



역학과에너지

포물선운동

Logic will get you from A to B  
Imagination will take you everywhere

Albert Einstein (1879-1955)

# 2차원 포물선 운동

운동의 독립성 · 3대 공식 · 수평 발사 · 연습문제

물리

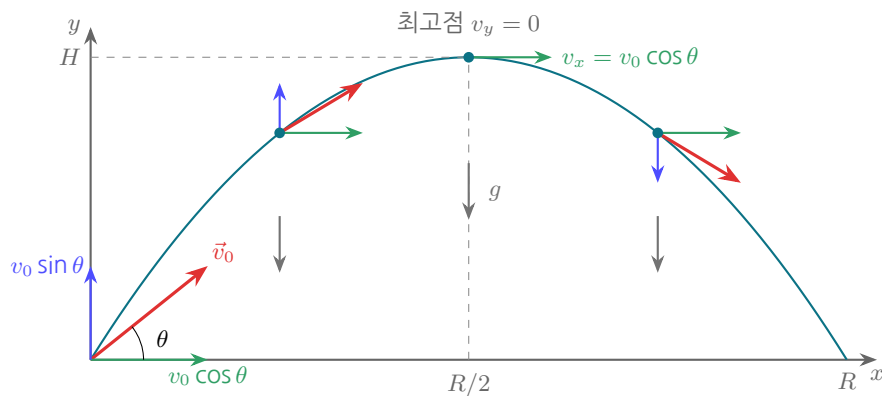
## 1. 핵심 원리 — 운동의 독립성

포물선 운동은 수평 방향과 수직 방향 운동이 서로 독립이다.

수평( $x$ ): 힘이 없음 → 등속직선운동

수직( $y$ ): 중력만 작용 → 등가속도운동 ( $a = -g$ )

두 운동을 따로 분석한 뒤 합치면 궤적이 포물선이 된다. “수평은 등속, 수직은 자유낙하” — 이 한 문장이 모든 공식의 출발점이다.



수평 성분(초록)은 일정, 수직 성분(파랑)만 변한다. 가속도  $g$ 는 어디서나 연직 아래.

가속도는 궤적의 모든 지점에서 항상 연직 아래 방향으로  $g$ 이다. 최고점에서도 마찬가지!

## 2. 초기 조건 분해와 시간에 따른 운동

초기 속력  $v_0$ , 발사각  $\theta$ 일 때 속도를 성분으로 분해한다.

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta, \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

|    | 수평 방향 (등속)                    | 수직 방향 (등가속도)                                    |
|----|-------------------------------|-------------------------------------------------|
| 속도 | $v_x = v_0 \cos \theta$ (일정)  | $v_y = v_0 \sin \theta - gt$                    |
| 위치 | $x = v_0 \cos \theta \cdot t$ | $y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ |

임의 시각의 속력과 방향:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

### 3. 3대 공식

지면에서 발사해 같은 높이로 떨어지는 경우. 최고점에서  $v_y = 0$ 을 이용해 유도한다.

#### 공식 ① 체공시간

$$t_{top} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}, \quad T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

#### 공식 ② 최고 높이

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

#### 공식 ③ 수평 도달 거리 (사거리)

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

H와 R의 관계식

두 공식을 나누면  $v_0$ 이 소거된다:

$$\frac{H}{R} = \frac{\frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}}{\frac{v_0^2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta}{g}} = \frac{\sin^2 \theta}{4 \sin \theta \cos \theta} = \frac{\tan \theta}{4}$$

#### 공식 ④ H-R 관계식

$$H = \frac{R \tan \theta}{4} \iff R = \frac{4H}{\tan \theta}$$

초기 속력  $v_0$ 와 무관하게 **발사각  $\theta$ 만으로** H와 R의 비가 결정된다.

$\theta = 45^\circ$ 이면  $\tan \theta = 1 \rightarrow R = 4H$  (최대 사거리일 때 사거리는 최고 높이의 4배).

역으로 H와 R을 측정하면 발사각을 알 수 있다:  $\tan \theta = \frac{4H}{R}$

#### 검증

$v_0 = 20 \text{ m/s}$ ,  $\theta = 30^\circ$ 일 때  $H = 5 \text{ m}$ ,  $R = 20\sqrt{3} \text{ m}$

$$\frac{R \tan 30^\circ}{4} = \frac{20\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{4} = \frac{20}{4} = 5 \checkmark$$

T와 H의 관계식

체공시간 공식에서  $v_0 \sin \theta = \frac{gT}{2}$ 를 H 공식에 대입하면  $v_0$ 와  $\theta$ 가 모두 소거된다:

$$H = \frac{(v_0 \sin \theta)^2}{2g} = \frac{\left(\frac{gT}{2}\right)^2}{2g} = \frac{gT^2}{8}$$

공식 ⑦ T-H 관계식

$$H = \frac{gT^2}{8} \iff T = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

발사각·초기 속력과 **무관하게**, 체공시간 T만 알면 최고 높이 H가 결정된다 (역도 성립).

물리적 의미: 내려오는 시간은  $\frac{T}{2}$  이고, 최고점에서 자유낙하한 거리가 곧 H이므로  $H = \frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{gT^2}{8}$ .

또한  $T = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}$ 는 높이 H에서의 자유낙하 시간  $\sqrt{\frac{2H}{g}}$ 의 **정확히 2배**.

검증

$v_0 = 20 \text{ m/s}$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ 일 때  $T = 2 \text{ s}$ ,  $H = 5 \text{ m}$

$$\frac{gT^2}{8} = \frac{10 \times 2^2}{8} = \frac{40}{8} = 5 \checkmark$$

3대 공식에서 나오는 핵심 결론 (시험 단골)

1. **최대 사거리**는  $\theta = 45^\circ$  —  $\sin 2\theta = 1$ 일 때
2. **여각 관계** —  $\theta$ 와  $90^\circ - \theta$ 는 사거리가 같다 (예:  $30^\circ$ 와  $60^\circ$ )
3. **최고점에서 속도는 0이 아니다** —  $v_y = 0$ 이지만  $v_x = v_0 \cos \theta$ 는 남는다. 최고점 속도 =  $v_0 \cos \theta$
4. **대칭성** — 올라가는 시간 = 내려오는 시간, 같은 높이에서 속도 동일 (방향만 다름)
5. 가속도는 어디서나 **연직 아래로**  $g$  (최고점 포함)

## 4. 궤적 방정식

$x = v_0 \cos \theta \cdot t$ 에서  $t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$ 를  $y$ 식에 대입해 시간을 소거하면:

공식 ④ 궤적 방정식

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$

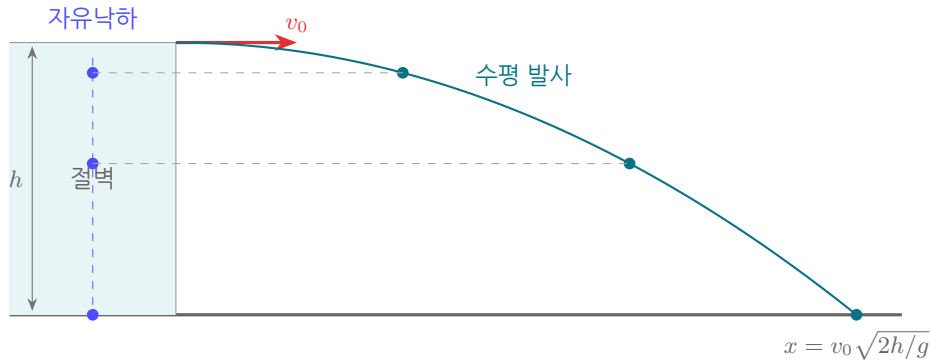
$x$ 에 대한 이차함수이므로 궤적은 **포물선**이다.

## 5. 수평 발사 (특수한 경우)

높이  $h$ 에서 수평으로 속도  $v_0$ 로 던질 때 ( $\theta = 0$ ):

공식 ⑤ 수평 발사

$$t_{\text{낙하}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



같은 시각에 두 공은 항상 같은 높이 — 수평 속도는 낙하에 영향을 주지 않는다.

낙하시간은 **자유낙하와 동일** — 수평 속도는 낙하시간에 영향을 주지 않는다. 같은 높이에서 수평으로 던진 공과 그냥 떨어뜨린 공은 **동시에 착지**한다.

## 6. 대표 예제

### 예제

$v_0 = 20 \text{ m/s}$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ 일 때

성분 분해:  $v_{0x} = 20 \cos 30^\circ = 10\sqrt{3} \text{ m/s}$ ,  $v_{0y} = 20 \sin 30^\circ = 10 \text{ m/s}$

체공시간:  $T = \frac{2 \times 10}{10} = 2 \text{ s}$

최고 높이:  $H = \frac{10^2}{2 \times 10} = 5 \text{ m}$

사거리:  $R = 10\sqrt{3} \times 2 = 20\sqrt{3} \approx 34.6 \text{ m}$

## 7. 연습문제

### 문제 1

지면에서  $v_0 = 40 \text{ m/s}$ ,  $\theta = 30^\circ$ 로 공을 던졌다. 체공시간, 최고 높이, 사거리를 구하시오. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $\sin 30^\circ = 0.5$ ,  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ )

**풀이**  $v_{0y} = 40 \times 0.5 = 20 \text{ m/s}$ ,  $v_{0x} = 20\sqrt{3} \text{ m/s}$

체공시간:  $T = \frac{2 \times 20}{10} = 4 \text{ s}$ , 최고 높이:  $H = \frac{20^2}{2 \times 10} = 20 \text{ m}$ , 사거리:  $R = 20\sqrt{3} \times 4 = 80\sqrt{3} \approx 138.6 \text{ m}$

### 문제 2

높이 45 m인 절벽에서 수평으로 20 m/s로 공을 던졌다. 낙하시간과 수평 도달 거리를 구하시오. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**풀이** 낙하시간:  $t = \sqrt{\frac{2 \times 45}{10}} = \sqrt{9} = 3 \text{ s}$ , 수평 거리:  $x = 20 \times 3 = 60 \text{ m}$

### 문제 3

$v_0 = 30 \text{ m/s}$ ,  $\theta = 45^\circ$ 로 던진 물체의 최고점에서의 속력을 구하시오.

**풀이** 최고점에서는  $v_y = 0$ , 수평 성분만 남는다.

$$v = v_0 \cos 45^\circ = 30 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2} \approx 21.2 \text{ m/s} \quad (\text{0이 아님에 주의!})$$

### 문제 4

같은 속력으로  $\theta = 30^\circ$ 와  $\theta = 60^\circ$ 로 던진 두 물체에 대하여, (1) 사거리 비 (2) 최고 높이 비 (3) 체공시간 비를 구하시오.

**풀이** (1) 사거리:  $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$ 이므로 **1 : 1** (여각 관계)

(2) 최고 높이:  $H \propto \sin^2 \theta \rightarrow \sin^2 30^\circ : \sin^2 60^\circ = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \mathbf{1 : 3}$

(3) 체공시간:  $T \propto \sin \theta \rightarrow \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{1 : \sqrt{3}}$

### 문제 5

수평으로 던진 공이 2초 후 지면에 도달했고 수평 거리 30 m를 이동했다. (1) 던진 높이 (2) 초기 속력 (3) 착지 직전 속력을 구하시오. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**풀이** (1)  $h = \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 = 20 \text{ m}$     (2)  $v_0 = \frac{30}{2} = 15 \text{ m/s}$

(3)  $v_y = 10 \times 2 = 20 \text{ m/s}$ 이므로  $v = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ m/s}$

### 문제 6

$v_0 = 50 \text{ m/s}$ 로 던질 때 얻을 수 있는 최대 사거리와, 그때의 최고 높이를 구하시오. ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

**풀이** 최대 사거리는  $\theta = 45^\circ$ :  $R_{max} = \frac{50^2}{10} = 250 \text{ m}$

그때 최고 높이:  $H = \frac{50^2 \times \frac{1}{2}}{2 \times 10} = 62.5 \text{ m}$  (참고:  $\theta = 45^\circ$ 일 때  $R = 4H$ )

### 문제 7

발사각  $\theta$ , 초기 속력  $v_0$ 로 던진 물체가 최고점에 도달했을 때, 속도와 가속도가 이루는 각은?

**풀이** 최고점에서 속도는 수평 방향( $v_0 \cos \theta$ ), 가속도는 연직 아래( $g$ ). 따라서 두 벡터가 이루는 각은  **$90^\circ$**

## 8. 암기 요약 카드

### 한눈에 정리

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} \quad H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$y = x \tan \theta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \quad t_{\text{낙하}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad H = \frac{R \tan \theta}{4} \quad H = \frac{gT^2}{8}$$

“수평은 등속, 수직은 자유낙하” · 최대 사거리는  $45^\circ$  · 최고점 속력 =  $v_0 \cos \theta$