



역학과에너지

힘의 합성

Logic will get you from A to B
Imagination will take you everywhere

Albert Einstein (1879-1955)

위치벡터와 벡터의 연산

평면좌표에서의 위치벡터 · 벡터의 크기 · 합과 차

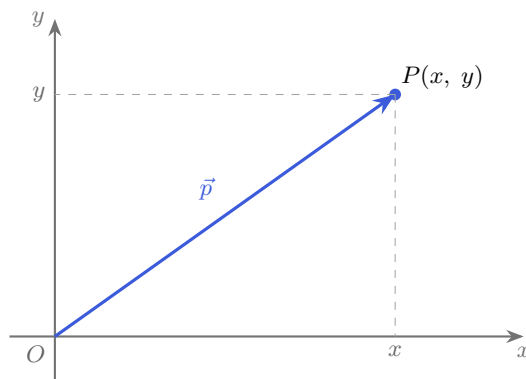
수학·물리

1. 위치벡터 (Position Vector)

좌표평면에서 **시점을 원점 O 로 고정한 벡터**를 위치벡터라 한다. 점 $P(x, y)$ 에 대하여

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = (x, y)$$

평면 위의 모든 점 P 는 위치벡터 $\vec{p}$ 하나와 **일대일 대응**된다. 따라서 점의 좌표 (x, y) 를 그대로 벡터의 성분으로 쓸 수 있다.



임의의 벡터를 위치벡터로 표현

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

기억법: “종점 – 시점”. 어떤 벡터든 원점 기준의 위치벡터로 옮겨 계산할 수 있다.

2. 벡터의 크기 (Magnitude)

벡터의 크기는 벡터를 나타내는 **유향선분의 길이**이며, 기호 $|\vec{a}|$ 로 나타낸다.

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ 일 때

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

이는 원점에서 점 (a_1, a_2) 까지의 거리이므로 **피타고라스 정리**에서 나온다. 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 를 잇는 벡터의 크기는

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라 한다. $\vec{a} \neq \vec{0}$ 일 때 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 는 $\vec{a}$ 와 같은 방향의 단위벡터이다.

예제

$\vec{a} = (3, -4)$ 의 크기는?

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

3. 벡터의 합

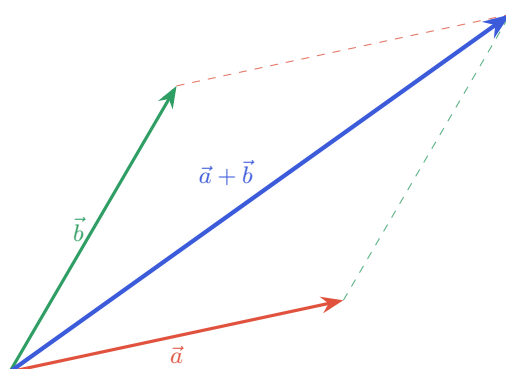
$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ 일 때

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

기하학적 의미

삼각형법: $\vec{a}$ 의 종점에 $\vec{b}$ 의 시점을 이어 붙이면, $\vec{a}$ 의 시점에서 $\vec{b}$ 의 종점으로 가는 벡터가 $\vec{a} + \vec{b}$ 이다.

평행사변형법: 시점을 같게 놓으면, 두 벡터를 이웃한 변으로 하는 평행사변형의 **대각선**이 합이다.



연산 법칙

교환법칙: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ · 결합법칙: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ · $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

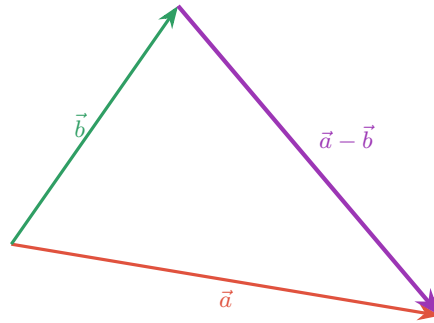
4. 벡터의 차

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$-\vec{b}$ 는 $\vec{b}$ 와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터이다.

기하학적 의미

시점을 같게 놓으면 $\vec{a} - \vec{b}$ 는 $\vec{b}$ 의 종점에서 $\vec{a}$ 의 종점으로 향하는 벡터이다. (평행사변형의 다른 대각선)



예제

$A(1, 2), B(4, 6)$ 일 때

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4 - 1, 6 - 2) = (3, 4), \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

5. 연습문제

문제 1

$\vec{a} = (2, -1), \vec{b} = (-3, 4)$ 일 때, $\vec{a} + \vec{b}$ 와 $\vec{a} - \vec{b}$ 를 구하시오.

풀이 $\vec{a} + \vec{b} = (2 + (-3), -1 + 4) = (-1, 3)$
 $\vec{a} - \vec{b} = (2 - (-3), -1 - 4) = (5, -5)$

문제 2

두 점 $A(-2, 3), B(4, -5)$ 에 대하여 $\overrightarrow{AB}$ 의 성분과 크기 $|\overrightarrow{AB}|$ 를 구하시오.

풀이 $\overrightarrow{AB} = (4 - (-2), -5 - 3) = (6, -8)$
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$

문제 3

$\vec{a} = (1, 3), \vec{b} = (x, -2)$ 이고 $\vec{a} + \vec{b} = (4, y)$ 일 때, $x + y$ 의 값을 구하시오.

풀이 x 성분: $1 + x = 4 \Rightarrow x = 3$
 y 성분: $3 + (-2) = y \Rightarrow y = 1$
 따라서 $x + y = 4$

문제 4

$\vec{a} = (t, t - 2)$ 의 크기가 2일 때, 모든 실수 t 의 값을 구하시오.

풀이 $|\vec{a}|^2 = t^2 + (t - 2)^2 = 4$
 $2t^2 - 4t + 4 = 4 \Rightarrow 2t(t - 2) = 0$
 따라서 $t = 0$ 또는 $t = 2$

문제 5

$\vec{a} = (3, -4)$ 와 같은 방향의 단위벡터를 구하시오.

풀이 $|\vec{a}| = \sqrt{9+16} = 5$
 단위벡터 $= \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

문제 6

세 점 $A(1, 1), B(3, 5), C(6, 2)$ 에 대하여 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 의 성분과 크기를 구하시오.

풀이 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (삼각형법)
 $\overrightarrow{AC} = (6-1, 2-1) = (5, 1)$
 $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

문제 7

$\vec{a} = (2, 0), \vec{b} = (1, \sqrt{3})$ 일 때, $|\vec{a} + \vec{b}|$ 와 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 를 구하시오.

풀이 $\vec{a} + \vec{b} = (3, \sqrt{3}), |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$
 $\vec{a} - \vec{b} = (1, -\sqrt{3}), |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{1+3} = 2$