vec{u} \cdot \vec{F} > 0$ 인 조건을 고려하면, 두 벡터 $\vec{u}, \vec{F}$ 가 이루는 각의 크기가 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)일 때 $\theta < 90^\circ$ 인 경우만 고려하면 된다. 이 경우,

$$\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cdot \vec{F}_2 = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{15}{2}\right) = 9$$

따라서 $\vec{u} \cdot \vec{F} > 0$ 조건 만족하지만 $\frac{3}{2}$ 보다 크다.

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cdot \vec{F}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{15}{2}\right) = \frac{21}{2}$$

따라서 $\vec{u} \cdot \vec{F} > 0$ 조건 만족하지만 $\frac{3}{2}$ 보다 크다.

$$(0, -3) \cdot \vec{F}_2 = (0, -3) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{15}{2}\right) = \frac{45}{2}$$

따라서 $\vec{u} \cdot \vec{F} > 0$ 조건 만족하지만 $\frac{3}{2}$ 보다 크다.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cdot \vec{F}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{15}{2}\right) = 12$$

따라서 $\vec{u} \cdot \vec{F} > 0$ 조건 만족하지만 $\frac{3}{2}$ 보다 크다.

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cdot \vec{F}_2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{15}{2}\right) = \frac{27}{2}$$

따라서 $\vec{u} \cdot \vec{F} > 0$ 조건 만족하지만 $\frac{3}{2}$ 보다 크다.

따라서 $k = 2$ 일 때, 전자는 문항 (2)에서 도출된 경로의 반대경로로 이동하며, 해당 경로의 기본벡터 성분은 $(\sqrt{3}, 0)$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	1. 6개 기본벡터들의 좌표를 모두 정확하게 적고, A 경로 B 경로 구분을 모두 정확하게 한 경우 (5점) 2. 나머지 6개 기본벡터들의 좌표를 모두 정확하게 적고, A 경로 B 경로 구분을 모두 정확하게 한 경우 (5점)	10
(2)	1. $\vec{u} \cdot \vec{F}_1 > 0$ 조건을 만족하면서 내적이 최소인 기본벡터 $\vec{u}$ 두 개 모두 정확하게 적고, A 경로인지 B 경로인지 정확하게 명시한 경우 (4점) 2. 이동경로에 대한 기본벡터를 정확하게 명시한 경우 (3점) 3. 내적값을 정확하게 적은 경우 (3점)	10
(3)	1. $\vec{F}_2$ 의 성분벡터를 k 에 대하여 정확하게 구한 경우 (2점) 2. k 의 최솟값을 정확하게 구한 경우 (6점) 3. $\vec{F}_2$ 와 $-\vec{u}$ 와의 내적을 통하여 k 의 최솟값 도출과정을 적은 경우 (2점)	10

2025학년도 자연계열 (서울캠퍼스) · 수학

문제 1

문제 1 (30점)

제시문

“1000000000...000”

홍익이는 어릴 때 큰 수를 좋아해서 공책 한 페이지를 하나의 수를 적는 데 사용하기도 했다. 이후 홍익이는 지수를 사용하면 아주 큰 수도 간단히 나타낼 수 있다는 것을 알게 되었다. 예를 들어, 관측 가능한 우주에는 대략 10^{82} 개의 원자가 있다고 추측된다. 10^{100} 은 “구골(googol)”이라고 불리며, IT 기업 구글(google)의 회 사명은 이 수의 이름에서 유래했다고 알려져 있다.

이보다 더 큰 수를 표현하고 싶었던 홍익이는 다음의 두 가지 방법을 생각하였다.

첫째, 지수를 여러 번 반복한다. 이때 가장 위의 지수 연산부터 순서대로 한다.

예를 들어, $a^{b^{c^d}} = a^{(b^{(c^d)})}$ 이며, 따라서 $2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65536$ 이다.

둘째, 함수의 합성을 이용한다. 홍익이는 자연수의 집합을 정의역 및 공역으로 갖는 세 함수 f, g, h 를 다음과 같이 정의하였다.

$$f(n) = 2^n$$

$$g(n) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ 개}}(n)$$

$$h(n) = \underbrace{(g \circ g \circ \dots \circ g)}_{n \text{ 개}}(n)$$

즉, $g(1) = f(1)$, $g(2) = f(f(2))$, $g(3) = f(f(f(3)))$, ...,

$h(1) = g(1)$, $h(2) = g(g(2))$, $h(3) = g(g(g(3)))$, ... 이다.

- (1) $g(2)$ 의 값을 구하시오.
- (2) $g(3) = 2^m$ 을 만족시키는 자연수 m 의 값을 구하시오.
- (3) $g(3)$ 과 “구골”(10¹⁰⁰) 중 더 큰 수는 무엇인지 고르고 그 이유를 설명하시오.
- (4) $h(2)$ 를 오직 숫자 2만 사용하여 $h(2) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}}$ 로 표현할 때, 우변에 나타나는 숫자 2의 개수를 구하시오. (예를 들어, 2^{2^2} 에는 숫자 2의 개수가 3이다.)
- (5) 홍익이는 숫자 2를 “구골”(10¹⁰⁰)번 사용하여 나타낸 수 $2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}}$ (숫자 2의 개수가 10¹⁰⁰)을 “홍익수”라고 하였다. “홍익수”와 $h(3)$ 중 더 큰 수는 무엇인지 고르고 그 이유를 설명하시오.

■ 예시 답안

(1)

$$g(2) = f(f(2)) = f(2^2) = f(4) = 2^4 = 16$$

(2)

$$g(3) = f(f(f(3))) = f(f(2^3)) = f(f(8)) = f(2^8) = f(256) = 2^{256} \text{ 이므로, } m = 256$$

(3)

$$g(3) = 2^{256} \text{ 이며, } 10^{100} = 2^{100} 5^{100} > 2^{100} (2^2)^{100} = 2^{300} > 2^{256} \text{ 이므로, } 10^{100} > g(3)$$

(4)

$h(2) = g(g(2)) = g(16)$ 이다. $g(n)$ 은 함수 $f(n) = 2^n$ 을 n 번 합성하여 n 을 넣은 값이므로 $g(n) = 2^{2^{\cdot^{2^n}}}$ 이며, 이때 가장 위의 지수 n 아래의 숫자 2의 개수도 n 이다. 따라서 $g(16) = 2^{2^{\cdot^{2^{16}}}}$ 이며, 이때 2의 개수는 16이다. $16 = 2^{2^2}$ 이므로, $h(2) = 2^{2^{2^2}}$ 의 2의 개수는 $16 + 3 = 19$ 이다.

(5)

$h(3) = g(g(g(3))) = g(g(2^{256}))$ 이다. $a = g(2^{256})$ 이라 하자. $a = 2^{2^{\cdot^{2^{256}}}}$ 이며 이때 가장 위 2^{256} 의 아래 숫자 2의 개수가 2^{256} 이다. $10^{100} < (2^4)^{100} = 2^{400}$ 이므로, 10^{100} 보다 a 가 더 크다.

$h(3) = g(a)$ 이므로, $h(3) = 2^{2^{\cdot^a}}$ 이며 이때 a 의 아래 숫자 2가 a 개이므로, 2를 10^{100} 개 사용한 “홍익수”보다 $h(3)$ 이 더 크다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	풀이 과정을 적절히 서술함 (4점) 정답 제시 (2점)	6
(2)	풀이 과정을 적절히 서술함 (4점) 정답 제시 (2점)	6
(3)	2^{256} 과 10^{100} 의 크기를 비교하는 문제임을 서술함 (1점) 지수법칙을 바르게 사용하여 $10^{100} > 2^{256}$ 의 결론을 얻음 (5점) (양변에 로그를 취하고 $\log 2$ 의 근삿값을 이용하는 경우도 답안으로 인정하며, 풀이과정 없이 정답만 있는 경우 답안으로 인정하지 않음)	6
(4)	$h(2) = g(16)$ 임을 서술함 (1점) $g(16)$ 또는 $g(n)$ 을 표현하는 식을 정확히 구함 (2점) $h(2)$ 의 지수표현의 숫자 2의 개수를 풀이과정과 함께 정확히 구함 (3점)	6
(5)	$h(3) = g(g(2^{256}))$ 임을 서술함 (1점) $g(2^{256}) > 10^{100}$ 임을 보임 (3점) $h(3) > \text{“홍익수”}$ 임을 보임 (2점) (풀이과정이 없는 경우 답안으로 인정하지 않음)	6

문제 2

문제 2 (30점)

제시문

주머니 2개에 각각 4개와 8개의 공이 들어있다. A 주머니에는 빨간 공 2개와 파란 공 2개가 들어있고, B 주머니에는 빨간 공 2개와 파란 공 6개가 들어 있다. 이를 이용하여, 아래와 같은 다양한 사건들의 확률을 계산해 보려고 한다.

※ 최종 답은 모두 기약분수의 형태로 나타내시오.

- (1) 두 주머니 A, B 중 임의로 1개의 주머니를 택하여 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 빨간 공을 꺼낼 확률을 구하시오.
- (2) 두 주머니 A, B 중 임의로 1개의 주머니를 택하여 임의로 꺼낸 1개의 공이 빨간색일 때, 공을 꺼낸 주머니가 A일 확률을 구하시오.
- (3) 하나의 주머니를 가지고 다음의 조건을 모두 만족하도록 공을 계속 꺼내는 시행을 생각하자.
 - 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣는다.
 - 꺼낸 공이 빨간색이면 공 꺼내기를 멈춘다.
 - 공을 꺼낸 횟수가 10회가 되면 공 꺼내기를 멈춘다.
 이 시행에서 공을 꺼낸 횟수를 확률변수 X 라 하자. B 주머니를 가지고 위의 시행을 하였을 때, $X = 3$ 일 확률 $P(X = 3)$ 을 구하시오.
- (4) 두 주머니 A, B 중 임의로 1개의 주머니를 택하여, 문항(3)과 같은 방식으로 선택한 주머니에서 공을 꺼내는 시행을 하였더니 공을 3회 꺼낸 후 멈추었다고 하자. 공을 꺼낸 주머니가 A일 확률을 구하시오.

■ 예시 답안

(1)

‘R: 주머니에서 빨간 공이 나오는 사건’일 때,

$$P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap B) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8}.$$

(2)

빨간 공이 나왔을 때 주머니 A를 선택한 확률은

$$P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}.$$

(3)

‘G: 주머니에서 파란 공이 나오는 사건’일 때, 주머니 B에서 꺼낸 공이 빨간색일 확률은 $P(R|B) = \frac{1}{4}$, 파란색일 확률은 $P(G|B) = \frac{3}{4}$ 이다. 제시된 조건에서 $X = 3$ 이 되는 사건은 주머니 B에서 공을 세 번 꺼내는 독립시행에서 순서대로 파란색, 파란색, 빨간색 공이 나오는 사건이므로 구하는 확률은

$$P(G|B)P(G|B)P(R|B) = \left(\frac{3}{4} \right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}.$$

(4)

제시된 방법으로 공을 꺼내는 시행을 하였을 때, $X = 3$ 이 되는 사건을 C라 하자. 문항 (3)으로부터 $P(C|B) = \frac{9}{64}$ 이다. 또한 문항 (3)의 풀이와 동일한 방법으로 주머니 A를 골랐을 때 $X = 3$ 일 확률은

$$P(C|A) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} \text{이다.}$$

따라서,

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|B)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{64} = \frac{17}{128}$$

이며, $X = 3$ 일 때, 주머니 A를 선택할 확률은

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{8} \right) / \left(\frac{17}{128} \right) = \frac{8}{17}.$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	설명과 답안의 수식이 정확한 경우 (7점) 식이 맞았는데 기약분수가 아니거나, 답이 틀린 경우 (5점) 풀이과정이 정확하지 않거나 없는 경우 (0점)	7
(2)	설명과 답안의 수식이 명확한 경우 (7점) 식이 맞았는데 기약분수가 아니거나, 답이 틀린 경우 (5점) 풀이과정이 정확하지 않거나 없는 경우 (0점)	7
(3)	$P(X = 3 B)$ 인 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (8점) 식이 맞았는데 기약분수가 아니거나, 답이 틀린 경우 (6점) 풀이과정이 정확하지 않거나 없는 경우 (0점)	8
(4)	$P(A X = 3)$ 의 확률의 수식이 정확하며 답도 모두 정확한 경우 (8점) 식이 맞았는데 기약분수가 아니거나, 답이 틀린 경우 (6점) 풀이과정이 정확하지 않거나 없는 경우 (0점)	8

문제 3

문제 3 (30점)

제시문

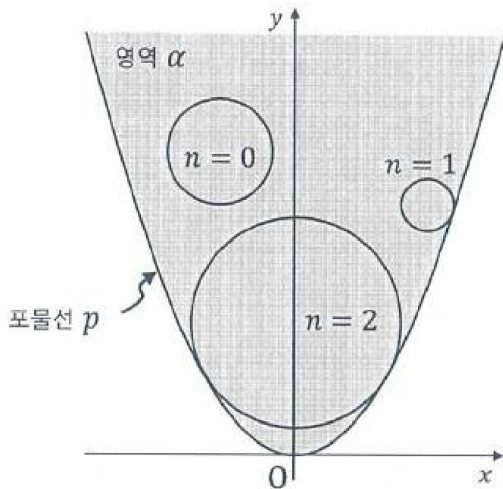
홍익이는 지난 평창 동계올림픽에서 하프파이프를 타는 스노우보더가 만드는 궤적을 관찰하였다. 스노우보더의 헬멧이 하프파이프의 곡선과 일정한 거리를 두고 움직이듯이, 포물선과 일정한 거리를 두고 움직이는 점이 그리는 곡선에 대해 궁금해졌다.

궁금증을 해결하기 위해, 홍익이는 포물선의 방정식을 $y = x^2$ 으로 정하고, 포물선과 포물선의 초점이 포함된 영역(<그림 1>의 영역 α)에 있는 원과 포물선 사이의 관계에서 다음과 같은 특징을 관찰하였다.

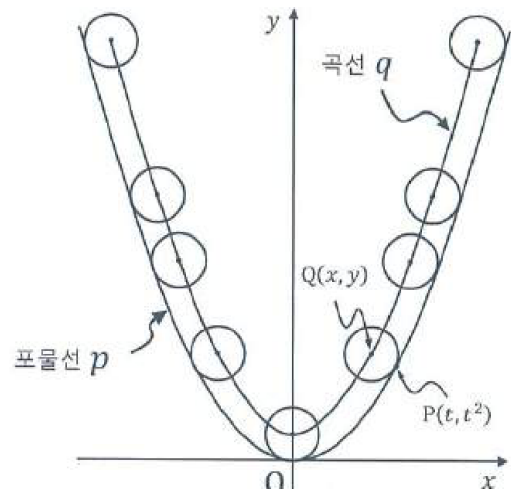
- ① 원의 중심과 반지름의 길이에 따라 원과 포물선이 만나는 점의 개수 n 은 <그림 1>과 같이 0, 1, 또는 2이다.
- ② 반지름의 길이가 충분히 작은 경우에 원과 포물선이 만나는 점의 개수 n 은 0 또는 1이다.
- ③ 원이 포물선과 한 점에서 만나면서 이동할 때, 원의 중심이 그리는 궤적은 <그림 2>와 같은 형태의 곡선이다.

이에 대해 좀 더 자세히 알아보기 위해 아래와 같이 생각해 보았다.

방정식 $y = x^2$ 으로 주어진 포물선을 포물선 p 라 하자. 포물선 p 는 좌표평면을 포물선의 초점이 포함된 영역과 준선이 포함된 영역으로 나눈다. <그림 1>과 같이 포물선의 초점이 포함된 영역과 포물선을 합하여 영역 α 라 정의하자. <그림 2>와 같이 영역 α 에서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$ 인 원이 포물선 p 와 한 점에서 만나면서 이동할 때 원의 중심 $Q(x, y)$ 가 그리는 궤적을 곡선 q 라 하자.



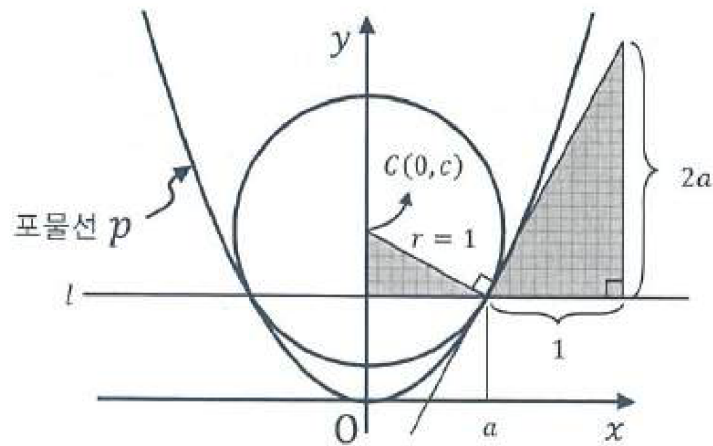
<그림 1>



<그림 2>

※ 단 O는 원점이다.

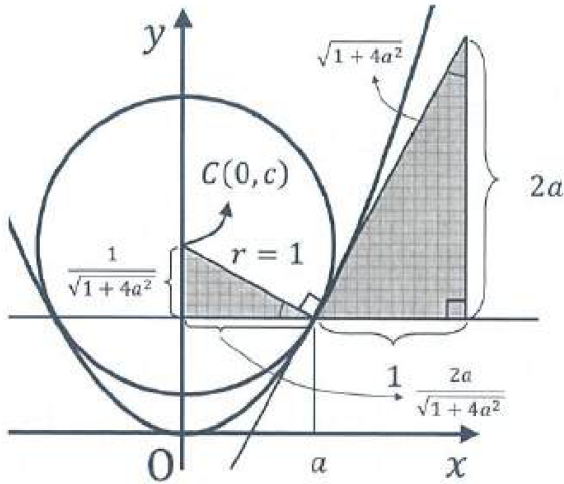
- (1) 영역 α 에서 중심이 $C(0, c)$ 이고 반지름의 길이 r 이 1인 원이 포물선 p 와 서로 다른 두 점에서 만나고 직선 l 은 이 두 점을 지난다. 다음 그림에서 색칠된 두 삼각형의 닮음을 이용하여 이 원의 중심의 좌표 $(0, c)$ 를 구하고 원과 포물선이 만나는 두 점의 좌표를 구하시오.



- (2) 중심이 $C(0, r)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 원이 포물선 p 와 한 점에서 만나기 위한 r 의 최댓값을 구하시오.
- (3) 중심이 $Q(x, y)$ 이고 반지름이 $\frac{1}{4}$ 인 원이 포물선 p 와 <그림 2>와 같이 한 점 $P(t, t^2)$ 에서 만날 때, $Q(x, y)$ 의 좌표는 매개변수 t 에 대한 함수 $x = f(t), y = g(t)$ 로 나타낼 수 있다. 이때 함수 $f(t), g(t)$ 를 구하시오.
- (4) 문항(3)과 동일한 상황에서 함수 $x = f(t), y = g(t)$ 를 이용하여 $t = t_0$ 일 때 곡선 q 위의 점 Q 에서 접선의 기울기를 구하고, 포물선 p 위의 점 $P(t_0, t_0^2)$ 에서 접선의 기울기를 구하여 두 기울기가 같음을 보이시오.
- (5) 문항(3)과 동일한 상황에서 $t = \frac{3}{8}$ 일 때와 $t = \frac{2}{3}$ 일 때의 점 Q 를 각각 Q_1, Q_2 라 하자. 아래의 두 포물선을 비교하여 곡선 q 가 포물선인지 아닌지 설명하시오.
- 준선이 x 축과 평행하고 꼭짓점의 좌표가 $(0, \frac{1}{4})$ 이며 점 Q_1 을 지나는 포물선
 - 준선이 x 축과 평행하고 꼭짓점의 좌표가 $(0, \frac{1}{4})$ 이며 점 Q_2 를 지나는 포물선

■ 예시 답안

(1)



원의 중심을 $C(0, c)$ 라 할 때, 옆의 그림에서 닮은꼴 삼각형을 이용하면 다음과 같다.

$$a = \frac{2a}{\sqrt{1+4a^2}}$$

이때 a 의 값은

$$(1+4a^2) = 4$$

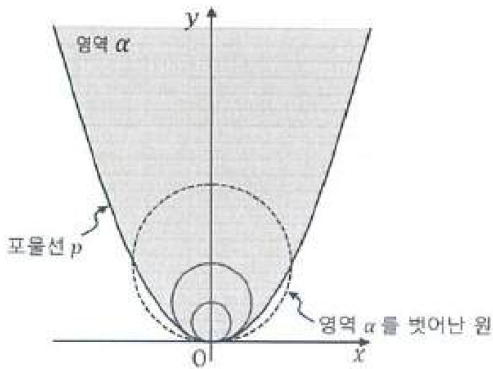
$$a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

그림에서

$$c = a^2 + \frac{1}{\sqrt{1+4a^2}} = \frac{5}{4}$$

이므로 원의 중심의 좌표는 $(0, \frac{5}{4})$, 원과 포물선이 만나는 점의 좌표는 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4})$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4})$ 이다.

(2)



원의 중심이 $C(0, r)$ 이고 반지름이 r 인 원의 방정식은

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

포물선 $y = x^2$ 과 원 $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ 의 교점의 좌표를 구하기 위해 $y = x^2$ 를 원의 방정식에 대입하면

$$x^2 + (x^2 - r)^2 = r^2$$

이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$x^2(x^2 - 2r + 1) = 0$$

여기서 $x = 0$ 또는 $x^2 = 1 - 2r$ 이다.

$1 - 2r \leq 0$ 일 때 근은 $x = 0$ (따라서 $y = 0$) 하나이므로 $r \leq \frac{1}{2}$. 따라서, r 의 최댓값은 $r = \frac{1}{2}$ 이다.

<별해>

포물선 $y = x^2$ 과 원 $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ 의 교점의 좌표를 구하기 위해 $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ 를 포물선의 방정식에 대입하면

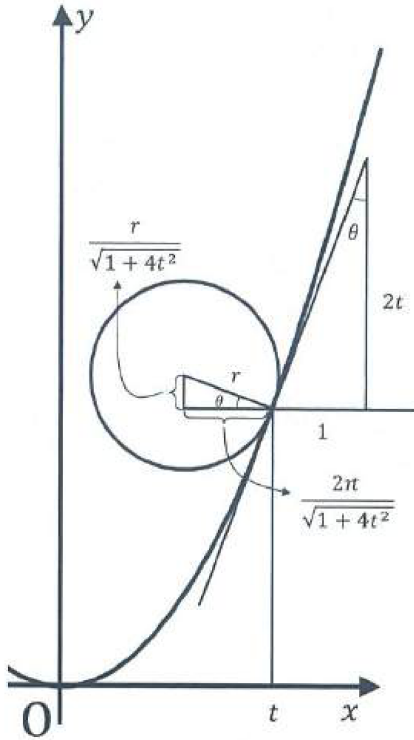
$$y = r^2 - (y - r)^2$$

이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$y(y + (1 - 2r)) = 0$$

$y = x^2$ 이므로 $2r - 1 \leq 0$ 일 때 근은 $x = 0, y = 0$ 하나만 존재한다. 따라서, r 의 최댓값은 $r = \frac{1}{2}$ 이다.

(3)



$t > 0$ 일 때 다음 그림에서 삼각형의 닮음을 이용하여

$$f(t) = t - \frac{2rt}{\sqrt{4t^2 + 1}} = t - \frac{t}{2\sqrt{4t^2 + 1}}$$

$$g(t) = t^2 + \frac{r}{\sqrt{4t^2 + 1}} = t^2 + \frac{1}{4\sqrt{4t^2 + 1}}$$

함수 f 와 g 는 $f(-t) = -f(t)$, $g(-t) = g(t)$ 이며 $f(0) = 0$, $g(0) = \frac{1}{4}$ 이므로 모든 구간에서 위의 식이 성립한다.

(4)

매개변수를 이용하여 점 $Q(f(t), g(t))$ 에서의 기울기를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{4t^2 + 1}} + \frac{2t^2}{(4t^2 + 1)^{3/2}} = 1 - \frac{1}{2(4t^2 + 1)^{3/2}}$$

$$g'(t) = 2t - \frac{t}{(4t^2 + 1)^{3/2}} = 2t \left(1 - \frac{1}{2(4t^2 + 1)^{3/2}} \right)$$

$$\frac{g'(t)}{f'(t)} = 2t$$

점 $Q(f(t_0), g(t_0))$ 에서의 기울기는 $\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)} = 2t_0$ 이다.

포물선 p 위의 점 $P(t, t^2)$ 에서 접선의 기울기를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx} = 2t$$

점 $P(t_0, t_0^2)$ 에서의 기울기는 $2t_0$ 이다. 따라서 두 접선의 기울기는 같다.

(5)

$t = \frac{3}{8}$ 일 때

$$f\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{8} - \frac{\frac{3}{8}}{2\sqrt{4\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 1}} = \frac{9}{40} \text{ 이고, } g\left(\frac{3}{8}\right) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{1}{4\sqrt{4\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 1}} = \frac{109}{320} \text{ 이므로}$$

점 Q_1 의 좌표는 $\left(\frac{9}{40}, \frac{109}{320}\right)$ 이다.

$t = \frac{2}{3}$ 일 때

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}}{2\sqrt{4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{7}{15} \text{ 이고, } g\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{4\sqrt{4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{107}{180} \text{ 이므로}$$

점 Q_2 의 좌표는 $\left(\frac{7}{15}, \frac{107}{180}\right)$ 이다.

준선이 x 축과 평행하고 꼭짓점의 좌표가 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 이며 점 $Q_1\left(\frac{9}{40}, \frac{109}{320}\right)$ 을 지나는 포물선의 방정식을 $y = cx^2 + \frac{1}{4}$ 라 하면,

$$c = \frac{y - \frac{1}{4}}{x^2} = \frac{\frac{109}{320} - \frac{1}{4}}{\frac{81}{1600}} = \frac{145}{81} \text{ 이므로 } y = \frac{145}{81}x^2 + \frac{1}{4}$$

준선이 x 축과 평행하고 꼭짓점의 좌표가 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 이며 점 $Q_2\left(\frac{7}{15}, \frac{107}{180}\right)$ 을 지나는 포물선의 방정식을 $y = dx^2 + \frac{1}{4}$ 라 하면,

$$d = \frac{y - \frac{1}{4}}{x^2} = \frac{\frac{107}{180} - \frac{1}{4}}{\frac{49}{225}} = \frac{155}{98} \text{ 이므로 } y = \frac{155}{98}x^2 + \frac{1}{4}$$

주어진 조건을 만족하는 각각의 포물선은 유일하며 두 포물선이 같지 않으므로 준선이 x 축과 평행하고 꼭짓점의 좌표가 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 이며 점 Q_1 과 Q_2 를 동시에 지나는 포물선은 없다. 따라서 곡선 q 는 포물선이 아니다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	삼각형의 닮음꼴을 이용하여 a 를 정확히 구함. (2점) 원의 중심의 좌표 구함. (2점) 세 개의 점의 좌표를 정확히 서술함. (2점)	6
(2)	원의 방정식과 포물선의 방정식을 이용하여 식을 구하고 방정식의 근이 하나가 되기 위한 조건을 설명함. (4점) r 의 최댓값 ($r = \frac{1}{2}$)을 정확히 구함. (2점)	6
(3)	매개변수 함수 $x = f(t)$ 를 정확히 표현함. (3점) 매개변수 함수 $y = g(t)$ 를 정확히 표현함. (3점)	6
(4)	점 $Q(f(t_0), g(t_0))$ 에서 접선의 기울기 구함. (4점) - 중간 과정에 충분한 설명이 없는 경우. (0점) 점 $P(t_0, t_0^2)$ 에서 접선의 기울기 구함. (1점) 두 접선의 기울기가 같음을 설명함. (1점)	6
(5)	점 Q_1, Q_2 구함. (2점) 각각의 포물선의 방정식 구함. (2점) 두 포물선의 방정식이 일치하지 않으므로 곡선 q 는 포물선이 아니라 설명함. (2점)	6

2024학년도 자연계열 (서울캠퍼스) · 수학

문제 1

문제 1 (20점)

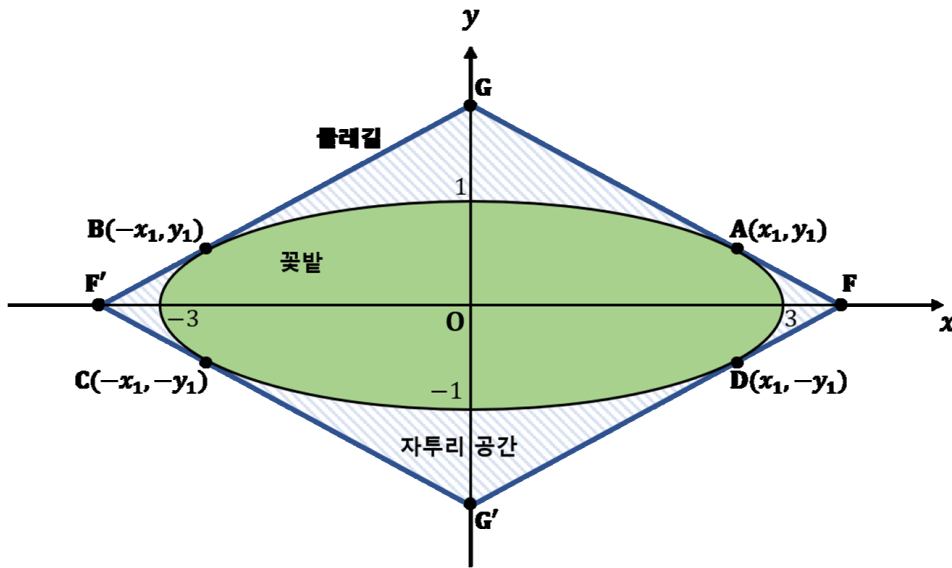
제시문

중심이 원점 O 이고, 장축 길이가 6 m, 단축의 길이가 2 m인 타원 모양의 경계를 갖는 꽃밭이 있다. 아래 그림과 같이 타원 위의 네 개의 점 $A(x_1, y_1)$, $B(-x_1, y_1)$, $C(-x_1, -y_1)$, $D(x_1, -y_1)$ 를 선택하여 이에 외접하는 사각형 모양의 둘레길을 만들려고 한다. 사각형 내부에서 타원 내부를 제외한 나머지 부분을 자투리 공간(아래 그림의 빗금 친 부분)이라 한다. 자투리 공간의 넓이가 최소가 되도록 둘레길을 만들려고 한다.

(가) $x_1 > 0, y_1 > 0$ 이며, 둘레길의 폭은 무시한다. 사각형의 네 꼭짓점은 F, F', G, G' 이다.

(나) 꽃밭의 경계를 나타내는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 이다. 꽃밭의 넓이는 $3\pi \text{ m}^2$ 이며, 꽃밭의 경계의 폭은 무시한다.

(다) 임의의 실수 $r > 0, s > 0$ 에 대하여, $\sqrt{rs} \leq \frac{r+s}{2}$ 이며 등호는 $r = s$ 일 때 성립한다.



- (1) 방정식 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 에서 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하시오.
- (2) 점 $A(x_1, y_1)$ 에서의 타원의 접선의 방정식을 $y = cx + d$ 이라고 하자. 문항 (1)의 결과를 이용하여, c 를 x_1 과 y_1 에 대한 식으로 나타내고, d 를 y_1 에 대한 식으로 나타내시오. 또한, 이 접선의 x 절편을 x_1 에 대한 식으로 나타내시오.
- (3) 자투리 공간의 넓이가 최소값을 가질 때 x_1 과 y_1 을 구하고, 이때 자투리 공간의 넓이를 구하시오.
- (4) 문항 (3)과 같이 자투리 공간의 넓이가 최소값을 가지도록 둘레길을 설치하였다. 이후 점 F 와 F' 을 초점으로 가지고 점 G 와 G' 을 지나는 타원 모양의 울타리를 설치하려고 한다. 이 울타리를 나타내는 타원의 방정식을 구하시오. (단, 울타리의 폭은 무시한다.)

■ 예시 답안

(1)

음함수의 미분법을 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{9}\right) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(1) \\ \Rightarrow \frac{2}{9}x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{9y} \quad (\text{단, } y \neq 0)\end{aligned}$$

(2)

(x_1, y_1) 위에서의 기울기는 $c = -\frac{x_1}{9y_1}$ 이 된다. 이를 접선의 방정식 $y = c(x - x_1) + y_1$ 에 대입하면,

$$y = -\frac{x_1}{9y_1}(x - x_1) + y_1 = -\frac{x_1}{9y_1}x + \left(\frac{x_1^2}{9y_1} + y_1\right) \quad \dots\dots ①$$

한편, (x_1, y_1) 은 타원 위에 있는 점이므로, $\frac{x_1^2}{9} + y_1^2 = 1$ 을 만족한다. 이를 이용하면

$$\frac{x_1^2}{9y_1} + y_1 = \frac{1}{y_1}$$

을 얻을 수 있다. 이를 위 접선의 방정식 ①에 대입하면,

$$y = -\frac{x_1}{9y_1}x + \frac{1}{y_1}$$

이 되어, $c = -\frac{x_1}{9y_1}$, $d = \frac{1}{y_1}$ 이다. 이를 이용하면 접선의 x 절편은 $\frac{9}{x_1}$ 가 된다.

(3)

해당 둘레길이 x 축과 만나는 점을 각각 $F(a, 0)$ 과 $F'(-a, 0)$ 라 하고, y 축과 만나는 점을 각각 $G(0, b)$ 과 $G'(0, -b)$ 라 하자 (단, $a > 0, b > 0$ 이다.). a 와 b 는 각각 (2)에서 구한 접선의 x 절편과 y 절편이므로 $a = \frac{9}{x_1}$, $b = \frac{1}{y_1}$ 임을 알 수 있다. 둘레길은 마름모 모양이며 내부의 넓이는 $2ab = \frac{18}{x_1y_1}$ 이다. 꽃밭의 넓이는 3π 이므로, 자투리 공간의 넓이는

$$\frac{18}{x_1y_1} - 3\pi$$

가 된다.

한편, (x_1, y_1) 은 제시된 타원 방정식 위의 점이므로 다음을 만족한다.

$$1 = \frac{x_1^2}{9} + y_1^2$$

제시문 (다)를 이용하여 아래의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}1 = \frac{x_1^2}{9} + y_1^2 &\geq 2\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{9}\right)y_1^2} = \frac{2x_1y_1}{3} \\ \Rightarrow \frac{1}{x_1y_1} &\geq \frac{2}{3} \quad \dots\dots ② \\ \Rightarrow \frac{18}{x_1y_1} - 3\pi &\geq 12 - 3\pi\end{aligned}$$

등호는 $\frac{x_1^2}{9} = y_1^2 = \frac{1}{2}$ 일 때 성립한다. 즉, 자투리 공간의 총 넓이의 최솟값은 $12 - 3\pi$ 이고, 이때 $(x_1, y_1) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이다.

(4)

문항 (3)으로부터, 둘레길을 나타내는 마름모의 네 꼭짓점 좌표는 각각 $F\left(\frac{9}{x_1}, 0\right)$, $F'\left(-\frac{9}{x_1}, 0\right)$, $G\left(0, \frac{1}{y_1}\right)$, $G'\left(0, -\frac{1}{y_1}\right)$ 이다. 피타고라스 정리를 활용하여 마름모의 한 변의 길이를 구하면 $\sqrt{\left(\frac{9}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{y_1}\right)^2}$ 가 되므로, 울타리의 장축의 길이는 $2\sqrt{\left(\frac{9}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{y_1}\right)^2}$ 이다. 여기에 문항 (3)에서 구한 $(x_1, y_1) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 를 대입하면, 울타리의 장축의 길이는 $4\sqrt{5}$ 가 된다. 한편, 단축의 길이는 $\frac{2}{y_1} = 2\sqrt{2}$ 이다. 이를 활용하여 울타리를 나타내는 타원의 방정식을 구하면,

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{2} = 1$$

이 된다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	음함수의 미분법을 활용할 수 있음 (2점) 미분값 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{9y}$ 를 정확히 계산하여 나타낼 수 있음 (2점)	4
(2)	c 를 x_1 과 y_1 을 활용한 간소화된 식으로 표현할 수 있음 ($c = -\frac{x_1}{9y_1}$) (1점) d 를 y_1 을 활용한 간소화된 식으로 표현할 수 있음 ($d = \frac{1}{y_1}$) (2점) 접선의 x 절편을 x_1 을 이용한 간소화된 식으로 표현할 수 있음 (x 절편 : $\frac{9}{x_1}$) (1점)	4
(3)	(2)에서 구한 접선의 방정식을 활용해 자투리 공간의 넓이를 x_1 과 y_1 에 대한 간소화된 식으로 정확히 표현할 수 있음 (넓이 : $\frac{18}{x_1 y_1} - 3\pi$) (2점) 제시문 (다)의 부등식을 활용하여 자투리 공간의 넓이의 최솟값을 구할 수 있음 ($12 - 3\pi$) (3점) 자투리 공간의 넓이가 최솟값을 가질 때 x_1, y_1 의 값을 정확히 구할 수 있음 $(x_1, y_1) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (3점)	8
(4)	$(x_1, y_1) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 의 값을 가질 때, 울타리의 장축, 단축 길이를 정확히 계산할 수 있음 (장축 $4\sqrt{5}$, 단축 $2\sqrt{2}$) (2점) 울타리를 나타내는 타원의 방정식을 정확히 구할 수 있음 (2점)	4

문제 2

문제 2 (20점)

제시문

홍익이는 아빠, 엄마와 함께 다음의 방식으로 주사위 놀이를 한다. 주사위는 정육면체이며, 주사위를 던졌을 때 각 면이 나올 확률은 모두 같다. 세 사람은 각자의 주사위를 가지고 있으며, 주사위의 각 면에는 서로 다른 자연수가 쓰여 있다. 주사위 놀이에서는 두 사람이 자신의 주사위를 동시에 한 번 던져 더 큰 수가 나온 사람이 승리한다. 홍익이, 아빠, 엄마의 주사위에 있는 총 18개의 면에는 모두 다른 자연수가 쓰여 있어 이 놀이에서 무승부는 나오지 않는다. 홍익이와 아빠의 주사위에 쓰인 숫자는 각각 다음과 같다.

홍익이의 주사위: 2, 4, 23, 25, 29, 31

아빠의 주사위: 5, 7, 11, 13, 35, 37

- (1) 홍익이의 주사위를 한 번 던져 나오는 수를 확률변수 X , 아빠의 주사위를 한 번 던져 나오는 수를 확률변수 Y 라 하자. X 와 Y 의 기댓값 $E(X)$ 와 $E(Y)$ 를 구하시오.
- (2) 홍익이와 아빠가 주사위 놀이를 한다면 둘 중 누가 더 유리한지 설명하시오.
- (3) 홍익이와 아빠는 매일 한 번씩 총 405일간 주사위 놀이를 하였다. 홍익이가 승리한 날이 총 200일 이상이 될 확률을 아래의 표준정규분포표를 사용하여 구하시오.

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
2.0	0.4772
3.0	0.4987

- (4) 엄마의 주사위는 각 면의 자연수를 엄마가 임의로 선택하여 만들 수 있다. 단, 제시문의 설명과 같이, 홍익이, 아빠, 엄마의 주사위에 있는 총 18개의 면에는 모두 다른 자연수가 쓰여야 한다. 엄마는 이 주사위를 홍익이와 주사위 놀이를 할 때 사용하고, 같은 주사위를 아빠와 주사위 놀이를 할 때도 사용한다. 엄마가 홍익이와 주사위 놀이를 하여 엄마가 승리할 확률을 p_1 이라 하고, 엄마가 아빠와 주사위 놀이를 하여 엄마가 승리할 확률을 p_2 라 하자. 엄마가 $p_1 - p_2$ 가 최대가 되도록 주사위 각 면의 자연수를 선택한다고 할 때, $p_1 - p_2$ 의 최댓값은 무엇인지 설명하시오.

■ 예시 답안

(1)

$$E(X) = \frac{2 + 4 + 23 + 25 + 29 + 31}{6} = 19, \quad E(Y) = \frac{5 + 7 + 11 + 13 + 35 + 37}{6} = 18.$$

(2)

홍익이와 아빠 두 사람이 동시에 주사위를 던졌을 때 홍익이가 승리할 경우의 수를 나타내는 다음의 표에서 홍익이가 승리할 확률은 $\frac{4}{9}$ 이며, 아빠가 승리할 확률은 $\frac{5}{9}$ 이므로 아빠가 더 유리하다.

	2	4	23	25	29	31
5	×	×	○	○	○	○
7	×	×	○	○	○	○
11	×	×	○	○	○	○
13	×	×	○	○	○	○
35	×	×	×	×	×	×
37	×	×	×	×	×	×

(3)

홍익이가 승리한 날의 수를 확률변수 W 라 하면, W 는 이항분포 $B\left(405, \frac{4}{9}\right)$ 를 따르며, 평균 m 과 표준편차 σ 는 각각 $m = 405 \times \frac{4}{9} = 180$, $\sigma = \sqrt{405 \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9}} = \sqrt{100} = 10$ 이다. 확률변수 W 는 근사적으로 정규분포 $N(180, 10^2)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(200 \leq W) = P\left(\frac{200 - 180}{10} \leq Z\right) = P(2 \leq Z) = \frac{1}{2} - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

이다.

(4)

A 를 홍익이의 주사위에 쓰인 자연수들의 집합이라 하고, B 를 아빠의 주사위에 쓰인 자연수들의 집합이라 하자. A 또는 B 에 속하지 않은 자연수 n 에 대해 $f(n)$ 을 n 보다 작은 A 의 원소의 개수라 하고, $g(n)$ 을 n 보다 작은 B 의 원소의 개수라 하자. 만약 a_i 를 엄마의 주사위에 쓰인 i 번째 자연수라 하면, $\sum_{i=1}^6 f(a_i)$ 는 엄마와 홍익이의 주사위 놀이로 나오는 36개의 결과 중 엄마가 승리하는 경우의 수이므로 $p_1 = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^6 f(a_i)$ 이다. 같은 이유로 $p_2 = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^6 g(a_i)$ 이며 $p_1 - p_2 = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^6 (f(a_i) - g(a_i))$ 이 성립한다. 다음의 표는 A 또는 B 에 속하지 않은 자연수 n 에 대해, 그 자연수가 속한 구간에 따른 $f, g, f - g$ 의 값을 나타낸다.

A		2		4								23		25		29		31						
B					5		7		11		13										35		37	
f	0	×	1	×	×	2	×	2	×	2	×	2	×	3	×	4	×	5	×	6	×	6	×	6
g	0	×	0	×	×	1	×	2	×	3	×	4	×	4	×	4	×	4	×	4	×	5	×	6
$f - g$	0	×	1	×	×	1	×	0	×	-1	×	-2	×	-1	×	0	×	1	×	2	×	1	×	0

따라서 $p_1 - p_2 = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^6 (f(a_i) - g(a_i))$ 의 값이 최대가 되는 경우는 엄마가 $f - g$ 의 값이 2인 31과 35 사이의 세 자연수 32, 33, 34를 모두 선택하고, $f - g$ 의 값이 1인 3, 6, 30, 36 중 임의로 나머지 세 자연수를 선택하는 경우이므로, $p_1 - p_2$ 의 최댓값은

$$p_1 - p_2 = \frac{3 \times 2 + 3 \times 1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	기댓값 $E(X)$ 를 구함 (1점) 기댓값 $E(Y)$ 를 구함 (1점)	2
(2)	홍익이 또는 아빠가 주사위 놀이에서 승리할 확률을 구함 (2점) 두 확률을 비교하여 아빠가 유리함을 판단함 (1점)	3
(3)	홍익이가 승리한 날을 나타내는 확률변수는 이항분포 $B\left(405, \frac{4}{9}\right)$ 를 따름을 서술함 (1점) 이항분포를 정규분포 $N(180, 10^2)$ 로 근사하고, 표준정규분포표를 사용하여 확률을 계산함 (2점)	3
(4)	제시문에 주어진 조건이 엄마의 주사위에 쓰인 숫자의 선택에 미치는 영향을 고려하고, 엄마의 선택에 따라 확률 p_1 과 p_2 에 어떤 영향을 미치는지 분석함 (2점) $p_1 - p_2$ 의 최댓값을 구함 (4점) 구한 값이 $p_1 - p_2$ 의 최댓값임을 논리적으로 증명함 (6점)	12

문제 3

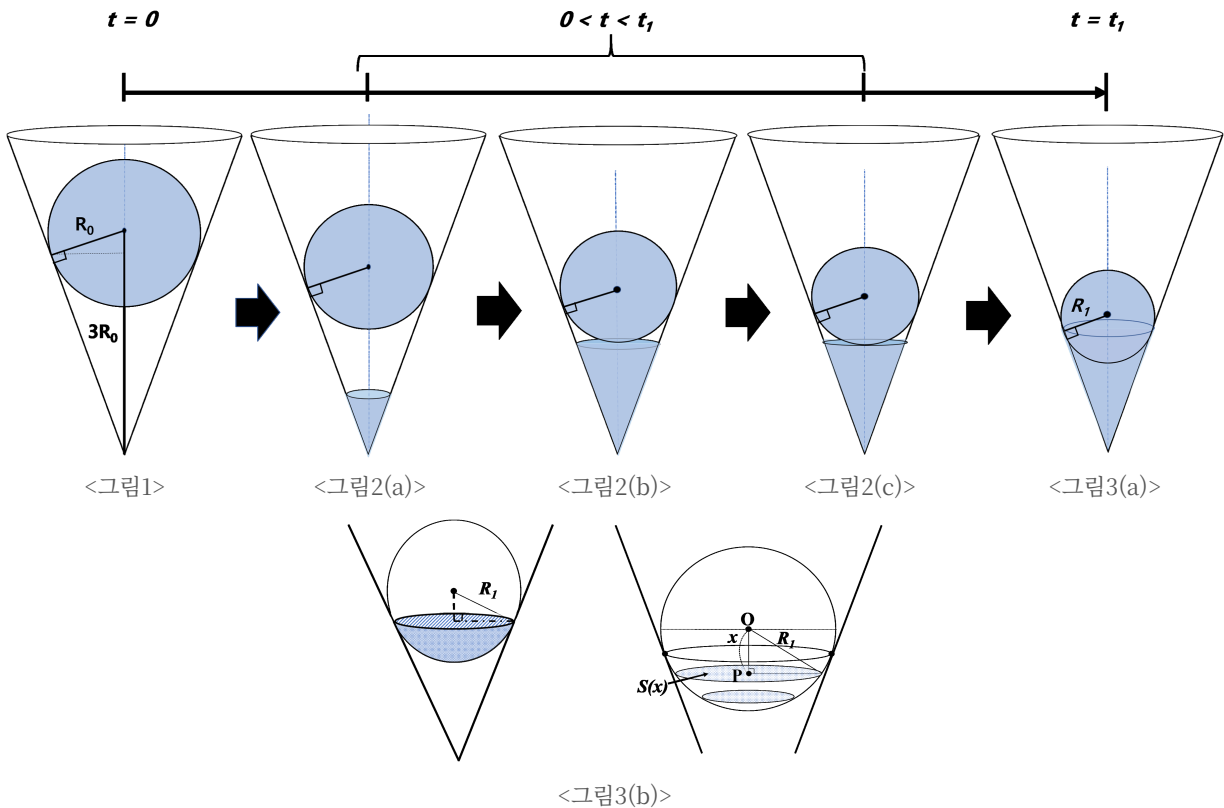
문제 3 (20점)

제시문

홍익이는 <그림1>과 같이 반지름이 R_0 cm 이고 두께가 없는 구 모양의 특수 풍선을 제작하여 풍선 속에 물을 가득 담았다. 물풍선은 비어있는 원뿔 모양의 그릇(이하 원뿔그릇) 안에 놓고, 원뿔그릇 옆면에 접한다. 이때 물풍선의 중심과 원뿔그릇 꼭짓점 사이의 거리는 $3R_0$ cm 이다. 물풍선 밑에는 작은 구멍이 있어서 풍선이 수축하며 이 구멍으로 물이 빠져나간다. t 초 후 빠져나간 물의 부피는 $V(t) = \frac{\pi}{3}t$ cm³ 이다. 빠져나간 물은 <그림2>와 같이 원뿔그릇의 아래부터 즉시 채워지며, 물이 떨어지는 데 걸리는 시간은 무시한다. 물이 빠져나간 만큼 부피가 줄어드는 물풍선은 항상 구 모양을 유지하며 원뿔그릇 옆면에 접하고, 물풍선의 반지름은 R 이라 한다. <그림2(a)>부터 <그림3(b)>까지에 대한 설명은 아래와 같다.

- <그림2(a)> 시각 t ($0 < t < t_1$)에, 물풍선 구멍을 통해 빠져나간 물이 원뿔그릇에 고여 원뿔 모양을 이룬다. <그림2(b)> 시간이 지남에 따라 빠져나간 물이 이루는 원뿔의 밑면과 물풍선은 서로 접한다. <그림2(c)> 이후 물풍선의 일부가 빠져나간 물에 잠긴다. 물풍선이 빠져나간 물에 잠긴 후에도 물풍선에서 물은 계속 빠져나간다.
- <그림3(a)> 시각 t_1 은 빠져나간 물이 원뿔그릇과 이에 접하는 물풍선 사이의 공간을 모두 채우는 순간이다. 이때 물풍선의 반지름은 R_1 이다.

<그림3(b)>는 시각 t_1 에서 물풍선이 빠져나간 물에 잠긴 부분을 나타낸다. 물풍선의 중심 O 에서 원뿔그릇의 꼭짓점을 지나는 선분 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{OP} = x$ 라 하자. 이때 점 P 를 지나고 원뿔그릇의 밑면에 평행인 평면으로 물풍선을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하자.



- (1) 시각 t 에서 물풍선의 반지름 R 을 R_0 과 t 에 대한 식으로 나타내시오. ($0 \leq t \leq t_1$)
- (2) $S(x)$ 를 R_1 과 x 의 식으로 표현하시오.
- (3) 시각 t_1 에서 빠져나간 물에 잠긴 물풍선 부분의 부피를 R_1 에 대한 식으로 나타내시오.
- (4) $R_0 = 5$ 일 때, 시각 t_1 를 구하시오.

■ 예시 답안

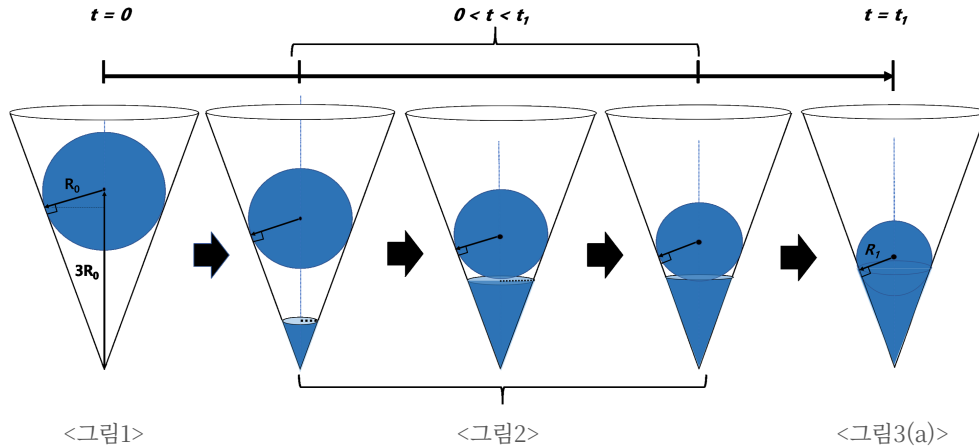
(1)

처음 물풍선의 반지름 : R_0

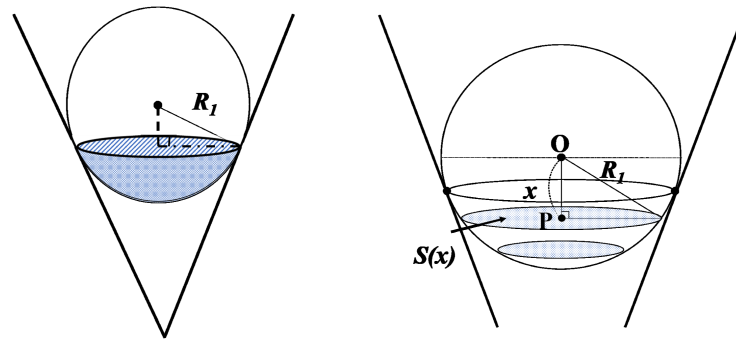
t 초 후, 물풍선을 빠져나간 물의 부피 : $V(t) = \frac{\pi}{3}t$

물이 빠져나간 후의 물풍선의 반지름을 R 라 하면,

--> 물이 빠져나가 변한 물풍선의 부피 : $V(t) = \frac{\pi}{3}t = \frac{4}{3}\pi(R_0^3 - R^3) \quad \rightarrow R = \left(R_0^3 - \frac{1}{4}t\right)^{\frac{1}{3}}$



(2)



<그림3(b)>

물풍선의 반지름은 R_1 이고, $\overline{OP} = x$ 이므로 피타고라스의 정리를 이용하면

단면인 원의 반지름은 $\sqrt{(R_1^2 - x^2)}$.

따라서, 원의 넓이는 $S(x) = \pi(R_1^2 - x^2)$.

(3)

삼각형 닮음을 이용하면 x 가 $\frac{1}{3}R_1$ 부터 R_1 까지의 변화에 대해 넓이 $S(x)$ 를 적분한 값이 된다.

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{R_1}{3}}^{R_1} \pi(R_1^2 - x^2) dx \\ &= \pi \left[R_1^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{R_1}{3}}^{R_1} = \pi \left[R_1^3 - \frac{R_1^3}{3} - \frac{R_1^3}{3} + \frac{R_1^3}{81} \right] = \frac{28}{81} \pi R_1^3 \end{aligned}$$

(4)

시각 t_1 에서 물에 잠기지 않은 물풍선의 부피와 접선이 이루는 면을 밑면으로 하는 원뿔의 부피의 합은 시각 0초에서 물풍선의 부피와 같아야 한다. 각각을 다음과 같이 구한다.

(가) 시각 0초에서 물풍선의 부피 : $\frac{4}{3}\pi R_0^3$

(나) 빠져나간 물의 부피 : $\Delta V = \pi \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} R_1 \right)^2 \times \frac{8}{3} R_1 \times \frac{1}{3} - \frac{28}{81} \pi R_1^3 = \frac{64}{81} \pi R_1^3 - \frac{28}{81} \pi R_1^3 = \frac{36}{81} \pi R_1^3,$

즉, $R_1^3 = \frac{81}{36\pi} \Delta V$

(다) 작아진 풍선의 부피 $\Delta V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{81}{36\pi} \Delta V \right) \Rightarrow \Delta V = \frac{1}{3}\pi R_0^3$$

따라서, $\Delta V = \frac{\pi}{3} t_1 = \frac{1}{3}\pi R_0^3$. $R_0 = 5$ 이므로,

$$t_1 = \frac{3}{\pi} \pi R_0^3 = 5^3 = 125, \quad t_1 \text{는 } 125 \text{ 초}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	물풍선을 빠져나가는 물의 부피를 변화율을 사용하여 수식으로 표현함 (2점)	2
(2)	단면에 만들어지는 원의 반지름이 $\sqrt{(R_1^2 - x^2)}$ 와 같음을 나타냄 (3점) $S(x) = \pi(R_1^2 - x^2)$ 을 나타냄 (1점)	4
(3)	문항(2)에서 사용한 넓이 구하는 공식 $S(x) = \pi(R_1^2 - x^2)$ 을 사용하고, 범위를 정확히 $\frac{1}{3}R_1$ 에서부터 R_1 라고 표현함 (3점) 다음의 과정으로 정확하게 답을 도출함 (3점) $\int_{\frac{R_1}{3}}^{R_1} \pi(R_1^2 - x^2) dx = \pi \left[R_1^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{\frac{R_1}{3}}^{R_1} = \pi \left[R_1^3 - \frac{R_1^3}{3} - \frac{R_1^3}{3} + \frac{R_1^3}{81} \right] = \frac{28}{81} \pi R_1^3$	6
(4)	물풍선을 빠져나간 물의 부피가 원뿔의 부피에서 물에 잠긴 물풍선의 부피를 제외한 부분을 계산함 (3점) $\Delta V = \pi \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} R_1 \right)^2 \times \frac{8}{3} R_1 \times \frac{1}{3} - \frac{28}{81} \pi R_1^3 = \frac{64}{81} \pi R_1^3 - \frac{28}{81} \pi R_1^3 = \frac{36}{81} \pi R_1^3$ 작아진 물풍선 부피의 변화량을 R_0 에 대해서 표현함 (2점) $\Delta V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{81}{36\pi} \Delta V \right) \Rightarrow \Delta V = \frac{1}{3}\pi R_0^3$ 빠져나가는 물의 비율과 R_0 로 표현된 부피의 변화량으로 125초라는 결과를 도출함 (3점) $\Delta V = \frac{\pi}{3} t_1 = \frac{1}{3}\pi R_0^3$ $R_0 = 5 \text{ 이므로, } t_1 = \frac{3}{\pi} \times \frac{1}{3}\pi R_0^3 = 5^3 = 125$	8

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다