인하대논술

자연계

목차

2026학년도 자연계열 (수학) 2

오전 문제 1 2
오전 문제 2 4
오전 문제 3 6
오후 일반 문제 1 8
오후 일반 문제 2 10
오후 일반 문제 3 12
오후 의예과 문제 1 14
오후 의예과 문제 2 16
오후 의예과 문제 3 18

2025학년도 자연계열 (수학) 20

오전 일반 문제 1 20
오전 일반 문제 2 22
오전 일반 문제 3 25
오전 의예과 문제 1 27
오전 의예과 문제 2 29
오전 의예과 문제 3 31
오후 문제 1 33
오후 문제 2 35
오후 문제 3 37

2024학년도 자연계열 (수학) 38

오전 일반 문제 1 38
오전 일반 문제 2 40
오전 일반 문제 3 42
오전 의예과 문제 1 44
오전 의예과 문제 2 46
오전 의예과 문제 3 48
오후 문제 1 50
오후 문제 2 52
오후 문제 3 54

2026학년도 자연계열 (수학)

오전 문제 1

※ [문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] 음이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립})$$

[나] $f(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 정의된 상수함수가 아닌 연속함수이고, 이 구간의 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이면 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$는 도형의 넓이이므로 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$이다.

(1-1) [15점] 구간 $[-1,1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가

$$\int_{-1}^{1} \{2(f(x))^2 + \sin^2 \pi x\}\,\mathrm{d}x = 2$$

를 만족한다. 정적분 $\int_{-1}^{1} f(x)\,|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x$의 값이 최대일 때, 함수 $f(x)$와 이 정적분의 값을 구하시오.

(1-2) [15점] 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(ⅰ) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)f(x) < 0$이다.
(ⅱ) $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(2) = \frac{1}{\sqrt{2}e^2}$

정적분

$$\int_0^2 \left\{ (2e^x f'(x))^2 + \frac{1}{(e^x f(x))^2} \right\} \mathrm{d}x$$

의 값이 최소가 될 때, $f(1)$과 이 정적분의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

(1-1) 제시문 (가)에 의해

$$2 = \int_{-1}^{1} \{2(f(x))^2 + \sin^2 \pi x\}\,\mathrm{d}x \geq \int_{-1}^{1} 2\,|\sqrt{2}f(x)\sin \pi x|\,\mathrm{d}x \geq \int_{-1}^{1} 2\sqrt{2}f(x)\,|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x$$

이다. $|\sqrt{2}f(x)| = |\sin \pi x|$이면 첫 번째 부등식에서 등호가 성립하고, $|f(x)| = f(x)$이면 두 번째 부등식에서 등호가 성립한다. 역으로 등호가 성립하면

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^{1} \{2(f(x))^2 + \sin^2 \pi x\}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} 2\sqrt{2}f(x)\,|\sin \pi x|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{2}f(x) - |\sin \pi x|\right)^2 \mathrm{d}x \end{aligned}$$

이다. 제시문 (나)에 의해서 함수 $\left(\sqrt{2}f(x) - |\sin \pi x|\right)^2$는 반드시 구간 $[-1,1]$에서 상수이어야 하고 또한 0이어야 하므로 반드시 $\sqrt{2}f(x) = |\sin \pi x|$이어야 한다.

따라서 $f(x) = \frac{|\sin \pi x|}{\sqrt{2}}$이고 구하고자 하는 적분의 최댓값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

(1-2) 제시문 (가)와 치환적분 및 조건 (ⅰ), (ⅱ)에 의해

$$\int_0^2 \left\{ (2e^x f'(x))^2 + \frac{1}{(e^x f(x))^2} \right\} \mathrm{d}x \geq \int_0^2 4\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \mathrm{d}x = -4\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = -4[\ln f(x)]_0^2 = 8$$

이 성립한다. 등호가 성립할 때는 구간 $[0,2]$에서 $|2f'(x)f(x)| = e^{-2x}$이 성립할 때이고, 정적분의 최솟값은 8이다. 조건 (i)에 의해 $-2f'(x)f(x) = e^{-2x}$이다. 따라서 구간 $[0,2]$에서 $\left((f(x))^2 - \frac{e^{-2x}}{2}\right)' = 0$이다. 조건 (ii) 및 정적분과 부정적분의 관계로부터 $0 \leq x \leq 2$인 실수 x에 대하여 $(f(x))^2 - \frac{e^{-2x}}{2} = \int_0^x 0\,\mathrm{d}x = 0$이고 $f(x) > 0$이므로 $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}$ $(0 \leq x \leq 2)$이다.

이제 이 함수가 등호 조건을 만족하는 유일한 함수임을 보이자. 등호 조건으로부터

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^2 \left\{ (2e^x f'(x))^2 + \frac{1}{(e^x f(x))^2} \right\} \mathrm{d}x - \int_0^2 4\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \left(|2e^x f'(x)| - \left|\frac{1}{e^x f(x)}\right| \right)^2 \mathrm{d}x \end{aligned}$$

이므로 제시문 (나)에 의해 $|2e^x f'(x)| - \left|\frac{1}{e^x f(x)}\right| = 0$이고 이를 정리하면 위의 조건을 만족하는 함수는 유일하다. 따라서 $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$이고 정적분의 값은 8이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	$f(x)$가 양수일 때, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 적분값을 구하면	7점
(1-1)	등호 조건을 만족하는 함수를 정확히 구하면	8점
(1-1)	절댓값을 제대로 처리하지 못하면	최대 3점 감점
(1-2)	산술평균과 기하평균의 관계 및 치환적분법을 이용하여 최소가 되는 적분값을 정확히 구하면	5점
(1-2)	등호 조건을 정확히 해석하면 (절댓값 처리 포함)	4점
(1-2)	적분값이 최소가 되는 $f(x)$를 정확히 구하면	6점
(1-2)	조건 (i)을 이용하여 절댓값을 처리하는 것을 잊으면	최대 3점 감점

오전 문제 2

※ [문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

함수 $f(x)$에 대하여 좌극한 $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$와 우극한 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 각각 존재하고, 그 값이 서로 같다면 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(※) 다항함수 $f(x)$는 $f(2)=4$를 만족하고, 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases}|x+1| & (x\le 0)\\ \frac{1}{x} & (0<x\le 1)\\ x & (x>1)\end{cases}$$

(2-1) 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 $f(x)$ 중 차수가 최소인 것을 구하시오. [10점]
(2-2) 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 $f(x)$ 중 차수가 최소인 것을 구하시오. [15점]
(2-3) (2-2)에서 구한 함수 $f(x)$에 대하여 다음 세 극한값을 구하시오. [10점]

$$\lim_{x\to 1^-}(f(x)g(x))',\qquad \lim_{x\to 1^+}(f(x)g(x))',\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+|f(x)|)}{\ln x}$$

■ 예시 답안

(2-1) $g(x)$는 $x\neq 0$일 때, 연속이다. 따라서 임의의 다항식 $f(x)$에 대해서 $f(x)g(x)$는 $x\neq 0$에서 연속이다. 또한 만일 $f(0)\neq 0$이고 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이면

$$\lim_{x\to 0^-}g(x)=\frac{\lim_{x\to 0^-}f(x)g(x)}{\lim_{x\to 0^-}f(x)}=\frac{\lim_{x\to 0^+}f(x)g(x)}{\lim_{x\to 0^+}f(x)}=\lim_{x\to 0^+}g(x)$$

가 되어 $g(x)$가 $x=0$에서 연속임을 의미하므로 $f(0)=0$이어야 한다. 그러므로 주어진 조건으로부터 다항식 $f(x)$는 $f(x)=x^nh(x)$ ($n\ge 1$, $h(x)$는 $h(0)\neq 0$인 다항식)의 형태이어야 한다. $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 0^-}x^n(x+1)h(x)=0=\lim_{x\to 0^+}x^{n-1}h(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)g(x)$$

이다. 따라서 $n\ge 2$이고 $f(x)$의 차수는 2 이상이다. $f(x)=x^2$이 $f(2)=4$와 문제의 조건을 만족하므로 이 함수가 구하려는 다항함수이다.

(2-2) $g(x)$는 $x=-1,0,1$ 이외의 모든 실수에서 미분가능하다. 임의의 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)g(x)$는 $x=-1,0,1$ 이외의 실수에서 미분가능하다. (2-1)로부터 $f(0)=0$이다. $f(1)\neq 0$이라고 가정하자. $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{f(x)(x-1)}-\frac{f(x)g(1)-f(1)g(1)}{f(x)(x-1)}\right)\\&=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{f(x)(x-1)}\right)-\frac{f'(1)g(1)}{f(1)}\\&=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{f(x)(x-1)}\right)-\frac{f'(1)g(1)}{f(1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\end{aligned}$$

이다. 따라서 제시문에 의하여 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 모순이다. 그러므로 $f(1)=0$이고 마찬가지 방법으로 $f(-1)=0$이다.

따라서 $f(x)=x^a(x-1)^b(x+1)^ch(x)$ ($a,b,c\ge 1$, $h(x)$는 $h(-1)h(0)h(1)\neq 0$인 다항함수)이다.

(i) $x=-1$에서 미분가능할 필요충분조건은 제시문에 의하여 다음 두 극한값이 같은 것이다.

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x+1}=-f(-1)$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)g(x)-f(-1)g(-1)}{x+1}=f(-1)$$

따라서 $f(x)g(x)$가 $x=-1$에서 미분가능할 필요충분조건은 $c\geq 1$이다.

(ii) $x=0$에서 미분가능한 함수는 연속이므로 (2-1)로부터 $a\geq 2$임을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)g(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^{a-2}(x-1)^b(x+1)^c h(x)$$

이다. 제시문에 의하여 두 값이 같아야 하므로 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능할 필요충분조건은 $a\geq 3$이다.

(iii) $x=1$에서 미분가능할 필요충분조건은 제시문에 의하여 다음 두 극한값이 같은 것이다.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}x^2(x-1)^{b-1}(x+1)h(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x^4(x-1)^{b-1}(x+1)h(x)$$

따라서 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 필요충분조건은 $b\geq 1$이다.

그러므로 주어진 조건 $f(2)=4$를 만족하는 다항함수 $f(x)$는 $h(x)=\frac{1}{6}$일 때

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3(x-1)(x+1)$$

이다.

(2-3) $x=1$ 근처에서 $f(x)g(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x^2(x^2-1)(0<x\leq 1)\\ \frac{1}{6}x^4(x^2-1)(x>1)\end{cases}$$

따라서

$$\lim_{x\to 1^-}(f(x)g(x))'=\lim_{x\to 1^-}\left\{\frac{1}{3}x(x^2-1)+\frac{1}{3}x^3\right\}=\frac{1}{3},\quad \lim_{x\to 1^+}(f(x)g(x))'=\lim_{x\to 1^+}\left\{\frac{2}{3}x^3(x^2-1)+\frac{1}{3}x^5\right\}=\frac{1}{3}$$

이다. $f(x)=\frac{1}{6}x^3(x-1)(x+1)$이므로 구하고자 하는 값은 다음과 같다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+|f(x)|)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5\ln x+\ln\left(\frac{1}{x^5}+\left|\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right|\right)}{\ln x}=5$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	$g(x)$가 $x=0$에서만 불연속임을 확인하면	3점
(2-1)	$f(x)$를 구하면	3점
(2-1)	구한 $f(x)$의 차수가 최소이고 $f(x)g(x)$가 연속임을 확인하면	4점
(2-2)	$g(x)$가 $x=-1,0,1$에서만 미분가능하지 않음을 확인하면	5점
(2-2)	$f(x)$를 구하면	3점
(2-2)	구한 $f(x)$의 차수가 최소이고 $f(x)g(x)$가 미분가능함을 확인하면	7점
(2-3)	$\lim_{x\to 1^-}(f(x)g(x))'$을 구하면	3점
(2-3)	$\lim_{x\to 1^+}(f(x)g(x))'$을 구하면	3점
(2-3)	$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\|f(x)\|)}{\ln x}$를 구하면	4점

오전 문제 3

※ [문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

다음과 같은 곱셈 공식이 성립한다.

(i) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

(ii) $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

(iii) $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$

(※) 최고차항의 계수가 1이고 삼차항의 계수가 a인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

제시문

모든 정수 k에 대하여

$$f(k-2) \le f(k) \le f(k+2) \quad \text{또는} \quad f(k-2) \ge f(k) \ge f(k+2)$$

이다.

함수 $g(x)$는 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}$$

(3-1) 식 $g(x) - f'(x)$를 간단히 하시오. [10점]
(3-2) $a = 1$일 때, 방정식 $g(x) = 0$의 근을 모두 구하시오. [10점]
(3-3) $f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{9}{4}\right)$일 때, 도함수 $f'(x)$를 모두 구하시오. [15점]

예시 답안

(3-1) $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$라 하자.

$$g(x) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2} = \frac{(x+1)^4 - (x-1)^4}{2} + a\frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{2}$$
$$+ b\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{2} + c\frac{(x+1) - (x-1)}{2} + d(1-1)$$
$$= (4x^3 + 4x) + a(3x^2 + 1) + 2bx + c = f'(x) + (4x + a)$$

그러므로 $g(x) - f'(x) = 4x + a$이다.

(3-2) 함수 $f(x)$는 모든 정수 k에 대하여

$$f(k-2) \le f(k) \le f(k+2) \quad \text{또는} \quad f(k-2) \ge f(k) \ge f(k+2) \quad \cdots \quad ①$$

을 만족하고, $2g(k) = f(k+1) - f(k-1)$이므로

$$-2g(k-1) \le 0 \le 2g(k+1) \quad \text{또는} \quad -2g(k-1) \ge 0 \ge 2g(k+1)$$

이다. 그러므로 함수 $g(x)$는 모든 정수 k에 대하여

$$g(k+1)g(k-1) \ge 0 \quad \cdots \quad ②$$

를 만족하고, ②은 ①이기 위한 필요충분조건이다.

$g(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로 $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$이고 $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$이다. 그러므로 $g(2i) = 0$을 만족하는 정수 i와 $g(2j+1) = 0$을 만족하는 정수 j가 존재한다. 두 정수해 $2i$와 $2j+1$의 차이가 3 이상인 경우 $g(2i-1)g(2i+1) < 0$ 또는 $g(2j)g(2j+2) < 0$이 되어 모순이므로, 두 정수해는 이웃하는 정수이

고 이를 n, $n+1$이라 하자. 삼차방정식 $g(x)=0$의 나머지 해 α가 $\alpha<n-1$ 또는 $n+2<\alpha$이면 $k-1<\alpha<k+1$이고 $g(k+1)g(k-1)<0$인 k가 존재하여 모순이므로

$$n-1\le\alpha\le n+2 \quad \cdots \quad ③$$

이다. 그러므로 방정식 $g(x)=0$은 이웃한 두 정수해를 가지고, 방정식 $g(x)=0$의 임의의 두 근의 차는 2 이하이며, 이는 ①이기 위한 필요충분조건이다.

$a=1$일 때, $g(x)=f'(x)+(4x+1)$이므로 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수는 4이고, 이차항의 계수는 3이다.

$$\begin{aligned} g(x)&=4(x-n)(x-n-1)(x-\alpha)\\ &=4x^3-4(2n+1+\alpha)x^2+4(n^2+n+2n\alpha+\alpha)x-4n(n+1)\alpha \quad \cdots \quad ④ \end{aligned}$$

그러므로 $g(x)$의 이차항의 계수가 3이므로 $2n+1+\alpha=-\frac{3}{4}$이다. ③에 의하여, $3n\le-\frac{3}{4}\le3n+3$이고 $n=-1$, $\alpha=\frac{1}{4}$이다. 따라서 $g(x)=4(x+1)x\left(x-\frac{1}{4}\right)$이고, 방정식 $g(x)=0$의 근은 -1, 0, $\frac{1}{4}$이다.

(3-3) $g\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\left(f\left(\frac{9}{4}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)\right)=0$이므로, $\alpha=\frac{5}{4}$이고 $g(x)=4(x-n)(x-n-1)\left(x-\frac{5}{4}\right)$이다. ③에 의하여 정수 n은 $n-1\le\frac{5}{4}\le n+2$을 만족하므로 $n=0,1,2$이다.

$f'(x)=g(x)-(4x+a)$에서 양변의 이차항의 계수를 비교하면, ④에 의하여 $3a=-4\left(2n+1+\frac{5}{4}\right)$이므로

$$a=-\left(\frac{8}{3}n+3\right)$$

이다. 그러므로 도함수 $f'(x)$는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f'(x)&=4(x-n)(x-n-1)\left(x-\frac{5}{4}\right)-4x+\left(\frac{8}{3}n+3\right)\\ &=4x^3-(8n+9)x^2+(4n^2+14n+1)x-\left(5n^2+\frac{7}{3}n-3\right) \end{aligned}$$

n에 따라서 도함수 $f'(x)$는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} n=0:&\quad f'(x)=4x(x-1)\left(x-\frac{5}{4}\right)-4x+3=4x^3-9x^2+x+3\\ n=1:&\quad f'(x)=4(x-1)(x-2)\left(x-\frac{5}{4}\right)-4x+\frac{17}{3}=4x^3-17x^2+19x-\frac{13}{3}\\ n=2:&\quad f'(x)=4(x-2)(x-3)\left(x-\frac{5}{4}\right)-4x+\frac{25}{3}=4x^3-25x^2+45x-\frac{65}{3} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	$g(x)$를 전개하면	5점
(3-1)	$4x+a$를 구하면	5점
(3-1)	$4x+a$를 구했더라도 $g(x)$를 전개하지 않았으면	전체 0점
(3-2)	상자 조건과 필요충분조건인 $g(k+1)g(k-1)\ge0$을 기술하면	3점
(3-2)	$g(x)=0$은 이웃한 두 정수해를 가지는 것을 보이면	3점
(3-2)	나머지 근 α의 범위가 $n-1\le\alpha\le n+2$임을 보이면	3점
(3-2)	$a=1$일 때 방정식 $g(x)=0$의 근을 구하면	1점
(3-3)	$g\left(\frac{5}{4}\right)=0$임을 보이면	3점
(3-3)	$g(x)=4(x-n)(x-n-1)\left(x-\frac{5}{4}\right)$를 구하면	3점
(3-3)	$n=0,1,2$임을 보이면	3점
(3-3)	a를 n에 관한 식으로 나타내면	3점
(3-3)	$f'(x)=4x^3-9x^2+x+3$을 구하면	1점
(3-3)	$f'(x)=4x^3-17x^2+19x-\frac{13}{3}$을 구하면	1점
(3-3)	$f'(x)=4x^3-25x^2+45x-\frac{65}{3}$를 구하면	1점

오후 일반 문제 1

※ [문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (함수의 곱의 미분법)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

[나] (무리수 e)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

(※) 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 정의된 함수

$$f(x) = \sin^n x \cos x$$

는 $x = a_n$ $(0 < a_n < \frac{\pi}{2})$에서 극값 b_n을 갖는다.

(1-1) [15점] 극한 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\tan(2a_n)$의 값을 구하시오.
(1-2) [15점] 극한 $\lim_{n\to\infty}(1+\sqrt{n})b_n$의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

(1-1) 제시문 (가)에 의하여, $0 < x < \frac{\pi}{2}$인 실수 x에 대하여

$$f'(x) = n\sin^{n-1}x\cos^2 x - \sin^{n+1}x = \sin^{n-1}x(n\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin^{n-1}x\{(n+1)\cos^2 x - 1\}$$

이다. $f'(t) = 0$이라 하면, $0 < t < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos^2 t = \frac{1}{n+1}$이다. 또한 $0 < x < t$, $t < x < \frac{\pi}{2}$에서 $f'(x)$의 부호가 반대이므로, $f(x)$는 $x = t$에서 극값을 가지고 $a_n = t$이다. 또한 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$이고

$$\tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 a_n}}{\cos a_n} = \sqrt{n}$$

이다. 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\tan(2a_n) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{2\tan a_n}{1-\tan^2 a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1-n} = -2$$

이다.

(1-2) $b_n = f(a_n) = \sin^n a_n \cos a_n = \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$이다.

$$(1+\sqrt{n})b_n = \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n \times \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \times \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

이므로, 제시문 (나)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sqrt{n})b_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-\frac{1}{2}} \times \lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	함수 $f(x)$의 도함수를 계산하면	5점
(1-1)	수열 a_n을 구하면	5점

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	$f(x)$의 증가, 감소를 확인하여 $x=a_n$에서 극값을 갖는다는 것을 보이지 않으면	최대 2점 감점
(1-1)	주어진 극한값을 구하면	5점
(1-2)	수열 b_n을 구하면	3점
(1-2)	수열 $(1+\sqrt{n})b_n$의 극한을 무리수 e의 정의와 연관 지으면	6점
(1-2)	수열 $(1+\sqrt{n})b_n$의 극한값을 구하면	6점

오후 일반 문제 2

※ [문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

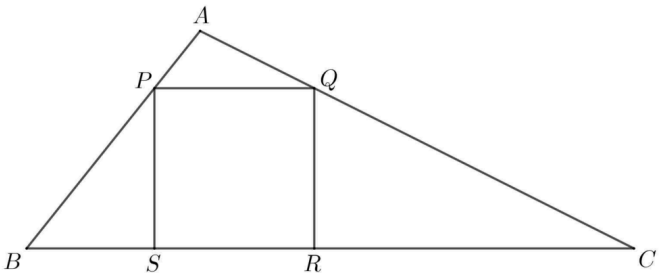
제시문

[가] $x_1 \neq x_2$일 때, 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

[나] 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(\alpha) = 0$일 때, $x = \alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x = \alpha$에서 극대이고, 극댓값 $f(\alpha)$를 갖는다.

(※) 그림과 같이 삼각형 ABC의 변 AB, AC 위에 각각 점 P, Q가 있고, 변 BC 위에 두 점 R, S가 있고, 사각형 $PQRS$는 정사각형을 이룬다. (단, 두 각 B와 C는 예각이다.)



(2-1) [10점] 양의 실수 a, b, c에 대하여 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각

$$A(0, a), \quad B(-b, 0), \quad C(c, 0)$$

이라 할 때, 정사각형 $PQRS$의 넓이를 a, b, c의 식으로 나타내시오.

(2-2) [10점] 삼각형 ABC의 넓이가 1이다. 정사각형 $PQRS$의 넓이가 최대일 때, 변 BC의 길이를 구하시오.

(2-3) [15점] 삼각형 ABC의 넓이가 1이다. 선분 AP 위의 점 X에서 선분 PQ 위에 내린 수선의 발을 W, 선분 AQ 위의 점 Y에서 선분 PQ 위에 내린 수선의 발을 Z라 할 때, 사각형 $XYZW$는 정사각형을 이룬다. 정사각형 $PQRS$와 정사각형 $XYZW$의 넓이의 차가 최대일 때, 변 BC의 길이를 d라 하자. d^2의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

(2-1) 두 점 A와 C를 지나는 직선의 방정식은 $y = -\frac{a}{c}x + a$이고 두 점 A와 B를 지나는 직선의 방정식은 $y = \frac{a}{b}x + a$이다. R과 S의 x좌표를 각각 r, s라 하면 P, Q의 좌표는 $P\left(s, \frac{a}{b}s + a\right)$, $Q\left(r, -\frac{a}{c}r + a\right)$이다. $\overline{PS} = \overline{QR}$이므로

$$\frac{a}{b}s + a = -\frac{a}{c}r + a$$

이다. 따라서 $cs + br = 0$. 또한, $\overline{QR} = \overline{SR}$이므로

$$-\frac{a}{c}r + a = r - s = r + \frac{br}{c}$$

이다. 따라서 $r = \frac{ac}{a+b+c}$, $s = -\frac{ab}{a+b+c}$이고 정사각형 $PQRS$의 변의 길이는 $\frac{a(b+c)}{a+b+c}$이다. 따라서 넓이는 $\frac{a^2(b+c)^2}{(a+b+c)^2}$이다.

(2-2) 삼각형 ABC의 변 BC의 길이를 x라 하자. 그러면 (2-1)에서 $\overline{BC} = b + c = x$이고 삼각형 ABC의 넓이가 1이므로 $a = \frac{2}{x}$이다. 이를 (2-1)에서 구한 정사각형 $PQRS$의 넓이에 대입하면 $\left(\frac{2x}{x^2+2}\right)^2$이 된다. 넓이가 최대가 되는 x를 구하기 위해서 $f(x) = \frac{2x}{x^2+2}$가 최대가 되는 x를 구하면 된다. (단, $x > 0$) $f'(x) = \frac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$이므로 $f'(x) = 0$의 해는 $x = \pm\sqrt{2}$이다. $x > 0$이므로 증감 관계를 확인하면 $f(x)$는 $x = \sqrt{2}$에서 극댓값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$를 갖는다.

(별해) $f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$에서 x가 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 $f(x)$의 최댓값을 구할 수 있다. $x^2+2\geq 2\sqrt{2}x$이므로 $f(x)\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$이다. 등호는 $x^2=2$일 때 성립하므로, $x=\sqrt{2}$일 때 최댓값을 갖는다.

(2-3) (2-2)에서 선분 BC의 길이를 x라 할 때, $\overline{PQ}=\frac{2x}{x^2+2}$이다. 삼각형 ABC와 삼각형 APQ는 서로 닮음이고 닮음비가 $x:\frac{2x}{x^2+2}$이다. 따라서 XY의 길이는 $\overline{PQ}\cdot\frac{\overline{PQ}}{\overline{BC}}=\frac{4x}{(x^2+2)^2}$이고 사각형 $XYZW$의 넓이는 $\frac{16x^2}{(x^2+2)^4}$이다. 그러므로 정사각형 $PQRS$와 $XYZW$의 넓이의 차는

$$g(x)=\left(\frac{2x}{x^2+2}\right)^2-\frac{16x^2}{(x^2+2)^4}$$

이고, 이 값이 최대가 되는 x의 값이 d가 된다. $x^2=y$라 하면 $g(x)$는 다음과 같이 y의 식으로 나타낼 수 있다.

$$h(y)=\frac{4y}{(y+2)^2}-\frac{16y}{(y+2)^4}=\frac{4(y^3+4y^2)}{(y+2)^4}\quad(y>0)$$

함수 $h(y)$가 최대가 되는 y의 값이 d^2이다.

$$h'(y)=\frac{-4y(y^2+2y-16)}{(y+2)^5}\quad(y>0)$$

이므로 $h(y)$는 $y=-1+\sqrt{17}$에서 극값을 갖고, $y<-1+\sqrt{17}$이면 $h'(y)>0$이고 $y>-1+\sqrt{17}$이면 $h'(y)<0$이므로 $h(y)$는 $y=-1+\sqrt{17}$에서 최댓값을 갖는다. 그러므로 $d^2=-1+\sqrt{17}$이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	직선 AB와 AC의 직선의 방정식을 구하면	3점
(2-1)	정사각형 $PQRS$의 넓이를 구하면	7점
(2-2)	정사각형 $PQRS$의 넓이를 변 BC의 길이의 식으로 표현하면 (또는 정사각형 $PQRS$의 넓이를 $(b+c)$의 식으로 표현하면) (또는 정사각형 $PQRS$의 넓이를 a의 식으로 표현하면)	5점
(2-2)	정사각형 $PQRS$의 넓이가 최대가 될 때 변 BC의 길이를 구하면	5점
(2-3)	정사각형 $XYZW$의 한 변의 길이, 또는 넓이를 구하면	5점
(2-3)	넓이의 차가 최대가 될 때 d^2의 값을 구하면	10점

오후 일반 문제 3

※ [문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (정적분의 치환적분법)

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

[나] (나누어진 구간에서의 정적분)

임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 함수 $f(t)$가 연속일 때

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

(3-1) [10점] $0<a<\frac{\pi}{2}$인 실수 a에 대하여

$$\int_0^a \frac{1}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$

를 구하시오.

(3-2) [10점] $0<a<\frac{\pi}{2}$인 실수 a에 대하여

$$\int_0^a \frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\pi-a}^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$

를 구하시오.

(3-3) [15점] $0\le x\le\pi$인 실수 x에 대하여 $f(x)=\int_0^x \frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$라 할 때, 극한

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{2h}\left(f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\right)$$

의 값을 구한 후, $f(\pi)$의 값을 구하시오.

예시 답안

(3-1) $0<a<\frac{\pi}{2}$인 실수 a에 대하여,

$$\int_0^a \frac{1}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_0^a \frac{1-\sin t}{(1+\sin t)(1-\sin t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^a \frac{1-\sin t}{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^a \frac{1-\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^a (\sec^2 t-\tan t\sec t)\,\mathrm{d}t=[\tan t-\sec t]_0^a=\tan a-\sec a+1$$

이다.

(3-2) $0<a<\frac{\pi}{2}$인 실수 a에 대하여, 제시문 (가)에 의하여 $(t=\pi-y)$

$$\int_0^a \frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_{\pi-a}^{\pi} \frac{(\pi-y)\sin y}{1+\sin y}\,\mathrm{d}y=\pi\int_{\pi-a}^{\pi} \frac{\sin y}{1+\sin y}\,\mathrm{d}y-\int_{\pi-a}^{\pi} \frac{y\sin y}{1+\sin y}\,\mathrm{d}y$$

이다. (3-1)과 제시문 (가)에 의하여 $(y=\pi-t)$

$$\int_0^a \frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\pi-a}^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t=\pi\int_{\pi-a}^{\pi}\frac{\sin y}{1+\sin y}\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^a\frac{\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\pi\int_0^a\left(1-\frac{1}{1+\sin t}\right)\mathrm{d}t=\pi a-\pi\int_0^a\frac{1}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\pi(a-\tan a+\sec a-1)$$

이다.

(3-3) 미분계수의 정의와 적분과 미분의 관계에 의하여,

$$\lim_{h\to0+}\frac{1}{2h}\left(f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\right)=\lim_{h\to0+}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2h}+\lim_{h\to0+}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2(-h)}$$
$$=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\pi}{4}$$

이다. 따라서

$$\lim_{h\to0+}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t=\lim_{h\to0+}\left(f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\right)=0$$

이다. 제시문 (나)와 (3-2)에 의하여 ($a=\frac{\pi}{2}-h$)

$$f(\pi)=\lim_{h\to0+}f(\pi)=\lim_{h\to0+}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}+h}^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$=\lim_{h\to0+}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}+h}^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t\right)+\lim_{h\to0+}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\lim_{h\to0+}\left\{\pi\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-\pi\tan\left(\frac{\pi}{2}-h\right)+\pi\sec\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-\pi\right\}$$
$$=\frac{\pi^2}{2}-\pi-\pi\lim_{h\to0+}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}=\frac{\pi^2}{2}-\pi-\pi\lim_{h\to0+}\frac{\cos h-1}{\sin h}$$
$$=\frac{\pi^2}{2}-\pi-\pi\lim_{h\to0+}\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{\sin h(\cos h+1)}=\frac{\pi^2}{2}-\pi+\pi\lim_{h\to0+}\frac{\sin h}{\cos h+1}=\frac{\pi^2}{2}-\pi$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	함수의 분자와 분모에 $1-\sin t$를 곱하여 식을 변형하면	3점
(3-1)	$\sin^2 t+\cos^2 t=1$을 활용하여 주어진 함수를 $\sec^2 t-\sec t\tan t$로 변형하면	3점
(3-1)	$\sec^2 t-\sec t\tan t$의 적분값을 구하면	4점
(3-2)	정적분의 치환적분법을 사용하여 주어진 정적분을 $\int_0^a\frac{\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$에 관한 식으로 표현하면	5점
(3-2)	주어진 정적분의 값을 구하면	5점
(3-3)	미분계수의 정의와 적분과 미분의 관계를 사용하여 주어진 극한값을 구하면	3점
(3-3)	이를 활용하여 $\lim_{h\to0+}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t=0$임을 확인하면	4점
(3-3)	$f(\pi)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}+h}^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$로 표현하면	4점
(3-3)	삼각함수의 극한값을 계산하여 $f(\pi)$를 구하면	4점
(3-3)	$\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$를 고려하지 않고 $f(\pi)$의 값을 구하면	최대 4점 감점

오후 의예과 문제 1

※ [문제 1] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (정적분의 치환적분법)

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

[나] (나누어진 구간에서의 정적분)

임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 함수 $f(t)$가 연속일 때

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

(1-1) [10점] $0<a<\frac{\pi}{2}$인 실수 a에 대하여

$$\int_0^a \frac{1}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$

를 구하시오.

(1-2) [10점] $0<a<\frac{\pi}{2}$인 실수 a에 대하여

$$\int_0^a \frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\pi-a}^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$

를 구하시오.

(1-3) [15점] $0\le x\le\pi$인 실수 x에 대하여 $f(x)=\int_0^x \frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$라 할 때, 극한

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{2h}\left(f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\right)$$

의 값을 구한 후, $f(\pi)$의 값을 구하시오.

예시 답안

(1-1) $0<a<\frac{\pi}{2}$인 실수 a에 대하여,

$$\int_0^a \frac{1}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_0^a \frac{1-\sin t}{(1+\sin t)(1-\sin t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^a \frac{1-\sin t}{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^a \frac{1-\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^a (\sec^2 t-\tan t\sec t)\,\mathrm{d}t=[\tan t-\sec t]_0^a=\tan a-\sec a+1$$

이다.

(1-2) $0<a<\frac{\pi}{2}$인 실수 a에 대하여, 제시문 (가)에 의하여 $(t=\pi-y)$

$$\int_0^a \frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_{\pi-a}^{\pi} \frac{(\pi-y)\sin y}{1+\sin y}\,\mathrm{d}y=\pi\int_{\pi-a}^{\pi} \frac{\sin y}{1+\sin y}\,\mathrm{d}y-\int_{\pi-a}^{\pi} \frac{y\sin y}{1+\sin y}\,\mathrm{d}y$$

이다. (1-1)과 제시문 (가)에 의하여 $(y=\pi-t)$

$$\int_0^a \frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\pi-a}^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t=\pi\int_{\pi-a}^{\pi}\frac{\sin y}{1+\sin y}\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^a\frac{\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\pi\int_0^a\left(1-\frac{1}{1+\sin t}\right)\mathrm{d}t=\pi a-\pi\int_0^a\frac{1}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\pi(a-\tan a+\sec a-1)$$

이다.

(1-3) 미분계수의 정의와 적분과 미분의 관계에 의하여,

$$\lim_{h\to0+}\frac{1}{2h}\left(f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\right)=\lim_{h\to0+}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2h}+\lim_{h\to0+}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2(-h)}$$
$$=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\pi}{4}$$

이다. 따라서

$$\lim_{h\to0+}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t=\lim_{h\to0+}\left(f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)\right)=0$$

이다. 제시문 (나)와 (1-2)에 의하여 ($a=\frac{\pi}{2}-h$)

$$f(\pi)=\lim_{h\to0+}f(\pi)=\lim_{h\to0+}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}+h}^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$=\lim_{h\to0+}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}+h}^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t\right)+\lim_{h\to0+}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\lim_{h\to0+}\left\{\pi\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-\pi\tan\left(\frac{\pi}{2}-h\right)+\pi\sec\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-\pi\right\}$$
$$=\frac{\pi^2}{2}-\pi-\pi\lim_{h\to0+}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}=\frac{\pi^2}{2}-\pi-\pi\lim_{h\to0+}\frac{\cos h-1}{\sin h}$$
$$=\frac{\pi^2}{2}-\pi-\pi\lim_{h\to0+}\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{\sin h(\cos h+1)}=\frac{\pi^2}{2}-\pi+\pi\lim_{h\to0+}\frac{\sin h}{\cos h+1}=\frac{\pi^2}{2}-\pi$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	함수의 분자와 분모에 $1-\sin t$를 곱하여 식을 변형하면	3점
(1-1)	$\sin^2 t+\cos^2 t=1$을 활용하여 주어진 함수를 $\sec^2 t-\sec t\tan t$로 변형하면	3점
(1-1)	$\sec^2 t-\sec t\tan t$의 적분값을 구하면	4점
(1-2)	정적분의 치환적분법을 사용하여 주어진 정적분을 $\int_0^a\frac{\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$에 관한 식으로 표현하면	5점
(1-2)	주어진 정적분의 값을 구하면	5점
(1-3)	미분계수의 정의와 적분과 미분의 관계를 사용하여 주어진 극한값을 구하면	3점
(1-3)	이를 활용하여 $\lim_{h\to0+}\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t=0$임을 확인하면	4점
(1-3)	$f(\pi)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}+h}^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$로 표현하면	4점
(1-3)	삼각함수의 극한값을 계산하여 $f(\pi)$를 구하면	4점
(1-3)	$\int_{\frac{\pi}{2}-h}^{\frac{\pi}{2}+h}\frac{t\sin t}{1+\sin t}\,\mathrm{d}t$를 고려하지 않고 $f(\pi)$의 값을 구하면	최대 4점 감점

오후 의예과 문제 2

※ [문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

일반적으로 $a>0$, $a\neq 1$일 때, 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(※) 곡선 $y=2^x$ 위의 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하고, 곡선 $y=\log_2(x-4)+1$ 위의 점 C에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 D라 할 때, 네 점 A, B, C, D는

$$(\text{직선 } AB \text{ 의 } y\text{절편})=(\text{직선 } CD \text{ 의 } y\text{절편})-5$$

를 만족한다.

(2-1) 점 A의 좌표가 (a,b)일 때, 점 $P(a+1,b+4)$는 직선 CD와 곡선 $y=2^{x-1}+4$의 교점임을 보이시오. [10점]
(2-2) 점 A의 좌표가 $(3,8)$일 때, 두 선분 AC와 BD의 길이를 구하시오. [10점]
(2-3) 사각형 $ABCD$가 평행사변형일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이를 구하시오. [15점]

■ 예시 답안

(2-1) 직선 AB의 기울기는 -1이고 직선 AB는 점 $A(a,b)$를 지나므로, 직선 AB의 방정식은 $y=-(x-a)+b$이고 직선 CD의 방정식은

$$y=-(x-a)+(b+5) \quad \cdots \quad ㉠$$

이다. 점 $A(a,b)$는 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로 $b=2^a$이고,

$$b+4=2^{(a+1)-1}+4 \quad \cdots \quad ㉡$$

이다. ㉠에 의하여 점 $P(a+1,b+4)$는 직선 CD 위에 있고, ㉡에 의하여 점 P는 곡선 $y=2^{x-1}+4$ 위에 있으므로, 점 P는 직선 CD와 곡선 $y=2^{x-1}+4$의 교점이다.

(2-2) $y=2^{x-1}+4$의 그래프와 $y=\log_2(x-4)+1$의 그래프는 직선 $y=x$에 의하여 대칭이므로, 점 C는 점 P를 대칭이동한 점이다. (2-1)에 의하여, 점 A의 좌표가 (a,b)이면 점 P의 좌표는 $(a+1,b+4)$이고 점 C는 $C(b+4,a+1)$이다. 점 B는 점 $A(a,b)$를 직선 $y=x$에 의하여 대칭이동한 점이므로 $B(b,a)$이고, 점 D는 점 $C(b+4,a+1)$에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발이므로 $D\left(\frac{a+b+5}{2},\frac{a+b+5}{2}\right)$이다.

따라서 A의 좌표가 $(3,8)$이면 $a=3$, $b=8$이므로 $B(8,3)$, $C(12,4)$, $D(8,8)$이고,

$$\overline{AC}=\sqrt{(12-3)^2+(4-8)^2}=\sqrt{97},$$
$$\overline{BD}=\sqrt{(8-8)^2+(8-3)^2}=5$$

이다.

(2-3) 사각형 $ABCD$가 평행사변형이므로 사각형의 두 대각선 AC와 BD의 중점은 서로 같다.

$$\left(\frac{a+b+4}{2},\frac{a+b+1}{2}\right)=\left(\frac{a+3b+5}{4},\frac{3a+b+5}{4}\right)$$

그러므로 $b-a=3$이다. 선분 AB의 길이는

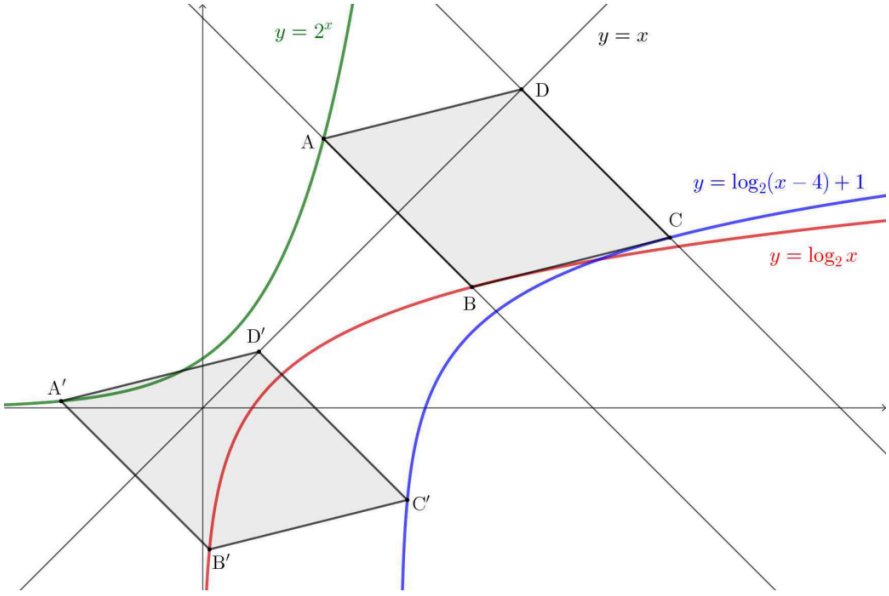
$$\overline{AB}=\sqrt{(a-b)^2+(b-a)^2}=|b-a|\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

이고, 두 직선 AB와 CD 사이의 거리는

$$|(\text{직선 } AB \text{ 의 } y\text{절편})-(\text{직선 } CD \text{ 의 } y\text{절편})|\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

이므로, 사각형 $ABCD$의 넓이는 $3\sqrt{2}\times\frac{5}{2}\sqrt{2}=15$이다.

참고. 주어진 조건을 만족하는 사각형 $ABCD$는 두 가지가 있고, 두 경우 모두 넓이는 15이다.



■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	점 P가 직선 CD 위에 있음을 보이면	5점
(2-1)	점 P가 곡선 $y = 2^{x-1} + 4$ 위에 있음을 보이면	5점
(2-2)	점 B의 좌표를 구하면	2점
(2-2)	점 C의 좌표를 구하면	2점
(2-2)	점 D의 좌표를 구하면	2점
(2-2)	선분 AC의 길이를 구하면	2점
(2-2)	선분 BD의 길이를 구하면	2점
(2-3)	평행사변형일 조건인 $b - a = 3$을 구하면	5점
(2-3)	선분 AB의 길이(또는 선분 CD의 길이)를 구하면	5점
(2-3)	두 직선 AB와 CD 사이의 거리를 구하면	5점
(2-3)	사각형 $ABCD$의 넓이를 구하지 못했으면	최대 3점 감점

오후 의예과 문제 3

※ [문제 3] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

함수 $f(x)$에 대하여 좌극한 $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$와 우극한 $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 각각 존재하고, 그 값이 서로 같다면 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(3-1) 사차함수 $p(x)$의 최고차항의 계수가 1이다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족하는 실수 α의 최댓값을 $g(t)$라 하자.

> 구간 $(-\infty, t]$에서 $p(x)$는 $x=\alpha$일 때 최솟값을 갖는다. (단, $\alpha \le t$)

함수 $g(t)$가

$$g(t)=\begin{cases} t & (t<0) \\ 0 & (0\le t<2) \\ t & (2\le t<3) \\ 3 & (t\ge 3) \end{cases}$$

이 되도록 하는 $p(x)$에 대하여, $p(1)-p(0)$의 값을 구하시오. [10점]

(3-2) 사차함수 $q(x)$는 $q(0)=2$, $q(1)=\frac{23}{8}$을 만족하고, 함수 $f(x)$는

$$f(x)=-\cos\frac{\pi q(x)}{4}$$

이다. 함수 $h(t)$는 실수 전체의 집합에서 다음과 같이 정의한다.

> (ⅰ) $h(0)=0$
>
> (ⅱ) $t>0$이면, 구간 $[0,t]$에서 $f(x)$가 $x=\alpha$일 때 최댓값을 갖도록 하는 α 중 최솟값이 $h(t)$이다. (단, $0\le\alpha\le t$)
>
> (ⅲ) $t<0$이면, 구간 $[t,0]$에서 $f(x)$가 $x=\alpha$일 때 최댓값을 갖도록 하는 α 중 최댓값이 $h(t)$이다. (단, $t\le\alpha\le 0$)

합성함수 $(q\circ h)(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 사차함수 $q(x)$를 모두 구하시오. [20점]

■ 예시 답안

(3-1) $g(t)$의 식으로부터 사차함수 $p(x)$의 그래프의 개형을 보면 $x=0$과 $x=3$에서 극솟값을 갖고, $p(0)=p(2)$임을 알 수 있다. 특히, $p(x)$는 $x=3$에서 최소이다.

$p'(x)=4x(x-a)(x-3)$ (단, $0<a<3$)이라고 놓을 수 있고, $p(x)=x^4-\left(4+\frac{4a}{3}\right)x^3+6ax^2+C$이다. $p(0)=p(2)$이므로 $\frac{40}{3}a-16=0$이다.

그러므로 $a=\frac{6}{5}$이고 $p(x)=x^4-\frac{28}{5}x^3+\frac{36}{5}x^2+C$이다.

따라서 $p(1)-p(0)=\frac{13}{5}$이다.

(3-2) $q'(0)>0$이면 $\lim_{x\to 0^+}h'(x)=1$, $\lim_{x\to 0^-}h'(x)=0$이므로 좌극한

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{(q\circ h)(x)-q(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{q(0)-q(0)}{x}=0$$

과 우극한

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(q\circ h)(x)-q(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{q(x)-q(0)}{x}=q'(0)$$

이 같지 않아서 함수 $(q\circ h)(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다. 마찬가지로 $q'(0)<0$이면 함수 $(q\circ h)(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다. 따라서 $q'(0)=0$이다.

먼저 사차함수 $q(x)$의 최고차항의 계수가 양수라고 가정하자. 사잇값의 정리에 의하여 $q(a)=q(b)=4$인 가장 큰 음수 a와 가장 작은 양수 b가 존재한다. $x\le a$ 또는 $x\ge b$이면 $(q\circ h)(x)=4$이므로, $x=a$와 $x=b$에서 $(q\circ h)(x)$가 미분가능하려면 $q'(a)=q'(b)=0$이어야 한다. 사차함수의 그래프의 개형으로부터 이는 가능하지 않다. 따라서 사차함수 $q(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.

구간 $[0,\infty)$에서 $q(x)$의 최댓값을 M이라 하자. 문제의 조건에서 $M\ge q(1)>q(0)$이고 $q(b)=M$인 양수 b에 대하여 $q'(b)=0$이다. 마찬가지로 구간 $(-\infty,0]$에서 $q(x)$가 $x=a$일 때 최대이면 $q'(a)=0$이다. $M<4$이면 사잇값의 정리에 의하여 $q(\gamma)=-4$인 가장 작은 양수 γ가 존재하고 $x\ge\gamma$이면 $(q\circ h)(x)=-4$이므로, $x=\gamma$에서 $(q\circ h)(x)$가 미분가능하려면 $q'(\gamma)=0$이어야 한다. 사차함수는 4개의 서로 다른 점에서 미분값이 0이 될 수 없으므로 이는 가능하지 않다. 마찬가지로 $M>4$이면 $q(\gamma)=-4$ 또는 $q(\gamma)=4$인 가장 작은 양수 γ에 대하여 $q'(\gamma)=0$이어야 하고 이는 가능하지 않으므로 $M=4$이다. 같은 방법으로 구간 $(-\infty,0]$에서 $q(x)$의 최댓값도 4임을 알 수 있다.

따라서 음수 α와 양수 β가 존재하여, $q'(x)=cx(x-\alpha)(x-\beta)$이고, $q(\alpha)=q(\beta)=4$이다. (단, $c<0$은 상수)

$q'(x)$를 적분하면 $q(0)=2$이므로, $q(x)=c\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right)+2$이다.

$$\begin{aligned}q(\alpha)-q(\beta)&=c\left\{\frac{1}{4}(\alpha^4-\beta^4)-\frac{\alpha+\beta}{3}(\alpha^3-\beta^3)+\frac{\alpha\beta}{2}(\alpha^2-\beta^2)\right\}\\&=\frac{c}{12}(\alpha-\beta)\{3(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)-4(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+6\alpha\beta(\alpha+\beta)\}\\&=\frac{c}{12}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\{3(\alpha^2+\beta^2)-4(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+6\alpha\beta\}\\&=-\frac{c}{12}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^3=0\end{aligned}$$

이므로, $\alpha=-\beta$이고, $q(x)=c\left(\frac{x^4}{4}-\frac{\beta^2}{2}x^2\right)+2$이다.

$q(\beta)=-\frac{\beta^4c}{4}+2=4$이므로, $c=-\frac{8}{\beta^4}$이다. $q(1)=\frac{23}{8}$이므로, $-\frac{8}{\beta^4}\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta^2}{2}\right)+2=\frac{23}{8}$이고, 이를 정리하면 $7\beta^4-32\beta^2+16=(\beta^2-4)(7\beta^2-4)=0$이므로, $\beta^2=4$ 또는 $\beta^2=\frac{4}{7}$이다.

각각의 경우 $q(x)=-\frac{x^4}{8}+x^2+2$ 또는 $q(x)=-\frac{49}{8}x^4+7x^2+2$이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	$p'(x)=4x(x-a)(x-3)$ (단, $0<a<3$)이라고 놓으면 (또는 $p(x)$가 $x=0$과 $x=3$에서 극솟값을 갖는 것을 파악하면) $p(0)=p(2)$로부터 $p(x)=x^4-\frac{28}{5}x^3+\frac{36}{5}x^2+C$임을 구하면 $p(1)-p(0)=\frac{13}{5}$임을 구하면	4점 4점 2점
(3-2)	$q'(0)=0$임을 보이면 $q(x)$의 최고차항의 계수가 음수임을 증명하면 $q(x)$가 $x>0$일 때와 $x<0$일 때 최댓값이 모두 4임을 보이면 $q'(x)=cx(x-\alpha)(x-\beta)$라고 놓았을 때 $\alpha=-\beta$임을 보이면 $q(x)$의 식을 모두 구하면	3점 4점 3점 4점 6점

2025학년도 자연계열 (수학)

오전 일반 문제 1

※ [문제 1] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (정적분의 부분적분법) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

[나] $f(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 정의된 상수함수가 아닌 연속함수이고, 이 구간의 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이면 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$는 도형의 넓이이므로 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$이다.

(1-1) [10점] $\displaystyle\sum_{n=1}^{8} \sin^2 \frac{n\pi}{16}$의 값을 구하시오.

(1-2) [10점] 정적분 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x$의 값을 구하시오.

(1-3) [15점] $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{16}\sin\frac{nx}{8}$, $\displaystyle g(x)=\sum_{n=1}^{16} n\cos\frac{nx}{8}$일 때, 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_0^{\pi} e^x f(x)g(x)\,\mathrm{d}x < 0$$

■ 예시 답안

(1-1) 삼각함수의 성질 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$를 활용하면,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{8}\sin^2\frac{n\pi}{16} &= \left(\sin^2\frac{\pi}{16}+\sin^2\frac{7\pi}{16}\right)+\left(\sin^2\frac{2\pi}{16}+\sin^2\frac{6\pi}{16}\right)+\left(\sin^2\frac{3\pi}{16}+\sin^2\frac{5\pi}{16}\right)+\sin^2\frac{4\pi}{16}+\sin^2\frac{8\pi}{16}\\ &= \left(\sin^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{\pi}{16}\right)+\left(\sin^2\frac{2\pi}{16}+\cos^2\frac{2\pi}{16}\right)+\left(\sin^2\frac{3\pi}{16}+\cos^2\frac{3\pi}{16}\right)+\sin^2\frac{4\pi}{16}+\sin^2\frac{8\pi}{16}\\ &= 1+1+1+\frac{1}{2}+1=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

(1-2) 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$이다. 제시문 (가)에 의하여

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^x\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x &= \left[e^x\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = e^{\pi} - \frac{1}{2}\left(\left[e^x\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= e^{\pi} - \frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

이다. 식을 정리하면 $\displaystyle\frac{5}{4}\int_0^{\pi} e^x\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = e^{\pi}+\frac{1}{2}$이므로, 구하고자 하는 정적분 값은

$$\int_0^{\pi} e^x\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}e^{\pi}+\frac{1}{5}$$

이다.

(1-3) $f(0)=0$이고, 삼각함수의 성질 $\sin x = -\sin(2\pi - x)$에 의하여

$f(\pi)=\displaystyle\sum_{n=1}^{16}\sin\frac{n\pi}{8}=\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{15\pi}{8}\right)+\left(\sin\frac{2\pi}{8}+\sin\frac{14\pi}{8}\right)+\cdots+\left(\sin\frac{7\pi}{8}+\sin\frac{9\pi}{8}\right)+\sin\frac{8\pi}{8}+\sin\frac{16\pi}{8}=0$

이다. 또한 $f'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{16}\frac{n}{8}\cos\frac{nx}{8}=\frac{1}{8}g(x)$이므로, 제시문 (가)에 의하여

$$\int_0^{\pi}e^x f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=8\int_0^{\pi}e^x f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x=8\left[e^x\ |f(x)|^2\right]_0^{\pi}-8\int_0^{\pi}e^x f(x)f'(x)\,\mathrm{d}x-8\int_0^{\pi}e^x\ |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

이고, $\displaystyle\int_0^{\pi}e^x f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=-4\int_0^{\pi}e^x\ |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$이다. 이때 함수 $e^x\ |f(x)|^2\geq 0$이고 상수함수가 아니므로, 제시문 (나)에 의하여 $\displaystyle\int_0^{\pi}e^x\ |f(x)|^2\,\mathrm{d}x>0$이므로, 주어진 부등식이 성립한다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	삼각함수 공식 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$을 사용하면	3점
(1-1)	삼각함수 공식 $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$를 사용하면	3점
(1-1)	$\frac{9}{2}$를 구하면	4점
(1-2)	삼각함수의 덧셈정리를 올바르게 사용하면	3점
(1-2)	부분적분법을 사용하여 정적분 값을 구하면	7점
(1-3)	$f'(x)$와 $g(x)$와의 연관성을 표현하면	3점
(1-3)	$f(0)=f(\pi)=0$을 보이면	5점
(1-3)	부분적분법을 사용하여 부등식을 증명하면	7점

오전 일반 문제 2

※ [문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] a를 포함하는 어떤 열린구간에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 x의 값이 a보다 작은 값에서 a보다 큰 값으로 바뀔 때

(1) $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가진다.

(2) $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가진다.

[나] 임의의 양의 실수 $\alpha(\alpha\neq 2)$에 대하여, $1+\frac{\alpha}{2}>\sqrt{2\alpha}$이다.

(2-1) $f(t)=\cos(t-1)\sin(t-2)\sin(t^2)$이라 하자.

(a) 열린구간 $(0,3)$에서 $f(t)=0$이 되는 t의 값을 모두 구하시오. (5점)

(b) 열린구간 $(0,3)$에서 정의된 함수 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$에 대하여, $F(x)$가 극댓값을 가지는 x의 값과 극솟값을 가지는 x의 값을 각각 모두 구하시오. (10점)

(2-2) $g(t)=\cos(t^2-1)\sin(t^2-2)\cos^2(t^2-3)\sin^2(t^2-4)$라 하자.

(a) 열린구간 $(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$에서 $g(t)=0$이 되는 t의 값을 모두 구하시오. (5점)

(b) 열린구간 $(-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$에서 정의된 함수 $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$에 대하여, $G(x)$가 극댓값을 가지는 x의 값과 극솟값을 가지는 x의 값을 각각 모두 구하시오. (15점)

예시 답안

(2-1) (a) $\cos(t-1)\sin(t-2)\sin(t^2)=0$이므로 $\cos(t-1)=0$, $\sin(t-2)=0$ 또는 $\sin(t^2)=0$이다. 따라서 $t-1=\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $t-2=n\pi$ 또는 $t^2=n\pi$ (n은 정수)꼴이 되어야 한다. $0<t<3$이므로 $-1<t-1<2$, $-2<t-2<1$, $0<t^2<9$이다. 따라서 범위 내에서 함숫값이 0이 되는 t의 값들은 $1+\frac{\pi}{2}$, 2, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{2\pi}$이다.

(b) $F(x)=\int_0^x \cos(t-1)\sin(t-2)\sin(t^2)\,dt$를 미분하면

$$F'(x)=f(x)=\cos(x-1)\sin(x-2)\sin(x^2)$$

이고, 범위 내에서 이 값이 0이 되는 x의 값들을 순서대로 나열하면 $\sqrt{\pi}$, 2, $\sqrt{2\pi}$, $1+\frac{\pi}{2}$이다. (제시문 (나)에 의하여 $1+\frac{\pi}{2}>\sqrt{2\pi}$이다.)

이제 각 값에 대하여 그 값의 좌우에서 $\cos(x-1)$, $\sin(x-2)$, $\sin(x^2)$의 부호를 관찰하자. $\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 코사인함수의 부호가 양에서 음으로 바뀌고 0의 좌우에서 사인함수의 부호가 음에서 양으로, π의 좌우에서 사인함수의 부호가 양에서 음으로 바뀐다. 그러므로

x	$\cdots$	$\sqrt{\pi}$	$\cdots$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\cdots$	$\sqrt{2\pi}$	$\cdots$	$\cdots$	$1+\frac{\pi}{2}$	$\cdots$
$\cos(x-1)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	−
$\sin(x-2)$	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$\sin(x^2)$	+	0	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+
$f(x)$	−	**0**	+	+	**0**	−	−	**0**	+	+	**0**	−

그러므로 제시문 (가)에 의해 함수 $F(x)$는 $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{2\pi}$에서 극솟값을, 2, $1+\frac{\pi}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

(2-2) (a) $-\sqrt{\pi}<t<\sqrt{\pi}$이므로 $0\le t^2<\pi$이고, 따라서 $-n\le t^2-n<\pi-n$이다. 범위를 고려하여 각 항이 0이 되는 t의 값을 찾으면 다음과 같다.

$$\cos(t^2-1)=0 \Leftrightarrow t^2-1=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$$

$$\sin(t^2-2)=0 \Leftrightarrow t^2-2=0 \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$$

$$\cos(t^2-3)=0 \Leftrightarrow t^2-3=-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{3-\frac{\pi}{2}}$$

$$\sin(t^2-4)=0 \Leftrightarrow t^2-4=-\pi \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{4-\pi}$$

즉, 해는 $t=\pm\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$, $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3-\frac{\pi}{2}}$, $\pm\sqrt{4-\pi}$이다.

(b) $G(x)=\int_0^x \cos(t^2-1)\sin(t^2-2)\cos^2(t^2-3)\sin^2(t^2-4)\,dt$를 미분하면

$$G'(x)=g(x)=\cos(x^2-1)\sin(x^2-2)\cos^2(x^2-3)\sin^2(x^2-4)$$

이다. 이 함수의 값이 0이 되는 점들의 좌우에서의 $G'(x)$의 부호를 관찰하자.

1) $x=-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$ 또는 $x=\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$인 경우.

$\cos^2(x^2-3)\sin^2(x^2-4)$의 부호는 이 점들의 근방에서 항상 양수이므로, $\cos(x^2-1)$과 $\sin(x^2-2)$의 부호만 고려하면 된다. $x^2-2=\frac{\pi}{2}-1$이므로 이 점들의 근방에서 $\sin(x^2-2)$의 값은 양수이다.

$x=-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$의 좌우에서 x^2-1은 $\frac{\pi}{2}$보다 큰 값에서 작은 값으로 변하고, $\cos(x^2-1)$은 음수에서 양수로 변한다.

$x=\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$의 좌우에서 x^2-1은 $\frac{\pi}{2}$보다 작은 값에서 큰 값으로 변하고, $\cos(x^2-1)$은 양수에서 음수로 변한다. 그러므로 제시문 (가)에 의해 $x=-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$에서 극솟값을 갖고, $x=\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$에서 극댓값을 갖는다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$	$\cdots$	$\cdots$	$\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$	$\cdots$
$\cos(x^2-1)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$\sin(x^2-2)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\cos^2(x^2-3)\sin^2(x^2-4)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$

2) $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$인 경우.

$\cos^2(x^2-3)\sin^2(x^2-4)$의 부호는 이 점들의 근방에서 항상 양수이므로, $\cos(x^2-1)$과 $\sin(x^2-2)$의 부호만 고려하면 된다. $x^2-1=1$이므로 이 점들의 근방에서 $\cos(x^2-1)$의 값은 양수이다.

$x=-\sqrt{2}$의 좌우에서 x^2-2는 0보다 큰 값에서 작은 값으로 변하고, $\sin(x^2-2)$는 양수에서 음수로 변한다.

$x=\sqrt{2}$의 좌우에서 x^2-2는 0보다 작은 값에서 큰 값으로 변하고, $\sin(x^2-2)$는 음수에서 양수로 변한다. 그러므로 제시문 (가)에 의해 $x=-\sqrt{2}$에서 극댓값을 갖고, $x=\sqrt{2}$에서 극솟값을 갖는다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$\cos(x^2-1)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\sin(x^2-2)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$\cos^2(x^2-3)\sin^2(x^2-4)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

3) $x=\sqrt{3-\frac{\pi}{2}}$ 또는 $x=-\sqrt{3-\frac{\pi}{2}}$인 경우.

이 점들의 좌우에서 $\cos^2(x^2-3)$의 값은 항상 양수이므로, 함숫값의 부호가 바뀌지 않는다. 따라서 이 점들에서 극댓값이나 극솟값을 갖지 않는다.

4) $x=\sqrt{4-\pi}$ 또는 $x=-\sqrt{4-\pi}$인 경우.

이 점들의 좌우에서 $\sin^2(x^2-4)$의 값은 항상 양수이므로, 함숫값의 부호가 바뀌지 않는다. 따라서 이 점들에서 극댓값이나 극솟값을 갖지 않는다.

따라서 $G(x)$가 극댓값을 갖는 점은 $\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$, $-\sqrt{2}$이고, 극솟값을 갖는 점은 $-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$, $\sqrt{2}$이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1) (a)	해를 모두 찾으면	5점
(2-1) (b)	$\sqrt{\pi}$, 2, $\sqrt{2\pi}$, $1+\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $F(x)$의 부호 변화를 맞게 서술하면	8점
(2-1) (b)	$F(x)$가 극댓값, 극솟값을 갖는 점을 모두 찾으면	2점
(2-2) (a)	해를 모두 찾으면	5점
(2-2) (b)	$\pm\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$, $\pm\sqrt{2}$의 좌우에서 $G(x)$의 부호 변화를 맞게 서술하면	8점
(2-2) (b)	$\pm\sqrt{3-\frac{\pi}{2}}$, $\pm\sqrt{4-\pi}$의 좌우에서 $G(x)$의 부호 변화가 없음을 설명하면	4점
(2-2) (b)	$G(x)$가 극댓값, 극솟값을 갖는 점을 모두 찾으면	3점

오전 일반 문제 3

※ [문제 3] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (접선의 방정식) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

[나] (판별식) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$의 판별식은 $D=b^2-4ac$이다.

(3-1) 실수 a와 양의 실수 b에 대하여 점 $X(a, 0)$에서 곡선 $f(x)=x^2+b$에 그은 두 접선이 곡선과 만나는 접점을 각각 P, Q라 하자. 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 할 때, 사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이를 a와 b의 식으로 나타내시오. (10점)

(3-2) $-2<p<2$인 실수 p에 대하여 $g(x)=x^2+(p-2)x+(p^3-4p+4)$라 하자.

(a) 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식이 $(p+2)h(p)$일 때, $h(p)$의 최댓값을 구하시오. (5점)

(b) 점 $A(1, 0)$에서 $y=g(x)$에 그은 두 접선의 접점을 각각 B, C라 하고, 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 B', C'이라 하자. 사다리꼴 $BB'C'C$의 넓이를 S라 할 때, S를 p의 식으로 나타내시오. (10점)

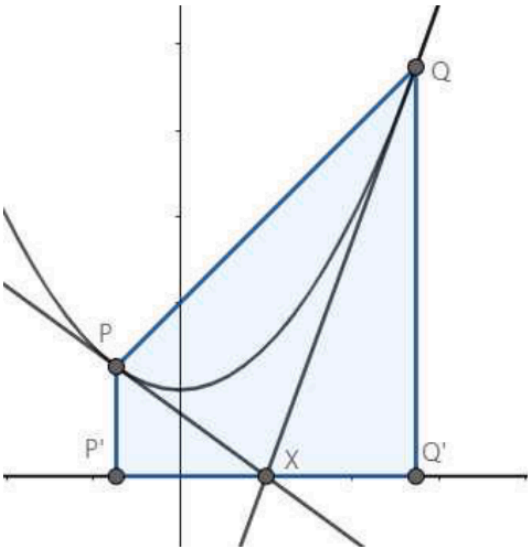
(c) S의 최솟값을 구하시오. (5점)

■ 예시 답안

(3-1) 접점의 x좌표를 c라 하면 접선의 기울기로부터 $2c=\frac{c^2+b}{c-a}$이고 $c=a\pm\sqrt{a^2+b}$이다. 따라서 P와 Q의 x좌표는 각각 $a-\sqrt{a^2+b}$, $a+\sqrt{a^2+b}$이고 $P'=\left(a-\sqrt{a^2+b}, 0\right)$, $Q'=\left(a+\sqrt{a^2+b}, 0\right)$이므로 사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\overline{PP'}+\overline{QQ'}\right)\times\overline{P'Q'}=\frac{1}{2}\times 4(a^2+b)\times 2\sqrt{a^2+b}=4(a^2+b)^{\frac{3}{2}}$$

이다.



(3-2) (a) 제시문 (나)에 의하여 판별식이

$$(p-2)^2-4(p^3-4p+4)=-4p^3+p^2+12p-12=(p+2)(-4p^2+9p-6)$$

이므로 $h(p)=-4p^2+9p-6=-4\left(p-\frac{9}{8}\right)^2-\frac{15}{16}$는 $p=\frac{9}{8}$에서 최댓값 $-\frac{15}{16}$를 가진다.

(b) $p\in(-2, 2)$이므로 $p+2>0$이다. 따라서 (a)에 의하여 $g(x)=0$의 판별식 $(p+2)h(p)$는 음수이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이다. 곡선 $y=g(x)$의 꼭짓점이 y축 위에 오도록 곡선 $y=g(x)$와 점 A를 평행이동

하면 (3-1)과 같은 상황이 된다. (3-1)에서 사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이는 $4(a^2+b)^{\frac{3}{2}} = 4f(a)^{\frac{3}{2}}$이므로 사다리꼴 $BB'C'C$의 넓이는

$$S = 4g(1)^{\frac{3}{2}} = 4(p^3-3p+3)^{\frac{3}{2}}$$

이다.

(c) S는 p^3-3p+3이 최소일 때 최솟값을 가진다. $r(p) = p^3-3p+3$이라 하면 $r'(p) = 3p^2-3$이므로 $p=1$에서 극솟값, $p=-1$에서 극댓값을 가진다. $\lim_{p\to -2^+} r(p) = 1 = r(1)$이므로 S는 $p=1$일 때 최솟값을 가지고 이때 $S=4$이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	P, Q의 x좌표를 모두 구하면	5점
(3-1)	사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이를 구하면	5점
(3-2) (a)	$h(p)$의 최댓값을 구하면	5점
(3-2) (b)	곡선 $y=g(x)$의 개형을 파악하면	5점
(3-2) (b)	사다리꼴 $BB'C'C$의 넓이를 구하면	5점
(3-2) (c)	S의 최솟값을 구하면	5점

오전 의예과 문제 1

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (접선의 방정식) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

[나] (판별식) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$의 판별식은 $D=b^2-4ac$이다.

(1-1) 실수 a와 양의 실수 b에 대하여 점 $X(a,0)$에서 곡선 $f(x)=x^2+b$에 그은 두 접선이 곡선과 만나는 접점을 각각 P,Q라 하자. 점 P,Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P',Q'이라 할 때, 사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이를 a와 b의 식으로 나타내시오. (10점)

(1-2) $-2<p<2$인 실수 p에 대하여 $g(x)=x^2+(p-2)x+(p^3-4p+4)$라 하자.

(a) 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식이 $(p+2)h(p)$일 때, $h(p)$의 최댓값을 구하시오. (5점)

(b) 점 $A(1,0)$에서 $y=g(x)$에 그은 두 접선의 접점을 각각 B,C라 하고, 점 B,C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 B',C'이라 하자. 사다리꼴 $BB'C'C$의 넓이를 S라 할 때, S를 p의 식으로 나타내시오. (10점)

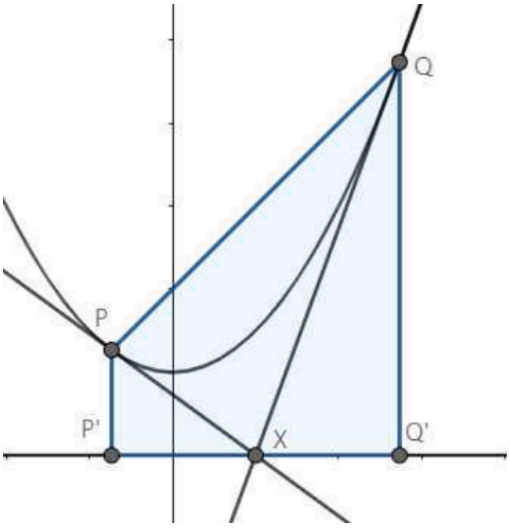
(c) S의 최솟값을 구하시오. (5점)

예시 답안

(1-1) 접점의 x좌표를 c라 하면 접선의 기울기로부터 $2c=\frac{c^2+b}{c-a}$이고 $c=a\pm\sqrt{a^2+b}$이다. 따라서 P와 Q의 x좌표는 각각 $a-\sqrt{a^2+b}$, $a+\sqrt{a^2+b}$이고 $P'=\left(a-\sqrt{a^2+b},0\right)$, $Q'=\left(a+\sqrt{a^2+b},0\right)$이므로 사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\overline{PP'}+\overline{QQ'}\right)\times\overline{P'Q'}=\frac{1}{2}\times 4(a^2+b)\times 2\sqrt{a^2+b}=4(a^2+b)^{\frac{3}{2}}$$

이다.



(1-2) (a) 제시문 (나)에 의하여 판별식이

$$(p-2)^2-4(p^3-4p+4)=-4p^3+p^2+12p-12=(p+2)(-4p^2+9p-6)$$

이므로 $h(p)=-4p^2+9p-6=-4\left(p-\frac{9}{8}\right)^2-\frac{15}{16}$는 $p=\frac{9}{8}$에서 최댓값 $-\frac{15}{16}$를 가진다.

(b) $p\in(-2,2)$이므로 $p+2>0$이다. 따라서 (a)에 의하여 $g(x)=0$의 판별식 $(p+2)h(p)$는 음수이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>0$이다. 곡선 $y=g(x)$의 꼭짓점이 y축 위에 오도록 곡선 $y=g(x)$와 점 A를 평행이동하면 (1-1)과 같은 상황이 된다. (1-1)에서 사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이는 $4(a^2+b)^{\frac{3}{2}}=4f(a)^{\frac{3}{2}}$이므로 사다리꼴 $BB'C'C$의 넓이는

$$S = 4g(1)^{\frac{3}{2}} = 4(p^3 - 3p + 3)^{\frac{3}{2}}$$

이다.

(c) S는 $p^3 - 3p + 3$이 최소일 때 최솟값을 가진다. $r(p) = p^3 - 3p + 3$이라 하면 $r'(p) = 3p^2 - 3$이므로 $p = 1$에서 극솟값, $p = -1$에서 극댓값을 가진다. $\lim_{p \to -2^+} r(p) = 1 = r(1)$이므로 S는 $p = 1$일 때 최솟값을 가지고 이때 $S = 4$이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	P, Q의 x좌표를 모두 구하면	5점
(1-1)	사다리꼴 $PP'Q'Q$의 넓이를 구하면	5점
(1-2) (a)	$h(p)$의 최댓값을 구하면	5점
(1-2) (b)	곡선 $y = g(x)$의 개형을 파악하면	5점
(1-2) (b)	사다리꼴 $BB'C'C$의 넓이를 구하면	5점
(1-2) (c)	S의 최솟값을 구하면	5점

오전 의예과 문제 2

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라 한다.

[나] 모든 실수 α에 대하여 $\cos\alpha = \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$이다.

(※) 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족한다. (단, $0 \le a_1 < 2\pi$이다.)

자연수 n에 대하여 a_{n+1}은 방정식 $\sin(2x-\frac{3}{2}a_n) = \cos(x-\frac{3}{2}a_n)$을 만족하는 양의 실수 x의 값을 작은 것부터 나열했을 때 $(n+1)$번째 값이다.

(2-1) $a_1 = 0$일 때, a_2, a_3의 값을 구하시오. (10점)
(2-2) $a_2 = a_1 + \frac{\pi}{6}$가 되기 위한 첫째항 a_1의 조건을 구하시오. (10점)
(2-3) $a_2 = a_1 + \frac{\pi}{6} \le \frac{2\pi}{3}$일 때, 집합 $\{\sin a_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$의 원소의 개수가 될 수 있는 값을 모두 구하시오. (15점)

예시 답안

(2-1) $\sin(2x-\frac{3}{2}a_n) = \cos(2x-\frac{3}{2}a_n-\frac{\pi}{2})$이므로 $\sin(2x-\frac{3}{2}a_n) = \cos(x-\frac{3}{2}a_n)$이면 $2x-\frac{3}{2}a_n-\frac{\pi}{2} = x-\frac{3}{2}a_n+2l\pi$인 정수 l이 존재하거나 $2x-\frac{3}{2}a_n-\frac{\pi}{2} = 2k\pi-(x-\frac{3}{2}a_n)$인 정수 k가 존재한다. 각각의 경우

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi, \frac{\pi}{2}+6\pi, \ldots \quad \cdots\cdots \quad ①$$

또는

$$x = a_n+\frac{\pi}{6}, a_n+\frac{\pi}{6}\pm\frac{2\pi}{3}, a_n+\frac{\pi}{6}\pm\frac{4\pi}{3}, a_n+\frac{\pi}{6}\pm\frac{6\pi}{3}, \ldots \text{ 중 양수인 것이다.} \quad \cdots \quad ②$$

①을 만족하는 x의 값은 수열의 이전 항의 값에 관계없이 결정되며, ②를 만족하는 x의 값은 이전 항의 값에 따라서 달라질 수 있다.

① 또는 ②를 만족하는 x의 값을 작은 것부터 나열해 보면 a_2는 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \ldots$ 중에서 2번째 값인 $\frac{\pi}{2}$이고, a_3는 $\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi, \ldots$ 중에서 3번째 값인 $\frac{4\pi}{3}$이다.

(2-2) 각각의 n에 대하여 ②를 만족하는 x는 각각의 구간 $\left(\frac{2(m-1)\pi}{3}, \frac{2m\pi}{3}\right]$에 하나씩 존재한다. $(m = 1, 2, 3, \ldots)$

(경우 1) $n = 1$일 때 ①을 만족하는 값 $\frac{\pi}{2}$와 ②를 만족하는 가장 작은 값이 서로 다르면, a_2는 이 두 값 중 더 큰 값이다. ②를 만족하는 양수 중 가장 작은 값이 $a_1+\frac{\pi}{6}$가 되려면 $a_1+\frac{\pi}{6} \le \frac{2\pi}{3}$이어야 하고 이 값이 $\frac{\pi}{2}$보다 크려면 $\frac{\pi}{2} < a_1+\frac{\pi}{6}$이어야 한다. 따라서 $\frac{\pi}{3} < a_1 \le \frac{\pi}{2}$이다.

(경우 2) $n = 1$일 때 ①을 만족하는 값 $\frac{\pi}{2}$와 ②를 만족하는 가장 작은 값이 같으면, a_2는 ②를 만족하는 x의 값 중 크기순으로 두 번째의 값이다. 그러므로 $\frac{2\pi}{3} < a_2 \le \frac{4\pi}{3}$이어야 하는데, $a_2 = a_1+\frac{\pi}{6}$이므로 ②를 만족하는 가장 작은 값은 $a_1+\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}$이고 이 값이 $\frac{\pi}{2}$와 같아야 한다. 따라서 $a_1 = \pi$이다.

그러므로 문제의 조건을 만족하려면 $\frac{\pi}{3} < a_1 \le \frac{\pi}{2}$ 또는 $a_1 = \pi$이다.

(2-3) $\frac{\pi}{2} < a_2 = a_1+\frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$인 경우, a_3는 ②를 만족하는 값 중 구간 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$에 있는 것이다. 따라서 $a_3 = a_2+\frac{\pi}{6} = a_1+\frac{\pi}{3}$이다.

a_4는 ②를 만족하는 값 중에 구간 $\left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$에 있는 것이므로 $a_4 = (a_3+\frac{\pi}{6})+\frac{2\pi}{3} = a_1+\frac{7\pi}{6}$이다.

a_5는 구간 $\left(2\pi, \frac{8\pi}{3}\right]$에 있으면서 ②를 만족하는 값 $a_1+2\pi$와 ①을 만족하는 값 $\frac{\pi}{2}+2\pi$ 중 작은 값인 $a_1+2\pi$이다. 위 과정을 반복하면 a_5, a_6, a_7, a_8은 각각 a_1, a_2, a_3, a_4에 각각 2π씩 더한 값이고 이 규칙성은 4개의 항마다 반복된다.

따라서 $\{\sin a_n \mid n=1,2,3,\ldots\}=\left\{\sin a_1, \sin\left(a_1+\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(a_1+\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(a_1+\frac{7\pi}{6}\right)\right\}$이고, $\frac{\pi}{3}<a_1<\frac{\pi}{2}$일 때 이 집합의 원소의 개수는 일반적으로 4이지만, $a_1=\frac{5\pi}{12}$일 때는 $\sin a_1=\sin\left(a_1+\frac{\pi}{6}\right)$이므로 원소의 개수가 3이다.

$a_1=\frac{\pi}{2}$, $a_2=\frac{2\pi}{3}$인 경우에는 $a_3=a_2+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$이다. 이 이후의 항은 다음과 같다.

(i) $n=4m$ (m은 자연수) 꼴일 때 a_n은

$$\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}+2\pi, \frac{\pi}{3}+4\pi, \ldots\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi, \ldots\right\} \cup \{\pi, \pi+2\pi, \pi+4\pi, \ldots\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}+2\pi, \frac{5\pi}{3}+4\pi, \ldots\right\}$$

중 n번째의 값이며 이 값은 $\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}+2\pi, \frac{5\pi}{3}+4\pi, \ldots$ 중 하나이다.

(ii) $n=4m+1$ (m은 음이 아닌 정수) 꼴일 때 a_n은

$$\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi, \ldots\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}+2\pi, \frac{7\pi}{6}+4\pi, \ldots\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}+2\pi, \frac{11\pi}{6}+4\pi, \ldots\right\}$$

중 n번째 값이며 이 값은 $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}+2\pi, \frac{11\pi}{6}+4\pi, \ldots$ 중 하나이다.

(iii) $n=4m+2$ (m은 음이 아닌 정수) 꼴일 때 a_n은

$$\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi, \ldots\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}+2\pi, \frac{2\pi}{3}+4\pi, \ldots\right\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}+2\pi, \frac{4\pi}{3}+4\pi, \ldots\right\} \cup \{2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots\}$$

중 n번째의 값이며 이 값은 $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}+2\pi, \frac{2\pi}{3}+4\pi, \ldots$ 중 하나이다.

(iv) $n=4m+3$ (m은 음이 아닌 정수) 꼴일 때 a_n은

$$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}+2\pi, \frac{\pi}{6}+4\pi, \ldots\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi, \ldots\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}+2\pi, \frac{5\pi}{6}+4\pi, \ldots\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}+2\pi, \frac{3\pi}{2}+4\pi, \ldots\right\}$$

중 n번째의 값이며 이 값은 $\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}+2\pi, \frac{5\pi}{6}+4\pi, \ldots$ 중 하나이다.

이때 집합 $\{\sin a_n \mid n=1,2,3,\ldots\}=\left\{\sin\frac{5\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{7\pi}{6}, \sin\frac{11\pi}{6}, \sin\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{5\pi}{6}\right\}=\left\{1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$의 원소의 개수는 5이다.

따라서 이 집합의 원소의 개수가 될 수 있는 값은 $3, 4, 5$이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	$n=1$일 때 문제의 조건을 만족하는 x의 값을 찾아내고 a_2의 값을 구하면	5점
(2-1)	$n=2$일 때 문제의 조건을 만족하는 x의 값을 찾아내고 a_3의 값을 구하면	5점
(2-2)	$n=1$일 때 문제의 조건을 만족하는 x의 값이 $\frac{\pi}{2}$보다 작은 경우 a_1의 범위를 구하면	6점
(2-2)	문제의 조건을 만족하는 x의 값 중에 가장 작은 값이 $\frac{\pi}{2}$인 경우 $a_1=\pi$임을 구하면	4점
(2-3)	$\frac{\pi}{3}<a_1<\frac{\pi}{2}$일 때 집합의 원소의 개수가 일반적으로 4인 것을 파악하면	7점
(2-3)	특수한 a_1의 경우 원소의 개수가 3이 될 수 있는 것을 알아내면	3점
(2-3)	$a_1=\frac{\pi}{2}$일 때 집합의 원소의 개수가 5라는 것을 알아내면	5점

오전 의예과 문제 3

※ [문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

(수학적 귀납법) 2 이상의 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=2$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k\ (k\geq 2)$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(※) 자연수를 원소로 갖는 유한집합 S에 대하여 $a+b=c$인 S의 원소 $a,b,c\ (a<b<c)$의 순서쌍 (a,b,c)의 개수를 $\sigma(S)$라 하자. ($n(S)\leq 2$인 경우, $\sigma(S)=0$으로 간주한다.)

(3-1) $S=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$일 때, $\sigma(S)$의 값을 구하시오. (5점)

(3-2) 집합 S는 $2n+1$개 $(n\geq 2)$의 자연수로 이루어진 집합이다.

(a) S의 원소 중 가장 큰 것을 x, 두 번째로 큰 것을 y라 할 때, $a+b\in\{x,y\}$인 S의 원소 $a,b\ (a<b)$의 순서쌍 (a,b)의 개수로 가능한 값 중 가장 큰 것을 구하시오. (5점)

(b) $\sigma(S)$의 최댓값 M을 구하시오. (5점)

(c) $\sigma(S)$가 최댓값 M과 같고 $1\in S$인 집합 S를 모두 구하시오. (10점)

(3-3) 다음 세 조건을 모두 만족하는 집합 S의 개수를 구하시오. (10점)

(i) $S\subset\{1,2,3,\cdots,2024\}$
(ii) $n(S)=202$
(iii) $\sigma(S)=10100$

예시 답안

(3-1) 5 이하의 자연수 n에 대하여 $a+b=4n$인 S의 원소 $a,b\ (a<b)$의 순서쌍 (a,b)의 개수는 $n-1$이고 $a+b=4n-2$인 S의 원소 $a,b\ (a<b)$의 순서쌍 (a,b)의 개수는 $n-1$이므로

$$\sigma(S)=\sum_{i=1}^{5}2(i-1)=20$$

이다.

(3-2) (a) $a+b=x$, $a+b=y$인 S의 원소 $a,b\ (a<b)$의 순서쌍 (a,b)의 개수는 각각 최대 n, $n-1$이므로 조건을 만족하는 순서쌍의 개수는 $2n-1$ 이하이다. 한편 $S=\{1,2,\cdots,2n+1\}$일 때 조건을 만족하는 순서쌍 (a,b)의 개수는 정확히 $2n-1$이므로 답은 $2n-1$이다.

(b) S의 원소를 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n},a_{2n+1}\ (a_1<a_2<\cdots<a_{2n}<a_{2n+1})$이라 하고 n 이하의 자연수 k에 대하여 $S_k=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2k+1}\}$이라 하자. (a)에 의하여 $k\geq 2$이면 $\sigma(S_k)-\sigma(S_{k-1})\leq 2k-1$임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\sigma(S_n)&=(\sigma(S_n)-\sigma(S_{n-1}))+(\sigma(S_{n-1})-\sigma(S_{n-2}))+\cdots+(\sigma(S_2)-\sigma(S_1))+\sigma(S_1)\\&\leq(2n-1)+(2n-3)+\cdots+3+1=n^2\end{aligned}$$

이다. 한편, $S=\{1,2,\cdots,2n+1\}$이면 $\sigma(S)=n^2$이므로 최댓값 M은 n^2이다.

(c) $S=\{1,2,\cdots,2n+1\}$이면 문제의 조건을 만족한다. 이제 $n\geq 2$에 대하여 S는 $\{1,2,\cdots,2n+1\}$뿐임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하자.

$n=2$인 경우를 보자. $S=\{1,a_2,a_3,a_4,a_5\}\ (1<a_2<\cdots<a_5)$라 하자. $\sigma(S)=2^2=4$이므로 (a,b,c)가 $(1,a_2,a_3)$, $(1,a_4,a_5)$, (a_2,a_3,a_5)인 경우 $a+b=c$를 만족해야 한다. 즉, $a_3=a_2+1$, $a_4=2a_2$, $a_5=2a_2+1$이다. 또한 a_4는 $1+a_2$, $1+a_3$, a_2+a_3 중 하나와 같아야 하는데, $1+a_2<2a_2(=a_4)<a_2+a_3$이므로 $a_4=1+a_3$이고 $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=5$이다. 즉, $S=\{1,2,3,4,5\}$이다.

$n>2$라 하자. $n-1$인 경우에는 조건을 만족하는 집합이 $\{1,2,\cdots,2(n-1)+1\}$뿐이라 가정하고, n인 경우를 증명하자. S의 원소 중 가장 큰 것과 두 번째로 큰 것을 각각 x, y라 하자. $S'=S-\{x,y\}$라 하면 (a)에 의하여 $2n-1\geq\sigma(S)-\sigma(S')=n^2-\sigma(S')$이므로 $\sigma(S')\geq(n-1)^2$이다. (b)에 의하여 $\sigma(S')\leq(n-1)^2$이므로 $\sigma(S')=(n-1)^2$이다.

$1\in S'$이고 $\sigma(S')=(n-1)^2$이므로 가정에 의하여 $S'=\{1,2,\cdots,2(n-1)+1\}$이고 $S=\{1,2,\cdots,2(n-1)+1,x,y\}$이다. 그런데 $a+b\in\{x,y\}$인 (a,b)의 개수가 정확히 $2n-1$이어야 하므로 $x=2n$, $y=2n+1$이다. 즉, $S=\{1,2,\cdots,2n+1\}$이다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 $S=\{1,2,\cdots,2n+1\}$이다.

(3-3) S의 원소를 크기순으로 $a_1<a_2<\cdots<a_{202}$라 하고 $S'=S-\{a_{202}\}$라 하자. $n(S')=201$이므로 (3-2)(b)에 의하여 $\sigma(S')\leq100^2$이다.

한편 $100\geq\sigma(S)-\sigma(S')=(100^2+100)-\sigma(S')\geq(100^2+100)-100^2=100$이므로 $100=\sigma(S)-\sigma(S')$이고 $\sigma(S')=100^2$이어야 한다.

$100=\sigma(S)-\sigma(S')$에서 $a+b=a_{202}$를 만족하는 S의 원소 a,b $(a<b)$의 순서쌍 (a,b)의 개수가 정확히 100개라는 것을 알 수 있다. 또한, $\sigma(S')=100^2$이므로 (3-2)(c)와 같은 방법으로 S'은 반드시 $\{d,2d,\cdots,201d\}$꼴, 즉 $a_k=dk$ $(k=1,2,\cdots,201)$인 자연수 d가 존재함을 알 수 있다. 한편 $a+b=a_{202}$를 만족하는 순서쌍 (a,b)의 개수가 정확히 100개이기 위해서는 $a_{202}=202d$ 또는 $203d$이어야 한다. 그러므로 $S=\{d,2d,\cdots,201d,202d\}$ 또는 $\{d,2d,\cdots,201d,203d\}$꼴이다. 전자의 경우 가능한 S의 개수는 10, 후자의 경우 가능한 S의 개수는 9이므로 가능한 S의 개수는 총 19이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	$\sigma(S)=20$을 보이면	5점
(3-2)(a)	$2n-1$ 이하임을 증명하면 $2n-1$인 구체적인 예를 하나 제시하면	3점 2점
(3-2)(b)	$M\leq n^2$임을 증명하면 $M=n^2$인 구체적인 예를 하나 제시하면	3점 2점
(3-2)(c)	$n=2$인 경우 S를 모두 찾으면 $S=\{1,2,\cdots,2n+1\}$뿐임을 증명하면	3점 7점
(3-3)	S는 두 가지 형태뿐임을 증명하면 S의 개수를 정확히 구하면	7점 3점

오후 문제 1

※ [문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

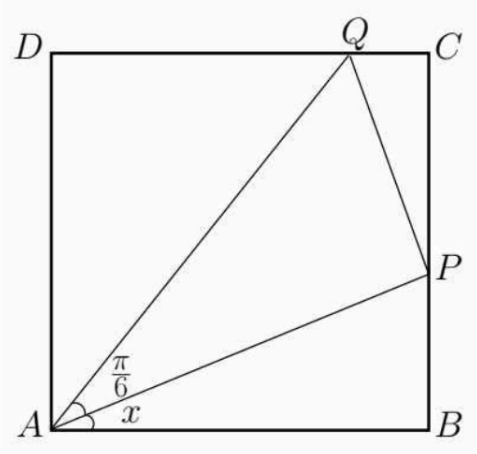
제시문

[가] (삼각형의 넓이) 삼각형 ABC에 대하여 $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$이다.

[나] (극대와 극소) 함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\le f(a)$일 때 $x=a$에서 극대라고 하며, $f(a)$를 극댓값이라고 한다. 또, $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\ge f(a)$일 때 $x=a$에서 극소라고 하며, $f(a)$를 극솟값이라고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

(※) 한 변의 길이가 10인 정사각형 $ABCD$에서 두 점 P, Q는 변 BC 또는 변 CD 위에 있으며 $\angle PAQ=\frac{\pi}{6}$이다. (단, $\angle BAP<\angle BAQ$이고, 두 점 P, Q는 모두 변 BC 위에 있을 수도 있고 모두 변 CD 위에 있을 수도 있다.)

$\angle BAP=x$일 때, 삼각형 APQ의 넓이를 $S(x)$라 하자.



(1-1) [10점] $0\le x\le\frac{\pi}{3}$일 때, $S(x)$를 x의 범위에 따라 x의 식으로 나타내시오.
(1-2) [10점] 열린구간 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$에서 함수 $S(x)$가 극값을 가지는 x의 값을 모두 구하시오.
(1-3) [10점] 닫힌구간 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$에서 함수 $S(x)$가 최댓값을 가질 때와 최솟값을 가질 때의 x의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

(1-1) 다음 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) P, Q가 모두 변 BC 위에 있을 때 $\left(0\le x\le\frac{\pi}{12}\right)$,

$\overline{AP}=\frac{10}{\cos x}$이고 $\overline{AQ}=\frac{10}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$이다. 따라서 제시문 (가)에 의해 $S(x)=\frac{25}{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$이다.

(ii) P는 변 BC 위에 있고 Q는 변 CD 위에 있을 때 $\left(\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$,

$\overline{AP}=\frac{10}{\cos x}$이고 $\overline{AQ}=\frac{10}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$이다. 따라서 $S(x)=\frac{25}{\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$이다.

(iii) P, Q가 모두 변 CD 위에 있을 때 $\left(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$,

$\overline{AP}=\frac{10}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{10}{\sin x}$, $\overline{AQ}=\frac{10}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$이다. 따라서 $S(x)=\frac{25}{\sin x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$이다.

결론적으로,

$$S(x)=\begin{cases}\frac{25}{\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} & \left(0\le x\le\frac{\pi}{12}\right)\\ \frac{25}{\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} & \left(\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{\pi}{4}\right)\\ \frac{25}{\sin x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} & \left(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{3}\right)\end{cases}$$

(1-2) $S'(x)$를 각 구간에서 계산하면

$$S'(x)=\begin{cases}\dfrac{25\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2 x\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} & \left(0\le x<\frac{\pi}{12}\right)\\ \dfrac{25\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2 x\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} & \left(\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{4}\right)\\ \dfrac{-25\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin^2 x\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)} & \left(\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{3}\right)\end{cases}$$

이다. $S'(x)$를 살펴보면,

(i) $0\le x<\frac{\pi}{12}$일 때 $S'(x)>0$이므로 $S(x)$는 증가한다.

(ii) $\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{4}$일 때 $S'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$이며, $\frac{\pi}{12}<x<\frac{\pi}{6}$일 때 $S'(x)<0$이고 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$일 때 $S'(x)>0$이므로 $S(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$일 때 극솟값을 갖는다.

(iii) $\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{3}$일 때 $S'(x)<0$이므로 $S(x)$는 감소한다.

이것으로부터 $x=\frac{\pi}{12}$일 때와 대칭적으로 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 극댓값을 갖는다는 것을 알 수 있다.

(1-3) (1-2)에서 살펴본 대로 $x=\frac{\pi}{12}$일 때와 $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $S(x)$가 최댓값을 갖는다는 것을 알 수 있다. 한편 $S(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$일 때 극솟값을 갖지만 $S\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{100}{3}$이고 $S(0)=S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{50}{\sqrt{3}}$인데, $\frac{100}{3}>\frac{50}{\sqrt{3}}$이므로 $x=0$일 때와 $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $S(x)$가 최솟값을 갖는다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	3가지 경우로 올바르게 나누면	2점
(1-1)	3가지 경우에 대하여 각각 $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$를 구하면	3점
(1-1)	3가지 경우에 대하여 각각 $S(x)$를 구하면	5점
(1-2)	3가지 경우에 대하여 각각 $S'(x)$를 구하면	4점
(1-2)	$S'(x)$가 양수 또는 음수가 되는 구간을 찾으면	3점
(1-2)	극대, 극소를 구하면	3점
(1-3)	극솟값 $S\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{100}{3}$이 최솟값이 아님을 밝히면	3점
(1-3)	최솟값을 가질 때의 x의 값을 구하면	3점
(1-3)	최댓값을 가질 때의 x의 값을 구하면	4점

오후 문제 2

※ [문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (접선의 방정식) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

[나] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

(※) 양의 실수 a, b에 대하여 두 곡선 $y=\frac{a}{3}x^2+1$과 $y=b\sqrt{x}$가 한 점 P에서만 만나고, 점 P에서의 곡선 $y=\frac{a}{3}x^2+1$의 접선과 곡선 $y=b\sqrt{x}$의 접선이 서로 일치한다고 하자.

(2-1) b를 a의 식으로 나타내시오. (10점)
(2-2) 점 P에서의 곡선 $y=\frac{a}{3}x^2+1$의 접선이 a의 값에 관계없이 좌표평면의 일정한 점을 지남을 보이시오. (10점)
(2-3) 두 곡선 $y=\frac{a}{3}x^2+1$, $y=b\sqrt{x}$ 및 y축으로 둘러싸인 도형을 A라 하자. 점 P에서의 곡선 $y=\frac{a}{3}x^2+1$의 접선에 의해 도형 A가 두 개의 도형으로 나누어진다. 이때 이 두 도형의 넓이의 비는 a의 값에 관계없이 일정함을 보이시오. (15점)

■ 예시 답안

(2-1) 점 P에서는 두 함수의 함숫값이 같고 미분계수도 같다. 따라서 이 점에서는 두 개의 등식 $\frac{a}{3}x^2+1=b\sqrt{x}$와 $\frac{2a}{3}x=\frac{b}{2\sqrt{x}}$가 성립한다.

먼저, $\frac{2a}{3}x=\frac{b}{2\sqrt{x}}$로부터 $b=\frac{4a}{3}x^{\frac{3}{2}}$을 얻는다. 이것을 $\frac{a}{3}x^2+1=b\sqrt{x}$에 대입하면 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}=a^{-\frac{1}{2}}$이다. 따라서 $b=\frac{4}{3}a^{\frac{1}{4}}$이 된다.

(2-2) 점 P의 x좌표는 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$이므로 $P=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{4}{3}\right)$이다. 이 점에서의 접선의 기울기, 즉 미분계수는 $\frac{2\sqrt{a}}{3}$이다. 따라서 접선의 방정식은 $y-\frac{4}{3}=\frac{2\sqrt{a}}{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$이고 이것을 정리하면 $y=\frac{2\sqrt{a}}{3}x+\frac{2}{3}$이다. 그러므로 a의 값에 관계없이 접선이 y축 위의 점 $\left(0, \frac{2}{3}\right)$를 지난다.

(2-3) 접선 $y=\frac{2\sqrt{a}}{3}x+\frac{2}{3}$에 의해 생긴 두 도형 중 윗도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\left(\frac{a}{3}x^2+1-\frac{2\sqrt{a}}{3}x-\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{a}{9}x^3-\frac{\sqrt{a}}{3}x^2+\frac{x}{3}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{1}{9\sqrt{a}}$$

이다. 아랫도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\left(\frac{2\sqrt{a}}{3}x+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}a^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}\sqrt{a}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{9}a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{1}{9\sqrt{a}}$$

이다. 따라서 이 접선은 도형 A를 항상 $1:1$의 비율로 나눈다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	두 곡선이 한 점에서 만나는 조건과 그 점에서의 미분계수가 같다는 조건을 식으로 쓰면	4점
(2-1)	관계식을 구하면	6점
(2-2)	P의 좌표를 구하면	3점
(2-2)	접선의 방정식을 구하면	4점
(2-2)	항상 $\left(0, \frac{2}{3}\right)$을 지남을 밝히면	3점

하위 문항	채점 기준	배점
(2-3)	윗도형의 넓이를 구하면	6점
(2-3)	아랫도형의 넓이를 구하면	6점
(2-3)	두 도형의 넓이가 항상 같음을 서술하면	3점

오후 문제 3

※ [문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

(사잇값의 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(※) 실수 $a\,(a>1)$에 대하여 양의 실수의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음과 같다. (단, b, c는 양의 실수이다.)

$$f(x)=\begin{cases}\log_a x & (0<x<2)\\ b^x & (2\le x<4)\\ \log_c x & (x\ge 4)\end{cases}$$

(3-1) [10점] $\dfrac{(\log a)^2}{\log c}$의 값을 구하시오.

(3-2) [10점] 방정식 $f(x)=\frac{1}{2}$의 해가 되는 양의 실수 x의 값이 3개가 되도록 하는 a의 값의 범위를 구하시오.

(3-3) [15점] $f(f(\beta))=f(8)$이고 $f(\beta)\neq 8$인 실수 $\beta\,(\beta>1)$가 존재하도록 하는 a의 값의 범위를 구하시오.

■ 예시 답안

(3-1) 연속함수의 정의로부터 $\log_a 2=b^2$이고 $\log_c 4=b^4$이므로, $(\log_a 2)^2=\log_c 4$이다. 따라서 $\frac{(\log a)^2}{\log c}=\frac{1}{2}\log 2$이다.

(3-2) $f(x)$는 구간 $(0,2)$와 구간 $[4,\infty)$에서 각각 증가함수이다. 따라서 문제의 조건을 만족하려면 $f(x)$가 닫힌구간 $[2,4]$에서 감소함수여야 하며 그래프의 개형으로부터 $f(2)>\frac{1}{2}$이고 $f(4)<\frac{1}{2}$이어야 한다. 이를 만족하는 a의 범위는 $2^{\sqrt{2}}<a<4$이다.

(3-3) 방정식 $f(x)=f(8)$의 해가 $x=8$뿐이라면 $f(f(\beta))=f(8)$는 $f(\beta)=8$을 의미하게 되므로 문제의 조건을 만족하지 않기 때문에 방정식 $f(x)=f(8)$은 $x=8$이 아닌 해를 가져야 한다. 역으로 방정식 $f(x)=f(8)$이 해 $x=k\,(k\neq 8)$을 갖는다면, $f(x)$의 그래프의 개형 또는 사잇값의 정리에 의해 $f(x)$의 치역은 실수 전체의 집합이므로 $f(\beta)=k\,(k\neq 8)$를 만족하는 β가 존재한다. 이때 $f(f(\beta))=f(8)$이 성립한다. 따라서 문제의 조건을 만족하려면 $f(x)$는 닫힌구간 $[2,4]$에서 감소함수이고 $f(2)\ge f(8)$이어야 한다. 즉, $\log_a 2\ge\log_c 8$이어야 하는데, 이는 $3\log a\le\log c=\frac{2(\log a)^2}{\log 2}$, 즉, $\log a\ge\frac{3}{2}\log 2$와 동치이므로, 문제의 조건을 만족하는 a의 범위는 $a\ge 2\sqrt{2}$이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	연속함수의 정의로부터 a,b,c의 관계를 얻으면	3점
(3-1)	로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구하면	7점
(3-2)	그래프의 개형에서 $f(x)$가 닫힌구간 $[2,4]$에서 감소함수이며 $f(2)>\frac{1}{2}$이고 $f(4)<\frac{1}{2}$이어야 한다는 사실을 파악하면	6점
(3-2)	a의 범위를 구하면	4점
(3-3)	$f(x)=f(8)\,(x\neq 8)$인 x가 존재하려면 $f(x)$가 닫힌구간 $[2,4]$에서 감소하여야 한다는 사실을 파악하면	3점
(3-3)	$f(2)\ge f(8)$이어야 함을 서술하면	3점
(3-3)	다른 해가 $f(x)$의 치역에 있으면 조건을 만족한다는 사실을 파악하면	5점
(3-3)	a의 범위를 구하면	4점

2024학년도 자연계열 (수학)

오전 일반 문제 1

※ [문제 1] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (접선의 방정식)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

[나] (곡선의 오목과 볼록)

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서

(i) $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

(ii) $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

(1-1) [8점] 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$3x+b \le e^x$$

을 만족하는 실수 b의 최댓값을 구하시오.

(1-2) [12점] 실수 a, b는 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$ax+b \le e^x$$

을 만족한다. $2a+b$의 값이 최대일 때, b의 값을 구하시오.

(1-3) [15점] 실수 a, b는 모든 실수 x에 대하여 두 부등식

$$ax+b \le e^x, \quad ax+b \le e^{x-3}+6$$

을 만족한다. $2a+b$의 최댓값을 구하시오.

■ 예시 답안

(1-1) 부등식이 성립하려면 직선 $y=3x+b$가 곡선 $y=e^x$보다 아래에 위치해야 한다. 제시문 (나)에 의해 $y=e^x$이 아래로 볼록하므로 b가 최대인 경우는 직선이 접하는 경우이다. 기울기가 3인 접점의 x좌표는 $\ln 3$이다. 따라서 접선의 방정식은 $y=3x+3(1-\ln 3)$이고 $b=3(1-\ln 3)$이다.

(1-2) $f(x)=ax+b$라 하면 $f(2)=2a+b$이므로 $x=2$에서의 함숫값이 최대인 직선일 때이다. (1-1)과 마찬가지로 제시문 (나)에 의해 $y=e^x$이 아래로 볼록하므로 $x=2$에서의 접선일 때 $2a+b$가 최대이다. 따라서 기울기는 e^2이고 $f(x)=e^2(x-2)+e^2$이므로 $b=-e^2$이다.

(1-3) (1-2)와 마찬가지로 $f(x)=ax+b$라 하면 $f(2)=2a+b$이므로 $x=2$에서의 함숫값이 최대인 직선일 때이다. 부등식을 만족하기 위해서는 직선 $y=ax+b$가 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{x-3}+6$보다 아래에 위치해야 한다. 제시문 (나)에 의해 그래프의 개형으로부터 두 곡선에 동시에 접할 때 $2a+b$의 값이 최대가 된다. $y=e^x$에서의 접점을 (p, e^p), $y=e^{x-3}+6$에서의 접점을 $(q, e^{q-3}+6)$이라 하면 e^x의 도함수가 e^x이므로 두 점을 잇는 직선의 기울기가 각 점에서의 미분계수와 같으므로

$$e^p=e^{q-3}=\frac{e^p-(e^{q-3}+6)}{p-q}$$

를 얻는다. $p=q-3$이므로 $e^p=2$가 되어 $p=\ln 2$이다. 즉 $y=2(x-\ln 2)+2$일 때 $2a+b$가 최대이며 $2a+b=2(2-\ln 2)+2=6-2\ln 2$이다.

(별해) (1-1) $f(x)=e^x-3x-b$라 하면 $f(x)$의 최솟값이 0 이상이면 된다.

$$f'(x) = e^x - 3 \quad \therefore f'(\ln 3) = 0$$

$x < \ln 3$에서 $f'(x) < 0$이고 $x > \ln 3$에서 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 $\ln 3$에서 최솟값을 갖는다. $f(\ln 3) = 3 - 3\ln 3 - b \geq 0$이므로 b의 최댓값은 $3 - 3\ln 3$

(별해) (1-2) ① $ax + b \leq e^x$이므로 $2a + b \leq e^2$. $y = e^x$와 $y = ax + b$의 관계에 의해 접선일 때 최대

② (1-1)에 의해 기울기가 a인 직선 $ax + b$는 $y = e^x$에 접할 때 $ax + b$가 최대. 접점의 좌표를 t라 하면

$$e^t = a, \quad b = (1-t)e^t, \quad g(t) = 2a + b = 2e^t + (1-t)e^t = (3-t)e^t$$

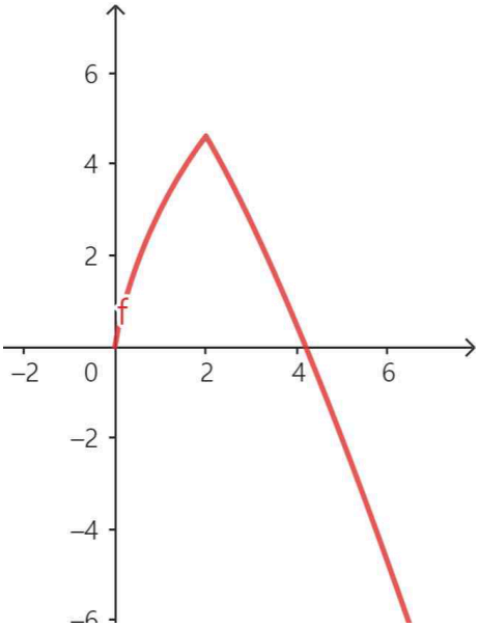
따라서 $g'(t) = (2-t)e^t$이므로 $t = 2$일 때 $g(t) = 2a + b$가 최대이므로

$$b = -e^2$$

(별해) (1-3) (1-2)를 이용하면, $ax + b \leq e^x$에서 $2a + b \leq 3a - a\ln a$. $ax + b \leq e^{x-3} + 6$으로부터 $2a + b \leq 6 - a\ln a$. $\therefore 2a + b \leq g(a)$

$$g(a) = \begin{cases} 6 - a\ln a & (2 < a) \\ 3a - a\ln a & (0 < a \leq 2) \end{cases}$$

여기서 $0 < a < 2$에서 $g'(a) > 0$이고, $a > 2$에서 $g'(a) < 0$이므로



그래프의 개형을 보면 $2a + b$의 최댓값은 $a = 2$일 때,

$$g(2) = 6 - 2\ln 2$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	접점의 x좌표와 접선의 방정식을 구하면	5점
(1-1)	$3(1 - \ln 3)$을 구하면	3점
(1-2)	$2a + b$가 $f(x) = ax + b$에 대하여 $f(2)$임을 관찰하면	4점
(1-2)	$x = 2$에서 곡선 $y = e^x$의 접선을 구하면	4점
(1-2)	$b = -e^2$을 구하면	4점
(1-3)	(최대 조건) $2a + b$가 $f(x) = ax + b$에 대하여 $f(2)$임을 관찰하면	6점
(1-3)	$e^p = e^{q-3} = \frac{e^p - (e^{q-3}+6)}{p-q}$ 을 구하면	3점
(1-3)	최댓값을 만족하는 직선을 구하면	4점
(1-3)	$2a + b = 6 - 2\ln 2$를 구하면	2점

오전 일반 문제 2

※ [문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (점과 직선 사이의 거리)

좌표평면 위의 점 $P(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

[나] (극대와 극소의 판정)

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서

(i) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다.

(ii) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

(※) $0<t<e$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=e^x$ 위의 점 중에서 직선 $y=tx$와의 거리가 최소인 점을 P라 하고 이때 점 P와 직선 $y=tx$ 사이의 거리를 $r(t)$라 하자. 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $r(t)$인 원을 C_t라 하자.

(2-1) 점 P의 좌표와 $r(t)$를 각각 t의 식으로 나타내시오. (8점)
(2-2) $r(t)$가 $t=a$에서 최댓값을 가질 때, 원 C_a가 원점을 지남을 보이시오. (15점)
(2-3) 원 C_a, x축, y축으로 둘러싸인 부분 중 원 C_a의 중심을 포함하는 부분의 넓이를 a의 식으로 나타내시오. (12점)

■ 예시 답안

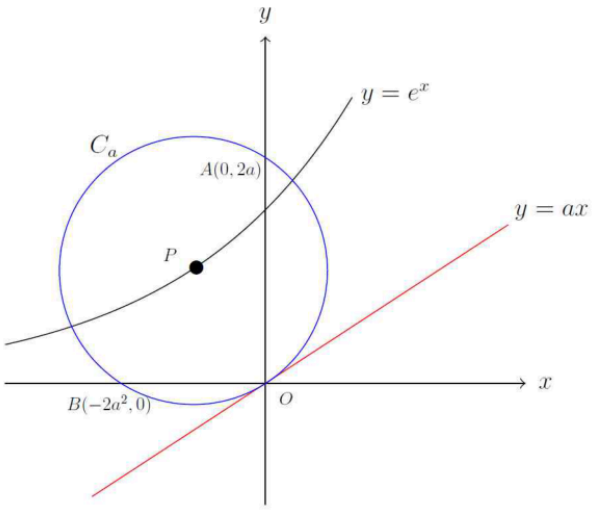
(2-1) 거리가 최소가 되는 점은 직선 $y=tx$와 평행인 접선을 갖는 곡선 $y=e^x$ 위의 점이므로 $P(\ln t, t)$이고 $r(t)$는 점 P와 직선 $y=tx$ 사이의 거리이므로 제시문 (가)에 의해

$$r(t) = \frac{t - t\ln t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{t(1-\ln t)}{\sqrt{t^2+1}} \quad (0<t<e)$$

이다.

(2-2) $r'(t) = \frac{-\ln t - t^2}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$이므로 $r'(t)=0$을 계산하면 $\ln t = -t^2$을 얻고 이때의 t를 a라 하자. $0<t<a$에서 $-t^2 > \ln t$이므로 $r'(t)>0$이고 $a<t<e$에서 $-t^2 < \ln t$이므로 $r'(t)<0$이다. 그러므로 제시문 (나)에 의해 $t=a$에서 $r(t)$는 최댓값 $a\sqrt{a^2+1}$을 갖는다. 원 C_a의 방정식이 $x^2+2a^2x+y^2-2ay=0$이므로 원점을 지난다.

(2-3) 원 C_a의 방정식이 $x^2+2a^2x+y^2-2ay=0$이므로 좌표축과 만나는 점은 $O(0,0)$, $A(0,2a)$, $B(-2a^2,0)$이다. 원 C_a를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}\pi r^2 + \triangle ABO \text{ 의 넓이} = \frac{1}{2}\pi a^2(a^2+1) + 2a^3 = \frac{\pi}{2}a^4 + 2a^3 + \frac{\pi}{2}a^2 = a^2\left(\frac{\pi}{2}a^2 + 2a + \frac{\pi}{2}\right)$$

이다. (단, 여기서 a는 $\ln a = -a^2$인 상수이다.)

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	점 $P(\ln t, t)$를 구하면	4점
(2-1)	$r(t) = \frac{t - t\ln t}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{t(1-\ln t)}{\sqrt{t^2+1}}$를 구하면 (부호 틀리면 2점 감점)	4점
(2-2)	$r'(t) = \frac{-\ln t - t^2}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}$를 구하면	5점
(2-2)	$\ln a = -a^2$임을 보이면	3점
(2-2)	원 C_a가 원점을 지남을 보이면	7점
(2-3)	넓이 $\frac{1}{2}\pi a^2(a^2+1) + 2a^3 = \frac{\pi}{2}a^4 + 2a^3 + \frac{\pi}{2}a^2 = a^2(\frac{\pi}{2}a^2 + 2a + \frac{\pi}{2})$를 구하면	12점

오전 일반 문제 3

※ [문제 3] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (매개변수로 나타낸 함수의 미분법)

두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

[나] (정적분의 치환적분법)

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

[다] 삼각함수의 덧셈정리에 의해 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$이므로

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

(※) $0\le p\le 2\pi$인 실수 p에 대하여 두 곡선 $y=(x-p)^2+q$와 $y=\cos x$가 오직 한 점에서 만날 때의 q의 값을 $g(p)$라 하자. 이때 함수 $g(p)$는 p에 대하여 미분가능하다.

(3-1) 두 곡선이 오직 한 점에서 만날 때, 교점의 x좌표를 t라 하자. 이때 p와 q를 각각 t의 식으로 나타내시오. (8점)

(3-2) $g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$의 값을 구하시오. (10점)

(3-3) 정적분 $\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x$의 값을 구하시오. (12점)

■ 예시 답안

(3-1) 한 점에서 만나는 경우 교점에서 접선의 기울기가 일치해야 하므로 두 방정식 $(t-p)^2+q=\cos t$, $2(t-p)=-\sin t$를 얻는다. p, q를 각각 t에 대하여 풀면

$$p=t+\frac{\sin t}{2},\quad q=\cos t-\left(\frac{\sin t}{2}\right)^2$$

(3-2) $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=1+\frac{\cos t}{2}>0$이므로 $p=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$인 t는 $t=\frac{\pi}{4}$가 유일하다. 제시문 (가)를 이용하여 $g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$를 구하면

$$g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{q'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{p'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3-3) 제시문 (나)와 (다)를 이용하여 적분을 계산하면

$$\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\left(\cos t-\left(\frac{\sin t}{2}\right)^2\right)\left(1+\frac{\cos t}{2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\left(\cos t+\frac{\cos^2 t}{2}-\frac{\sin^2 t}{4}-\frac{\sin^2 t\cos t}{8}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{4}-\frac{1-\cos 2t}{8}-\frac{\sin^2 t\cos t}{8}\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{8}t+\frac{3}{16}\sin 2t-\frac{1}{24}\sin^3 t\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4}$$

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	두 곡선이 한 점에서 만날 조건을 찾으면	6점
(3-1)	p, q를 t로 표현하면	2점
(3-2)	$t=\frac{\pi}{4}$를 찾으면	2점
(3-2)	$\frac{dq}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$를 구하면	6점
(3-2)	$g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$를 구하면	2점
(3-3)	치환적분을 올바르게 적용하면	4점
(3-3)	적분값을 정확히 계산하면	8점

오전 의예과 문제 1

[문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (매개변수로 나타낸 함수의 미분법)

두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

[나] (정적분의 치환적분법)

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

[다] 삼각함수의 덧셈정리에 의해 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$이므로

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

(※) $0\le p\le 2\pi$인 실수 p에 대하여 두 곡선 $y=(x-p)^2+q$와 $y=\cos x$가 오직 한 점에서 만날 때의 q의 값을 $g(p)$라 하자. 이때 함수 $g(p)$는 p에 대하여 미분가능하다.

(1-1) 두 곡선이 오직 한 점에서 만날 때, 교점의 x좌표를 t라 하자. 이때 p와 q를 각각 t의 식으로 나타내시오. (8점)

(1-2) $g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$의 값을 구하시오. (10점)

(1-3) 정적분 $\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x$의 값을 구하시오. (12점)

■ 예시 답안

(1-1) 한 점에서 만나는 경우 교점에서 접선의 기울기가 일치해야 하므로 두 방정식 $(t-p)^2+q=\cos t$, $2(t-p)=-\sin t$를 얻는다. p, q를 각각 t에 대하여 풀면

$$p=t+\frac{\sin t}{2},\quad q=\cos t-\left(\frac{\sin t}{2}\right)^2$$

(1-2) $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=1+\frac{\cos t}{2}>0$이므로 $p=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$인 t는 $t=\frac{\pi}{4}$가 유일하다. 제시문 (가)를 이용하여 $g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$를 구하면

$$g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{q'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{p'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1-3) 제시문 (나)와 (다)를 이용하여 적분을 계산하면

$$\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\left(\cos t-\left(\frac{\sin t}{2}\right)^2\right)\left(1+\frac{\cos t}{2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\left(\cos t+\frac{\cos^2 t}{2}-\frac{\sin^2 t}{4}-\frac{\sin^2 t\cos t}{8}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2t}{4}-\frac{1-\cos 2t}{8}-\frac{\sin^2 t\cos t}{8}\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{8}t+\frac{3}{16}\sin 2t-\frac{1}{24}\sin^3 t\right]_0^{2\pi}=\frac{\pi}{4}$$

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	두 곡선이 한 점에서 만날 조건을 찾으면	6점
(1-1)	p, q를 t로 표현하면	2점
(1-2)	$t=\frac{\pi}{4}$를 찾으면	2점
(1-2)	$\frac{dq}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$를 구하면	6점
(1-2)	$g'\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$를 구하면	2점
(1-3)	치환적분을 올바르게 적용하면	4점
(1-3)	적분값을 정확히 계산하면	8점

오전 의예과 문제 2

[문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (사잇값의 정리)
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c) = k$인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

[나] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(x) \geq g(x)$일 때, 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$와 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

(※) 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-4) - tx & (x \leq 4) \\ -2(x-4) - tx & (x \geq 4) \end{cases}$$

라 하자. $f(x) = 0$이 양의 실근을 갖지 않는 t의 값 중 가장 큰 값을 c라 하자. 함수 $g(t)$는 정의역이 구간 (c,∞)이고 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(i) $f(\beta) = 0$인 어떤 양의 실수 β에 대하여 $g(t) = \int_0^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$이다.
(ii) 함수 $g(t)$가 $t = a$에서 불연속인 a의 값은 세 개이다.

(2-1) 상수 c의 값을 구하시오. (7점)
(2-2) 함수 $g(t)$의 값이 최소가 되는 t의 값이 두 개 이상일 때, $g(0)$의 값을 구하시오. (10점)
(2-3) 함수 $g(t)$의 값이 최소가 되는 t의 값이 두 개 이상이고 $t = a$에서 불연속인 a의 값을 p, q, r $(p < q < r)$이라 하자.

(a) 가능한 p의 값 중 가장 작은 값을 구하시오. (8점)

(b) (a)에서 구한 p의 값에 대하여 $q - p$의 값이 최소가 될 때 r의 값을 구하시오. (10점)

■ 예시 답안

함수 $h(x) = \begin{cases} (x-1)(x-4) & (x \leq 4) \\ -2(x-4) & (x \geq 4) \end{cases}$라 하면 문제에서 함수 $g(t)$의 성질 (i)은 다음과 같다.

$g(t) = \int_0^\beta (h(x) - tx)\,\mathrm{d}x$이고 이때 β는 $h(\beta) = t\beta$인 어떤 양의 실수이다.

(2-1) 모든 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$는 연속이다. $t = -2$이면 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & (x \leq 4) \\ 8 & (x \geq 4) \end{cases}$인데 $x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$이므로 $f(x) = 0$은 실근을 갖지 않는다. 한편, $t > -2$이면 $f(0) = 4 > 0$이고 x가 커짐에 따라 $f(x)$가 무한히 작아지므로 $f(x) = 0$이 되는 양의 실수 x가 존재한다. 따라서, $c = -2$이다.

$t > 0$일 때 $h(x) = tx$의 해는 유일하게 존재한다. 이 해를 β라 하면, $g(t) = \int_0^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$이다. 또한, $x \in (0,\beta)$에 대하여 $h(x) > tx$이므로 $g(t) > 0$이다. 한편, $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$이다.

$t = 0$일 때 $h(x) = tx = 0$의 해는 1, 4이므로 $g(0)$의 값은 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{6}$ 또는 $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{8}{3}$이다.

$-1 < t < 0$일 때는 $f(x) = 0$은 세 개의 실근을 갖는다. 세 개의 실근을 $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$라 하면 $\int_0^{\alpha_1} f(x)\,\mathrm{d}x > 0$, $\int_0^{\alpha_3} f(x)\,\mathrm{d}x > \int_0^{\alpha_2} f(x)\,\mathrm{d}x > -\frac{8}{3}$이다. 따라서 $g(t) > -\frac{8}{3}$이다.

$t = -1$일 때 직선 $y = tx$는 곡선 $y = h(x)$에 접하며 접점은 $(2,-2)$이다. 또한 $(2,-2)$ 이외의 다른 교점도 있다. 어떤 경우이든 $g(-1) > 0$이다.

$-2 < t < -1$이면 $h(x) = tx$는 하나의 실근 $\beta(> 4)$를 갖고 $g(t) > 0$이다.

(2-2) 위에서 관찰한 것에 따르면 0이 아닌 모든 $t \in (-2, \infty)$에 대하여 $g(t) > -\frac{8}{3}$이고, $g(0)$의 함숫값은 $\frac{11}{6}$ 또는 $-\frac{8}{3}$이다. 만약, $g(0) = -\frac{8}{3}$이면 $g(t)$의 최솟값은 $-\frac{8}{3}$이 되고 $t = 0$에서만 $g(t)$가 최솟값을 갖는다. 문제의 조건에서 함수 $g(t)$의 값이 최소가 되는 t의 값이 두 개 이상이라고 했으니 모순이다. 따라서 $g(0) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{6}$이다.

(2-3) 서로 다른 t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$에 대하여 $t = t_1, t_2$일 때 $g(t)$가 최솟값 m을 갖는다고 하자. $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$이고 $g(0) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{6}$이므로 함수 $g(t)$는 $\frac{11}{6}$ 이하의 모든 양수를 함숫값으로 갖는다. 따라서 m은 0 이하이다. 또한 $-2 < t \le -1$와 $t \ge 0$에 대하여 $g(t)$는 항상 양수이므로 $-1 < t_1 < t_2 < 0$임을 알 수 있다. 불연속점을 제외한 각 구간에서 $g(t)$는 감소한다. 따라서 $g(t)$는 $t = t_1, t_2$에서 불연속이다.

(a) $g(t)$는 $t \in (-2, -1)$에서 연속이다. 따라서 불연속점 중 가장 작은 것은 $p = -1$일 때 가능하다.

(b) $p = -1$, $q = t_1$, $r = t_2$임을 안다. $q - p = t_1 + 1$이 최소가 되려면 t_1의 값이 최소이어야 한다. $g(t_1) = m$인데 m이 클수록 t_1의 값은 작아진다. $m \le 0$이어야 하므로 $g(t_1) = 0$일 때 $q - p$가 최소가 된다. 이때 r의 값은 $g(t_2) = 0$이 되는 t_2의 값이다.

$g(t_2) = \int_0^{\beta_2} f(x)\,\mathrm{d}x$라 하면 $t_2 = -\frac{2(\beta_2 - 4)}{\beta_2}$이고

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^{\beta_2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^4 (x-1)(x-4)\,\mathrm{d}x - \int_4^{\beta_2} 2(x-4)\,\mathrm{d}x - t_2 \int_0^{\beta_2} x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{8}{3} - (\beta_2^2 - 8\beta_2 + 16) + \beta_2(\beta_2 - 4) = 4\beta_2 - \frac{56}{3} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $\beta_2 = \frac{14}{3}$이고 $r = t_2 = -\frac{2}{7}$이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	$t = -2$일 때 $f(x) = 0$이 실근을 갖지 않는다는 것을 증명하면	2점
(2-1)	$t > -2$일 때 $f(x) = 0$이 양의 실근을 갖는다는 것을 증명하면	5점
(2-2)	$g(0)$의 값이 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{6}$ 또는 $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{8}{3}$임을 밝히면	3점
(2-2)	$g(0) = \frac{11}{6}$인 이유를 정확하게 설명하면	7점
(2-3)(a)	직선 $y = tx$가 $y = (x-1)(x-4)$에 접할 때 p가 최소가 될 수 있음을 밝히면	4점
(2-3)(a)	$p = -1$임을 설명하면	4점
(2-3)(b)	최솟값이 0 이하이고 최소가 되는 t의 값이 $(-1, 0)$에 있어야 함을 관찰하면	2점
(2-3)(b)	$g(t)$의 최솟값 m이 클수록 $q - p$의 값이 작아진다는 것임을 밝히면	3점
(2-3)(b)	$m = 0$일 때 $q - p$의 값이 최소가 됨을 서술하면	3점
(2-3)(b)	$r = -\frac{2}{7}$임을 보이면	2점

오전 의예과 문제 3

※ [문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (수학적 귀납법)

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k\ (k\geq 1)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

[나] (귀류법)

어떤 명제가 참임을 증명할 때, 명제의 결론을 부정하여 가정한 사실 또는 이미 알려진 사실에 모순이 생김을 보이면 된다. 이처럼 증명하는 방법을 귀류법이라 한다.

(※) $a_1, a_2, \cdots, a_{99}$는 자연수 $1, 2, \cdots, 99$의 재배열이다. 즉, $\{a_1, a_2, \cdots, a_{99}\} = \{1, 2, \cdots, 99\}$이다.

$$b_1 = a_2 - a_1, \quad b_2 = a_3 - a_2, \quad \cdots, \quad b_{98} = a_{99} - a_{98}, \quad b_{99} = a_1 - a_{99}$$

라 하고 $b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4, \cdots, b_{98}b_{99}, b_{99}b_1$ 중에 양수인 것의 개수를 N이라 하자.

(3-1) 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이 다음 조건을 만족한다.

> 모든 $i=1, 2, \cdots, n-1$에 대하여 $x_ix_{i+1} < 0$ 이다.

수학적 귀납법을 이용하여 n이 홀수이면 x_n과 x_1은 부호가 서로 같고, n이 짝수이면 x_n과 x_1은 부호가 서로 다름을 보이시오. (5점)

(3-2) (a) 모든 재배열 $a_1, a_2, \cdots, a_{99}$에 대하여 $N \geq 1$임을 보이시오. (5점)

(b) $N=1$인 재배열 $a_1, a_2, \cdots, a_{99}$가 존재함을 보이시오. (5점)

(3-3) $N=1$일 때, $\sum_{i=1}^{99}|b_i|$이 가질 수 있는 값 중 가장 큰 값을 M이라 하자.

(a) M의 값을 구하시오. (10점)

(b) $N=1$일 때, $\sum_{i=1}^{99}|b_i| = M$인 재배열 $a_1, a_2, \cdots, a_{99}$의 개수를 구하시오. (10점)

■ 예시 답안

(3-1) $n=2$이면 $x_n = x_2$이고 $x_1x_2 < 0$이므로 x_1과 x_n의 부호는 서로 다르다.

$n=3$이면 $x_n = x_3$이다. $x_1x_2 < 0$이므로 x_1과 x_2는 부호가 다르다. 또한 $x_2x_3 < 0$이므로 x_2와 x_3는 부호가 다르다. 따라서 x_1과 x_3는 부호가 서로 같다.

$k \geq 4$에 대하여 $n=k-1$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k$일 때 성립함을 보이자.

k가 짝수이면 $k-1$은 홀수이다. 따라서 x_{k-1}은 x_1과 부호가 같다. 또한 $x_{k-1}x_k < 0$이므로 x_{k-1}과 x_k는 부호가 다르다. 즉, x_1과 x_k는 부호가 서로 다르다.

k가 홀수이면 $k-1$은 짝수이다. 따라서 x_1과 x_{k-1}은 부호가 다르고, $x_{k-1}x_k < 0$이므로 x_{k-1}과 x_k는 부호가 다르므로 x_1과 x_k는 부호가 서로 같다.

따라서 수학적 귀납법에 의하여 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 명제가 성립한다.

(3-2) (a) 귀류법으로 증명하자. $N=0$인 재배열 $a_1, a_2, \cdots, a_{99}$가 존재한다고 가정하자. 그러면 각각의 $i=1, 2, \cdots, 98$에 대하여 $b_ib_{i+1} < 0$이다. (3-1)에 의하여 b_1과 b_{99}의 부호는 같고 $b_{99}b_1 > 0$이므로 $N=0$이라는 것에 모순이다. 따라서 $N \geq 1$이다.

(b) n이 짝수일 때 a_n은 51 이상이고 n이 홀수일 때 a_n은 50 이하인 아래 재배열에 대하여 $N=1$임을 보이자.

$$a_1 = 50, \quad k = 1, 2, \cdots, 49 \text{ 에 대하여 } \quad a_{2k} = 50 + k, \quad a_{2k+1} = k \qquad (*)$$

$k=1,\cdots,49$에 대하여 $b_{2k}=a_{2k+1}-a_{2k}\le 50-51<0$, $b_{2k-1}=a_{2k}-a_{2k-1}\ge 51-50>0$이고 $b_{99}=a_1-a_{99}=50-49>0$이다. 즉, $b_1,b_2,\cdots,b_{99}$에는 양수와 음수가 교대로 나온다. 따라서 $b_1b_2,b_2b_3,\cdots,b_{98}b_{99}$는 모두 음수이고 $b_{99}b_1$은 양수이다. 그러므로 이 재배열에서 $N=1$이다.

(3-3) $N=1$이므로 어떤 $j=1,2,\cdots,99$에 대하여 $b_jb_{j+1}>0$이고 (단, $b_{100}=b_1$) j가 아닌 i에 대하여 $b_ib_{i+1}<0$이다. 일반성을 잃지 않고 $j=99$, 즉, $b_{99}b_1>0$이고 $b_1b_2,b_2b_3,\cdots,b_{98}b_{99}<0$이라 하자. 또한 일반성을 잃지 않고 $b_{99}>0$이라 하자. 이때 $b_1>0$이다. $b_1b_2,b_2b_3,\cdots,b_{98}b_{99}<0$이므로 (3-1)에 의하여 $b_1,b_3,\cdots,b_{99}$는 모두 양수, $b_2,b_4,\cdots,b_{98}$은 모두 음수이다. 따라서 $|b_{2k-1}|=b_{2k-1}=a_{2k}-a_{2k-1}$, $|b_{2k}|=-b_{2k}=a_{2k}-a_{2k+1}$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{99}|b_i| &= \sum_{k=1}^{50}|b_{2k-1}|+\sum_{k=1}^{49}|b_{2k}| \\ &= (a_2-\cancel{a_1})+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{96}-a_{95})+(a_{98}-a_{97})+(\cancel{a_1}-a_{99}) \\ &\quad +(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+\cdots+(a_{96}-a_{97})+(a_{98}-a_{99}) \\ &= 2(a_2+a_4+\cdots+a_{98})-2(a_3+a_5+\cdots+a_{99})\end{aligned}$$

이다.

(a) $a_2+a_4+\cdots+a_{98}\le 51+52+\cdots+99=49\cdot\frac{150}{2}=49\cdot 75=3675$이고 $a_3+a_5+\cdots+a_{99}\ge 1+2+\cdots+49=49\cdot\frac{50}{2}=1225$이므로 $\sum_{i=1}^{99}|b_i|\le 2\cdot(3675-1225)=4900$이다.

또한 (3-2)(b)에서 구한 재배열 $(*)$에서 $\sum_{i=1}^{99}|b_i|=4900$이므로 $M=4900$이다.

(b) (a)에서 $j=99$이고 $b_{99}>0$인 경우에 $\sum_{i=1}^{99}|b_i|=4900$이기 위해서는 $a_2,a_4,\cdots,a_{98}\ge 51$이고 $a_3,a_5,\cdots,a_{99}\le 49$이어야 함을 알 수 있다. 이러한 재배열의 개수는 $(49!)^2$이다. 그런데 j는 $1,2,\cdots,99$ 모두 가능하고 b_{99}가 음수인 경우도 있으므로 재배열의 총 개수는 $99\cdot 2\cdot(49!)^2=198\cdot(49!)^2$이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하면	5점
(3-2)(a)	$N=0$인 재배열이 존재하지 않음을 증명하면	5점
(3-2)(b)	$N=1$인 재배열을 찾으면 위에서 구한 재배열에 대하여 $N=1$인 이유를 설명하면	3점 2점
(3-3)(a)	$N=1$일 때, $b_1,b_2,\cdots,b_{99}$의 부호를 파악하면 $N=1$일 때, $\sum_{i=1}^{99}\|b_i\|$의 값을 $a_3+a_5+\cdots+a_{99}$와 $a_2+a_4+\cdots+a_{98}$로 나타내면 $M\le 4900$을 보이면 $\sum_{i=1}^{99}\|b_i\|=4900$인 예를 찾으면	2점 3점 3점 2점
(3-3)(b)	$\sum_{i=1}^{99}\|b_i\|=4900$이기 위한 $a_1,a_2,\cdots,a_{99}$의 조건을 설명하면 위의 조건을 만족하는 $a_1,a_2,\cdots,a_{99}$에 대하여 $\sum_{i=1}^{99}\|b_i\|=4900$임을 보이면 조건을 만족하는 재배열의 개수를 구하면	3점 3점 4점

오후 문제 1

※ [문제 1] (30점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (정적분의 치환적분법)

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능한 함수 $x=g(t)$에 대하여 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때 도함수 $g'(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

[나] ($\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 꼴의 부정적분)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\ln|f(x)|+C$$

(1-1) [5점] 정적분 $\int_0^\pi((\pi-x)^8+(\pi-x)^2+\sin^3 x)\,\mathrm{d}x$의 값을 구하시오.
(1-2) [10점] 닫힌구간 $[0,\pi]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^\pi xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x$가 성립함을 보이시오.
(1-3) [15점] 정적분 $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(x+1)\sin^3 x}{2-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

(1-1) $u=\pi-x$라 하면 제시문 (가)를 이용하여 치환적분법을 적용하고, 삼각함수의 성질을 활용하면

$$\begin{aligned}\int_0^\pi((x-\pi)^8+(x-\pi)^2+\sin^3 x)\,\mathrm{d}x&=-\int_\pi^0(u^8+u^2+\sin^3(\pi-u))\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^\pi(u^8+u^2+(1-\cos^2 u)\sin u)\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^\pi(u^8+u^2+\sin u)\,\mathrm{d}u-\int_0^\pi \sin u\cos^2 u\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

를 얻는다. 여기서 변수 $y=\cos u$에 대해서 제시문 (가)의 치환적분법을 적용하면 $\int_0^\pi \sin u\cos^2 u\,\mathrm{d}u=\int_{-1}^1 y^2\,\mathrm{d}y$가 된다. 따라서 주어진 적분값은

$$\left[\frac{u^9}{9}+\frac{u^3}{3}-\cos u\right]_0^\pi-\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac{\pi^9}{9}+\frac{\pi^3}{3}+\frac{4}{3}$$

(1-2) $u=\pi-x$라 하면, 제시문 (가)의 치환적분법에 의해

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi(\pi-u)f(\sin(\pi-u))\,\mathrm{d}u=\pi\int_0^\pi f(\sin u)\,\mathrm{d}u-\int_0^\pi uf(\sin u)\,\mathrm{d}u$$

이고 $\int_0^\pi xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x$를 얻는다.

(1-3) 닫힌구간 $[-\pi,\pi]$에서 함수의 대칭성을 이용하면,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(x+1)\sin^3 x}{2-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{2-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^3 x}{2-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^\pi\frac{x\sin^3 x}{2-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

이다. (1-2)에서 증명한 식과 제시문 (가)의 치환적분법을 이용하면,

$$2\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{2-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{2-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos^2 x}{2-\cos^2 x}\sin x\,\mathrm{d}x=\pi\int_{-1}^{1}\frac{1-u^2}{2-u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{1}{2-u^2}\right)\mathrm{d}u=2\pi-\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{\left(\sqrt{2}+u\right)\left(\sqrt{2}-u\right)}\,\mathrm{d}u$$

$$=2\pi-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+u}+\frac{1}{\sqrt{2}-u}\right)\mathrm{d}u$$

을 얻는다. 여기서 제시문 (나)에 의해

$$2\pi-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+u}+\frac{1}{\sqrt{2}-u}\right)\mathrm{d}u=2\pi-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\ln|\sqrt{2}+u|-\ln|\sqrt{2}-u|\right]_{-1}^{1}=2\pi-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1-1)	정적분의 값을 정확하게 계산하면	5점
(1-2)	$u=\pi-x$로 치환하여 식을 변형하면	3점
(1-2)	주어진 등식을 증명하면	7점
(1-3)	(1-2)와 대칭성을 이용하여 적분 형태를 단순화하면	5점
(1-3)	주어진 정적분의 값을 정확하게 계산하면	10점

오후 문제 2

※ [문제 2] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (두 직선의 수직 조건)

두 직선 $y = mx + n$과 $y = m'x + n'$에서

(i) 두 직선이 서로 수직이면 $mm' = -1$이다.

(ii) $mm' = -1$이면 두 직선은 서로 수직이다.

[나] (음함수의 미분법)

방정식 $f(x, y) = 0$에서 y를 x의 함수로 보고 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$를 구한다.

(2-1) 곡선 $y = x^2$ 위의 점 중에서 점 $(-5, -1)$과의 거리가 최소인 점의 좌표를 구하시오. (10점)

(2-2) 매개변수 t로 나타낸 곡선 $x = 2t + 3$, $y = -t - 6 + \cos \pi t$가 있다. $t = s$일 때 이 곡선 위의 점 P에 대하여 곡선 $y = x^2$ 위의 점 중 P와 거리가 최소인 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 길이를 $d(s)$라 할 때, $d'(-4)$의 값을 구하시오. (15점)

(2-3) 점 P는 제1사분면 위의 점으로 곡선 $y = x^2$ 위에 있지 않고 원 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 위에도 있지 않다. 곡선 $y = x^2$ 위의 점 중 P와 거리가 최소인 점을 Q라 하고, 원 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ 위의 점 중 P와 거리가 최소인 점을 R이라 하자. $\overline{PQ} + \overline{PR}$의 최솟값을 구하시오. (10점)

■ 예시 답안

(2-1) 곡선 $y = x^2$ 위의 점 (t, t^2)과 점 $(-5, -1)$ 사이의 거리의 제곱 함수는

$$f(t) = (t+5)^2 + (t^2+1)^2 = t^4 + 3t^2 + 10t + 26$$

이고, $f'(t) = 4t^3 + 6t + 10 = 2(t+1)(2t^2 - 2t + 5)$이다. $t = -1$일 때만이 $f'(t) = 0$이므로 가장 가까운 점의 좌표는 $(-1, 1)$이다.

(2-2) 점 P와 가장 가까운 점 Q의 좌표를 (a, a^2)이라 하면, 점 Q에서의 접선과 직선 PQ는 서로 수직이다. 따라서 직선 PQ의 직선의 방정식은 $y = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2$이다. 따라서 점 P의 좌표 (x, y)는 $2a^3 - (2y-1)a - x = 0$을 만족하고, 제시문 (나)의 음함수 미분법에 의하여

$$6a^2a' - (2y-1)a' - 2y'a - x' = 0$$

이다. 한편 $x' = 2$, $y' = -1 - \pi \sin(\pi s)$이고, $s = -4$일 때 $x' = 2$, $y' = -1$이다. 또한 $s = -4$일 때, $x = -5$, $y = -1$이므로 (2-1)에 의해 $a = -1$이다. 따라서 $s = -4$일 때, $6a' - (-3)a' - 4 = 0$이고 $a' = \frac{4}{9}$이다.

한편, $\{d(s)\}^2 = \overline{PQ}^2 = (a-x)^2 + (a^2-y)^2$이므로,

$$2d(s) \cdot d'(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(d(s)^2) = 2(a-x) \cdot (a'-x') + 2(a^2-y) \cdot (2a \cdot a' - y')$$

이고

$$2d(-4) \cdot d'(-4) = 2(-1+5) \cdot \left(\frac{4}{9} - 2\right) + 2(1-(-1)) \cdot \left(\left(-2 \cdot \frac{4}{9}\right) + 1\right) = -\frac{112}{9} + \frac{4}{9} = -12$$

이다. 그리고 $d(-4) = 2\sqrt{5}$이므로 $d'(-4) = -\frac{12}{4\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$이다.

(2-3) 최소가 되는 점 P, Q, R이 있다고 하자. 원 $(x-3)^2 + y^2 = 1$의 중심을 S라 하자. 직선 PR은 점 R에서 원 $(x-3)^2 + y^2 = 1$의 접선과 수직이므로, 점 S를 지나야 한다. 따라서 직선 PR은 점 P와 S를 잇는 직선이고, 선분 PR의 길이는 $\overline{PS} - 1$이다.

만약 점 S, P, Q가 한 직선 위에 있지 않으면, $\overline{QS} - 1 < \overline{PQ} + \overline{PS} - 1$이다. 따라서 직선 QS 위에 있는 점 중 원 바깥에 있는 점 T를 잡으면, $\overline{QT} + \overline{RT} = \overline{QS} - 1 < \overline{PQ} + \overline{PS} - 1 = \overline{PQ} + \overline{PR}$이 되어 모순이다. 따라서

> 점 S, P, Q는 일직선상에 있어야 하고, $\overline{PQ}+\overline{PR}=\overline{QS}-1$이다. 그러므로 $\overline{QS}$가 최소가 되는 점 Q에 대하여 $\overline{QS}-1$의 값이 최솟값이 된다.
>
> 곡선 $y=x^2$ 위의 점 (b, b^2)과 점 $(3,0)$ 사이의 거리의 제곱은 b^4+b^2-6b+9이고 이를 미분하면 $4b^3+2b-6=2(b-1)(2b^2+2b+3)$이므로 $b=1$에서 거리의 제곱이 최소이다. 즉, 점 $(1,1)$과 $(3,0)$을 잇는 선분 위의 점 중 원 밖의 한 점을 P로 잡으면 $\overline{PQ}+\overline{PR}$이 최소이다. 예를 들면, 점 P로 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$을 선택할 수 있다. 이때 $\overline{PQ}+\overline{PR}=\overline{QS}-1=\sqrt{5}-1$이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(2-1)	곡선 $y=x^2$ 위의 점과 점 $(-5,-1)$ 사이의 거리를 식으로 나타내면	3점
(2-1)	미분계수가 0이 되는 점에서 최솟값을 가짐을 서술하면	2점
(2-1)	$(-1,1)$을 구하면	5점
(2-2)	거리가 최소가 되는 조건을 서술하면	2점
(2-2)	점 P, Q의 좌표의 관계를 찾으면	3점
(2-2)	음함수의 미분을 활용하여 관련된 미분계수의 값들을 구하면	6점
(2-2)	$d'(-4)=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$를 구하면	4점
(2-3)	직선 PR이 원 $(x-3)^2+y^2=1$의 중심을 지난다는 사실을 서술하면	3점
(2-3)	점 P에 대해 세 점 P, Q, R이 한 직선 위에 있음을 설명하면	4점
(2-3)	$\sqrt{5}-1$을 구하면	3점

오후 문제 3

※ [문제 3] (35점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

제시문

[가] (평균값 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

[나] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

(i) $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

(ii) $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.

[다] 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

(i) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

(ii) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

(※) 함수 $f(x)$는 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고 이계도함수 $f''(x)$를 갖는다고 하자.

(3-1) [7점] 모든 양의 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이면 $0<a<b<c$인 임의의 실수 a,b,c에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

임을 보이시오.

(3-2) [20점] 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)\le x$이고 $f''(x)>0$이면, 모든 양의 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 1$임을 보이시오.

(3-3) [8점] 함수 $g(x)=\begin{cases} px^2 & (0<x\le 2) \\ x-\ln x+q & (x>2) \end{cases}$가 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)\le x$이고 $g''(x)$가 존재하며 $g''(x)>0$을 만족하도록 하는 상수 p,q의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

(3-1) 구간 (a,b)와 (b,c)에서 함수 $f(x)$에 제시문 (가)의 평균값 정리를 적용하면 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(d)$인 $d\in(a,b)$와 $\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(e)$인 $e\in(b,c)$가 존재한다. 이때, $d<e$이고 제시문 (다)에 의해 $f'(d)<f'(e)$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(3-2) 어떤 양의 실수 α에 대하여 $f'(\alpha)>1$이 성립한다고 가정하자. $f'(x)$는 증가하므로 제시문 (가)의 평균값 정리에 의해 $\beta>\alpha$인 모든 β에 대하여 $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=k\ge f'(\alpha)>1$이다. (3-1)에 의해 $x>\beta$인 임의의 x에 대하여 $\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}>\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=k>1$이고 $f(x)>f(\beta)+k(x-\beta)$이다. 따라서 $x>\frac{k\beta-f(\beta)}{k-1}$인 x에 대하여 $f(x)>f(\beta)+k(x-\beta)>x$이므로 $f(x)\le x$에 모순이다. 그러므로 모든 $x>0$에 대하여 $f'(x)\le 1$이다.

(3-3) $x=2$일 때 미분값이 같아야 하는데 $g(x)=px^2$의 도함수는 $g'(x)=2px$이고 $g(x)=x-\ln x+q$의 도함수는 $g'(x)=1-\frac{1}{x}$이므로 $g'(2)=4p=1-\frac{1}{2}$이어야 한다. 즉, $p=\frac{1}{8}$이다. 한편, $x=2$일 때 함숫값이 같아야 하므로 $g(2)=\frac{1}{2}=2-\ln 2+q$이어야 한다. 따라서 $q=\ln 2-\frac{3}{2}$이다. 그러면 모든 $x>0$에 대하여 $g(x)\le x$이고 $g''(x)>0$이다. 그러므로 $p=\frac{1}{8}$, $q=\ln 2-\frac{3}{2}$일 때, $g(x)$는 (3-2)의 조건을 만족하는 함수이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(3-1)	두 구간 $(a,b),(b,c)$에서 평균값 정리를 제대로 적용하면	2점
(3-1)	$f'(x)$가 증가함수임을 이용하여 부등식이 성립함을 보이면	5점
(3-2)	어떤 양의 실수 α에 대하여 $f'(\alpha)>1$이라 가정하고 귀류법 증명을 시도하면	3점
(3-2)	어떤 $\beta>\alpha$에 대하여 $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=k>1$이고 $x>\beta$인 임의의 x에 대하여 (3-1)의 결과를 이용하면	10점

하위 문항	채점 기준	배점
(3-2)	증명을 완결하면	7점
(3-3)	$p=\frac{1}{8}$을 구하면	3점
(3-3)	$q=\ln 2-\frac{3}{2}$을 구하면	3점
(3-3)	$x=2$에서 $g'(2)=\frac{1}{2}$인 도함수와 $g''(2)=\frac{1}{4}$인 이계도함수가 존재함을 서술하면	2점

AI 논술 자동 첨삭

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01
4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02
상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03
일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04
간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관

writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다