

05

탈출 속도

수록 구성

- 개념 기본 문제
- 개념 적용 문제
- 1등급 도전 문제
- 정답과 해설

05 탈출 속도

핵심 내용 **미러보**

중력에 의한 위치 에너지는 (-)값을 갖고, 행성마다 탈출 속도가 다르다. 우주선은 운동량 보존을 이용하여 속력을 증가시킨다.

1 역학적 에너지와 탈출 속도

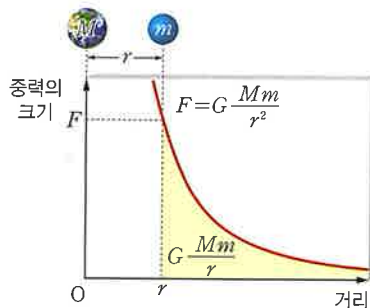
지표면에서 중력에 의한 위치 에너지는 지표면과의 거리에 비례한다. 그렇다면 지구에서 멀리 떨어진 곳에서 중력에 의한 위치 에너지는 어떻게 나타낼 수 있을까? 우주선이 지구의 중력에서 벗어날 수 있는 속력은 얼마일까? 행성마다 대기를 구성하는 성분이 다른 까닭은 무엇일까?

1. 중력에 의한 위치 에너지(중력 퍼텐셜 에너지)

질량이 m 인 물체의 중력에 의한 위치 에너지는 외력이 물체를 기준점에서 어떤 특정한 위치로 서서히 이동시키는 동안 외력이 한 일과 같다. 기준점을 지표면으로 할 때 지표면 가까이, 약 지상 10 km 이내 높이 h 에 있는 물체의 위치 에너지는 중력 가속도의 크기가 g 로 일정하여 위치 에너지를 mgh 로 나타낸다. 그러나 물체가 더 멀어지면 중력은 지구 중심으로부터 거리 r 의 제곱에 반비례하므로, 물체의 중력의 크기가 작아지고 거리의 변화량 Δr 에 대한 위치 에너지의 변화량 ΔE_p 도 작아진다.

- (1) **물체에 한 일:** 그림과 같이 질량이 m 인 물체가 질량이 M 인 지구 중심 O 에서 거리가 r 인 곳에 있을 때 물체에 작용하는 중력의 크기 $F = G \frac{Mm}{r^2}$ (G : 중력 상수)이다.

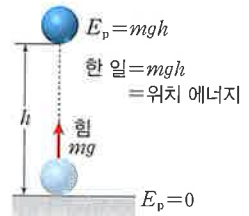
이때 중력 F 와 크기가 같고 방향이 반대인 외력 F' 를 물체에 작용하면서 무한히 먼 곳까지 천천히 이동시키면 외력 F' 가 한 일 W 는 거리에 따른 중력의 크기 그래프에서 그래프 아래 넓이와 같으며, 그 크기는 $W = G \frac{Mm}{r}$ (J)이다.



▲ 두 물체 사이 거리에 따른 중력의 크기

중력에 의한 위치 에너지

물체에 mg 의 힘을 작용하여 서서히 h 만큼 들어 올렸을 때 힘이 물체에 한 일은 mgh 이고, 그 위치에서 위치 에너지는 물체에 해 준 일과 같은 mgh 이다.



심화 + 중력에 대해 외력이 한 일 구하기

질량이 m 인 물체가 지구 중심으로부터 거리 r 에서 ∞ 까지 이동하는 동안 중력에 대해 외력이 한 일은 적분으로 구할 수 있다. 함수 $y = x^n$ (n 은 실수, $n \neq -1$)의 부정적분은 $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ (C 는 적분상수)이므로 r 에서 ∞ 까지 천천히 이동시킬 때 중력에 대해 한 일 W 는 다음과 같다.

$$W = \int_r^\infty F dr = \int_r^\infty \left(G \frac{Mm}{r^2} \right) dr = GMm \left[-\frac{1}{r} \right]_r^\infty = G \frac{Mm}{r}$$

개념 기본 문제

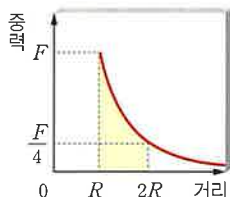
01 탈출 속도에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

- ㄱ. 물체가 행성의 중력을 벗어날 수 있는 행성 표면에서의 최소 속력이다.
- ㄴ. 물체가 행성 표면을 탈출 속도로 출발한 후 행성에서 무한히 먼 지점에 위치했을 때 물체의 역학적 에너지는 0이다.
- ㄷ. 행성의 탈출 속도는 물체의 질량과 무관하다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 그림은 지구의 중력의 크기를 지구 중심으로부터의 거리에 따라 나타낸 것이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 지구 반지름은 R 이다.)

보기

- ㄱ. 중력은 지표면에서 가장 크다.
- ㄴ. 지구 중심으로부터의 거리가 2배 멀어지면 중력의 크기는 $\frac{1}{2}$ 배가 된다.
- ㄷ. 그래프에서 색칠한 부분의 면적은 두 지점 사이의 중력에 의한 위치 에너지의 차이이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 표는 질량이 M 인 지구 주위를 등속 원운동하는 인공위성 A와 B에 대한 자료이다. A와 B의 질량은 m 으로 같고, 중력 상수는 G 이다.

인공위성	A	B
지구 중심으로부터의 거리	r	$3r$
운동 에너지	E_{kA}	E_{kB}
중력에 의한 위치 에너지	E_{pA}	E_{pB}
역학적 에너지	E_A	E_B

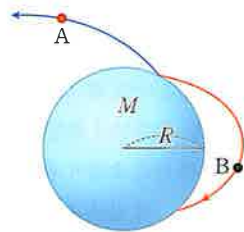
이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

- ㄱ. $E_{kA} = 3E_{kB}$ 이다.
- ㄴ. E_{pB} 는 E_{pA} 보다 $\frac{2GMm}{3r}$ 만큼 크다.
- ㄷ. E_B 는 E_A 보다 $\frac{2GMm}{3r}$ 만큼 크다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 그림은 질량이 M , 반지름이 R 인 행성 표면에서 발사된 물체 A와 B의 운동 경로를 나타낸 것이다. A는 행성의 중력을 벗어나 무한히 먼 곳까지 이동하고, B는 행성의 중력에 의해 행성 표면으로 되돌아온다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 상수는 G 이고, 행성의 운동과 공기 저항은 무시한다.)

보기

- ㄱ. A가 행성에서 멀어질수록 A의 역학적 에너지는 감소한다.
- ㄴ. A가 행성 표면에서 발사되는 순간의 속력은 $\sqrt{\frac{GM}{R}}$ 이다.
- ㄷ. B가 행성 표면에서 발사되는 순간 B의 역학적 에너지는 (-)값을 갖는다.

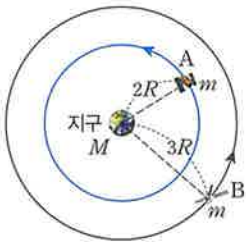
- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

05 표는 두 행성 A와 B의 질량과 반지름, 탈출 속도를 나타낸 것이다.

행성	질량	반지름	탈출 속도
A	M	R	v_A
B	$20M$	$3R$	v_B

$v_A : v_B$ 를 구하시오.

06 그림은 질량이 M 인 지구를 중심으로 질량이 m 으로 같은 인공위성 A와 B가 반지름이 각각 $2R$, $3R$ 인 원 궤도를 따라 등속 원운동하는 것을 나타낸 것이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 상수는 G 이다.)

보기

- ㄱ. 가속도 크기는 A가 B의 $\frac{9}{4}$ 배이다.
- ㄴ. 운동 에너지는 A가 B의 $\frac{3}{2}$ 배이다.
- ㄷ. 중력에 의한 위치 에너지는 B가 A보다 $\frac{GMm}{6R}$ 만큼 크다.

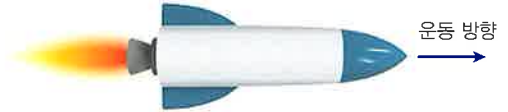
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

07 그림 (가)와 같이 질량이 M 인 로켓이 v 의 속도로 날아가다가 그림 (나)와 같이 질량이 $0.2M$ 인 빈 연료통을 분리한 후 속도가 V 가 되었다. 이때 (가)의 로켓에 대한 연료통의 상대 속도는 반대 방향으로 $0.4v$ 이다.



V 를 구하시오. (단, 로켓의 운동 방향은 일정하다.)

08 그림은 지구에서 로켓을 발사하여 우주로 보낼 때 로켓이 운동 반대 방향으로 연소 가스를 분사하며 가속 운동을 하는 모습을 나타낸 것이다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

- ㄱ. 로켓은 연소 가스를 분사하는 힘의 반작용으로 추진력을 얻는다.
- ㄴ. 연소 가스를 분사하는 동안 로켓의 운동량의 크기는 변하지 않는다.
- ㄷ. 연소 가스를 분사하는 동안 로켓의 역학적 에너지는 증가한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

09 표는 행성 A와 B의 질량, 반지름, 표면 온도, 주요 대기를 나타낸 것이다. 이 중에서 질량과 반지름은 A를 1로 기준으로 하여 나타낸 상대값이다.

행성	A	B
질량	1	319
반지름	1	11
표면 온도(K)	288	165
주요 대기	질소, 산소	수소, 헬륨

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

보기

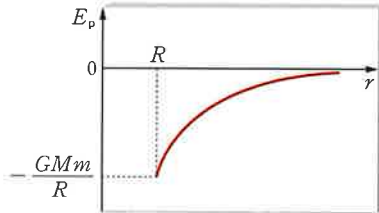
- ㄱ. 행성의 탈출 속도는 A가 B보다 크다.
- ㄴ. A에서 질소 분자의 속력은 A의 탈출 속도보다 작다.
- ㄷ. B에서 수소 분자의 속력은 B의 탈출 속도보다 크다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

개념 적용 문제

중력에 의한 위치 에너지

- 01** 그림은 지구 주위에 있는 질량이 m 인 물체의 중력에 의한 위치 에너지 E_p 를 지구 중심으로부터의 거리 r 에 따라 나타낸 것이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 상수는 G , 지구의 질량은 M , 지구의 반지름은 R 이다.)



➤ 지구 주위에서 역학적 에너지가 (+)값을 갖는 물체는 지구 중력을 벗어나 무한히 멀리 날아갈 수 있다.

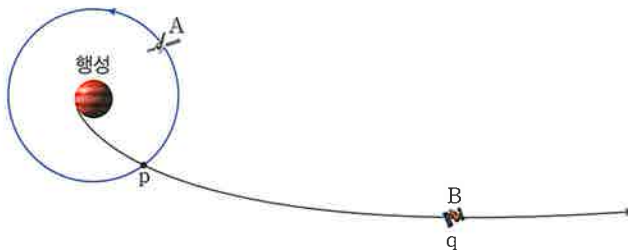
보기

- ㄱ. 지구 중심에서 멀어질수록 중력에 의한 위치 에너지는 감소한다.
- ㄴ. 중력에 의한 위치 에너지가 (-)값을 갖는 것은 물체가 지구 중력에 속박되어 있음을 나타낸다.
- ㄷ. 지표면에서 물체의 운동 에너지가 $\frac{GMm}{R}$ 보다 크면 물체는 지구 중력을 벗어나 지구에서 무한히 먼 우주로 날아갈 수 있다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

행성에서 무한히 떨어진 곳에서 역학적 에너지

- 02** 그림은 행성에서 발사된 후 원 궤도를 따라 공전하는 우주선 A와 행성에서 발사된 후 무한히 먼 우주로 날아가는 우주선 B의 모습을 나타낸 것이다. p는 A의 원 궤도와 B의 운동 궤도가 만나는 점이고, q는 B의 운동 궤도 위의 점이다.



➤ 우주선이 지구에서 멀어질수록 중력에 의한 위치 에너지는 증가한다.

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

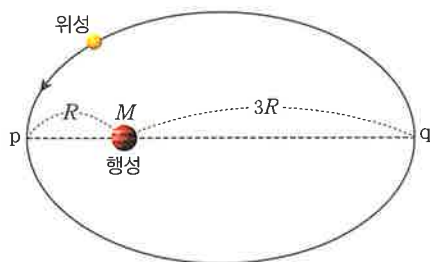
보기

- ㄱ. 우주선 B의 역학적 에너지는 (-)값을 갖는다.
- ㄴ. p에서 B의 속력은 p에서 A의 속력보다 크다.
- ㄷ. 우주선 B의 중력에 의한 위치 에너지는 q에서가 p에서보다 크다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

➤ 행성의 운동과 역학적 에너지

- 03** 그림은 위성이 질량이 M 인 행성을 한 초점으로 하는 타원 궤도를 따라 운동하는 것을 나타낸 것이다. 행성에서 가장 가까운 점 p까지 거리는 R 이고, 행성에서 가장 먼 점 q까지 거리는 $3R$ 이다.



➤ 위성이 타원 운동을 하는 동안 면적 속도는 일정하고, 역학적 에너지는 보존된다.

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 상수는 G 이다.)

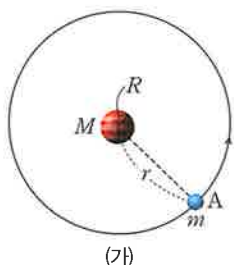
보기

- ㄱ. 위성의 속력은 p에서가 q에서의 3배이다.
- ㄴ. 위성의 중력에 의한 위치 에너지는 p에서가 q에서보다 작다.
- ㄷ. p에서 위성의 속력은 $\sqrt{\frac{3GM}{R}}$ 이다.

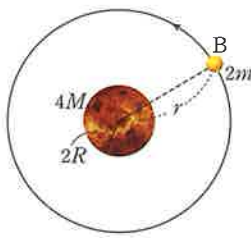
- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

➤ 행성의 탈출 속도

- 04** 그림 (가)는 질량이 M , 반지름이 R 인 행성 주위를 질량이 m 인 위성 A가 등속 원운동을 하는 것을 나타낸 것이고, 그림 (나)는 질량이 $4M$, 반지름이 $2R$ 인 행성 주위를 질량이 $2m$ 인 위성 B가 등속 원운동을 하는 것을 나타낸 것이다. 행성 중심에서 위성까지의 거리는 (가), (나) 모두 r 로 같다.



(가)



(나)

➤ 중력 상수가 G , 질량이 M , 반지름이 R 인 행성 표면의 탈출 속도는 $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ 이다.

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 상수는 G 이다.)

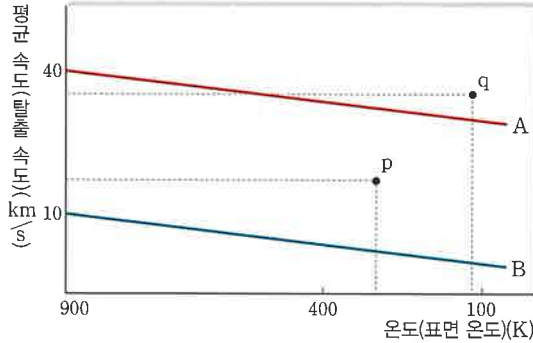
보기

- ㄱ. 행성 표면의 탈출 속도는 (가)에서보다 (나)에서가 크다.
- ㄴ. A의 속력은 B의 속력의 $\sqrt{2}$ 배이다.
- ㄷ. B의 역학적 에너지는 A의 역학적 에너지보다 $\frac{GMm}{r}$ 만큼 크다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

➤ 행성의 탈출 속도와 대기 구성 성분

05 그림은 기체 A, B 분자의 온도에 따른 평균 속도 그래프에 태양계의 행성 p와 q의 표면 온도와 탈출 속도를 나타낸 것이다.



➤ 기체 분자의 속도가 행성의 탈출 속도보다 크면 기체 분자는 행성에서 벗어난다.

이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 기체 분자의 운동 에너지는 온도에 비례한다.)

보기

- ㄱ. 기체의 분자량은 A가 B보다 작다.
- ㄴ. A와 B 중에서 p의 대기를 구성할 확률이 높은 것은 A이다.
- ㄷ. 행성의 반지름이 같다면 p의 질량이 q의 질량보다 작다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

➤ 로켓의 속도 변화

06 그림은 질량이 M 인 로켓이 정지해 있다가 매우 짧은 시간 Δt 동안 질량이 Δm 인 연소 가스를 일정한 속도 v 로 분사하는 것을 나타낸 것이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 로켓에 작용하는 중력과 공기 저항은 무시한다.)

보기

- ㄱ. Δt 동안 분사된 연소 가스의 운동량의 크기는 $v\Delta m$ 이다.
- ㄴ. 연소 가스를 분사하는 동안 로켓에 작용하는 알짜힘의 크기는 $\frac{v\Delta m}{\Delta t}$ 이다.
- ㄷ. Δt 동안 연소 가스를 분사한 후 로켓의 속력은 $\frac{v\Delta m}{M}$ 이다.



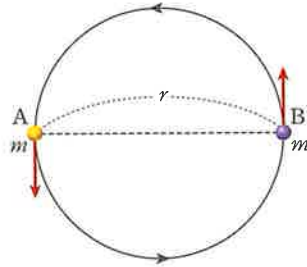
➤ 연소 가스의 운동량의 변화량은 $\Delta(mv) = v\Delta m$ 이다. 로켓이 받은 충격량의 크기는 연소 가스의 운동량 변화량의 크기와 같다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1등급 도전 문제

> 역학적 에너지

- 07** 그림과 같이 질량이 m 으로 같은 쌍둥이 별 A와 B가 거리 r 만큼 떨어져 속력 v 로 등속 원운동하고 있다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 상수는 G 이고, 다른 천체의 중력은 무시한다.)



➤ A와 B의 원운동의 중심은 A와 B의 질량 중심이다.

보기

ㄱ. A에 작용하는 구심력의 크기는 $\frac{4Gm^2}{r^2}$ 이다.

ㄴ. A의 운동 에너지는 $\frac{Gm^2}{4r}$ 이다.

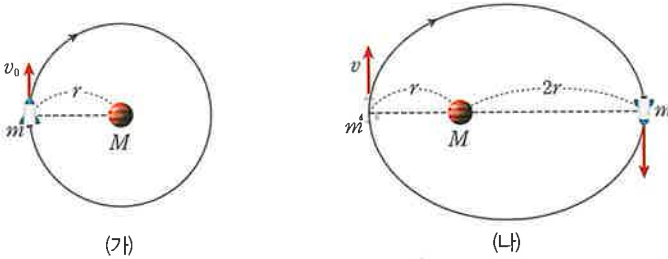
ㄷ. B의 중력에 의한 위치 에너지는 $-\frac{Gm^2}{r}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

> 로켓의 속도 변화

- 08** 그림 (가)는 질량이 M 인 행성 주위를 질량이 m 인 로켓이 반지름 r 인 원을 따라 속력 v_0 으로 등속 원운동을 하는 모습을, 그림 (나)는 (가)의 로켓이 순간적으로 연료를 분사하여 운동 방향은 변하지 않고 속력만 v 로 증가했을 때 로켓이 행성을 한 초점으로 하는 타원 궤도를 따라 운동하는 모습을 나타낸 것이다. 로켓이 행성에서 가장 가까운 거리는 r , 행성에서 가장 먼 거리는 $2r$ 이다.

➤ 로켓이 원운동을 하거나 타원 운동을 하는 동안 역학적 에너지는 보존된다.



이에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, 중력 상수는 G 이다.)

보기

ㄱ. $v_0 : v = \sqrt{3} : 2$ 이다.

ㄴ. (가)에서 로켓의 역학적 에너지는 $-\frac{GMm}{2r}$ 이다.

ㄷ. (나)에서 로켓의 역학적 에너지는 $-\frac{GMm}{3r}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄷ. 인공위성의 공전 주기의 제곱이 궤도 반지름의 세제곱에 비례하므로 궤도의 높이가 낮을수록 주기가 짧다.

- 04 ㄱ. 태양 주위의 타원 궤도를 회전하는 행성의 면적 속도는 일정하므로 $\frac{S_1}{t_1} = \frac{S_2}{t_2}$ 이다. 이때 $S_1 = S_2$ 이므로 $t_1 = t_2$ 이다.

ㄴ. a에서 b까지의 길이가 c에서 d까지의 길이보다 길고 걸린 시간은 같으므로 행성의 공전 속력은 a에서 c에서 보다 빠르다.

ㄷ. 중력은 태양과 행성 사이 거리의 제곱에 반비례한다. 따라서 태양으로부터의 거리는 b까지가 d까지보다 작으므로 중력은 b에서 d에서보다 크다.

- 05 ㄱ. A와 B는 같은 행성 주위를 같은 타원 궤도를 따라 공전하므로, A와 B의 공전 주기는 같다. A의 공전 주기가 5t이므로 B의 공전 주기도 5t이다.

[바로알기] ㄴ. A가 a에서 c까지 이동하는 데 걸린 시간이 2t이다. B는 2t 동안 c에서 d까지 이동하므로 d를 지난다.

ㄷ. B가 d를 지날 때 A는 c를 지난다. 면적 속도 일정 법칙에 의해 행성에 가까울수록 위성의 속력이 빠르므로, B가 d를 지날 때의 속력은 c를 지날 때의 A의 속력보다 느리다.

- 06 (1) 행성이 태양 주위를 공전하는 동안 면적 속도가 일정하다. 즉, 태양으로부터의 거리와 속력이 반비례하므로 행성의 속력은 근일점에서 원일점에서의 $\frac{3.8 \text{ AU}}{0.2 \text{ AU}} = 19$ 배이다.

(2) 행성의 타원 궤도 긴반지름이 $\frac{3.8 \text{ AU} + 0.2 \text{ AU}}{2} = 2 \text{ AU}$ 이고, 주기의 제곱은 긴반지름의 세제곱에 비례하므로 행성의 주기는 지구 주기의 $\sqrt{2^3}$ 인 $2\sqrt{2}$ (년)이다.

- 07 ㄱ. 행성의 질량이 M일 때 인공위성의 공전 주기 T와 인공위성의 궤도 반지름 r의 관계는 $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$ 이다. B의 궤도 반지름이 A의 궤도 반지름의 4배이므로, 인공위성의 주기는 B가 A의 $\sqrt{4^3} = 8$ 배이다.

[바로알기] ㄴ. 인공위성에 작용하는 중력이 구심력이므로 $\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$ 에서 $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ 으로, 인공위성의 속력은 인공위성의 질량과는 무관하고 궤도 반지름의 제곱근에 반비례한다. 따라서 인공위성의 속력은 A가 B의 $\sqrt{4} = \sqrt{(2)^2} = 2$ 배이다.

ㄷ. 인공위성 A에 작용하는 중력 $F_A = G \frac{2Mm}{r^2}$ 이고, B에 작용하는 중력 $F_B = G \frac{Mm}{(4r)^2}$ 이므로 인공위성에 작용하는 중력의 크기는 A가 B의 32배이다.

- 08 (1) A의 원 궤도의 반지름과 B의 타원 궤도의 긴반지름이 같으므로 케플러 제3법칙(조화 법칙)에 의해 A, B의 주기는 같다. 따라서 B의 주기가 t_2 이므로 A의 주기도 t_2 이다.

(2) B에 작용하는 중력의 크기는 B와 행성 사이 거리의 제곱에 반비례하므로, t_1 일 때가 t_2 일 때의 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9$ 배이다.

따라서 B의 가속도 크기도 t_1 일 때가 t_2 일 때의 9배이다.

- 09 ㄱ. 위성의 면적 속도가 일정하므로 행성에 가까울수록 속력이 크다. 따라서 B의 속력은 P에서 가장 크다.

ㄷ. 위성에는 행성의 중력만 작용하므로 $ma = G \frac{Mm}{r^2}$ 에서 가속도 a가 r^2 에 반비례한다. 따라서 A와 B가 행성에 가장 가까이 있을 때 가속도가 가장 크고, A와 B가 행성에 가장 가까이 있을 때의 거리는 같으므로 가속도의 최댓값도 A와 B가 같다.

[바로알기] ㄴ. 공전 주기가 T, 긴반지름이 r일 때 케플러 제3법칙에 의해 $T^2 \propto r^3$ 이다. 따라서 B의 긴반지름이 A의 4배이므로 공전 주기는 B가 A의 $\sqrt{4^3} = 8$ 배이다.

- 10 (1) A의 긴반지름은 $\frac{r+3r}{2} = 2r$ 이고, B의 긴반지름은 $\frac{2r+4r}{2} = 3r$ 이다. 케플러 제3법칙(조화 법칙)에 의해 $T^2 \propto r^3$ 이므로 B의 공전 주기는 A의 $\sqrt{\left(\frac{3r}{2r}\right)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{6}$ 배이다.

(2) 중력의 크기는 행성과 위성 사이 거리의 제곱에 반비례하고, 가속도 법칙에 의해 A의 가속도 크기는 중력의 크기에 비례한다. 따라서 A의 가속도 크기는 행성으로부터의 거리가 r일 때가 3r일 때의 9배이다.

58쪽~61쪽

- 01 ③ 02 ③ 03 ④ 04 ① 05 ② 06 ③
07 ⑤ 08 ③

- 01 ㄱ. 행성은 태양을 한 초점으로 하는 타원 궤도를 따라 공전한다. 타원은 두 초점으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합이므로, 두 초점에서 행성까지의 거리의 합은 긴 반지름의 2배인 $2r$ 이다. 따라서 b에서 두 초점까지의 거리는 $2x$ 이므로 $2x=2r$ 에서 $x=r$ 이다.

ㄷ. 면적 속도 일정 법칙에 의해 태양으로부터의 거리가 가까울수록 행성의 속력이 빠르므로, 행성의 속력은 근일점인 a에서가 원일점인 c에서보다 빠르다.

[바로알기] ㄴ. $\overline{ac}$ 를 중심으로 행성의 궤도가 대칭이므로, 행성이 a에서 c까지 운동하는 데 걸린 시간은 주기 T 의 절반인 $\frac{T}{2}$ 가 된다. 행성이 a에서 b까지 운동하는 데 걸린 시간이 $\frac{T}{6}$ 이므로, b에서 c까지 운동하는 데 걸린 시간은 $\frac{T}{2} - \frac{T}{6} = \frac{2T}{6}$ 가 된다. 케플러 제2법칙에 의해 태양과 행성을 이은 직선이 같은 시간 동안 지난 면적은 같으므로, $S_1 : S_2 = \frac{T}{6} : \frac{2T}{6} = 1 : 2$ 에서 S_2 는 S_1 의 2배가 된다.

- 02 ㄱ. 주기의 제곱은 긴반지름의 세제곱에 비례($T^2 \propto r^3$)한다. 따라서 B의 긴반지름은 $\frac{R+3R}{2} = 2R$, A의 반지름은 $3R$ 이므로 B의 공전 주기는 A의 공전 주기의

$$\sqrt{\left(\frac{2R}{3R}\right)^3} = \sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{2\sqrt{6}}{9} \text{ 배이다.}$$

ㄴ. B가 행성 주위를 공전하는 동안 면적 속도가 일정하므로 행성에서 B까지의 거리에 그 순간의 속력을 곱한 값이 일정하다. 따라서 거리와 속력이 반비례하고 행성에서 B까지의 거리가 p에서 R , q에서 $3R$ 이므로 B의 속력은 p에서가 q에서의 3배이다.

[바로알기] ㄷ. 위성에는 행성의 중력만 작용하므로 $ma = G \frac{Mm}{r^2}$ 에서 가속도 a 가 r^2 에 반비례한다. 행성에서 A까지의 거리가 $3R$ 로 일정하고, B가 p에 있을 때 행성에서 B까지의 거리가 R 이다. 따라서 p에서 B의 가속도 크기는 A의 가속도 크기의 $3^2 = 9$ 배이다.

- 03 ㄱ. a가 B의 원 궤도 위에 있으므로 행성에서 a까지의 거리가 $2r$ 이다. 행성과 a, $-r$ 을 꼭지점으로 하는 삼각형에서 빗변과 짧은 변의 길이가 $2:1$ 이므로, B가 a에서 b까지 이동하는 동안 회전각은 60° 가 된다. 즉, B의 주기는 $\frac{360^\circ}{60^\circ} T = 6T$ 이다. A의 긴반지름이 B의 반지름 $2r$ 와 같으므로 조화 법칙에 의해 A의 주기도 $6T$ 이다.

ㄷ. 위성에는 행성의 중력만 작용하므로, 위성의 가속도 크기는 행성으로부터의 거리의 제곱에 반비례한다. 행성에서 a까지의 거리는 a가 B의 원 궤도 위에 있으므로 $2r$ 이고, A의 가속도가 최솟값일 때의 위치는 행성에서 A까지의 거리가 최대일 때로 $3r$ 이다. 따라서 a에서의 가속도 크기는 최솟값의 $\frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$ 배이다.

[바로알기] ㄴ. 행성에서 가장 먼 지점까지의 거리는 $3r$ 이고 가장 가까운 지점까지의 거리는 r 이므로 3배이다. 따라서 면적 속도 일정 법칙에 의해 속력의 최댓값(행성에서 가장 가까운 곳에서의 속력)은 속력의 최솟값(행성에서 가장 먼 곳에서의 속력)의 3배이다.

- 04 ㄱ. 위성 A, B가 동일한 행성 주위를 공전할 때, 케플러 제3법칙에 의해 A, B의 공전 주기의 제곱은 공전 궤도의 긴반지름의 세제곱에 비례한다. A의 반지름과 B의 긴반지름이 R 로 같으므로 A, B의 공전 주기는 같다.

[바로알기] ㄴ. B는 행성과의 중력에 의해 운동한다. 중력은 행성과 위성 사이의 거리의 제곱에 반비례하므로 B에 작용하는 알짜힘의 크기는 일정하지 않다.

ㄷ. 한 번 공전하는 동안 이동 거리는 A가 B보다 길고 A, B의 공전 주기가 같다. 따라서 평균 속력은 이동 거리가 긴 A가 B보다 크다.

- 05 ㄷ. ㄴ에서 A 궤도의 긴반지름은 $\frac{r_0+3r_0}{2} = 2r_0$ 이고, B의 반지름 r_0 의 2배이다. 케플러 제3법칙에 의해 주기의 제곱이 긴반지름의 세제곱에 비례하므로 $\frac{T_A^2}{T_B^2} = \frac{(2r_0)^3}{r_0^3} = 8$ 에서 공전 주기는 A가 B의 $2\sqrt{2}$ 배이다.

[바로알기] ㄱ. A의 면적 속도는 일정하므로 행성에 가까울수록 A의 속력이 커진다. 즉, A의 속력은 p에서 최대이다.

ㄴ. 중력은 두 물체 사이 거리의 제곱에 반비례한다. 행성 중심으로부터 A까지의 거리가 r_0 일 때 중력이 $9F_0$ 이므로 중력이 F_0 일 때 행성 중심으로부터 A까지의 거리 $x=3r_0$ 이다.

- 06 ㄱ. 조화 법칙에 의해 A, B의 공전 주기의 제곱은 공전 궤도 반지름의 세제곱에 비례한다. A의 반지름이 r , B의 반지름이 $2r$ 이므로 A의 공전 주기는 B의 공전 주기의

$$\sqrt{\left(\frac{r}{2r}\right)^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ 배이다.}$$

ㄷ. 인공위성에 작용하는 구심력은 중력이므로 A에 작용하는 중력의 크기는 $G\frac{Mm}{r^2}$, B에 작용하는 중력의 크기는 $G\frac{(2Mm)}{(2r)^2} = G\frac{Mm}{2r^2}$ 이다. 따라서 인공위성에 작용하는 구심력의 크기는 A가 B의 2배이다.

[바로알기] ㄴ. 인공위성에 작용하는 중력이 구심력이므로 $\frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$ 이고, 운동 에너지 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 이다. 따라서 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{2r}$ 에서 $E_k \propto \frac{m}{r}$ 이다. B의 질량과 반지름이 모두 A의 2배이므로 운동 에너지는 A와 B가 서로 같다.

- 07** ㄱ, ㄴ. 중력은 두 물체의 질량의 곱에 비례하고, 두 물체 사이 거리의 제곱에 반비례한다. 행성으로부터 떨어진 거리가 r_0 으로 같을 때 중력의 비가 4:9이므로 질량의 비도 4:9이다. A에 작용하는 행성의 중력이 $4F_0$ 일 때 거리가 r_0 이고 B에 작용하는 행성의 중력이 $4F_0$ 일 때 거리가 x 이므로 행성의 질량을 M , A의 질량 $m_1 = 4m$, B의 질량 $m_2 = 9m$ 이라고 하면 $4F_0 = \frac{4GMm}{r_0^2} = \frac{9GMm}{x^2}$ 에서 $x = \frac{3}{2}r_0$ 이다.

ㄷ. 중력은 두 물체 사이 거리의 제곱에 반비례한다. A가 행성에서 가장 멀 때 A의 중력의 크기 F_0 은 행성에서 가장 가까울 때의 중력의 크기의 $\frac{1}{4}$ 이므로 행성에서 A까지의 거리는 $2r_0$ 이 된다. 마찬가지로 B가 행성에서 가장 멀 때 중력의 크기는 가장 가까울 때의 $\frac{1}{9}$ 이므로, 행성에서 B까지의 가장 먼 거리는 r_0 의 3배인 $3r_0$ 이다.

A의 긴반지름은 $\frac{r_0 + 2r_0}{2} = \frac{3}{2}r_0$,

B의 긴반지름은 $\frac{r_0 + 3r_0}{2} = 2r_0$ 으로, 긴반지름은 B가 A의 $\frac{4}{3}$ 배이다. 따라서 조화 법칙에 의해 공전 주기를 비교하면 $\frac{T_B^2}{T_A^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$ 에서 $T_B = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} T_A$ 이므로 공전 주기는 B가 A의 $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ 배이다.

- 08** ㄱ. B가 공전하는 동안 면적 속도가 일정하고 행성에서 p까지 거리는 $2R$, 행성에서 q까지 거리는 $6R$ 이므로 B의 속력은 p에서 q에서의 3배이다.
ㄴ. 조화 법칙에 따라 $T^2 \propto r^3$ 이고, A의 반지름은 R , B의

긴반지름은 $4R$ 이므로 B의 공전 주기는 T 의 $\sqrt{4^3} = 8$ 배인 $8T$ 이다. B가 q에서 r까지 가는 데 걸린 시간이 r에서 p까지 가는 데 걸린 시간과 같고 q에서 r를 거쳐 p까지 가는 데 걸린 시간이 전체 주기의 $\frac{1}{2}$ 이므로 q에서 r까지 가는 데 걸린 시간은 주기의 $\frac{1}{4}$ 인 $8T \times \frac{1}{4} = 2T$ 이다.

[바로알기] ㄷ. 면적 속도가 일정하므로 B와 행성을 잇는 선이 q에서 r까지 쓸고 간 면적은 r에서 p까지 쓸고 간 면적과 같다. 따라서 색칠한 부분의 면적은 타원 전체 면적의 $\frac{1}{4}$ 이다. 타원의 중심에서 초점까지 거리를 c , 긴반지름을 a , 짧은반지름을 b 라고 하면 타원 전체 면적은 πab 이며, $c^2 = a^2 - b^2$ 이다. 따라서 $(2R)^2 = (4R)^2 - b^2$ 이므로 B의 타원 궤도의 짧은반지름 $b = 2\sqrt{3}R$ 이고, 색칠한 부분의 면적은 $\frac{1}{4} \times (\pi \times 4R \times 2\sqrt{3}R) = 2\sqrt{3}\pi R^2$ 이다.

05 탈출 속도

중요 개념 체크

1 $-G\frac{Mm}{r}$ 2 $-G\frac{Mm}{2r}$ 3 큰
4 (1) × (2) ○ (3) ○ (4) ×

66쪽

기본 문제

68쪽~69쪽

- 01 ⑤ 02 ③ 03 ④ 04 ②
05 $\sqrt{3} : \sqrt{20} (= \sqrt{3} : 2\sqrt{5})$ 06 ⑤ 07 1.1v
08 ③ 09 ①

- 01** ㄱ. 탈출 속도는 물체가 행성이 작용하는 중력의 영향으로부터 벗어날 수 있는 행성 표면에서의 최소 속력이다.
ㄴ. 물체가 행성 표면을 탈출 속도로 출발한 후 행성에서 무한히 먼 지점에 위치했을 때 물체의 속력과 중력에 의한 위치 에너지가 모두 0이 되므로 역학적 에너지도 0이 된다.
ㄷ. 중력 상수가 G , 질량이 M , 반지름이 R 인 행성의 탈출 속도는 $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ 으로, 물체의 질량 m 과는 무관하다.