

가천대 약술형논술

수학

목차

2026학년도 자연계 C형	5
문항 7	5
문항 8	6
문항 9	7
문항 10	8
문항 11	9
문항 12	10
문항 13	11
문항 14	12
문항 15	13
 2026학년도 자연계 D형	 14
문항 7	14
문항 8	15
문항 9	16
문항 10	17
문항 11	18
문항 12	19
문항 13	20
문항 14	21
문항 15	22
 2026학년도 자연계 E형	 23
문항 7	23
문항 8	24
문항 9	25
문항 10	26
문항 11	27
문항 12	28
문항 13	29
문항 14	30
문항 15	31
 2026학년도 자연계 F형	 32
문항 7	32
문항 8	33
문항 9	34
문항 10	35
문항 11	36
문항 12	37

문항 13	38
문항 14	39
문항 15	40

2025학년도 자연계 41

문항 7	41
문항 8	42
문항 9	43
문항 10	44
문항 11	45
문항 12	46
문항 13	47
문항 14	48
문항 15	49

2024학년도 인문계 A형 50

문항 10	50
문항 11	51
문항 12	52
문항 13	53
문항 14	54
문항 15	55

2024학년도 인문계 B형 56

문항 10	56
문항 11	57
문항 12	58
문항 13	59
문항 14	60
문항 15	61

2024학년도 자연계 C형 62

문항 7	62
문항 8	63
문항 9	64
문항 10	65
문항 11	66
문항 12	67
문항 13	68
문항 14	69
문항 15	70

2024학년도 자연계 D형 71

문항 7	71
문항 8	72

문항 9	73
문항 10	74
문항 11	75
문항 12	76
문항 13	77
문항 14	78
문항 15	79

2024학년도 자연계 E형 80

문항 7	80
문항 8	81
문항 9	82
문항 10	83
문항 11	84
문항 12	85
문항 13	86
문항 14	87
문항 15	88

2024학년도 자연계 F형 89

문항 7	89
문항 8	90
문항 9	91
문항 10	92
문항 11	93
문항 12	94
문항 13	95
문항 14	96
문항 15	97

2024학년도 자연계 G형 98

문항 7	98
문항 8	99
문항 9	100
문항 10	101
문항 11	102
문항 12	103
문항 13	104
문항 14	105
문항 15	106

2026학년도 자연계 C형

문항 7

[문항 7] 방정식 $5 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 \cos x + a = 1$ 이 실근을 가지도록 하는 실수 a 의 최댓값과 최솟값을 각각 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$$5 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 \cos x + a - 1 = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \text{ 이므로}$$

$$5 \sin^2 x + 4 \cos x + a - 1 = 0 \Leftrightarrow 5(1 - \cos^2 x) + 4 \cos x + a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \cos^2 x - 4 \cos x - 4 = a \text{ 이다.}$$

$\cos x = t$ 라 하자.

$y = 5t^2 - 4t - 4$ 으로 표현할 수 있다.

$$y = 5\left(t - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{24}{5} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

$t = \frac{2}{5}$ 일 때, 최솟값은 $-\frac{24}{5}$ 이고, $t = -1$ 일 때, 최댓값은 5이다.

채점 기준

답안	배점
$5 \cos^2 x - 4 \cos x - 4 = a$	4점
최솟값 $-\frac{24}{5}$ (또는 $a \geq -\frac{24}{5}$)	3점
최댓값 5	3점

문항 8

[문항 8] 첫째항이 $\frac{47}{45}$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^n \times \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

을 만족시킬 때, $a_{2025} = \frac{q}{p}$ 이다. $\sqrt{p} + q$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

■ 예시 답안

$$\begin{aligned} a_{2025} &= a_{2024} + (-1)^{2024} \times \left(\frac{1}{2024} + \frac{1}{2025} \right) \\ &= a_{2023} + (-1)^{2023} \times \left(\frac{1}{2023} + \frac{1}{2024} \right) + \left(\frac{1}{2024} + \frac{1}{2025} \right) \\ &= a_{2022} + (-1)^{2022} \times \left(\frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \right) - \left(\frac{1}{2023} + \frac{1}{2024} \right) + \left(\frac{1}{2024} + \frac{1}{2025} \right) \\ &\quad \dots \\ &= a_1 + (-1)^1 \times \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \dots - \left(\frac{1}{2023} + \frac{1}{2024} \right) + \left(\frac{1}{2024} + \frac{1}{2025} \right) \\ &= a_1 - 1 + \frac{1}{2025} = \frac{91}{2025} \end{aligned}$$

$$p = 2025, \quad q = 91$$

$$\therefore \sqrt{p} + q = 45 + 91 = 136$$

■ 채점 기준

답안	배점
$a_{2025} = a_1 - 1 + \frac{1}{2025}$ (또는 $a_{2025} = \frac{91}{2025}$)	6점
$p = 2025$	1.5점
$q = 91$	1.5점
$\sqrt{p} + q = 136$	1점

문항 9

[문항 9] $a > 0$ 인 실수 a 에 대하여 함수 $f(x) = ax^3$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(5, f(5))$ 에서의 접선의 방정식이 점 $(4, 2)$ 를 지날 때, 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

점 $(5, f(5))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = 75a(x - 5) + 125a$ 이고 점 $(4, 2)$ 를 지나므로

$a = \frac{1}{25}$ 이다.

제 1사분면에서 $y = f(x), y = g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

제 1사분면에서 $y = x$ 와 $y = f(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S 의 2배이다.

$S = \int_0^5 \left(x - \frac{1}{25}x^3\right) dx = \frac{25}{4}$ 이므로 대칭성에 의하여 구하는 부분의 넓이는 $4S = 25$ 이다.

채점 기준

답안	배점
$a = \frac{1}{25}$	3점
$\int_0^5 \left(x - \frac{1}{25}x^3\right) dx = \frac{25}{4}$ (또는 $\int_0^5 \frac{1}{25}x^3 dx = \frac{25}{4}$)	3점
넓이 25	4점

문항 10

[문항 10] $a = \log_4 27$, $b = \log_9 25$ 일 때, $\log_5 10 = 1 + \frac{1}{pab}$ 이고 $\log_6 10 = \frac{1+pab}{1+qa}$ 이다. p 와 q 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, p 와 q 는 상수이다.)

예시 답안

$\log_4 27 = a$ 로부터 $4^a = 27$, 즉 $2^{2a} = 3^3$. 또한, $\log_9 25 = b$ 로부터 $9^b = 25$, 즉 $3^b = 5$

따라서 $2^{2ab} = 3^{3b} = 5^3$ 이다.

$\log_{10} 5 = t$ 라 할 때, $5 = 10^t = 2^t 5^t$ 이므로

$2^{\frac{2}{3}ab} = 5 = 2^t 5^t = 2^t 2^{\frac{2}{3}abt}$ 이다.

따라서 $\frac{2}{3}ab = t + \frac{2}{3}abt$ 이므로 $t = \frac{2ab}{3+2ab}$ 이다.

$\log_5 10 = \frac{1}{\log_{10} 5} = \frac{3+2ab}{2ab} = 1 + \frac{3}{2ab}$ 이므로 $p = \frac{2}{3}$ 이다.

$\log_{10} 6 = s$ 라 하면 $10^s = 6 = 2 \times 3 = 2 \times 2^{\frac{2}{3}a}$ 이고

또한 $10^s = 2^s 5^s = 2^s \times 2^{\frac{2}{3}abs}$ 이므로 $1 + \frac{2a}{3} = s + \frac{2}{3}abs$

따라서 $\log_{10} 6 = s = \frac{3+2a}{3+2ab}$ 이므로

$$\log_6 10 = \frac{3+2ab}{3+2a} = \frac{1+\frac{2}{3}ab}{1+\frac{2}{3}a} = \frac{1+pab}{1+qa}$$

따라서 $q = \frac{2}{3}$ 이다.

채점 기준

답안	배점
$2^{\frac{2}{3}ab} = 5$ (또는 $2^{2ab} = 3^{3b} = 5^3$)	2점
$p = \frac{2}{3}$	4점
$q = \frac{2}{3}$	4점

문항 11

[문항 11] 두 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$, $y = \log_{\frac{1}{9}}(3-x)$ 의 그래프가 점 $R_1(2, 0)$ 에서 만난다. 직선 $y = 1$ 이 두 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$, $y = \log_{\frac{1}{9}}(3-x)$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 P_1, Q_1 이라 할 때, 삼각형 $P_1Q_1R_1$ 의 넓이를 a_1 이라 하자. 선분 P_1Q_1 위의 점 중 x 좌표가 2인 점을 R_2 라 하고, 직선 $y = 2$ 가 두 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$, $y = \log_{\frac{1}{9}}(3-x)$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 P_2, Q_2 라 할 때, 삼각형 $P_2Q_2R_2$ 의 넓이를 a_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 삼각형 $P_nQ_nR_n$ 의 넓이를 a_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n + b_n = 1 - \frac{1}{2 \times 3^n}$ 을 만족시키는 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $1458S_3$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

자연수 n 에 대하여 직선 $y = n$ 이 두 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$, $y = \log_{\frac{1}{9}}(3-x)$ 의 그래프와 만나는 점의 좌표를 각각 구하면, $P_n\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1, n\right)$, $Q_n\left(3 - \left(\frac{1}{9}\right)^n, n\right)$ 이다.

$\overline{P_nQ_n} = 3 - \left(\frac{1}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 = 2 - \left(\frac{1}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 이므로

삼각형 $P_nQ_nR_n$ 의 넓이는 $a_n = \frac{1}{2} \times \left\{2 - \left(\frac{1}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ 이다.

$a_n + b_n = 1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \times \left\{2 - \left(\frac{1}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} + b_n$ 에서 $b_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n$ 이다.

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{18}$ 이고 공비가 $\frac{1}{9}$ 인 등비수열이므로

$$S_3 = \frac{\frac{1}{18} \left\{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^3\right\}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{728}{729}}{\frac{8}{9}} = \frac{91}{1458}$$

따라서 $1458S_3 = 91$

채점 기준

답안	배점
$P_n\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1, n\right), Q_n\left(3 - \left(\frac{1}{9}\right)^n, n\right)$	2점
$\overline{P_nQ_n} = 2 - \left(\frac{1}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$	3점
$b_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n$	2점
$1458S_3 = 91$	3점

문항 12

[문항 12] 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = x^4 + ax^3 + x^2 \int_2^3 tf'(t)dt + 52x$$

를 만족시킬 때, a 와 $f(2)$ 의 값을 모두 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$\int_2^3 tf'(t)dt = b \text{라 하자.}$$

$$\int_1^x f(t)dt = x^4 + ax^3 + bx^2 + 52x \text{에서}$$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $a + b + 53 = 0$ 이고,

양변을 x 에 관하여 미분하면 $f(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + 52$ 이므로

$xf'(x) = 12x^3 + 6ax^2 + 2bx$ 이다.

$$b = \int_2^3 tf'(t)dt = [3t^4 + 2at^3 + bt^2]_2^3 = 195 + 38a + 5b \text{ 이므로 } 38a + 4b + 195 = 0 \text{이다.}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{107}{2}$ 이고, $f(2) = 84 + 12a + 4b = -124$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$a = \frac{1}{2}$	4점
$b = -\frac{107}{2}$	4점
$f(2) = -124$	2점

문항 13

[문항 13] 함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - x} = \frac{1}{2}$ 을 만족시킬 때,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{35xf(x) + 5\{f(x)\}^2}{2\{f(x)\}^2 + 3xf(x) - 2x^2}$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x) - x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x)}{x} - 1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{x} - 1 \right\}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - 1 = 2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{35xf(x) + 5\{f(x)\}^2}{2\{f(x)\}^2 + 3xf(x) - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{35xf(x) + 5\{f(x)\}^2}{\{2f(x) - x\}\{f(x) + 2x\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{35f(x)}{x} + 5\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{\left\{\frac{2f(x)}{x} - 1\right\}\left\{\frac{f(x)}{x} + 2\right\}} = \frac{35 \times 3 + 5 \times 3^2}{(2 \times 3 - 1)(3 + 2)} = \frac{150}{25} = 6 \end{aligned}$$

채점 기준

답안	배점
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$	2점
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{35xf(x) + 5\{f(x)\}^2}{2\{f(x)\}^2 + 3xf(x) - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{35f(x)}{x} + 5\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{\left\{\frac{2f(x)}{x} - 1\right\}\left\{\frac{f(x)}{x} + 2\right\}}$ (주어진 함수를 $\frac{f(x)}{x}$ 를 이용하여 표현)	2점
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{35xf(x) + 5\{f(x)\}^2}{2\{f(x)\}^2 + 3xf(x) - 2x^2} = 6$	6점

문항 14

[문항 14] 자연수 k 에 대하여 두 함수 $f(x) = -\log_2(k+1)x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{k+1}{kx}\right)$ 이 있다. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (g(x) < f(x)) \\ g(x) & (g(x) \geq f(x)) \end{cases}$$

라 하자. 곡선 $y = h(x)$ 와 직선 $y = \log_2 k$ 가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $l(k)$ 라 할 때, $\frac{10}{3} \times \sum_{k=1}^9 l(k)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

두 함수의 교점은 $-\log_2(k+1)x = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{k+1}{kx}\right)$ 이므로 $(k+1)x = \frac{k+1}{kx}$ 이다.

따라서 교점의 x 좌표는 $a = \frac{1}{\sqrt{k}}$ 이다.

곡선 $y = h(x)$ 와 직선 $y = \log_2 k$ 가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자.

(1) $x < a$ 일 때, $-\log_2(k+1)x = \log_2 k$ 에서 $x = \frac{1}{k(k+1)}$ 이다.

k 가 자연수이므로 $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$ 이므로 점 A의 x 좌표는 $\frac{1}{k(k+1)}$ 이다.

(2) $x \geq a$ 일 때, $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{k+1}{kx}\right) = \log_2 k$ 에서 $x = k+1$ 이고, $\frac{1}{\sqrt{k}} < k+1$ 이므로

점 B의 x 좌표는 $k+1$ 이다.

두 점 사이의 거리 $l(k)$ 는 $l(k) = k+1 - \frac{1}{k(k+1)}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{10}{3} \sum_{k=1}^9 l(k) &= \frac{10}{3} \sum_{k=1}^9 \left\{ k+1 - \frac{1}{k(k+1)} \right\} = \frac{10}{3} \left\{ \sum_{k=1}^9 (k+1) - \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right\} \\ &= \frac{10}{3} \times \left\{ \frac{9 \times 10}{2} + 9 - \left(1 - \frac{1}{10} \right) \right\} = \frac{10}{3} \times \frac{531}{10} = 177 \end{aligned}$$

■ 채점 기준

답안	배점
점 A의 x 좌표는 $\frac{1}{k(k+1)}$	3점
B의 x 좌표는 $k+1$	3점
$\frac{10}{3} \sum_{k=1}^9 l(k) = 177$	4점

문항 15

[문항 15] 함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(a+b)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

(가) $f(2) = f'(2)$

(나) $\sum_{k=1}^{15} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k+1+h) - f(k+1-2h)}{5h} = 90$

■ 예시 답안

$f'(x) = 2x + a$ 이고, 조건 (나)에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k+1+h) - f(k+1-2h)}{5h} &= \frac{3}{5} \times \sum_{k=1}^{15} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k+1+h) - f(k+1-2h)}{3h} \\ &= \frac{3}{5} \times \sum_{k=1}^{15} f'(k+1) = \frac{3}{5} \times \sum_{k=1}^{15} (2k + a + 2) = 162 + 9a = 90 \end{aligned}$$

이므로 $a = -8$ 이다.

조건 (가)에 의하여 $f(2) = 4 + 2a + b = -12 + b = f'(2) = a + 4 = -4$ 이므로 $b = 8$ 이다.

따라서 $f(a+b) = f(0) = b = 8$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$a = -8$	5점
$b = 8$	3점
$f(a+b) = 8$	2점

2026학년도 자연계 D형

문항 7

$a > 0, b > 0$ 이고, 함수 $f(x) = a \sin \frac{x}{3b} + c$ 의 주기가 6π , 최솟값이 -2 이다.
 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$ 일 때, $a \times b \times c$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a, b, c 는 상수이다.)

예시 답안

$$f(x) = a \sin \frac{x}{3b} + c \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3b}\right|} = 6\pi$$

$b > 0$ 이므로, $6b\pi = 6\pi, b = 1$ 이다.

$$f(x) = a \sin \frac{x}{3b} + c \text{의 최솟값은 } -|a| + c = -2$$

$$a > 0 \text{이므로 } -a + c = -2 \quad \dots (1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}a + c = \frac{3}{2} \quad \dots (2)$$

$$(1), (2) \text{를 연립하면 } a = \frac{7}{3}, c = \frac{1}{3}$$

$$\therefore abc = \frac{7}{9}$$

채점 기준

답안	배점
$b = 1$	3점
$a = \frac{7}{3}$	3점
$c = \frac{1}{3}$	3점
$abc = \frac{7}{9}$	1점

문항 8

일차함수 $f(x)$ 와 이차함수 $g(x)$ 가

$$f(x) = a(x+1), \quad g(x) = b(x+c)^2$$

일 때, 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \{f(x)\}^2 - 4g(x) = 4x + 3$$

$$(나) f(x) - g'(x) = 1$$

두 함수 $y = \log_2 f(x)$, $y = \log_2 \sqrt{g(x)}$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a , b , c 는 상수이다.)

■ 예시 답안

조건 (나)에서 $f(x) - g'(x) = ax + a - 2bx - 2bc = 1$ 이므로 $a = 2b$ 이고,

조건 (가)에서 $a^2(x+1)^2 - 4b(x+c)^2 = 4x + 3$ 이므로 $4b = a^2 = 4b^2$ 이다.

따라서 $b = 1$, $a = 2$ 이다.

조건 (나)에서 $1 = a - 2bc = 2 - 2c$ 이므로 $c = \frac{1}{2}$ 이다.

구한 상수 a, b, c 값을 대입하면 $f(x) = 2x + 2$, $g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

함수 $y = \log_2 f(x) = \log_2 2(x+1) \quad (x > -1)$

$$\text{함수 } y = \log_2 \left| x + \frac{1}{2} \right| = \begin{cases} \log_2 \left(x + \frac{1}{2} \right) & \left(x > -\frac{1}{2} \right) \\ \log_2 \left(-x - \frac{1}{2} \right) & \left(x < -\frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

$x > -\frac{1}{2}$ 일 때, $2x + 2 = x + \frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$ 이므로 범위 밖의 값이라 모순이지만,

$-1 < x < -\frac{1}{2}$ 일 때, $2x + 2 = -x - \frac{1}{2}$, $x = -\frac{5}{6}$ 이므로 범위 내에 존재한다.

따라서, $x = -\frac{5}{6}$

■ 채점 기준

답안	배점
$f(x) = 2x + 2$ (또는 $a = 2$)	2점
$g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ (또는 $b = 1, c = \frac{1}{2}$)	2점
$x = -\frac{5}{6}$	6점

문항 9

첫째항이 $\sqrt{3}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log_3 \frac{a_5 a_7}{a_4 a_6 a_8} = 9$ 일 때,
 $a_m = \frac{1}{3^9}$ 을 만족시키는 자연수 m 과 공비의 값을 모두 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 $a_1 = a = \sqrt{3}$ 이고 공비를 r 라 하자.

등비수열의 일반항은 $a_n = ar^{n-1}$ 이므로

문제에서 주어진 식을 r 와 a 로 표현하면 $\frac{a_5 a_7}{a_4 a_6 a_8} = \frac{a^2 r^{10}}{a^3 r^{15}} = \frac{1}{ar^5}$

$\log_3 \frac{a_5 a_7}{a_4 a_6 a_8} = 9 \iff -5 \log_3 r - \frac{1}{2} = 9$ 이므로 $r = 3^{-\frac{19}{10}}$ 이다.

$a_m = ar^{m-1} = \sqrt{3} \left(3^{-\frac{19}{10}}\right)^{m-1} = 3^{\frac{1}{2} - \frac{19}{10}(m-1)} = 3^{-9}$ 이므로

$\frac{1}{2} - \frac{19}{10}(m-1) = -9$ 이다.

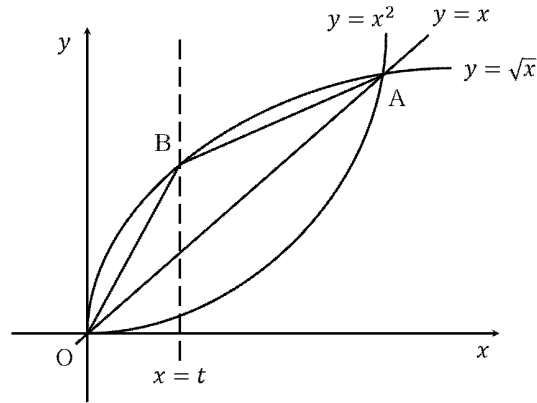
$\therefore m = 6$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$\frac{a_5 a_7}{a_4 a_6 a_8} = \frac{1}{ar^5}$ (또는 $\log_3 \frac{a_5 a_7}{a_4 a_6 a_8} = -5 \log_3 r - \frac{1}{2}$)	3점
공비는 $r = 3^{-\frac{19}{10}}$	3점
$m = 6$	4점

문항 10

그림과 같이 직선 $y = x$ 가 곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 만나는 점 중 원점 O 가 아닌 점을 A 라 하고 점 $B(t, \sqrt{t})$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이를 $T(t)$ 라 하자. 곡선 $y = x^2$ 과 x 축 및 두 직선 $x = t, x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow 1-} \frac{S(t)}{T(t)}$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $0 < t < 1$)



■ 예시 답안

$$T(t) = \frac{1}{2} \{ t(\sqrt{t} - t) + (1 - t)(\sqrt{t} - t) \} = \frac{1}{2} (\sqrt{t} - t) \text{이고}$$

$$S(t) = \int_t^1 x^2 dx = \frac{1}{3} (1 - t^3) \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1-} \frac{S(t)}{T(t)} = \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{\frac{1}{3} (1 - t^3)}{\frac{1}{2} (\sqrt{t} - t)} = \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{(1 - t)(1 + t + t^2)(\sqrt{t} + t)}{t - t^2}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{(1 + t + t^2)(\sqrt{t} + t)}{t} = 4$$

■ 채점 기준

답안	배점
$T(t) = \frac{1}{2} (\sqrt{t} - t)$	4점
$S(t) = \frac{1}{3} (1 - t^3)$	3점
$\lim_{t \rightarrow 1-} \frac{S(t)}{T(t)} = 4$	3점

문항 11

사차함수 $f(x) = \frac{5}{16}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 4$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 방정식 $|f(x)| = t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow 1+} g(t) + \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) + g(1)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$f(x) = \frac{5}{16}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 4$ 에서 $f'(x) = \frac{5}{4}x^3 - 5x = \frac{5}{4}x(x+2)(x-2)$ 이므로

$f(0) = 4$ 에서 극댓값, $f(-2) = f(2) = -1$ 에서 극솟값을 갖는다.

따라서 $|f(x)| = t$ 의 서로 다른 실근은 곡선 $y = |f(x)|$ 와 직선 $y = t$ 가 만날 때이므로

$\lim_{t \rightarrow 1+} g(t) = 4$, $\lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = 8$, $g(1) = 6$ 이다.

따라서 $\lim_{t \rightarrow 1+} g(t) + \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) + g(1) = 18$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$\lim_{t \rightarrow 1+} g(t) = 4$	3점
$\lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = 8$	3점
$g(1) = 6$	3점
$\lim_{t \rightarrow 1+} g(t) + \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) + g(1) = 18$	1점

문항 12

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(-1)$ 의 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $f(x)$ 의 계수는 모두 정수이다.)

- (가) $x \geq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 < f\left(\frac{x-1}{6}\right)$ 을 만족시킨다.
 (나) $x \geq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f\left(\frac{x-2}{6}\right) < x^2$ 을 만족시킨다.
 (다) 함수 $\int_0^x f(t) dt$ 는 $x = -\frac{1}{3}$ 에서 극값을 갖는다.

■ 예시 답안

조건 (나)의 부등식에서 $t = \frac{x-2}{6}$ 로 치환하면 $t \geq 0$ 일 때, $f(t) < (6t+2)^2$ 이고

조건 (가)의 부등식에서 $t = \frac{x-1}{6}$ 로 치환하면 $t \geq 0$ 일 때, $(6t+1)^2 < f(t)$ 이다.

따라서 $t \geq 0$ 에 대하여 $36t^2 + 12t + 1 < f(t) < 36t^2 + 24t + 4$ 이다.

$t \neq 0$ 일 때, $36 + \frac{12}{t} + \frac{1}{t^2} < \frac{f(t)}{t^2} < 36 + \frac{24}{t} + \frac{4}{t^2}$ 이므로

함수의 극한의 대소관계에 의하여 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^2} = 36$ 이다.

따라서 정수 a 와 정수 b 가 존재해서 $f(x) = 36x^2 + ax + b$ 이다.

$t = 0$ 을 대입하면 $1 < b < 4$ 임을 알 수 있다.

이때, $g(x) = \int_0^x (36t^2 + at + b) dt$ 라 하자.

$g(x)$ 는 삼차함수이고 조건 (다)에 의해 함수 $g(x)$ 는 $x = -\frac{1}{3}$ 에서 극값을 가지므로

$g'\left(-\frac{1}{3}\right) = 36\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + a\left(-\frac{1}{3}\right) + b = 4 - \frac{a}{3} + b = 0$ 이다.

모든 계수는 정수이므로 위 조건들을 만족하는 함수는

$f(x) = 36x^2 + 18x + 2$ 또는 $f(x) = 36x^2 + 21x + 3$ 뿐이다.

각각의 경우 $f(-1) = 20$, $f(-1) = 18$ 이므로 $f(-1)$ 의 최솟값은 18이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$f(x) = 36x^2 + ax + b$ (또는 $f(x) = 36x^2 + \dots$)	2점
상수항의 범위 $1 < b < 4$ (또는 $b = 2, b = 3$)	4점
최솟값은 18	4점

문항 13

상수 $a (a > 0)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & (x < 0) \\ ax(x-2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = f(t)$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하고, 점 $(0, -9)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 방정식을 $y = h(x)$ 라 하자.

$\left| \lim_{t \rightarrow k+} g(t) - \lim_{t \rightarrow k-} g(t) \right| = 2$ 를 만족시키는 모든 실수 k 의 값의 합이 1일 때,

곡선 $y = ax(x-2)$ 와 y 축 및 직선 $y = h(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$x < 0$ 에서 $f(x) = f(1)$ 의 해는 $x = \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$ 이므로 $g(t)$ 는 다음과 같다.

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t < -\sqrt[3]{a}) \\ 2 & (t = -\sqrt[3]{a}) \\ 3 & (-\sqrt[3]{a} < t < 0) \\ 2 & (t = 0) \\ 3 & (0 < t < 1) \\ 2 & (t = 1) \\ 3 & (1 < t < 2) \\ 2 & (t = 2) \\ 1 & (t > 2) \end{cases}$$

따라서 $\left| \lim_{t \rightarrow k+} g(t) - \lim_{t \rightarrow k-} g(t) \right| = 2$ 를 만족시키는 실수 k 는 $-\sqrt[3]{a}$ 와 2뿐이므로 모든 실수 k 의 값의 합이 1이므로 $a = 1$ 이다.

또한, $x = c$ 일 때 곡선 $y = ax(x-2)$ 에 접하는 접선의 방정식은

$y = (2c-2)(x-c) + c^2 - 2c$ 이다.

점 $(0, -9)$ 을 지나는 직선은 $c > 0$ 이므로 $-9 = (2c-2)(0-c) + c^2 - 2c = -c^2$ 을 만족하는 c 의 값은 $c = 3$ 이다. 따라서 접선은 $y = h(x) = 4x - 9$ 이다.

구하는 부분의 넓이 $A = \int_0^3 \{x^2 - 2x - (4x - 9)\} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_0^3 = 9$

■ 채점 기준

답안	배점
$\left \lim_{t \rightarrow k+} g(t) - \lim_{t \rightarrow k-} g(t) \right = 2$ 를 만족시키는 실수 k 는 $-\sqrt[3]{a}$ 와 2뿐이다.	5점
$a = 1$	1점
접선은 $y = h(x) = 4x - 9$	2점
넓이는 9	2점

문항 14

$0 \leq x \leq \frac{4}{3}\pi$ 일 때, 방정식

$$\cos^2\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) - a \cos\left(x + \frac{4}{3}\pi\right) + a \sin\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) - 2a - 4 = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 a 의 값을 모두 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$\cos^2\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(x + \frac{4}{3}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(x + \frac{5}{6}\pi\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

이므로 주어진 식은 $1 - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + a \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + a \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2a - 4 = 0$

$$\text{즉, } \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2a \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + (2a + 3) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$0 \leq x \leq \frac{4}{3}\pi$ 일 때, $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = t$ 가 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 서로 다른 x 의 개수가 2이려면

$$-1 < t \leq \frac{1}{2} \text{에서 다음 방정식 } t^2 - 2at + 2a + 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

이 오직 하나의 실근만을 가져야 한다.

따라서, $f(t) = t^2 - 2at + 2a + 3 = (t - a)^2 - a^2 + 2a + 3$ 이라 하면 구하는 정수 a 는

$-1 < t \leq \frac{1}{2}$ 에서 함수 $y = f(t)$ 의 그래프와 t 축이 한 점에서 만나도록 하는 정수 a 와 같다.

(i) $a < -1$ 일 때, $f(-1) = 4a + 4 < 0$ 이고 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4} + a \geq 0$ 이어야 하므로

조건을 만족하는 정수 a 는 -3 과 -2 이다.

(ii) $a = -1$ 일 때, $f(t) = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2$ 이므로 조건을 만족하지 않는다.

(iii) $-1 < a < \frac{1}{2}$ 일 때, 즉 $a = 0$ 일 때 $f(t) = t^2 + 3 > 0$ 이므로 조건을 만족하지 않는다.

(iv) $a \geq \frac{1}{2}$ 일 때, $f(-1) = 4a + 4 > 0$ 이고 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4} + a \leq 0$ 이어야 하므로

조건을 만족하는 정수는 없다.

따라서 조건을 만족하는 정수 a 는 -3 과 -2 뿐이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2a \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2a + 3 = 0$ (또는 $\sin^2\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) - 2a \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) + 2a + 3 = 0$)	4점
방정식 $t^2 - 2at + 2a + 3 = 0$ 이 $-1 < t \leq \frac{1}{2}$ 에서 오직 하나의 실근만을 가져야 한다.	3점
$a = -3, a = -2$	3점

문항 15

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 방정식이 $y = -4x + 24$ 이다.

(나) $f(0) = 14$

함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 모두 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

조건 (나)에 의해 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 14$ 이다.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이므로, $(2, f(2))$ 에서의 접선의 방정식은

$y - (22 + 4a + 2b) = (12 + 4a + b)(x - 2)$ 이다.

따라서 $4a + b = -16$, $4a + 2b = -6$ 이므로 $a = -\frac{13}{2}$, $b = 10$ 이다.

$f'(x) = 3x^2 - 13x + 10 = (3x - 10)(x - 1) = 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극대, $x = \frac{10}{3}$ 에서 극소를 갖는다.

따라서 극댓값은 $f(1) = 1 + a + b + 14 = \frac{37}{2}$ 이고, 극솟값은 $f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{328}{27}$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$f'(x) = 3x^2 - 13x + 10$ (또는 $f'(x) = 3(x - 2)^2 - (x - 2) - 4$)	6점
극댓값은 $\frac{37}{2}$	2점
극솟값은 $\frac{328}{27}$	2점

2026학년도 자연계 E형

문항 7

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 방정식 $3 \cos^2 x - \sin x \cos x - 2 \sin^2 x = 0$ 의 실근을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$(3 \cos x + 2 \sin x)(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\cos x = -\frac{2}{3} \sin x, \quad \cos x = \sin x$$

$$\tan x = -\frac{3}{2} \quad \text{또는} \quad \tan x = 1$$

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \quad \text{일 때} \quad \tan x \geq 0$$

$$\therefore \tan x = 1$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

■ 채점 기준

답안	배점
$\tan x = -\frac{3}{2}, \tan x = 1$ (또는 $\cos x = -\frac{2}{3} \sin x, \cos x = \sin x$)	4점
두 개의 식 중에 가능한 경우는 $\tan x = 1$ (또는 $\cos x = \sin x$)	3점
$x = \frac{\pi}{4}$	3점

문항 8

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_1 = 3$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $S_{n+1} = 3S_n + 2$ 를 만족시킬 때, $\log_3 \frac{8}{a_6}$ 의 값과 S_7 의 값을 모두 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$S_1 = 3, S_2 = 11, S_3 = 35, S_4 = 107, S_5 = 323, S_6 = 971, S_7 = 2915$ 이다.

따라서 $a_6 = S_6 - S_5 = 648$ 이므로 $\log_3 \frac{8}{a_6} = \log_3 \frac{8}{8 \times 3^4} = -4$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$S_7 = 2915$	5점
$a_6 = 648$	4점
$\log_3 \frac{8}{a_6} = -4$	1점

문항 9

함수 $f(x) = x^2 - 3x + k$ 에 대하여 함수 $y = \frac{3x+1}{2\{f(x)\}^2 - 2xf(x) + 5f(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 k 의 값의 범위를 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

두 함수 $y = 3x + 1$, $y = 2\{f(x)\}^2 - 2xf(x) + 5f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수

$$\frac{3x+1}{2\{f(x)\}^2 - 2xf(x) + 5f(x)}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\{2f(x) - 2x + 5\} \neq 0$ 이어야 한다.

즉, $f(x) \neq 0$ 이고 $2f(x) - 2x + 5 \neq 0$ 이어야 한다.

(1) $f(x) \neq 0$ 인 경우, $x^2 - 3x + k > 0$ 이므로 판별식 $D = 9 - 4k < 0$ 이다.

즉, $k > \frac{9}{4}$ 이다.

(2) $2f(x) - 2x + 5 \neq 0$ 인 경우, $2x^2 - 8x + 2k + 5 > 0$ 이므로 판별식 $\frac{D}{4} = 6 - 4k < 0$ 이다.

즉, $k > \frac{3}{2}$ 이다.

따라서 두 조건을 모두 만족시키는 실수 k 의 범위는 $k > \frac{9}{4}$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$f(x)\{2f(x) - 2x + 5\} \neq 0$	2점
$k > \frac{9}{4}$	4점
$k > \frac{3}{2}$	3점
공통 범위는 $k > \frac{9}{4}$	1점

문항 10

실수 t ($0 \leq t \leq 3$)에 대하여 점 $(t, \sqrt{27-t^3})$ 과 원점 사이의 거리의 제곱을 $f(t)$ 라 하자. 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(t)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M , m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$f(t) = t^2 + (\sqrt{27-t^3})^2 = -t^3 + t^2 + 27$ 이므로 $f'(t) = -3t^2 + 2t$ 이다. 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 $f'(t) = 0$ 인 t 의 값은 0과 $\frac{2}{3}$ 이다.

$f(0) = 27$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = 27 + \frac{4}{27}$, $f(3) = 9$ 이므로 $M = 27 + \frac{4}{27}$, $m = 9$ 이다.

따라서 $M \times m = \frac{733}{3}$

■ 채점 기준

답안	배점
$f(t) = -t^3 + t^2 + 27$	3점
$M = \frac{733}{27}$ (또는 $M = 27 + \frac{4}{27}$)	3점
$m = 9$	3점
$M \times m = \frac{733}{3}$	1점

문항 11

$-\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$ 에서 기울기가 양수이고 점 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ 을 지나는 직선과 함수 $y = \tan 2\pi x$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 a, b ($a < b$)라 하자. $a + 2b = \frac{7}{6}$ 일 때, $\sin(2a + b)\pi$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$y = \tan 2\pi x$ 의 주기는 $\frac{1}{2}$ 이고 $a + b = \frac{1}{2}$ 이다.

$a + 2b = (a + b) + b = \frac{1}{2} + b = \frac{7}{6}$ 이므로 $b = \frac{2}{3}$, $a = -\frac{1}{6}$ 이다.

$$2a + b = a + (a + b) = a + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin(2a + b)\pi = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

채점 기준

답안	배점
$b = \frac{2}{3}$	4점
$a = -\frac{1}{6}$	4점
$\sin(2a + b)\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$	2점

문항 12

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(3)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{3f'(x) - f'(0)}{4} + \frac{23}{4}x^2 - 4 \leq \frac{f(3x) - f(0)}{3x} \leq \frac{1}{2}x^4 + 5x^2$$

이다.

■ 예시 답안

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)이다.

따라서 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이므로

$$\frac{3f'(x) - f'(0)}{4} + \frac{23}{4}x^2 - 4 \leq \frac{f(3x) - f(0)}{3x} \leq \frac{1}{2}x^4 + 5x^2$$

에 대입하면

$$8x^2 + \frac{3}{2}ax + \frac{1}{2}b - 4 \leq 9x^2 + 3ax + b \leq \frac{1}{2}x^4 + 5x^2$$

이다. 즉, $-2x^2 - 8 \leq 3ax + b \leq \frac{x^4 - 8x^2}{2}$ 이므로

$g(x) = -2x^2 - 8$ 이라 하면, $g(x)$ 의 최댓값은 -8 이고,

$h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2$ 이라 하면, $h'(x) = 2x(x-2)(x+2)$ 이고 $h(2) = h(-2) = -8$ 의 최솟값을 갖는다.

따라서, 0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여 부등식을 만족시키려면 $y = 3ax + b$ 가 $y = -8$ 이 되어야 한다. 따라서 $a = 0$, $b = -8$ 이다.

$f'(x) = 3x^2 - 8$ 이므로 $f'(3) = 19$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$\frac{1}{2}x^4 - 4x^2$ 의 최솟값은 -8	3점
$f'(x) = 3x^2 - 8$	6점
$f'(3) = 19$	1점

문항 13

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} = \frac{1}{3}$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) f(x) \right\} \text{이 존재한다.}$$

$$(다) \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{f(x)} \right\} = 3$$

$\int_{-2}^2 |f(x)| dx$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$ 를 $f(x) = x^n + \dots$ 라 하면

조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{xf'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n + \dots}{x \times (nx^{n-1} + \dots)} = \frac{1}{3}$ 이므로 다항함수 $f(x)$ 의 차수는 3이다.

조건 (나)로부터 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) f(x) \right\}$ 이 존재하므로 $f(0) = 0$

따라서 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 라 놓을 수 있고,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) f(x) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 1)(x^3 + ax^2 + bx)}{x} = b$$

조건 (다)로부터 $\lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{f(x)} \right\} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{xf(x)}$ 가 존재하므로

$f(-1) = 0$, 즉 $a - b = 1$ 이고,

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx = x^3 + ax^2 + ax - x = (x+1)(x^2 + ax - x)$ 이다. 따라서

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{f(x)} \right\} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)(x^2 + ax - x)} = \frac{-3}{2-a} = 3$$

이므로 $a = 3$, $b = 2$ 이다. 따라서 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ 이고,

$$\int_{-2}^2 |f(x)| dx = \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^0 \{-f(x)\} dx + \int_0^2 f(x) dx = \frac{33}{2}$$

■ 채점 기준

답안	배점
$f(x)$ 는 3차 다항함수이다. (또는 $f(x) = x^3 + \dots$)	2점
$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$	4점
$\int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{33}{2}$	4점

문항 14

점 A의 좌표를 $(-2, 0)$ 이라 하고, 함수 $f(x) = \log_2(x+2)$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 B라 하자. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 x 좌표가 2^n 인 점을 P라 하고 두 삼각형 PBO, PBA의 넓이의 차를 S_n 이라 할 때, $S_n > 2026$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, O는 원점이다.)

예시 답안

$\overline{BO} = \log_2 2 = 1$ 이므로 x 좌표가 2^n 인 점 P에 대하여 삼각형 PBO의 넓이는

$$\triangle PBO = \frac{1}{2} \times \overline{BO} \times 2^n = 2^{n-1}, \quad \triangle BAO = 1$$

이므로

$$\begin{aligned} \triangle PBA &= 1 + \frac{1}{2} \times 2^n \times \{1 + \log_2(2 + 2^n)\} - \frac{1}{2} \times (2 + 2^n) \times \log_2(2 + 2^n) \\ &= 2^{n-1} + 1 - \log_2(2 + 2^n) \end{aligned}$$

$$S_n = \triangle PBO - \triangle PBA = 2^{n-1} - 2^{n-1} - 1 + \log_2(2 + 2^n) = \log_2(2 + 2^n) - 1$$

$$S_n = \log_2(2 + 2^n) - 1 > 2026 \text{이므로 } \log_2(2 + 2^n) > 2027,$$

$$2 + 2^n > 2^{2027} \text{이므로 이를 만족시키는 } n \text{의 최솟값은 } 2027 \text{이다.}$$

채점 기준

답안	배점
점 B(0, 1) 또는 $\overline{BO} = 1$	1점
$\triangle PBA = 2^{n-1} + 1 - \log_2(2 + 2^n)$	3점
$S_n = \log_2(2 + 2^n) - 1$	3점
n 의 최솟값은 2027	3점

문항 15

실수 a 에 대하여 함수 $f(x) = (x-2)(x-a)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하자. x 에 대한 방정식 $F(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2일 때, $F(0)$ 의 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $2 < a \leq 6$)

■ 예시 답안

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \{x^2 - (a+2)x + 2a\} dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a+2}{2}x^2 + 2ax + C$$

이므로, $F(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $F(x)$ 의 극댓값 혹은 극솟값이 0이어야 한다.

① $F(2) = -\frac{4}{3} + 2a + C = 0$ 인 경우 $F(0) = C = \frac{4}{3} - 2a$ 는 $a = 6$ 일 때 최솟값 $-\frac{32}{3}$ 를 가진다.

② $F(a) = -\frac{a^3}{6} + a^2 + C = 0$ 인 경우 $F(0) = C = \frac{a^3}{6} - a^2$ 은 $a = 4$ 일 때 최솟값 $-\frac{16}{3}$ 을 가진다.

따라서 $F(0)$ 의 최솟값은 $-\frac{32}{3}$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$F(0) = \frac{a^3}{6} - a^2$ (또는 적분상수 $C = \frac{a^3}{6} - a^2$)	1점
$-\frac{16}{3}$	3점
$F(0) = \frac{4}{3} - 2a$ (또는 적분상수 $C = \frac{4}{3} - 2a$)	2점
최솟값 $-\frac{32}{3}$	4점

2026학년도 자연계 F형

문항 7

[문항 7] 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 100$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{2}{a_n a_{n+1}}$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$\{a_n\}$ 은 등차수열이고 $a_1 = 1$ 이므로 $a_n = 1 + d(n-1)$ 이다.

$\sum_{n=1}^{10} a_n = 100$ 이므로 $a_n = 2n - 1$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \\ &= 1 - \frac{1}{21} \\ &= \frac{20}{21} \end{aligned}$$

이다.

채점 기준

답안	배점
$a_n = 2n - 1$ (또는 공차는 2)	4점
$\sum_{n=1}^{10} \frac{2}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ (또는 $\sum_{n=1}^{10} \frac{2}{a_n a_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21}$)	3점
$\sum_{n=1}^{10} \frac{2}{a_n a_{n+1}} = \frac{20}{21}$	3점

문항 8

[문항 8] 상수 a 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가

$$9 \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - x}{x^3 - 27} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(x+1)}{x^2 - 4} = a$$

를 만족시킬 때, a 와 $f(7)$ 의 값을 모두 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

조건으로 주어진 두 극한값이 존재하기 위해 $f(3) = 3$, $f(2) = 3$ 이다.

따라서 c 는 0이 아닌 상수에 대하여 $f(x) = c(x-3)(x-2) + 3$ 으로 놓을 수 있다.

극한을 계산하면

$$9 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - x}{x^3 - 27} = 9 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{c(x-3)(x-2) - (x-3)}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)} = 9 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{c(x-2) - 1}{x^2 + 3x + 9} = \frac{c-1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(x+1)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2c(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2c}{x+2} = -\frac{c}{2}$$

이다. 따라서 $\frac{c-1}{3} = -\frac{c}{2}$ 가 성립하고 $c = \frac{2}{5}$ 이고 $a = -\frac{1}{5}$ 이다. 따라서 $f(7) = 11$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$a = -\frac{1}{5}$	3점
$f(x) = \frac{2}{5}(x-3)(x-2) + 3$ (또는 최고차항의 계수가 $\frac{2}{5}$) (또는 $f(x) = \frac{2}{5}x^2 + \dots$)	3점
$f(7) = 11$	4점

문항 9

[문항 9] 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n + 7 & (a_n < 4 \text{ 인 경우}) \\ a_n - n + 5 & (a_n \geq 4 \text{ 인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_6 = 11$ 일 때, $a_1, a_4, \sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 값을 모두 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

① $a_6 = 11 = -2a_5 + 7$ 이면 $a_5 = -2$ 이나 이때 a_4 가 조건을 만족하지 않는다.

② $a_6 = 11 = a_5 - 5 + 5$ 이면 $a_5 = 11$

i) $a_5 = 11 = -2a_4 + 7$ 이면 $a_4 = -2$ 이나 이때 a_3 가 조건을 만족하지 않는다.

ii) $a_5 = 11 = a_4 - 4 + 5$ 이면 $a_4 = 10$

$a_4 = 10 = -2a_3 + 7$ 또는 $a_4 = 10 = a_3 - 3 + 5$ 인데 a_3 은 정수이므로 $a_3 = 8$

$a_3 = 8$ 이면 $a_2 = 5, a_1 = 1$

$a_7 = 10, a_8 = 8, a_9 = 5, a_{10} = 1$

그러므로 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 1 + 5 + 8 + 10 + 11 + 11 + 10 + 8 + 5 + 1 = 70$

■ 채점 기준

답안	배점
$a_1 = 1$	3점
$a_4 = 10$	4점
$\sum_{k=1}^{10} a_k = 70$	4점

문항 10

[문항 10] 함수 $f(x) = a \sin bx + c$ ($0 \leq x \leq \frac{2\pi}{b}$)는 $x = \alpha$ 에서 최댓값 10, $x = \beta$ 에서 최솟값 m 을 갖는다. $y = f(x)$ 의 그래프 위의 두 점 $A(\alpha, 10)$, $B(\beta, m)$ 을 지나는 직선을 $y = g(x)$ 라 하자. $\beta - \alpha = 2\pi$ 이고 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8$ 일 때, 직선 $y = g(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = \alpha$, $x = \beta$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 과정을 서술하시오. (단, a , b , c 는 양수이고, $a < c$ 이다.)

■ 예시 답안

b 가 양수이므로 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이고 $x = \alpha$ 일 때 최대, $x = \beta$ 일 때 최소이므로 $2\pi = \beta - \alpha = \frac{\pi}{b}$, $b =$

$\frac{1}{2}$ 이고 $f(x) = a \sin \frac{x}{2} + c$ 이다.

$f(x)$ 는 $x = \pi$ 에서 최댓값 $a + c = 10$, $x = 3\pi$ 에서 최솟값 $-a + c = m$ 을 갖는다.

$8 = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = a \sin \frac{\pi}{6} + c = \frac{a}{2} + c$ 이므로 $a + c = 10$ 과 $\frac{a}{2} + c = 8$ 을 연립하면 $a = 4$, $c = 6$ 이므로 $f(x) =$

$4 \sin \frac{x}{2} + 6$ 이고 $m = -a + c = -4 + 6 = 2$ 이다.

구하는 영역의 넓이는 꼭짓점이 $(\pi, 0)$, $A(\pi, 10)$, $B(3\pi, 2)$, $(3\pi, 0)$ 인 사다리꼴의 넓이와 같으므로 $\frac{1}{2} \times (10 + 2) \times 2\pi = 12\pi$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$b = \frac{1}{2}$, $a = 4$, $c = 6$ (또는 $f(x) = 4 \sin \frac{x}{2} + 6$)	4점
$m = 2$	3점
영역의 넓이는 12π	3점

문항 11

[문항 11] 2 이상의 자연수 n 에 대하여 실수 a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$ 라 하자.

$2f_{n+1}(a^n) + (-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a))$ 의 값이 최소일 때,

$$f_n(a) - 3f_{n+1}(a^n) + f_{n+1}(|a|^n - a^n)$$

의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

실수 a 와 자연수 n 에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 계산한다.

(1) $a > 0$ 이고 n 이 홀수일 때, $a^n > 0$ 이므로 $f_{n+1}(a^n) = 2$, $f_{n+1}(a) = 2$, $f_n(2) = 1$ 이다.

따라서 $2f_{n+1}(a^n) + (-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a)) = 3$

(2) $a > 0$ 이고 n 이 짝수일 때, $a^n > 0$ 이므로 $f_{n+1}(a^n) = 1$, $f_{n+1}(a) = 1$, $f_n(1) = 2$ 이다.

따라서 $2f_{n+1}(a^n) + (-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a)) = 4$

(3) $a = 0$ 이고 n 이 홀수일 때, $f_{n+1}(a^n) = 1$, $f_{n+1}(a) = 1$, $f_n(1) = 1$ 이다.

따라서 $2f_{n+1}(a^n) + (-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a)) = 1$

(4) $a = 0$ 이고 n 이 짝수일 때, $f_{n+1}(a^n) = 1$, $f_{n+1}(a) = 1$, $f_n(1) = 2$ 이다.

따라서 $2f_{n+1}(a^n) + (-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a)) = 4$

(5) $a < 0$ 이고 n 이 홀수일 때, $a^n < 0$ 이므로 $f_{n+1}(a^n) = 0$, $f_{n+1}(a) = 0$, $f_n(0) = 1$ 이다.

따라서 $2f_{n+1}(a^n) + (-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a)) = -1$

(6) $a < 0$ 이고 n 이 짝수일 때, $a^n > 0$ 이므로 $f_{n+1}(a^n) = 1$, $f_{n+1}(a) = 1$, $f_n(1) = 2$ 이다.

따라서 $2f_{n+1}(a^n) + (-1)^n \times f_n(f_{n+1}(a)) = 4$

따라서 $a < 0$ 이고 n 이 홀수일 때, 최솟값 -1 이고, 이때, $a^n < 0$ 이므로

$f_n(a) = 1$, $f_{n+1}(a^n) = 0$, $f_{n+1}(|a|^n - a^n) = f_{n+1}(-2a^n) = 2$ 이다.

$f_n(a) - 3f_{n+1}(a^n) + f_{n+1}(|a|^n - a^n) = 3$ 이다.

채점 기준

답안	배점
$f_{n+1}(a^n) = 0$	3점
$f_{n+1}(a ^n - a^n) = 2$	4점
$f_n(a) - 3f_{n+1}(a^n) + f_{n+1}(a ^n - a^n) = 3$	3점

문항 12

[문항 12] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} (x+5)(x-1) & (x < 0) \\ x-4 & (x \geq 0) \end{cases}$$

일 때, 모든 실수 a 에 대하여 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)f(k-x)$ 가 존재하도록 하는 실수 k 의 값을 모두 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

구간을 나눠서 정리하면 함수 $f(x)$ 와 $f(k-x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} (x+5)(x-1) & (x < 0) \\ -4 & (x = 0) \\ x-4 & (x > 0) \end{cases}, \quad f(k-x) = \begin{cases} k-4-x & (x < k) \\ -4 & (x = k) \\ (k-x+5)(k-x-1) & (x > k) \end{cases}$$

$g(x) = f(x)f(k-x)$ 라 하자.

(1) $k = 0$ 인 경우

$$g(x) = \begin{cases} -(x+4)(x+5)(x-1) & (x < 0) \\ 16 & (x = 0) \\ (x-4)(x-5)(x+1) & (x > 0) \end{cases}$$

이다. $a \neq 0$ 일 때, $g(x)$ 의 좌극한과 우극한은 연속함수의 성질에 의해서 같다.

$a = 0$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = 20$ 이므로 좌극한과 우극한이 같다.

(2) $k > 0$ 인 경우

$$g(x) = \begin{cases} (x+5)(x-1)(k-x-4) & (x < 0) \\ -4(k-4) & (x = 0) \\ (x-4)(k-x-4) & (0 < x < k) \\ -4(k-4) & (x = k) \\ (x-4)(k-x+5)(k-x-1) & (x > k) \end{cases}$$

$a \neq 0, a \neq k$ 일 때, $g(x)$ 의 좌극한과 우극한은 연속함수의 성질에 의해서 같다.

$a = 0$ 과 $a = k$ 에서 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)f(k-x)$ 가 존재하도록 하는 실수 $k = 4$ 이다.

(3) $k < 0$ 인 경우

$$g(x) = \begin{cases} (x+5)(x-1)(k-x-4) & (x < k) \\ -4(k+5)(k-1) & (x = k) \\ (x+5)(x-1)(k-x+5)(k-x-1) & (k < x < 0) \\ -4(k+5)(k-1) & (x = 0) \\ (x-4)(k-x+5)(k-x-1) & (x > 0) \end{cases}$$

$a \neq 0, a \neq k$ 일 때, $g(x)$ 의 좌극한과 우극한은 연속함수의 성질에 의해서 같다.

$a = 0$ 과 $a = k$ 에서 극한값 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)f(k-x)$ 가 존재하도록 하는 실수 $k = -5$ 이다.

채점 기준

답안	배점
$k = 0$	2점
$k = 4$	2점
$k = -5$	2점
모든 k 의 값을 맞춘 경우	4점

문항 13

[문항 13] 다항함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하자. 모든 실수 x 에 대하여

$$F(x) = x^2 f(x) - 2x^4 + ax + 1$$

가 성립할 때, $F\left(\frac{2}{af'(0)}\right)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(단, a 는 상수이다.)

예시 답안

주어진 조건에 의해 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$f(x) = 2x^2 + bx + c$ 라 하자.

$$\int f(x) dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + C$$

인데, $F(0) = 1$ 이므로 $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + 1$ 이 된다. 또한

$$x^2 f(x) - 2x^4 + ax + 1 = bx^3 + cx^2 + ax + 1$$

이므로 $a = c = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$ 이다. 따라서 $F\left(\frac{2}{af'(0)}\right) = F\left(\frac{2}{ab}\right) = F(9) = 517$ 이다.

채점 기준

답안	배점
$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 2차 다항식 (또는 $f(x) = 2x^2 + \dots$)	4점
$a = \frac{1}{3}$	4점
$F\left(\frac{2}{af'(0)}\right) = 517$	2점

문항 14

[문항 14] 상수 a ($a > 1$)와 양수 t ($t > 1$)에 대하여 곡선 $y = \log_a x + 3$ 과 곡선 $y = \log_{\frac{1}{a}} x + 1$ 이 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x = t$ 와 두 곡선이 만나는 점을 각각 B, C라 하자. $\overline{AB} = \frac{10}{3}$ 이고 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{16}{3}$ 일 때, a 와 t 의 값을 모두 구하는 과정을 서술하시오. (단, 점 B와 점 C의 y 좌표는 정수이다.)

예시 답안

$\log_a x + 3 = \log_{\frac{1}{a}} x + 1$ 에서 $2 \log_a x = -2$ 이므로 A의 좌표는 $A\left(\frac{1}{a}, 2\right)$ 이다.

두 점 B, C의 좌표는 각각 $B(t, \log_a t + 3)$, $C\left(t, \log_{\frac{1}{a}} t + 1\right)$ 이다.

또한, $\overline{AB} = \frac{10}{3}$ 이므로 $\left(t - \frac{1}{a}\right)^2 + (\log_a t + 1)^2 = \frac{100}{9}$ 이다.

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{16}{3}$ 이므로 $(2 \log_a t + 2) \times \left(t - \frac{1}{a}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{16}{3}$ 이다.

따라서 $\alpha = \log_a t + 1$, $\beta = t - \frac{1}{a}$ 이라 하면, $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{100}{9}$, $\alpha\beta = \frac{16}{3}$ 이므로 $\alpha + \beta = \frac{14}{3}$ 이고,

α, β 는 이차방정식 $3x^2 - 14x + 16 = (3x - 8)(x - 2) = 0$ 의 두 근이다.

(1) $\alpha = 2$, $\beta = \frac{8}{3}$ 인 경우, $\log_a t = 1$ 이므로 $a = t$ 이고 $a - \frac{1}{a} = \frac{8}{3}$ 이다.

즉, $3a^2 - 8a - 3 = (3a + 1)(a - 3) = 0$ 이므로 조건을 만족하는 $a = t = 3$ 이다.

(2) $\alpha = \frac{8}{3}$, $\beta = 2$ 인 경우, $\log_a t = \frac{5}{3}$ 이므로 점 B의 y 좌표가 정수가 아니다.

따라서 조건을 만족하는 $a = t = 3$ 이다.

채점 기준

답안	배점
$A\left(\frac{1}{a}, 2\right)$	2점
$\log_a t = 1$ (또는 $a = t$)	3점
$t - \frac{1}{a} = \frac{8}{3}$ (또는 $a - \frac{1}{a} = \frac{8}{3}$) (또는 $3a^2 - 8a - 3 = 0$)	3점
$t = 3, a = 3$	2점

문항 15

[문항 15] 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$4f(x) = -2x^3 + 6x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \{f(t)\}^2 dt$$

를 만족시킬 때, $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 모두 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$4f(x) = -2x^3 + 6x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \{f(t)\}^2 dt = -2x^3 + 6x + \{f(1)\}^2$$

$4f(1) = -2 + 6 + \{f(1)\}^2$ 이고, $\{f(1) - 2\}^2 = 0$ 이다.

따라서 $4f(x) = -2x^3 + 6x + 4$, $f(x) = \frac{1}{2}(-x^3 + 3x + 2)$ 이다.

$f'(x) = \frac{1}{2}(-3x^2 + 3) = \frac{3}{2}(1+x)(1-x)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = \pm 1$ 에서 극값을 갖는다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		↘		↗	

$f(x)$ 는 $x = 1$ 일 때, 극댓값 $f(1) = \frac{1}{2}(-1 + 3 + 2) = 2$ 를 갖고

$f(x)$ 는 $x = -1$ 일 때, 극솟값 $f(-1) = \frac{1}{2}(1 - 3 + 2) = 0$ 을 갖는다.

■ 채점 기준

답안	배점
$f(1) = 2$ (또는 $f(x) = \frac{1}{2}(-x^3 + 3x + 2)$) (또는 $4f(x) = -2x^3 + 6x + 4$)	4점
극댓값 2	3점
극솟값 0	3점

2025학년도 자연계

문항 7

[문제 7] $0 \leq \theta < 2\pi$ 에 대하여 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$ 이고 $\cos \theta < 0$ 일 때,

$$\tan^2(\pi + \theta) + \sqrt{5} \tan \theta + 3 \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)$$

의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

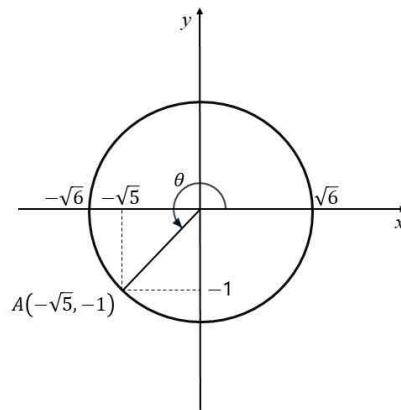
예시 답안

θ 는 제3사분면 위의 각이고,

$$\tan^2(\pi + \theta) + \sqrt{5} \tan \theta + 3 \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \tan^2 \theta + \sqrt{5} \tan \theta + 3 \cos^2 \theta$$

이다.

각 θ 의 동경과 원점을 중심으로 하고 반지름이 $\sqrt{6}$ 인 원의 교점을 A라 하자. $A(-\sqrt{5}, -1)$ 이다.



삼각함수 정의에 의해 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ 이고, $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \tan^2 \theta + \sqrt{5} \tan \theta + 3 \cos^2 \theta &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 3 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{5} + 1 + \frac{5}{2} = \frac{37}{10} \end{aligned}$$

채점 기준

답안	배점
$\tan^2(\pi + \theta) + \sqrt{5} \tan \theta + 3 \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \tan^2 \theta + \sqrt{5} \tan \theta + 3 \cos^2 \theta$	2점
$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ (또는 $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$)	4점
$\frac{37}{10}$	4점

문항 8

[문제 8] 함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^{-4} & (0 < x \leq 2) \\ \log_3 x & (x > 2) \end{cases}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^3 f(f(f(n)))$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \frac{1}{3}, \quad f(f(1)) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 27, \quad f(f(f(1))) = f(27) = 3 \\
 f(2) &= \frac{1}{3} \times 2^{-4}, \quad f(f(2)) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3 \times 16}\right)^{-4} = 3^3 2^{16} \\
 f(f(f(2))) &= f(3^3 2^{16}) = 3 + 16 \log_3 2 \\
 f(3) &= \log_3 3 = 1, \quad f(f(3)) = \frac{1}{3}(1)^{-4} = \frac{1}{3}, \quad f(f(f(3))) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 27 \\
 \sum_{n=1}^3 f(f(f(n))) &= 3 + 3 + 16 \log_3 2 + 27 = 33 + 16 \log_3 2
 \end{aligned}$$

■ 채점 기준

답안	배점
$f(f(f(1))) = 3$	3점
$f(f(f(2))) = 3 + 16 \log_3 2$	3점
$f(f(f(3))) = 27$	3점
$\sum_{n=1}^3 f(f(f(n))) = 33 + 16 \log_3 2$	1점

문항 9

[문제 9] 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x tf(t) dt = f(x) + ax^3 + x^2 + x - 2$$

를 만족시킬 때, $f(a)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a 는 상수이다.)

■ 예시 답안

$f(x)$ 가 상수함수이면 성립하지 않는다.

$f(x) = bx^n + \dots +$ 상수로 놓았을 때 n 의 값은 1. 따라서 $f(x) = bx + c$.

$\int_0^x tf(t) dt = f(x) + ax^3 + x^2 + x - 2$ 에서 x 에 0을 대입하면 $0 = f(0) - 2 = c - 2$. 따라서 $c = 2$.

$f(x) = bx + 2$ 이므로 $\int_0^x tf(t) dt = f(x) + ax^3 + x^2 + x - 2$ 에서

$$\frac{1}{3}bx^3 + x^2 = bx + 2 + ax^3 + x^2 + x - 2 = ax^3 + x^2 + (b+1)x.$$

$$b+1=0, \quad a=\frac{1}{3}b.$$

$$b=-1, \quad a=-\frac{1}{3}. \quad f(x)=-x+2. \quad f(a)=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}.$$

■ 채점 기준

답안	배점
$f(x) = bx + c$ (또는 $f(x)$ 는 1차 함수)	3점
$f(0) = 2$ (또는 $f(x) = bx + 2$)	3점
$b = -1, a = -\frac{1}{3}$	3점
$f(a) = \frac{7}{3}$	1점

문항 10

[문제 10] 자연수 k 에 대하여 $\sqrt[n]{(2^k)^7}$ 의 값이 8의 배수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 n 의 개수를 $f(k)$ 라 하자. < 보기 >에서 옳은 것만을 있는 대로 고르는 과정을 서술하시오.

< 보기 >

$$\text{ㄱ. } f(7) = 2$$

ㄴ. $f(k) = 2$ 를 만족시키는 5 이하의 k 의 개수는 2이다.

ㄷ. $f(k) = 5$ 를 만족시키는 10 이하의 모든 k 의 값의 합은 24이다.

■ 예시 답안

$\sqrt[n]{(2^k)^7}$ 의 값이 8의 배수가 되기 위해서는 $2^{\frac{7k}{n}}$ 에서 $\frac{7k}{n} = m$ 이 3 이상의 자연수이어야 한다.

$k = 1$ 일 때, $2^{\frac{7 \times 1}{n}} = 2^m$ 을 만족하는 2 이상의 자연수 n 은 없음. $f(k) = 0$,

$k = 2$ 일 때, $n = 2$. $f(k) = 1$,

$k = 3$ 일 때, $n = 3, 7$. $f(k) = 2$,

$k = 4$ 일 때, $n = 2, 4, 7$. $f(k) = 3$,

$k = 5$ 일 때, $n = 5, 7$. $f(k) = 2$,

$k = 6$ 일 때, $n = 2, 3, 6, 7, 14$. $f(k) = 5$,

$k = 7$ 일 때, $n = 7$. $f(k) = 1$,

$k = 8$ 일 때, $n = 2, 4, 7, 8, 14$. $f(k) = 5$,

$k = 9$ 일 때, $n = 3, 7, 9, 21$. $f(k) = 4$,

$k = 10$ 일 때, $n = 2, 5, 7, 10, 14$. $f(k) = 5$.

따라서 $k = 6, 8, 10$, 모든 $k = 6, 8, 10$ 의 합은 24

■ 채점 기준

답안	배점
ㄱ. $f(7) = 1$	2점
ㄴ. $k = 3, 5$ (또는 $f(3) = 2$, $f(5) = 2$)	3점
ㄷ. $k = 6, 8, 10$ (또는 $f(6) = 5$, $f(8) = 5$, $f(10) = 5$)	4점
옳은 것은 ㄴ, ㄷ.	1점

문항 11

[문제 11] 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{9x^2 - 1} = \frac{1}{3} \quad (나) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{f(x)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{|x - \frac{1}{3}|(x^2 + ax + 5)}{f(x)} = b$$

를 만족시키는 두 상수 a, b 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

조건 (가)에서 0이 아닌 극한값이 존재하고, 분모가 이차함수 이므로, 함수 $f(x)$ 도 이차함수이다. 따라서, $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{9x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{9x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2}}{9 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\alpha}{9}.$$

따라서, $\alpha = 3$.

조건 (나)에서 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 따라서 $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + k)$ 로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + k)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3\left(x + \frac{1}{3}\right)}{x + k} = \frac{2}{k + \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$$

따라서, $k = \frac{23}{3}$. 즉, $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{23}{3}\right)$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}-} \frac{|x - \frac{1}{3}|(x^2 + ax + 5)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}-} \frac{-(x - \frac{1}{3})(x^2 + ax + 5)}{3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{23}{3}\right)} = -\frac{\frac{1}{9} + \frac{a}{3} + 5}{24}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}+} \frac{|x - \frac{1}{3}|(x^2 + ax + 5)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}+} \frac{(x - \frac{1}{3})(x^2 + ax + 5)}{3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{23}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{a}{3} + 5}{24}$$

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{|x - \frac{1}{3}|(x^2 + ax + 5)}{f(x)}$ 의 값이 존재하므로

$$-\frac{\frac{1}{9} + \frac{a}{3} + 5}{24} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{a}{3} + 5}{24} = b = 0$$

이다. 따라서 $a = -\frac{46}{3}$, $b = 0$ 이다.

채점 기준

답안	배점
$f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + k)$	2.5점
$f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{23}{3}\right)$	3.5점
$a = -\frac{46}{3}$	3점
$b = 0$	1점

문항 12

[문제 12] 삼차함수 $f(x)$ 가 두 실수 α, β ($\alpha < \beta$)에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$
 (나) $f(\alpha)f(\beta) < 0$
 (다) $|f(\beta)| = 2|f(\alpha)|$

집합 $A = \{x \mid |f(x)| - |f(t)| = 0\}$ 의 원소의 개수가 홀수가 되도록 하는 모든 실수 t 의 개수가 m 이고, 이러한 m 개의 실수 t 의 값을 작은 수부터 차례로 $t_1, t_2, t_3, \dots, t_m$ 이라 하자. $\frac{1}{|f(\alpha)|} \sum_{i=1}^m f(t_i)$ 의 가능한 모든 값을 구하는 과정을 서술하시오.

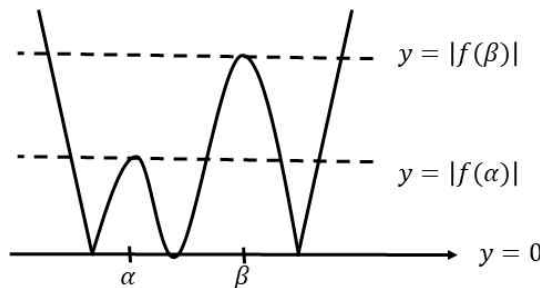
예시 답안

조건 (가) $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ 에서 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ 에서 극값을 가지며, 조건 (나) $f(\alpha)f(\beta) < 0$ 에서 함숫값의 부호는 다르므로 그래프의 개형은 다음 두 가지이다.

(1) $f(\alpha) > 0$ 일 때, 방정식 $|f(x)| = |f(t)|$ 의 실근의 개수가 홀수가 되도록 하는 실수 t 는 $y = |f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y = 0, y = |f(\alpha)|, y = |f(\beta)|$ 와 만나는 점들의 x 좌표이므로 $m = 11$ 이고,

$$\frac{1}{|f(\alpha)|} \sum_{i=1}^m f(t_i) = \frac{-|f(\beta)| - |f(\alpha)|}{|f(\alpha)|} = -3$$

이다.



(2) $f(\alpha) < 0$ 일 때, 마찬가지로 방정식 $|f(x)| = |f(t)|$ 의 실근의 개수가 홀수가 되도록 하는 실수 t 는 $y = |f(x)|$ 의 그래프가 직선 $y = 0, y = |f(\alpha)|, y = |f(\beta)|$ 와 만나는 점들의 x 좌표이므로 $m = 11$ 이고,

$$\frac{1}{|f(\alpha)|} \sum_{i=1}^m f(t_i) = \frac{|f(\beta)| + |f(\alpha)|}{|f(\alpha)|} = 3$$

이다. 따라서 ± 3 이다.

채점 기준

답안	배점
$m = 11$	4점
$\frac{1}{ f(\alpha) } \sum_{i=1}^m f(t_i) = -3$	3점
$\frac{1}{ f(\alpha) } \sum_{i=1}^m f(t_i) = 3$	3점

문항 13

[문제 13] 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $0 \leq x < 1$ 일 때, $f(x) = a\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$ 이다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1) = f(x) + 1$ 을 만족시킨다.

자연수 n 에 대하여 $p_n = \int_{n-1}^n f(x) dx$ 라 할 때, 함수 $g(x) = \sum_{n=1}^{100} (x - p_n)^2$ 은 $x = \alpha$ 에서 최솟값을 갖는다. α 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(단, a, α 는 상수이다.)

■ 예시 답안

$$f(1) = f(0) + 1 = \frac{a}{16} - \frac{9}{16} + 1 = \frac{a}{16} + \frac{7}{16} \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} a\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} = \frac{9a-9}{16}.$$

f 는 $x = 1$ 에서 연속이므로 $a = 2$. 따라서

$$f(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}, \quad f(0) = -\frac{7}{16}, \quad f(1) = \frac{9}{16}$$

구간 $[0, 1]$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{9}{16}$ 사이의 부분의 넓이를 A 라 하면

$$A = \int_0^1 f(x) - \left(-\frac{9}{16}\right) dx = \int_0^1 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 dx = \frac{7}{24}.$$

$p_1 = \int_0^1 f(x) dx = A - \frac{9}{16} = -\frac{13}{48}$ 이다. p_2 는 조건 (나)로부터 다음과 같이 계산할 수 있다. $p_2 = \int_1^2 f(x) dx + 1$. 따라서,

$$p_n = \int_{n-1}^n f(x) dx = (n-1) + \int_0^1 f(x) dx$$

이므로 수열 $\{p_n\}$ 은 첫째 항이 $-\frac{13}{48}$ 이고 공차가 1인 등차수열이다.

$$g(x) = \sum_{n=1}^{100} (x - p_n)^2 = 100x^2 - 2(p_1 + p_2 + \cdots + p_{100})x + (p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_{100}^2)$$

이므로 $x = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_{100}}{100}$ 에서 최솟값을 가진다. 따라서

$$\alpha = \frac{1}{100} \left(\sum_{n=1}^{100} p_n \right) = \frac{1}{2}(2p_1 + 99) = p_1 + \frac{99}{2} = \frac{2363}{48}$$

■ 채점 기준

답안	배점
$a = 2$	2점
$p_1 = -\frac{13}{48}$	2점
$p_n = (n-1) + p_1$	2점
$\alpha = \frac{2363}{48}$	4점

문항 14

[문제 14] 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - 2} = 1 \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)}{f(x-2)} = 3 \end{aligned}$$

- ① $f(2) \neq 0$ 일 때, 위 조건을 만족시키는 함수가 존재하는지 서술하시오.
 ② $\int_0^3 f(x) dx$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - 2} = 1$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 따라서, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - f(-2)\} = 0$ 에서, $f(2) = f(-2)$ 이다.

이 때, $f(2) = f(-2) \neq 0$ 이면, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)}{f(x-2)} = \frac{f(2)}{f(-2)} = 1$ 이 되므로 모순.

따라서, $f(2) = f(-2) = 0$ 이다.

$f(x) = a(x+2)(x-2)(x-k)$ (a 는 0이 아닌 상수. k 는 상수)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)}{f(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax(x+4)(x+2-k)}{ax(x-4)(x-2-k)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+4)(x+2-k)}{(x-4)(x-2-k)} \\ &= \frac{4(2-k)}{-4(-2-k)} = 3 \end{aligned}$$

에서, $k = -1$, 즉, $f(x) = a(x+2)(x-2)(x+1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x+2)(x-2)(x+1)}{x - 2} = 12a = 1$$

에서, $a = \frac{1}{12}$

따라서 $f(x) = \frac{1}{12}(x+2)(x-2)(x+1)$ 이다. 즉, $\int_0^3 f(x) dx = -\frac{1}{16}$

■ 채점 기준

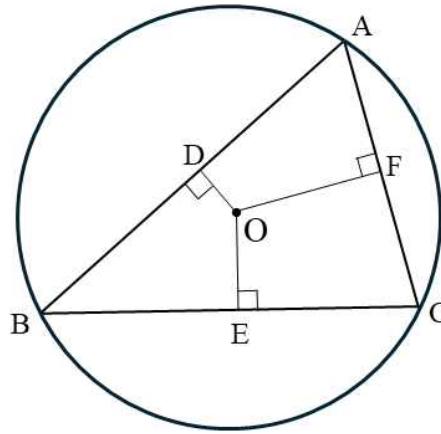
답안	배점
① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+2)}{f(x-2)} = \frac{f(2)}{f(-2)} = 1$ 이 되므로 모순.	3점
$f(2) = f(-2) = 0$	1점
$f(x) = \frac{1}{12}(x+2)(x-2)(x+1)$	4.5점
② $\int_0^3 f(x) dx = -\frac{1}{16}$	1.5점

문항 15

[문제 15] 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합을 m 이라 하자.

함수 $f(x) = \sin \frac{\pi}{n}x$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+30) = f(x)$ 를 만족시킨다.

그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 4인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC 에 대하여 점 O 에서 세 선분 AB , BC , CA 에 내린 수선의 발을 각각 D , E , F 라 하자. $5\sin^2 A = 4\sin^2 C$ 이고 $\overline{OD} : \overline{OE} : \overline{OF} = 12 : m : 6(3\sqrt{5} - 1)$ 일 때, 선분 OE 의 길이와 $\sin^2 B$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.



■ 예시 답안

$\frac{30}{n}$ 이 2의 배수가 되어야 하므로, 가능한 n 은 1, 3, 5, 15이고, $m = 24$ 이다.

$\overline{OD} : \overline{OE} : \overline{OF} = 12 : 24 : 6(3\sqrt{5} - 1) = 2 : 4 : (3\sqrt{5} - 1)$ 이므로, 양수 h 에 대하여 $\overline{OD} = 2h$, $\overline{OE} = 4h$, $\overline{OF} = (3\sqrt{5} - 1)h$ 라 하면,

$$\sin^2 A = \frac{\overline{BC}^2}{64} = \frac{4\overline{BE}^2}{64} = \frac{16 - \overline{OE}^2}{16} = 1 - h^2, \quad \sin^2 B = \frac{16 - (3\sqrt{5} - 1)^2 h^2}{16},$$

$$\sin^2 C = \frac{4 - h^2}{4}$$

이다. $5 - 5h^2 = 4 - h^2$ 이므로, $h = \frac{1}{2}$ 이고, 따라서 $\overline{OE} = 2$, $\sin^2 B = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{32}$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$m = 24$	3점
$\overline{OE} = 2$	5점
$\sin^2 B = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{32}$	2점

2024학년도 인문계 A형

문항 10

[문항 10] x 에 대한 부등식

$$x^2 - x \log_3(\sqrt[3]{9n}) + \log_3 \sqrt[3]{n^2} < 0$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$$x^2 - x \log_3(\sqrt[3]{9n}) + \log_3 \sqrt[3]{n^2} < 0$$

$$x^2 - x\left(\frac{2}{3} + \log_3 n\right) + \frac{2}{3} \log_3 n < 0$$

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - \log_3 n) < 0$$

i) $\frac{2}{3} < x < \log_3 n$ 인 경우 x 가 1개이려면, $x = 1$ 이므로 $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$

ii) $\log_3 n < x < \frac{2}{3}$ 인 경우 정수 x 가 존재하지 않음

따라서, 이를 만족시키는 $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 이므로 6개

채점 기준

답안	배점
$\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - \log_3 n) < 0$ (또는 $x = 1$)	5점
$n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (또는 $3 < n \leq 9$)	4점
6개	1점

문항 11

[문항 11] 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 - 1 = 1 - a_4$ 이고 $|a_4 + 5| = |-5 - a_6|$ 일 때, a_7 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

첫째항이 a_1 이고 공차가 d 라고 할 때, $a_2 + a_4 = 2a_1 + 4d = 2$, $a_1 + 2d = 1$ 이다.

$|a_4 + 5| = |-5 - a_6|$ 에서 부호가 같으면 $a_1 + 4d = -5$ 이다. 하지만 부호가 다르면 $a_4 = a_6$ 이므로 공차 $d = 0$ 이 되어야 한다.

상기 두 식을 연립하면 $d = -3$ 이고 $a_1 = 7$ 이다. 따라서 $a_7 = 7 - 6 \times 3 = -11$

채점 기준

답안	배점
$a_1 = 7$ (또는 $a_3 = 1$)	4점
$d = -3$	4점
$a_7 = -11$	2점

문항 12

[문항 12] 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오.

제시문

(가) 함수 $f(x)$ 의 모든 항의 계수가 정수이고, $f(0) = 0$ 이다.

(나) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$

(다) $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가한다.

■ 예시 답안

다항함수는 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. 이때 $f\left(\frac{1}{2}\right) = a$ 라 하면, (가)와 (나)로부터

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ (단 a, b 는 상수)

$a = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2}$ 이므로 $3a = 2b + 1$.

(다)로부터 $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b \geq 0$ 이므로 판별식을 구하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6b = a^2 - 9a + 3 \leq 0.$$

따라서 $9 - \sqrt{69} \leq 2a \leq 9 + \sqrt{69}$ 이고 a 는 x^2 항의 계수이므로 정수이다. 따라서 $1 \leq a \leq 8$ 이다. 또한 b 도 정수이므로 $2b = 3a - 1$ 에서 a 는 홀수이다. 따라서 $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 최댓값은 7이다. (이때 $b = 10$)

※ 원 해설에는 “ $0 \leq a \leq 8$ 이므로 $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 최댓값은 8이다.”로 되어 있으나, $a = 8$ 이면 $b = \frac{23}{2}$ 가 되어 조건 (가)에 어긋나므로 바로잡았다.

■ 채점 기준

답안	배점
$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ (계수 a, b 는 다른 문자 가능)	2점
(계수 a, b 에 대해) $3a = 2b + 1$ (또는 $2b = 3a - 1$) (또는 $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$)	3점
$a^2 - 9a + 3 \leq 0$	3점
최댓값 7 (원 채점기준의 8을 바로잡음)	2점

문항 13

[문항 13] 자연수 a 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{1}{3} \log_2(x-2)$ 의 그래프의 점근선과 함수 $g(x) = \tan \frac{\pi x}{a}$ 의 그래프는 만나지 않는다. 정의역이 $\{x \mid \frac{17}{8} \leq x \leq 6\}$ 인 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하는 다음의 풀이 과정을 완성하시오. (단, a 는 상수이다.)

직선 가 f 의 점근선이므로 $a = \text{$. 따라서 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값은 이고, 최댓값은 이다.

예시 답안

직선 $x = 2$ 가 f 의 점근선이므로 $\left(\frac{2n-1}{2}\right)a = 2$. $a = \frac{4}{2n-1}$ 가 자연수가 되는 경우는 $n = 1$ 일 때인 $a = 4$ 이다. 또한,

$$f\left(\frac{17}{8}\right) = \frac{1}{3} \log_2\left(\frac{17}{8} - 2\right) = -1, \quad f(6) = \frac{1}{3} \log_2(6-2) = \frac{2}{3}$$

$(g \circ f)(x)$ 가 증가함수이므로 최솟값 m 과 최댓값 M 은 각각

$$m = (g \circ f)\left(\frac{17}{8}\right) = g(-1) = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -1.$$

$$M = (g \circ f)(6) = g\left(\frac{2}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

채점 기준

답안	배점
① $x = 2$	2점
② 4	2점
③ -1	3점
④ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 또는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$	3점

문항 14

[문항 14] 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_{-1}^3 f(x)dx$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하는 과정을 서술하시오.

제시문

(가) $|f(1)| + |f(-1)| = 0$

(나) $-1 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$

예시 답안

최고차항의 계수가 1인 모든 삼차함수 $f(x)$ 가 (가) $|f(1)| + |f(-1)| = 0$ 을 만족하므로, $f(x) = (x-a)(x+1)(x-1)$ 이라 할 수 있다. 따라서, $-1 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$ 을 만족하려면,

$$\int_0^1 (x-a)(x+1)(x-1)dx = \frac{2}{3}a - \frac{1}{4}$$

이므로, $-1 \leq \frac{2}{3}a - \frac{1}{4} \leq 1$.

$$\therefore -\frac{9}{8} \leq a \leq \frac{15}{8}. \quad \int_{-1}^3 f(x)dx = 16 - \frac{16}{3}a$$

$-\frac{9}{8} \leq a \leq \frac{15}{8}$ 이기 때문에, $6 \leq 16 - \frac{16}{3}a \leq 22$ 이다. 최댓값과 최솟값의 합은 28

채점 기준

답안	배점
$f(x) = (x-a)(x+1)(x-1)$ (또는 $f(x) = (x+a)(x+1)(x-1)$)	2점
$-1 \leq \frac{2}{3}a - \frac{1}{4} \leq 1$ 또는 $-\frac{9}{8} \leq a \leq \frac{15}{8}$ (또는 $-\frac{15}{8} \leq a \leq \frac{9}{8}$)	3점
$\int_{-1}^3 f(x)dx = 16 - \frac{16}{3}a$ (또는 $\int_{-1}^3 f(x)dx = 16 + \frac{16}{3}a$)	3점
28	2점

문항 15

[문항 15] 점 $(-2, a)$ 에서 곡선 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ 에 그을 수 있는 접선의 개수가 3이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ 에서 $y' = 3x^2 - 6x - 9$. 곡선 위의 점 $(t, t^3 - 3t^2 - 9t + 2)$ 에서의 접선의 방정식은 $y - (t^3 - 3t^2 - 9t + 2) = (3t^2 - 6t - 9)(x - t)$. 이 직선이 점 $(-2, a)$ 를 지나므로 $a - (t^3 - 3t^2 - 9t + 2) = (3t^2 - 6t - 9)(-2 - t)$

$2t^3 + 3t^2 - 12t - 20 + a = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지면 그을 수 있는 접선의 개수가 3이 된다. $f(t) = 2t^3 + 3t^2 - 12t - 20 + a$ 라 하면

$f'(t) = 6t^2 + 6t - 12 = 6(t - 1)(t + 2)$. $f'(t) = 0$ 에서 $t = -2$ 또는 $t = 1$

서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-2) = -16 + 12 + 24 - 20 + a > 0$, $f(1) = 2 + 3 - 12 - 20 + a < 0$, 즉 $0 < a < 27$.

접선의 개수가 3이 되도록 하는 정수 a 의 개수는 26.

■ 채점 기준

답안	배점
$y - (t^3 - 3t^2 - 9t + 2) = (3t^2 - 6t - 9)(x - t)$	3점
$2t^3 + 3t^2 - 12t - 20 + a = 0$	2점
$0 < a < 27$	4점
a 의 개수는 26	1점

2024학년도 인문계 B형

문항 10

[문항 10] 1이 아닌 세 양수 a, b, c 에 대하여 $\frac{\log_a c}{\log_a b} = \frac{6}{7}$ 일 때, $\log_b c, 64^{\log_c b}, c^{\log_b 128}$ 의 값을 각각 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$\frac{\log_a c}{\log_a b} = \frac{6}{7}$ 이므로 $\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b = \frac{7}{6}$ 이다. 따라서 $\log_b c = \frac{6}{7}$. 또한 $64^{\log_c b} = 128$

$c^{\log_b 128} = k$ 라고 하면 $\log_c c^{\log_b 128} = \log_b 128 = \frac{\log_c 2^7}{\log_c b} = \log_c k$ 이다.

$\log_c b = \frac{7}{6}$ 이므로 이를 대입하여 식을 정리하면 $\log_c 2^7 = \frac{7}{6} \log_c k$.

$\log_c k = 6 \log_c 2 = \log_c 2^6 = \log_c 64$. 따라서 $c^{\log_b 128} = k = 64$

채점 기준

답안	배점
$\log_b c = \frac{6}{7}$	2점
$64^{\log_c b} = 128$	4점
$c^{\log_b 128} = 64$	4점

문항 11

[문항 11] $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \sin(\pi - \theta) = \frac{4}{5}$ 일 때, $\frac{\cos(-\theta)}{\sin \theta} - \frac{\sin(-\theta)}{1 + \cos \theta}$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \sin(\pi - \theta) = -\sin \theta - \sin \theta = -2\sin \theta$ 이므로 $-2\sin \theta = \frac{4}{5}$ 에서 $\sin \theta = -\frac{2}{5}$. 따라서

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(-\theta)}{\sin \theta} - \frac{\sin(-\theta)}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{\cos \theta(1 + \cos \theta) + \sin^2 \theta}{\sin \theta(1 + \cos \theta)} = \frac{\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta(1 + \cos \theta)} = \frac{1}{\sin \theta} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

답안	배점
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \sin(\pi - \theta) = -\sin \theta - \sin \theta = -2\sin \theta$	3점
$\sin \theta = -\frac{2}{5}$	3점
$-\frac{5}{2}$	4점

문항 12

[문항 12] 실수 t 에 대하여 직선 $y = t$ 가 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x) = |4 \cos x - 2|$ 의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 $t = a$ 에서 불연속인 실수 a 의 값을 작은 것부터 순서대로 나열한 것이 a_1, a_2, a_3 이다. a_1, a_2, a_3 의 값과 $f(x) = a_1$ 을 만족시키는 x 의 값을 각각 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2 & (t = 0) \\ 4 & (0 < t < 2) \\ 3 & (t = 2) \\ 2 & (2 < t < 6) \\ 1 & (t = 6) \\ 0 & (t > 6) \end{cases}$$

함수 $g(t)$ 는 0, 2, 6에서 불연속이므로 $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 6$ 이다. 따라서

$$f(x) = |4 \cos x - 2| = 0 \text{인 } x \text{는 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{3}$$

채점 기준

답안	배점
$a_1 = 0$	2점
$a_2 = 2$	2점
$a_3 = 6$	2점
$x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{3}$	4점

문항 13

[문항 13] 첫째항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $\frac{S_{10} - S_8}{S_6 - S_4} = 3$, $(S_3 - S_2)^2 = 75$ 일 때, $a_2 \times a_8$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$\frac{S_{10} - S_8}{S_6 - S_4} = \frac{a_1(r^{10} - 1)/(r - 1) - a_1(r^8 - 1)/(r - 1)}{a_1(r^6 - 1)/(r - 1) - a_1(r^4 - 1)/(r - 1)} = \frac{r^{10} - r^8}{r^6 - r^4} = r^4 = 3$$

$$(S_3 - S_2)^2 = a_3^2 = (a_1 r^2)^2 = a_1^2 r^4 = 75, \text{ 따라서 } a_1^2 = 25, a_1 = 5 \text{이다.}$$

$$a_2 \times a_8 = a_1 r \times a_1 r^7 = a_1^2 r^8 = 5^2 3^2 = 225 \text{이다.}$$

■ 채점 기준

답안	배점
$r^4 = 3$	3점
$(S_3 - S_2)^2 = a_3^2 = (a_1 r^2)^2 = a_1^2 r^4$	3점
225	4점

문항 14

[문항 14] 실수 m 에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 $x(t)$ 가 $x(t) = \frac{6}{5}t^5 - 5t^4 + 4t^3 + (6-m)t$ 이다. 점 P가 시각 $t = 0$ 일 때 원점을 출발한 후, 운동 방향이 두 번만 바뀌도록 하는 m 의 범위를 구하는 다음의 풀이 과정을 완성하시오. (단, $t = 0$ 일 때 점 P의 속도는 $6 - m$ 이다.)

점 P의 시각 t ($t > 0$)에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면 $v(t) = \boxed{\text{①}}$ 이다. $v(t)$ 는 $t = \boxed{\text{②}}$ 에서 극댓값을 갖고, $t = \boxed{\text{③}}$ 에서 최솟값을 갖는다. $t > 0$ 에서 운동 방향이 두 번만 바뀌도록 하는 m 의 범위는 $\boxed{\text{④}}$ 이다.

■ 예시 답안

점 P의 시각 t ($t > 0$)에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면 $v(t) = 6t^4 - 20t^3 + 12t^2 + (6-m)$ 이다. 점 P가 출발한 후 운동 방향이 두 번 바뀌려면 $t > 0$ 에서 $v(t) = 0$ 이 중근이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$v'(t) = 24t^3 - 60t^2 + 24t = 12t(t-2)(2t-1) = 0 \text{에서 } t = 0 \text{ 또는 } t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 2.$$

$v(0) = 6 - m$, $v(\frac{1}{2}) = \frac{55}{8} - m$, $v(2) = -10 - m$. $v(0) > v(2)$ 이므로 $v(t)$ 는 $t = \frac{1}{2}$ 에서 극댓값을 가지고 $t = 2$ 에서 최솟값을 가진다. $v(t) = 0$ 이 $t > 0$ 에서 중근이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지려면 $v(0) = 6 - m \geq 0$ 이고 $v(2) = -10 - m < 0$ 이어야 한다. 그러므로 $-10 < m \leq 6$, 즉 $(-10, 6]$.

■ 채점 기준

답안	배점
① $6t^4 - 20t^3 + 12t^2 + (6 - m)$	2점
② $\frac{1}{2}$	2점
③ 2	2점
④ $-10 < m \leq 6$ (또는 $(-10, 6]$)	4점

문항 15

[문항 15] 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_1^x t f'(t) dt = 20$$

을 만족시킬 때, $f(4)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

■ 예시 답안

$$G(t) = \int t f'(t) dt = \int t(3t^2 + 2at + b) dt = \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}at^3 + \frac{b}{2}t^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분 상수}).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_1^x t f'(t) dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x) - G(1)}{x-2} = 20$$

$G(x)$ 는 다항함수이므로, $\lim_{x \rightarrow 2} G(x) = G(2) = G(1)$ 따라서,

$$G(2) = \frac{3}{4} \cdot 16 + \frac{2}{3}a \cdot 8 + \frac{b}{2} \cdot 4 + C = G(1) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3}a + \frac{b}{2} + C, \quad \frac{14}{3}a + \frac{3}{2}b = -\frac{45}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x) - G(1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{G(x) - G(2)}{x-2} = G'(2) = 2(12 + 4a + b) = 20, \quad 4a + b = -2$$

$$\frac{14}{3}a + \frac{3}{2}b = -\frac{45}{4} \text{과 } 4a + b = -2 \text{에서, } a = \frac{99}{16}, b = -\frac{107}{4}$$

$$\text{따라서 } f(4) = 64 + \frac{99}{16} \cdot 16 - \frac{107}{4} \cdot 4 = 56$$

■ 채점 기준

답안	배점
$\frac{14}{3}a + \frac{3}{2}b = -\frac{45}{4}$	3점
$4a + b = -2$	3점
$a = \frac{99}{16}, b = -\frac{107}{4}$	2점
56	2점

2024학년도 자연계 C형

문항 7

[문항 7] $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 일 때, $|\sin \theta - \cos \theta|$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}, \quad 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

이므로 $2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$

$$|\sin \theta - \cos \theta|^2 = (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

따라서, $|\sin \theta - \cos \theta| = \frac{\sqrt{7}}{2}$

채점 기준

답안	배점
$2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$ (또는 $\sin \theta = \frac{1}{4} \mp \frac{\sqrt{7}}{4}$)	4점
$ \sin \theta - \cos \theta ^2 = \frac{7}{4}$ (또는 $\cos \theta = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$)	4점
$ \sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$	2점

문항 8

[문항 8] 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x 에 대하여

$$(x-2)(x+1)f(x) = (x-2)(x^3+ax+b)$$

를 만족시킨다. $f(2) = 1$ 일 때, $f(-1)$ 의 값을 구하는 다음의 풀이 과정을 완성하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

$x \neq -1, x \neq 2$ 일 때, $f(x) = \frac{x^3+ax+b}{x+1}$ 이고 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+ax+b}{x+1} = 1$ 이므로 $\boxed{\text{①}} = 0$. 또한, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서도 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ 이다. 따라서 $\boxed{\text{②}} = 0$. a 와 b 를 구하면 $(a, b) = \boxed{\text{③}}$ 이므로 $f(-1) = \boxed{\text{④}}$.

예시 답안

$x \neq -1, x \neq 2$ 일 때, $f(x) = \frac{x^3+ax+b}{x+1}$ 이다. 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+ax+b}{x+1} = 1$ 이므로 $2a+b=-5$. 또한, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서도 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ 이다. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+ax+b}{x+1} = f(-1)$ 이고 극한값이 존재하므로 $-1-a+b=0$, 즉 $a-b=-1$ 이다. 이를 $2a+b=-5$ 와 연립해서 풀면 $a=-2, b=-1$. 따라서,

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-2x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2-x-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2-x-1) = 1$$

채점 기준

답안	배점
① $2a+b+5$	3점
② $a-b+1$	3점
③ $(-2, -1)$ (또는 $a=-2, b=-1$)	1점
④ 1	3점

문항 9

[문항 9] 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $2(x+1)f(x)$ 의 한 부정적분을 $G(x)$ 라 할 때, 함수 $G(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$$G(x) = (x+1)^2 f(x) - x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x$$

를 만족시킨다. $G(0) = -2$ 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$2(x+1)f(x)$ 의 한 부정적분이 $G(x)$ 이므로, $G'(x) = 2(x+1)f(x)$

$G(x) = (x+1)^2 f(x) - x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x$ 의 양변을 x 에 대해 미분하면

$$G'(x) = 2(x+1)f(x) + (x+1)^2 f'(x) - 4x^3 - 12x^2 - 12x - 4$$

따라서, $(x+1)^2 f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4 = 4(x+1)^3$

$f(x)$ 는 다항함수이므로, $f'(x) = 4(x+1)$ 이고, $f(x) = 2x^2 + 4x + C$

$G(0) = f(0) = -2$ 이므로 $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$, $f(1) = 4$ 이다.

[참고] $G(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 2$

■ 채점 기준

답안	배점
$G'(x) = 2(x+1)f(x)$	3점
$f'(x) = 4(x+1)$	4점
$f(x) = 2x^2 + 4x - 2$	2점
$f(1) = 4$	1점

문항 10

[문항 10] 양수 k 와 사차함수 $f(x) = x^4 + \frac{8}{3}kx^3 - 6k^2x^2 + 3$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 a 의 범위와 실수 b 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(가) 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = a$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다.

(나) 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = b$ 는 서로 다른 세 점에서 만난다.

예시 답안

$$f(x) = x^4 + \frac{8}{3}kx^3 - 6k^2x^2 + 3 \text{에서 } f'(x) = 4x^3 + 8kx^2 - 12k^2x = 4x(x + 3k)(x - k)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -3k \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = k.$$

함수 $f(x)$ 는 $x = -3k$ 와 $x = k$ 에서 극소이고 $x = 0$ 에서 극대이다.

$$f(-3k) = 81k^4 - 72k^4 - 54k^4 + 3 = -45k^4 + 3$$

$$f(k) = k^4 + \frac{8}{3}k^4 - 6k^4 + 3 = -\frac{7}{3}k^4 + 3$$

으로 $f(-3k) < f(k)$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 와 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는 $a > f(0) = 3$ 또는

$$f(-3k) < a < f(k) \text{ 즉, } -45k^4 + 3 < a < -\frac{7}{3}k^4 + 3.$$

곡선 $y = f(x)$ 와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $b = 3$ 또는 $b = -\frac{7}{3}k^4 + 3$ 을 만족해야 한다.

채점 기준

답안	배점
$f'(x) = 4x^3 + 8kx^2 - 12k^2x = 4x(x + 3k)(x - k)$	2점
$x = -3k$ 와 $x = k$ 에서 극소이고 $x = 0$ 에서 극대	2점
(a 조건) $a > 3$ 또는 $-45k^4 + 3 < a < -\frac{7}{3}k^4 + 3$	3점
(b 조건) $b = 3$ 또는 $b = -\frac{7}{3}k^4 + 3$	3점

문항 11

[문항 11] 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 + 8 & (-2 \leq x < 0) \\ -4x + b & (0 \leq x < 1) \\ \frac{b}{8}x^2 - 6x + 9a & (1 \leq x < 3) \end{cases}$$

이 모든 실수 x 에 대하여 $f\left(x - \frac{5}{2}\right) = f\left(x + \frac{5}{2}\right)$ 를 만족시킨다. $\int_{-2}^5 f(x)dx$ 의 값을 구하는 다음의 풀이 과정을 완성하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 a 의 값은 ①이고, b 의 값은 ②이다. 또한, $\int_{-2}^3 f(x)dx$ 의 값이 ③이고, 함수 $f(x)$ 가 $f\left(x - \frac{5}{2}\right) = f\left(x + \frac{5}{2}\right)$ 를 만족하므로 $\int_{-2}^5 f(x)dx$ 의 값은 ④이다.

■ 예시 답안

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 0, x = 1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0), \text{ 즉 } \lim_{x \rightarrow 0-} (ax^3 + 8) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-4x + b) = b \text{ 이고 } \therefore b = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1), \text{ 즉 } \lim_{x \rightarrow 1-} (-4x + 8) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 - 6x + 9a) = -5 + 9a \text{ 이고}$$

$$4 = -5 + 9a \therefore a = 1 \text{ 따라서}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 8 & (-2 \leq x < 0) \\ -4x + 8 & (0 \leq x < 1) \\ x^2 - 6x + 9 & (1 \leq x < 3) \end{cases}$$

이다.

$$\int_{-2}^3 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = 12 + 6 + \frac{8}{3} = \frac{62}{3}$$

$$\int_{-2}^5 f(x)dx = \int_{-2}^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx,$$

$f(x) = f(x+5)$ 이므로 $f(x)$ 는 주기가 5인 주기함수이다.

$$\int_3^5 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx = 12. \quad \therefore \int_{-2}^5 f(x)dx = \int_{-2}^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx = \frac{98}{3}$$

■ 채점 기준

답안	배점
① 1	2점
② 8	2점
③ $\frac{62}{3}$	3점
④ $\frac{98}{3}$	3점

문항 12

[문항 12] $x \geq 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = |p \sin x - q|$ ($p > 0$)에 대하여 $f(0) > f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ 이다. 직선 $y = t$ 가 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 모든 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열한 수열이 등차수열이 되도록 하는 t 의 값은 α, β ($\alpha < \beta$)뿐이다. $t = \alpha, t = \beta$ 일 때의 이 등차수열을 각각 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이라 하자. $\alpha + \beta = 12$ 이고 $\frac{f(b_3)}{a_4} = \frac{3}{\pi}$ 일 때, $2p - q$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$f(0) > f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ 은 $|-q| > |-p - q|$ 이고 $p > 0$ 이므로 $q < 0$ 이다.

$g(x) = p \sin x - q$ 라 할 때, $g(x)$ 의 최솟값은 $-p - q$ 이다. 만약 $-p - q \geq 0$ 이면 3개의 등차수열이 존재하므로, $-p - q < 0$ 이어야 한다.

이때, $\{a_n\}$ 는 첫째항이 0이고 공차가 π 인 등차수열이고, $\{b_n\}$ 는 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$ 이고 공차가 2π 인 등차수열이다.

$\frac{f(b_3)}{a_4} = \frac{3}{\pi}$ 에서 $f(b_3) = \beta = \frac{3}{\pi}a_4 = \frac{3}{\pi} \times 3\pi = 9$ 이다. 그리고

$\alpha + \beta = 12$ 에서 $\alpha = |p \sin 0 - q| = |-q|$ 이므로 $|-q| + 9 = 12$ 이다. $q = -3$ ($q < 0$), $f(b_3) = |p - q| = |p + 3| = 9$ 에서 $p = 6$ ($p > 0$).

$\therefore 2p - q = 15$.

채점 기준

답안	배점
$q < 0$	2점
$-p - q < 0$	3점
$p = 6$ (또는 $q = -3$)	4점
15	1점

문항 13

[문항 13] 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 모든 양의 실수 x 에 대하여

$$\frac{9}{2x} - \frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2$$

을 만족시킨다. $\lim_{x \rightarrow a} x^2 f(x) = 4$ 를 만족시키는 양수 a 에 대해 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - f(x)}{2f(x) + 3x}$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$\frac{9}{2x} - \frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2 \text{ 으로부터 } \frac{9x}{2} - 2 \leq x^2 f(x) \leq (3x - 2)^2. \text{ 따라서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{9x}{2} - 2 = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} (3x - 2)^2 = 4 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} x^2 f(x) = 4. \text{ 따라서 } a = \frac{4}{3}. \text{ 또한,}$$

$$\frac{\frac{9x}{2} - 2}{x^3} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{(3x - 2)^2}{x^3}$$

$$\text{이고 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{9x}{2} - 2}{x^3} = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x - 2)^2}{x^3} \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0. \text{ 따라서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - f(x)}{2f(x) + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{f(x)}{x}}{2\frac{f(x)}{x} + 3} = \frac{4}{9}.$$

■ 채점 기준

답안	배점
$\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{9x}{2} - 2 = \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} (3x - 2)^2 = 4$	2점
$a = \frac{4}{3}$	3점
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	2점
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - f(x)}{2f(x) + 3x} = \frac{4}{9}$	3점

문항 14

[문항 14] 두 실수 x, y 에 대하여 $\frac{1}{9x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{2}$ 이고 $512^x = 144^y$ 일 때, $x = p \log_2 24, y = q \log_{12} 24$ 이다. p, q 그리고 $9x \log_{24} 2 + y \log_{24} 12$ 의 값을 각각 구하는 과정을 서술하시오. (단, p, q 는 유리수이다.)

■ 예시 답안

$512^x = 144^y = k$ ($k > 0$)이라 하자. $512^x = k$ 에서 $2^{9x} = k, 2 = k^{\frac{1}{9x}}$. $144^y = k$ 에서 $12^{2y} = k, 12 = k^{\frac{1}{2y}}$. $\frac{1}{9x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{2}$ 이고 $k^{\frac{1}{9x} + \frac{1}{2y}} = k^{\frac{1}{9x}} \times k^{\frac{1}{2y}} = 2 \times 12 = 24, k^{\frac{1}{2}} = 24$ 이므로 $k = 24^2 = 576$. $512^x = 576$ 에서

$$x = \log_{512} 576 = \frac{2 \log 24}{9 \log 2} = \frac{2}{9} \log_2 24, \quad \therefore p = \frac{2}{9},$$

$144^y = 576$ 에서

$$y = \log_{144} 576 = \frac{2 \log 24}{2 \log 12} = \frac{\log 24}{\log 12} = \log_{12} 24, \quad \therefore q = 1.$$

$$9x \log_{24} 2 + y \log_{24} 12 = 9 \times \frac{2 \log 24}{9 \log 2} \times \frac{\log 2}{\log 24} + \frac{\log 24}{\log 12} \times \frac{\log 12}{\log 24} = 2 + 1 = 3$$

■ 채점 기준

답안	배점
$p = \frac{2}{9}$	4점
$q = 1$	4점
$9x \log_{24} 2 + y \log_{24} 12 = 3$	2점

문항 15

[문항 15] 좌표평면에 점 $A(2, 0)$ 과 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 P 가 있다. 동경 OP 가 나타내는 각의 크기를 θ 라 할 때, 점 P 와 θ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 AP 를 포함하는 부채꼴 AOP 의 넓이는 $\frac{3}{2}\pi$ 이다.

(나) $\frac{\cos \theta}{\tan \theta} < 0$

$\sin 2\theta$ 와 $\tan 3\theta$ 의 값을 각각 구하는 과정을 서술하시오. (단, O 는 원점이다.)

■ 예시 답안

선분 AP 를 포함하는 부채꼴 AOP 에서 $\angle AOP = \alpha$ 라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP 의 넓이가 $\frac{3}{2}\pi$ 이므로, $\frac{1}{2} \cdot 4\alpha = \frac{3}{2}\pi$, $\alpha = \frac{3}{4}\pi$

이때, $\theta = \frac{3}{4}\pi$ 또는 $\theta = \frac{5}{4}\pi$ 이다.

$\theta = \frac{3}{4}\pi$ 이라면, $\cos \theta < 0$, $\tan \theta < 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\theta = \frac{5}{4}\pi$ 이라면, $\cos \theta < 0$, $\tan \theta > 0$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서, $\theta = \frac{5}{4}\pi$ 이다. 그러므로 $\sin 2\theta = \sin \frac{5}{2}\pi = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ 이고

$\tan 3\theta = \tan \frac{15}{4}\pi = \tan \left(3\pi + \frac{3}{4}\pi \right) = \tan \frac{3}{4}\pi = -1$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$\theta = \frac{5}{4}\pi$	5점
$\sin 2\theta = 1$	2점
$\tan 3\theta = -1$	3점

2024학년도 자연계 D형

문항 7

[문항 7] $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 인 θ 에 대하여 $\tan \theta - \frac{\sqrt{3}}{\tan \theta} = \sqrt{3} - 1$ 일 때, $2 \cos \theta - 4 \sin \theta$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$$\tan \theta - \frac{\sqrt{3}}{\tan \theta} = \sqrt{3} - 1 \text{을 정리하면}$$

$$\tan^2 \theta - (\sqrt{3} - 1) \tan \theta - \sqrt{3} = 0$$

따라서 $\tan \theta = -1$, 또는 $\tan \theta = \sqrt{3}$ 인데, $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\tan \theta = \sqrt{3}$ 이다. 따라서 $\theta = \frac{4}{3}\pi$ 이고, $2 \cos \theta - 4 \sin \theta = 2\sqrt{3} - 1$.

채점 기준

답안	배점
$\tan^2 \theta - (\sqrt{3} - 1) \tan \theta - \sqrt{3} = 0$	2점
$\tan \theta = \sqrt{3}$	2점
$\theta = \frac{4}{3}\pi$	2점
$2 \cos \theta - 4 \sin \theta = 2\sqrt{3} - 1$	4점

문항 8

[문항 8] 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = x^2 f(x) - 3x$ 위의 점 $(2, 6)$ 에서의 접선의 기울기가 1일 때, $y = f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 y 절편을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$y = x^2 f(x) - 3x$ 에서 $y' = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 3$ 이고 점 $(2, 6)$ 이 곡선 $y = x^2 f(x) - 3x$ 위의 점이므로 $f(2) = 3$. 곡선 $y = x^2 f(x) - 3x$ 위의 점 $(2, 6)$ 에서의 접선의 기울기가 1이므로 $2 \times 2 \times f(2) + 2^2 \times f'(2) - 3 = 9 + 4f'(2) = 1$. 즉, $f'(2) = -2$. 따라서 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(2) = f'(2) \times (x - 2)$$

$$y - 3 = -2(x - 2)$$

즉, $y = -2x + 7$. 따라서 구하는 y 절편은 7이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$f(2) = 3$	3점
$f'(2) = -2$	3점
$y = -2x + 7$	2점
7	2점

문항 9

[문항 9] 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = a_n + n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right)$ 를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{42} a_k$ 의 값을 구하는 다음의 풀이 과정을 완성하시오.

수열 $\{a_n\}$ 에 대해 $a_{4k-3} = 2k - 1$, $a_{4k-2} = a_{4k-1} = \text{㉠}$, $a_{4k} = \text{㉡}$ 이다.

따라서 $a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} = \text{㉢}$ 이므로 $\sum_{k=1}^{42} a_k = \text{㉣}$ 이다.

예시 답안

$$a_1 = 1 \text{이고 } a_2 = a_1 + 1 \times -\sin\left(\frac{\pi}{2} \times 1\right) = 1 + (-1) = 0,$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times -\sin\left(\frac{\pi}{2} \times 2\right) = 0 + (0) = 0,$$

$$a_4 = a_3 + 3 \times -\sin\left(\frac{\pi}{2} \times 3\right) = 0 + 3 = 3,$$

$$a_5 = a_4 + 4 \times -\sin\left(\frac{\pi}{2} \times 4\right) = 3 + 0 = 3 \text{이다.}$$

$$a_6 = -2, a_7 = -2, a_8 = 5 \text{이고, } a_9 = 5, a_{10} = -4, a_{11} = -4, a_{12} = 7 \text{이 된다.}$$

위와 같이 $-\sin\left(\frac{\pi}{2} \times n\right)$ 는 $-1, 0, 1, 0$ 이 반복되므로

$$a_{4k-3} = 2k - 1, a_{4k-2} = a_{4k-1} = -2k + 2, a_{4k} = 2k + 1 \text{이 된다.}$$

따라서 $a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} = 4$ 가 반복되므로

$$\sum_{k=1}^{40} a_k + a_{41} + a_{42} = 4 \times 10 + (2 \times 11 - 1) + (-2 \times 11 + 2) = 41 \text{이다.}$$

채점 기준

답안	배점
㉠ $-2k + 2$	3점
㉡ $2k + 1$	3점
㉢ 4	2점
㉣ 41	2점

문항 10

[문항 10] 함수 $f(x) = \frac{ax+2}{x-b}$ 와 양의 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $|f(x)| = t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하고, x 에 대한 방정식 $|f(x)| = -tx$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 할 때, 두 함수 $g(t), h(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$ 는 $t = b$ 에서만 불연속이다.

(나) 함수 $h(t)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(3) + h(3) = \frac{2}{3}$ 일 때, $f(a)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a, b 는 상수이고 $ab + 2 \neq 0$ 이다.)

■ 예시 답안

$f(x) = \frac{ax+2}{x-b} = a + \frac{ab+2}{x-b}$ 이고, $a = 0$ 이면, (가)를 만족하지 않는다. 또한, (가)에 의해 $b > 0$ 이어야 한다.

(1) $a > 0, b > 0$ 인 경우 조건 (나)를 만족하지 않는다.

(2) $a < 0, b > 0$ 인 경우 조건 (나)를 만족한다. 조건 (가)로부터 $b = -a$ 이다. $f(3) + h(3) = \frac{2}{3}$ 이고 $h(3) = 1$

이므로 $f(3) = \frac{3a+2}{3+a} = -\frac{1}{3}$. 즉 $a = -\frac{9}{10}$. 따라서

$$f(x) = \frac{-\frac{9}{10}x + 2}{x - \frac{9}{10}}$$

이므로

$$f(a) = f\left(-\frac{9}{10}\right) = \frac{\left(-\frac{9}{10}\right)^2 + 2}{-\frac{9}{10} - \frac{9}{10}} = -\frac{281}{180}$$

■ 채점 기준

답안	배점
$a < 0, b > 0$ 일 때 모든 조건을 만족한다.	3점
$b = -a$	2점
$a = -\frac{9}{10}$	2점
$f(a) = -\frac{281}{180}$	3점

문항 11

[문항 11] 최고차항의 계수가 -1 인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x = 4$ 에서 극솟값 0 을 갖는다.

(나) 방정식 $f(x) = 0$ 의 세 실근을 작은 것부터 차례로 나열하면 등차수열을 이룬다.

함수 $f(x)$ 의 극댓값이 9 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

조건 (가), (나)에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 의 한 실근을 $4 + a$ 라 하면 다른 한 실근은 $4 - a$ 이므로

$$f(x) = -(x-4)^2(x-4-a)(x-4+a) \quad (\text{단, } a \text{는 양의 상수}).$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2(x-4)(x-4-a)(x-4+a) - (x-4)^2(x-4-a) - (x-4)^2(x-4+a) \\ &= -(x-4)(2(x-4)^2 - 2a^2 + 2(x-4)^2) \\ &= -2(x-4)(2(x-4)^2 - a^2) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 4$ 또는 $x = 4 \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 4 \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ 에서 극댓값을 갖는다. 이때 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 9 이므로

$$f\left(4 + \frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{a^2}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - a\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + a\right) = -\frac{a^2}{2}\left(\frac{a^2}{2} - a^2\right) = \frac{a^4}{4} = 9.$$

즉, $a^2 = 6$ 이므로

$$f(1) = -(1-4)^2(1-4-a)(1-4+a) = -9 \times (9 - a^2) = -27$$

채점 기준

답안	배점
$f(x) = -(x-4)^2(x-4-a)(x-4+a)$ (또는 $x-4 = t$ 로 치환하면, $f(x) = f(t+4) = -t^2(t^2 - a^2)$)	3점
$x = 4 \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$	3점
$a^2 = 6$	2점
-27	2점

문항 12

[문항 12] $a > \frac{3}{2}$ 일 때, 실수 전체의 집합에서 증가하고 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$, $f(x) = f(x-2) + 4a$ 를 만족시킨다. 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 3이고 $\int_1^4 f(x) dx = 45$ 일 때, a 의 값을 구하는 다음의 풀이 과정을 완성하시오.

$f(1)$ 의 값을 a 로 표현하면 ①이다. 곡선 $y = f(x-2) + 4a$ 는 곡선 $y = f(x)$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 $4a$ 만큼 평행이동한 곡선과 일치한다. 따라서 $f(4)$ 의 값을 a 로 표현하면 ②이다. 또한, 곡선 $y = f(x)$ 와 y 축 및 직선 $y = -2a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 a 로 표현하면 ③이다. $\int_1^4 f(x) dx = 45$ 이므로 a 의 값은 ④이다.

예시 답안

$f(-x) = -f(x)$ 이므로 원점 대칭이다. 즉, $f(0) = 0$. $f(-x) = -f(x)$ 와 $f(x) = f(x-2) + 4a$ 에 $x = 1$ 을 대입하고 $f(1) = 2a$ 이다. 곡선 $y = f(x-2) + 4a$ 는 곡선 $y = f(x)$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 $4a$ 만큼 평행이동한 곡선과 일치한다. 따라서 $f(2) = f(0) + 4a = 4a$, $f(3) = f(1) + 4a = 6a$, $f(4) = f(2) + 4a = 8a$. 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 3이고 원점 대칭($f(-1) = -2a$)과 증가함수인 성질을 이용하면 또한 곡선 $y = f(x)$ 와 y 축 및 직선 $y = -2a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 $2a - 3$ 이다.

$$\int_1^4 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$$

이고,

$$\int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = (2a + 2a - 3) + (4a + 3) + (6a + 2a - 3)$$

이므로 $(2a + 2a - 3) + (4a + 3) + (6a + 2a - 3) = 16a - 3 = 45$. 따라서, a 의 값은 3.

채점 기준

답안	배점
① $2a$	2점
② $8a$	2점
③ $2a - 3$	3점
④ 3	3점

문항 13

[문항 13] 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 인 함수 $f(x)$ 가 모든 자연수 n 에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$2n - 2 \leq x < 2n \text{ 일 때, } f(x) = \cos(n\pi x)$$

$0 \leq x < 4$ 에서 방정식 $2f(x) - 1 = 0$ 의 서로 다른 실근 중 가장 작은 값과 가장 큰 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$0 \leq x < 2$ 즉 $n = 1$ 일 때, $f(x) = \cos(\pi x)$ 이다.

$2f(x) - 1 = 0$ 에서 $\cos(\pi x) = \frac{1}{2}$, 이 구간에서 가장 작은 실근이 존재하고 그 값은 $x = \frac{1}{3}$ 이다. $2 \leq x < 4$ 즉 $n = 2$ 일 때, $f(x) = \cos(2\pi x)$ 이다.

$2f(x) - 1 = 0$ 에서 $\cos(2\pi x) = \frac{1}{2}$, 이 구간에서 가장 큰 실근이 존재하고 그 값은 $x = \frac{23}{6}$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$0 \leq x < 2$ (또는 $n = 1$), $f(x) = \cos(\pi x)$	2점
$x = \frac{1}{3}$	3점
$2 \leq x < 4$ (또는 $n = 2$), $f(x) = \cos(2\pi x)$	2점
$x = \frac{23}{6}$	3점

문항 14

[문항 14] 첫째항이 같은 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n + b_n = 2$ 를 만족시키고,

$$\sum_{k=1}^{10} \{ka_{k+1} - (k+1)a_k\} = 50, \quad \sum_{k=1}^9 \{(a_{k+1})^2 - (b_{k+1})^2\} = 20$$

일 때, $\sum_{k=1}^{11} a_k$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$a_n + b_n = 2$ 에서 $\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = 20$ (식1) 이고,

$$\sum_{k=1}^9 \{(a_{k+1})^2 - (b_{k+1})^2\} = \sum_{k=1}^{10} \{(a_k)^2 - (b_k)^2\} - (a_1^2 - b_1^2) = 20$$

이다. 이때 두 수열의 첫째항이 같으므로

$$\sum_{k=1}^{10} \{(a_k - b_k)(a_k + b_k)\} = \sum_{k=1}^{10} \{2(a_k - b_k)\} = 20 \quad (\text{식2})$$

이다.

상기 식 (1, 2)을 연립하여 풀면, $\sum_{k=1}^{10} a_k = 15$ 이고 $\sum_{k=1}^{10} b_k = 5$ 이다.

$\sum_{k=1}^{10} \{ka_{k+1} - (k+1)a_k\} = 50$ 을 전개하면

$$(a_2 - 2a_1) + (2a_3 - 3a_2) + (3a_4 - 4a_3) + \cdots + (10a_{11} - 11a_{10}) = 50$$

이고,

$$-2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) + 10a_{11} = 50, \quad -2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 10a_{11} = 50$$

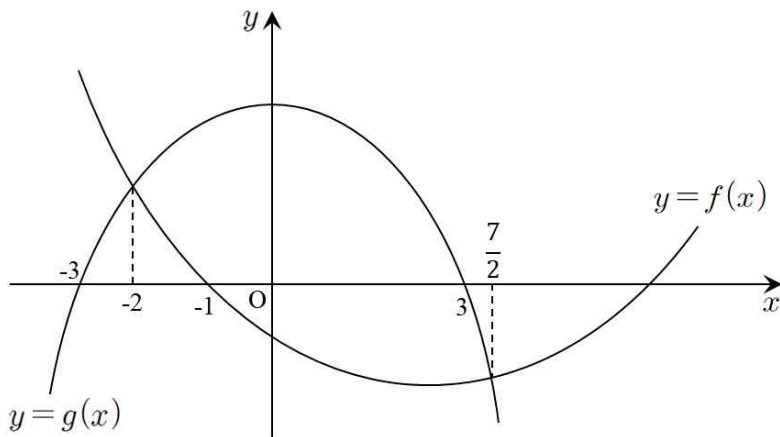
이다. 따라서 $10a_{11} = 80$, $a_{11} = 8$ 이고 $\sum_{k=1}^{11} a_k = 15 + 8 = 23$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$\sum_{k=1}^{10} a_k = 15$	4점
$a_{11} = 8$	4점
23	2점

문항 15

[문항 15] 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $\log_3 f\left(\frac{x}{3}\right) \leq \log_3 g\left(\frac{x}{3}\right)$ 를 만족시키는 정수 x 의 개수를 구하는 과정을 서술하시오.



■ 예시 답안

부등식 $\log_3 f\left(\frac{x}{3}\right) \leq \log_3 g\left(\frac{x}{3}\right)$ 에서 $\frac{x}{3} = t$ 로 놓으면 $\log_3 f(t) \leq \log_3 g(t)$

로그의 진수 조건에 의하여 $f(t) > 0$, $g(t) > 0$ 이므로 $-3 < t < -1$.

부등식 $\log_3 f(t) \leq \log_3 g(t)$ 에서 밑 3이 1보다 크므로

$f(t) \leq g(t)$ 에서 $-2 \leq t \leq 3.5$ 따라서 $-2 \leq t < -1$. 즉 $-2 \leq \frac{x}{3} < -1$.

$-6 \leq x < -3$. 따라서 x 는 $-4, -5, -6$ 이고 그 개수는 3이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$-9 < x < -3$ (또는 $\frac{x}{3} = t$ 로 놓으면 $-3 < t < -1$)	3점
$-6 \leq x \leq 10.5$ (또는 $\frac{x}{3} = t$ 로 놓으면 $-2 \leq t \leq 3.5$)	3점
$-6 \leq x < -3$ (또는 x 는 $-4, -5, -6$)	3점
3 개	1점

2024학년도 자연계 E형

문항 7

[문항 7] 부등식 $\log_2 \frac{x}{8} \times \log_2 \frac{x}{64} < 40$ 을 만족시키는 자연수 x 의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$$\log_2 \frac{x}{8} \times \log_2 \frac{x}{64} = (\log_2 x - 3)(\log_2 x - 6)$$

$$(\log_2 x - 3)(\log_2 x - 6) < 40$$

$$(\log_2 x + 2)(\log_2 x - 11) < 0 \text{이므로}$$

$$\text{즉, } -2 < \log_2 x < 11, 2^{-2} < x < 2^{11}$$

$2^{-2} < x < 2048$. 따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 최댓값은 2047이다.

채점 기준

답안	배점
$(\log_2 x - 3)(\log_2 x - 6) < 40$	2점
$(\log_2 x + 2)(\log_2 x - 11) < 0$	3점
$-2 < \log_2 x < 11$ (또는 $2^{-2} < x < 2^{11}$)	3점
2047	2점

문항 8

[문항 8] 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2a_3 = \frac{3}{2}$, $a_7a_8 = 54$ 일 때, a_5^2 의 값을 구하는 다음의 풀이 과정을 완성하십시오.

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 세 수 a_2 , ①, a_8 이 이 순서대로 등비수열을 이루고, 또한 세 수 a_3 , ②, a_7 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a_5^4 =$ ③이다. 따라서 a_5^2 의 값은 ④이다.

■ 예시 답안

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 세 수 a_2 , ① a_5 , a_8 이 순서대로 등비수열을 이루고, 또한 세 수 a_3 , ② a_5 , a_7 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $a_5^4 =$ ③ 81이다. 따라서 a_5^2 의 값은 ④ 9이다.

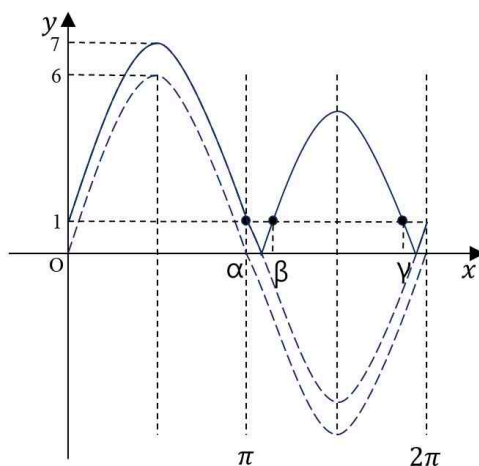
■ 채점 기준

답안	배점
① a_5	2점
② a_5	2점
③ 81 (또는 $a_2a_8 \times a_3a_7$)	3점
④ 9	3점

문항 9

[문항 9] $\pi \leq x < 2\pi$ 에서 x 에 대한 방정식 $|6\sin x + 1| = k$ 가 서로 다른 세 실근 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)를 가질 때, $k\left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha}\right)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, k 는 상수이다.)

예시 답안



$f(x) = |6\sin x + 1| = k$ 라 하면 $\pi \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림의 실선과 같다. 방정식 $|6\sin x + 1| = k$ 가 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다. 즉, $k = 1$

$$\alpha = \pi, \beta + \gamma = 3\pi \text{이므로 } k\left(\frac{\beta + \gamma}{\alpha}\right) = 1 \times \frac{3\pi}{\pi} = 3$$

채점 기준

답안	배점
$k = 1$	3점
$\alpha = \pi$	3점
$\beta + \gamma = 3\pi$	3점
3	1점

문항 10

[문항 10] 곡선 $C : y = x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 2x - 3$ 위의 x 좌표가 양수인 점에서 접하는 직선 중 기울기가 최소인 접선의 방정식을 구하는 다음의 풀이 과정을 완성하시오.

곡선 C 에 접하는 접선의 접점의 x 좌표를 t , 접선의 기울기를 $f(t)$ 라 하면,

$t = \boxed{\text{①}}$ 일 때 $f(t)$ 는 최솟값 $\boxed{\text{②}}$ 을 갖는다. 즉, 기울기가 최소인 접선의 접점은 점 $(\boxed{\text{③}})$ 이고 접선의 방정식은 $y = \boxed{\text{④}}$ 이다.

■ 예시 답안

곡선 C 에 접하는 접선의 접점의 x 좌표를 t , 접선의 기울기를 $f(t)$ 라 하면

$$f(t) = 4t^3 - 15t^2 - 18t + 2$$

이때 $f'(t) = 12t^2 - 30t - 18 = 0$ 에서 $t = 3$ 일 때 $f(t)$ 는 최솟값 -79 을 갖는다.

즉, 기울기가 최소인 접선의 접점은 점 $(3, -132)$ 이고 기울기는 -79 이므로 접선의 방정식은 $y + 132 = -79(x - 3)$

$$y = -79x + 105 \text{이다.}$$

■ 채점 기준

답안	배점
① 3	3점
② -79	2점
③ $3, -132$	2점
④ $-79x + 105$	3점

문항 11

[문항 11] 두 집합

$$A = \left\{ x \mid \left(\frac{1}{4} \right)^{-x^2+5x+3} < 4^{x-6}, x \text{는 정수} \right\},$$

$$B = \left\{ x \mid x = 3^{-a^2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{-2a-k}, a \in A \right\}$$

에 대하여 집합 B 의 모든 원소의 곱이 1일 때, 상수 k 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$\text{부등식 } \left(\frac{1}{4} \right)^{-x^2+5x+3} < 4^{x-6} \text{에서 } 4^{x^2-5x-3} < 4^{x-6}, x^2 - 5x - 3 < x - 6,$$

$x^2 - 6x + 3 < 0, 3 - \sqrt{6} < x < 3 + \sqrt{6}$. 따라서 부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은 1, 2, 3, 4, 5이므로 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$a \in A \text{에 대하여, } x = 3^{-a^2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{-2a-k} = 3^{-a^2+2a+k} \text{이므로,}$$

$$a = 1 \text{일 때, } 3^{1+k}$$

$$a = 2 \text{일 때, } 3^k$$

$$a = 3 \text{일 때, } 3^{-3+k}$$

$$a = 4 \text{일 때, } 3^{-8+k}$$

$$a = 5 \text{일 때, } 3^{-15+k}$$

집합 $B = \{3^{1+k}, 3^k, 3^{-3+k}, 3^{-8+k}, 3^{-15+k}\}$ 이므로 집합 B 의 모든 원소의 곱은

$$3^{1+k} \times 3^k \times 3^{-3+k} \times 3^{-8+k} \times 3^{-15+k} = 3^{5k-25} = 3^0. \text{ 따라서 } k = 5$$

■ 채점 기준

답안	배점
$x^2 - 6x + 3 < 0$	2점
정수 x 의 값은 1, 2, 3, 4, 5 (또는 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$)	3점
$3^{5k-25} = 3^0$ (또는 $5k - 25 = 0$)	4점
$k = 5$	1점

문항 12

[문항 12] 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 최댓값과 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오.

(가) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $|f(x)| \leq |xg(x)|$, $g(0) = -4$ 인 연속함수 $g(x)$ 가 존재한다.

예시 답안

조건 (가)로부터 $f(1) = 0$. 조건 (나)에서 $0 \leq |f(0)| \leq |0g(0)| = 0$ 이므로 $f(0) = 0$. 따라서 $f(x) = x(x-1)(x^2 + ax + b)$ 로 놓을 수 있다. (가)에서

$$4 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x(x^2 + ax + b) = 1 + a + b$$

이므로 $a + b = 3$. $x \neq 0$ 일 때 $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |g(x)|$ 이므로

$$-|g(x)| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |g(x)| \text{으로부터 } -|g(0)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq |g(0)|. \text{ 즉}$$

$-4 \leq f'(0) \leq 4$ 이다. $f(x) = (x^2 - x)(x^2 + ax + b)$ 를 미분하면

$$f'(x) = (2x-1)(x^2 + ax + b) + (x^2 - x)(2x + a)$$

이므로 $f'(0) = -b$. $-4 \leq -b \leq 4$, 즉 $-4 \leq a - 3 \leq 4$ 이므로 $-1 \leq a \leq 7$. 따라서 $f(2) = 2a + 14$ 이므로, $f(2)$ 의 최솟값은 $a = -1$ 일 때인 12이다. 또한, $f(2)$ 의 최댓값은 $a = 7$ 일 때인 28이다.

채점 기준

답안	배점
$(f(x) = x(x-1)(x^2 + ax + b)$ 로 놓았을 때) $a + b = 3$	2점
$f'(0) = -b$ (또는 $-4 \leq f'(0) \leq 4$)	4점
$f(2)$ 의 최솟값은 12	2점
$f(2)$ 의 최댓값은 28	2점

문항 13

[문항 13] 최고차항의 계수가 1이고 모든 항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x) + 2f'(x)$ 라 하자. $f(0) = g(0) = 0$ 이고, $x \geq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 을 만족시키는 실수 k 의 최솟값이 0일 때, $f(2)$ 의 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$g(x) = f(x) + 2f'(x)$ 에서 $f(0) = g(0) = 0$ 이므로 $f'(0) = 0$ 이다. 그러므로

$f(x) = x^3 + ax^2$ (a 는 상수)로 놓을 수 있다. 이때

$$g(x) = x^3 + ax^2 + 6x^2 + 4ax = x(x^2 + (a+6)x + 4a)$$

이차방정식 $x^2 + (a+6)x + 4a = 0$ 의 판별식 $D = (a+6)^2 - 16a = (a-2)^2 + 32 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다. $x \geq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 을 만족시키는 실수 k 의 최솟값이 0인 조건을 만족시키려면 이차방정식의 두 실근을 α, β 라 할 때 $\alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$ 이어야 한다. 즉, $a+6 > 0, 4a > 0$ 이어야 하므로 $a > 0$ 이다. 모든 항의 계수가 정수이므로 $a \geq 1$ 이어야 한다. 따라서 $f(2) = 8 + 4a \geq 12$ 이므로 최솟값은 12이다.

채점 기준

답안	배점
$f(x) = x^3 + ax^2$ (a 는 상수)	3점
$g(x) = x^3 + ax^2 + 6x^2 + 4ax = x(x^2 + (a+6)x + 4a)$	1점
$a \geq 1$	4점
최솟값은 12	2점

문항 14

[문항 14] 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_0^x f'(t) dt + (x^2 + x + 1)f(x) + 1$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 극솟값 -1 을 갖는다. $g(1)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

최고차항 계수가 1인 이차함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하자.

$$g(0) = f(0) + 1 = -1 \text{ 따라서 } f(x) = x^2 + ax - 2$$

$$g(x) = \int_0^x f'(t) dt + (x^2 + x + 1)f(x) + 1 \text{의 양변을 } x \text{에 대해 미분하면}$$

$$g'(x) = f'(x) + (2x + 1)f(x) + (x^2 + x + 1)f'(x). g'(0) = 0 \text{ 이므로, } f'(0) = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 + x - 2$$

$$g(1) = \int_0^1 f'(t) dt + (1^2 + 1 + 1)f(1) + 1 \text{이고, } \int_0^1 f'(t) dt = f(1) - f(0) = 2$$

$$g(1) = \int_0^1 f'(t) dt + (1^2 + 1 + 1)f(1) + 1 = 2 + 3f(1) + 1 = 3$$

■ 채점 기준

답안	배점
$f(0) = -2$ (또는 $f(x) = x^2 + ax - 2$, 또는 $f(x) = x^2 + ax + b$ 의 상수항 $b = -2$)	3점
$f'(0) = 1$ (또는 $f(x) = x^2 + x - 2$, 또는 $a = 1$)	4점
$g(1) = 3$	3점

문항 15

[문항 15] 다음 조건을 만족시키는 두 실수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 를 모두 구하는 과정을 서술하시오.

(가) $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 를 만족시키는 다항함수이다.

(나) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x - a} = b$

(다) $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{(x - a)^k} \right| = 1$ 인 자연수 k 가 존재한다.

예시 답안

(나)로부터 $f(x) = x^2 + bx + c$ 로 놓을 수 있고, (가)로부터 $b = 0$. 따라서 $f(x) = x^2 + c$.

(1) $a = 0$ 이면, (다)로부터 $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x^2 + c}{x^k} \right| = 1$ 인데 $k = 1$ 이면 어떤 상수 c 에 대해서도 (다)를 만족시키지 못한다. $k = 2$ 일 때 (다)가 성립하려면 $c = 0$ 이어야 하고, $k > 2$ 이면 (다)가 성립하지 않는다. 따라서 $(0, 0)$ 은 구하는 순서쌍이다.

(2) $a \neq 0$ 일 때 극한 $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{(x - a)^k} \right| = 1$ 이 존재하려면 $f(a) = a^2 + c = 0$ 이므로 $f(x) = x^2 - a^2$.

$k = 1$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} \right| = |2a| = 1$. $a = \pm \frac{1}{2}$ 이므로 $(\frac{1}{2}, 0)$ 와 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 은 구하는 순서쌍이다.

$k \geq 2$ 이면 극한 $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{x^2 - a^2}{(x - a)^k} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{x + a}{(x - a)^{k-1}} \right|$ 가 존재하지 않는다.

따라서 구하는 순서쌍은 $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ 와 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 뿐이다.

채점 기준

답안	배점
$f(x) = x^2 + c$, c 는 상수	3점
$(0, 0)$	3점
$(\frac{1}{2}, 0)$	2점
$(-\frac{1}{2}, 0)$	2점

2024학년도 자연계 F형

문항 7

[문항 7] 다음 로그함수 $y = \log_a(x - 1)$ ($a > 0$, $a \neq 1$)의 성질에 관한 내용을 완성하시오.

- 1) $a > 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 증가한다.
 $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 ① 한다.
- 2) a 의 값에 관계없이 그래프는 점 (②)을 지난다.
- 3) 함수 $y = \log_a(x - 1)$ 의 그래프와 함수 $y =$ ③의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.
- 4) 함수 $y =$ ④의 그래프는 함수 $y = \log_a(x - 1)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

예시 답안

- ① 감소
- ② 2, 0
- ③ $\log_{\frac{1}{a}}(x - 1)$ 또는 $-\log_a(x - 1)$
- ④ $\log_a(x - 4) + 2$

채점 기준

답안	배점
감소	2점
2, 0	2점
$\log_{\frac{1}{a}}(x - 1)$ (또는 $-\log_a(x - 1)$)	3점
$\log_a(x - 4) + 2$	3점

문항 8

[문항 8] 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = -3$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 3x^2 - 4x + 2x \int_0^2 f(t) dt + a$

$f'(a)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a 는 상수이다.)

■ 예시 답안

$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = -3$ 이므로 $a = -3$. $\int_0^2 f(t) dt = b$ 라 놓으면

$f(x) = 3x^2 - 4x + 2bx - 3$ 이므로

$$b = \int_0^2 (3t^2 - 4t + 2bt - 3) dt = [t^3 - 2t^2 + bt^2 - 3t]_0^2 = 4b - 6$$

따라서 $b = 2$. 따라서 $f(x) = 3x^2 - 3$.

$f'(x) = 6x$ 이므로, $f'(a) = f'(-3) = 6 \times (-3) = -18$

■ 채점 기준

답안	배점
$a = -3$	3점
$f(x) = 3x^2 - 3$	4점
-18	3점

문항 9

[문항 9] 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $\int_a^x f(t) dt = x^3 - x^2 - 6x$ 를 만족시킬 때, $f(a)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a 는 양수이다.)

■ 예시 답안

$\int_a^x f(t) dt = x^3 - x^2 - 6x$ (이하 (1)식)의 식에서 $x = a$ 를 대입하면,

$0 = a^3 - a^2 - 6a = a(a - 3)(a + 2)$ 이다. 이때 a 가 양수이므로, $a = 3$ 이다. (1) 식의 양변을 미분하면, $f(x) = 3x^2 - 2x - 6$ 이므로, $f(a) = f(3) = 15$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$a = 3$	4점
$f(x) = 3x^2 - 2x - 6$	3점
15	3점

문항 10

[문항 10] $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[7]{x^2}}$ 에 대하여 $\{f(f(n))\}^{49}$ 의 값이 1000보다 큰 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[7]{x^2}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{2}{7}} = x^{\frac{3}{14}} \text{이므로 } \{f(f(n))\}^{49} = \left\{ \left(n^{\frac{3}{14}} \right)^{\frac{3}{14}} \right\}^{49} = \left\{ n^{\frac{3}{14} \times \frac{3}{14} \times 49} \right\} = n^{\frac{9}{4}}$$

$n^{\frac{9}{4}}$ 가 자연수가 되려면 n 은 자연수 k 에 대하여 $n = k^4$ 의 꼴이어야 한다. 즉, 자연수 n 은 $2^4, 3^4, 4^4, \dots$ 의 자연수가 될 수 있는데 n 이 2^4 일 경우 $n^{\frac{9}{4}} = 2^{4 \times \frac{9}{4}} = 2^9 = 512$ 이므로 1000보다 작다.

따라서 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 n 이 $3^4 = 81$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$f(x) = x^{\frac{3}{14}}$	2점
$\{f(f(n))\}^{49} = n^{\frac{9}{4}}$	4점
$n = 3^4$ 또는 $n = 81$	4점

문항 11

[문항 11] 첫째항이 a_1 이고 제 n 항까지의 합이 $S_n = \frac{3}{2}a_1n^2 - \frac{1}{2}a_1n$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^4 \frac{7}{a_{2k}a_{2k+2}} = 1$ 일 때, a_5 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $a_1 > 0$)

■ 예시 답안

$a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로 $a_n = \frac{3}{2}a_1n^2 - \frac{1}{2}a_1n - \left(\frac{3}{2}a_1(n-1)^2 - \frac{1}{2}a_1(n-1)\right)$
 $= 3a_1n - 2a_1$ 이다. 따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차 $d = 3a_1$ 이다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \frac{7}{a_{2k}a_{2k+2}} &= \sum_{k=1}^4 \frac{7}{a_{2k+2} - a_{2k}} \left(\frac{1}{a_{2k}} - \frac{1}{a_{2k+2}} \right) = \frac{7}{2d} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_6} + \dots - \frac{1}{a_{10}} \right) \\ &= \frac{7}{2d} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{10}} \right) = \frac{7}{2d} \left(\frac{1}{a_1 + d} - \frac{1}{a_1 + 9d} \right), \end{aligned}$$

공차 $d = 3a_1$ 이므로 $\frac{7}{6a_1} \left(\frac{1}{4a_1} - \frac{1}{a_1 + 27a_1} \right) = \frac{7}{6a_1} \left(\frac{7}{28a_1} - \frac{1}{28a_1} \right) = \frac{1}{4a_1^2} = 1$
 $\therefore a_1 = \frac{1}{2} \ (a_1 > 0) \quad \therefore a_5 = \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$

■ 채점 기준

답안	배점
공차 $d = 3a_1$ (또는 $a_n = (3n - 2)a_1$)	4점
$a_1 = \frac{1}{2}$	4점
$\frac{13}{2}$	2점

문항 12

[문항 12] 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x & (0 < x < 4) \\ 2x^2 - 20x + 48 & (4 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $f(x+6) = f(x)$ 이다.

양의 실수 m 에 대하여 함수 $g(x) = f(x) - mx$ 라 할 때, 함수 $g(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극대 또는 극소인 모든 실수 α 를 작은 수부터 차례대로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ 이라 하자. $\alpha_4 < 10 \leq \alpha_5$ 이고 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 23$ 일 때, m 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & (0 < x < 4) \\ 4x - 20 & (4 < x < 6) \end{cases}$ 이고 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$ 의 주기는 6이고 열린구간 $(0, 10)$ 에서 연

속인 함수이다. 그런데

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f'(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 4+} f'(x) < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 6-} f'(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 6+} f'(x) < 0$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 4, x = 6$ 에서 미분가능하지 않지만 극값을 갖는다. $g'(x) = f'(x) - m$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 열린구간 $(0, 10)$ 에서 연속이고 $x = 4, x = 6$ 에서 미분가능하지 않지만 극값을 갖는다. 또한 $\alpha_4 < 10 \leq \alpha_5$ 이므로 $y = f'(x)$ 의 그래프와 직선 $y = m$ 의 교점이 2개가 되어야 한다. 즉, $\alpha_1, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 6, \alpha_4$ 에서 $\alpha_4 = \alpha_1 + 6$ 이므로

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1 + 4 + 6 + (\alpha_1 + 6) = 2\alpha_1 + 16 = 23. \quad \alpha_1 = \frac{7}{2} \text{ 따라서}$$

$$m = 4 \times \frac{7}{2} - 8 = 6$$

채점 기준

답안	배점
$f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & (0 < x < 4) \\ 4x - 20 & (4 < x < 6) \end{cases}$	2점
$x = 4, x = 6$ 에서 극값을 갖는다. ($\alpha_2 = 4, \alpha_3 = 6$)	2점
$\alpha_1 = \frac{7}{2}$ (또는 $\alpha_1 = \frac{m}{4} + 2, \alpha_4 = \frac{m}{4} + 8$)	4점
$m = 6$	2점

문항 13

[문항 13] 다음 조건을 만족시키는 모든 일차 이상의 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_0^6 f(x) dx$ 의 최솟값을 구하는 다음의 풀이 과정을 완성하십시오.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $\int_{-\frac{3}{2}}^x tf'(t) dt = \left(\frac{2}{3}x + 1\right)\{f(x) + k\}$ 이다. (단, k 는 실수이다.)
 (나) x 에 대한 방정식 $f(x) = m$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 m 의 최솟값은 -9 이다.
 (다) $f(0) \geq 0$

다항함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n (n 은 자연수, a 는 0이 아닌 상수)이라 하자. 조건 (가)에서 $\int_{-\frac{3}{2}}^x tf'(t) dt = \left(\frac{2}{3}x + 1\right)\{f(x) + k\}$ 의 양변을 x 에 대해 미분하고 최고차항을 비교하면 n 의 값은 ①이다. 한편, 조건 (나)로부터 k 의 값은 ②이다. 조건 (다)에서 $f(0) \geq 0$ 이므로 $\int_0^6 f(x) dx$ 의 값은 a 의 값이 ③일 때 최소이다. 따라서, $\int_0^6 f(x) dx$ 의 최솟값은 ④이다.

예시 답안

다항함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n (n 은 자연수, a 는 0이 아닌 상수)이라 하자. 조건 (가) $\int_{-\frac{3}{2}}^x tf'(t) dt = \left(\frac{2}{3}x + 1\right)\{f(x) + k\}$ 의 양변을 x 에 대해 미분하면

$xf'(x) = \frac{2}{3}\{f(x) + k\} + \left(\frac{2}{3}x + 1\right)f'(x)$ 이고, $\frac{1}{3}xf'(x) = \frac{2}{3}\{f(x) + k\} + f'(x)$ 로부터, 좌변의 최고차항은 $\frac{a}{3}nx^n$, 우변의 최고차항은 $\frac{2}{3}ax^n$. 따라서 $n = 2$.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 를 $\frac{1}{3}xf'(x) = \frac{2}{3}\{f(x) + k\} + f'(x)$ 식에 대입하여 정리하면,

$\frac{b}{3} = \frac{2}{3}b + 2a, \frac{2}{3}(c + k) + b = 0$. 따라서 $b = -6a, k = 9a - c$

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - 3)^2 + c - 9a = a(x - 3)^2 - k$. 한편, 조건 (나)로부터 $a > 0, -k = -9$. 즉 k 값은 9이다. 따라서 $f(x) = a(x - 3)^2 - 9$ 이다. 조건 (다)에서 $f(0) \geq 0$ 이므로 $f(0) = 0 = f(6)$ 일 때,

$\int_0^6 f(x) dx$ 의 값이 최소이다. a 의 값은 1이다.

따라서, $\int_0^6 f(x) dx$ 의 최솟값은 -36 이다.

채점 기준

답안	배점
① 2	2점
② 9	2점
③ 1	3점
④ -36	3점

문항 14

[문항 14] 원점 O에서 점 A(0, 13)을 지나고 기울기가 음인 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{OH} = 5$ 이다. 직선 l 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $2 \sin \theta - 3 \cos \theta$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$)

■ 예시 답안

삼각형 OAH 는 직각 삼각형이므로 $\overline{AH} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ 이다. 이 때, $\angle AOH = \alpha$ 라고 하면, $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ 이다. 직선 l 과 만나는 x 축의 점을 B 라 할 때, 삼각형 AOH 와 삼각형 AOB 는 닮음이고 $\angle AOH = \angle ABO$ 이다. 따라서 $\theta = \pi - \alpha$ 이다.

$2 \sin(\pi - \alpha) - 3 \cos(\pi - \alpha) = 2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha$ 이다.

$$2 \sin \alpha + 3 \cos \alpha = 2 \times \frac{12}{13} + 3 \times \frac{5}{13} = \frac{39}{13} = 3$$

■ 채점 기준

답안	배점
$\sin \theta = \frac{12}{13}$ (또는 $\theta = \pi - \alpha$ 일 때 $\sin \alpha = \frac{12}{13}$)	4점
$\cos \theta = -\frac{5}{13}$ (또는 $\theta = \pi - \alpha$ 일 때 $\cos \alpha = \frac{5}{13}$)	4점
3	2점

문항 15

[문항 15] 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\{f(x)\}^4 - 4x^2\{f(x)\}^2 - 4\{f(x)\}^2 + 16x^2 = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 0이고 최솟값이 -2 일 때, 함수 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 의 $x = 0$ 에서의 좌극한과 우극한을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

$$\begin{aligned} & \{f(x)\}^4 - 4x^2\{f(x)\}^2 - 4\{f(x)\}^2 + 16x^2 \\ &= [\{f(x)\}^2 - 4][f(x) - 2x][f(x) + 2x] = 0 \end{aligned}$$

이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 의 값은 2 , -2 , $2x$, 또는 $-2x$ 이다. 이때 실수 전체의 집합에서 연속이면서 $f(x)$ 의 최댓값이 0 , 최솟값이 -2 인 함수는

$$f(x) = \begin{cases} -2|x| & (|x| \leq 1) \\ -2 & (|x| > 1) \end{cases}$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x}{x} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-2x}{x} = -2.$$

채점 기준

답안	배점
$f(x)$ 의 값은 2 , -2 , $2x$, 또는 $-2x$	4점
$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = 2$ (좌극한)	3점
$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = -2$ (우극한)	3점

2024학년도 자연계 G형

문항 7

[문항 7] $\log_{(-x)}(-2x^2 - 7x + 15)$ 가 정의되기 위한 모든 정수 x 의 값의 합을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$\log_{(-x)}(-2x^2 - 7x + 15)$ 에서 밑 $-x > 0$, $-x \neq 1$ 이므로 $x < 0$, $x \neq -1$,

$-2x^2 - 7x + 15 > 0 \Rightarrow (2x - 3)(-x - 5) > 0$ 이므로 $-5 < x < \frac{3}{2}$

이 두 가지를 모두 만족시키는 $x = -4, -3, -2$ 이므로 모든 정수 x 의 값의 합은 -9

■ 채점 기준

답안	배점
$x < 0, x \neq -1$	4점
$(2x - 3)(-x - 5) > 0$, (또는 $(2x - 3)(x + 5) < 0$, 또는 $-5 < x < \frac{3}{2}$)	2점
-9	4점

문항 8

[문항 8] 함수 $f(x) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(x + \pi) + \sin(\pi - x) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$ 이고, $\cos(x + \pi) = -\cos x$ 이다. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로 주어진 식은 $y = -2\sin^2 x + \sin(\pi - x) + 3$ 이다. $\sin(\pi - x) = \sin x$ 이고 $t = \sin x$ 라 하면 $f(t) = -2t^2 + t + 3 = -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$ 이다. 정의역은 $[-1, 1]$ 이므로 최댓값은 $M = \frac{25}{8}$ 이고 최솟값은 $f(-1) = 0$, $f(1) = 2$ 이므로 $m = 0$ 이다. 따라서 $M + m = \frac{25}{8}$ 이다.

■ 채점 기준

답안	배점
$f(x) = -2\sin^2 x + \sin(x) + 3$	4점
$f(x) = -2\left(\sin x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$ (또는, $t = \sin x$ 치환하여 풀이 가능)	2점
$m = 0$	2점
$M + m = \frac{25}{8}$	2점

문항 9

[문항 9] 모든 항이 자연수이고 첫째항이 4인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1} \text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{a_{n+1}}{3} & (a_{n+1} \text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_6 = 9, a_5 = 5$ 일 때, $a_k > a_2$ 를 만족시키는 30 이하의 자연수 k 의 개수를 구하는 다음의 풀이 과정을 완성하시오.

수열 $\{a_n\}$ 의 $a_7 = \boxed{\text{①}}$ 이다. a_4, a_3, a_2 는 각각 $\boxed{\text{②}}$ 이고, $a_n = a_{n+5} \ (n \geq 2)$ 이다. a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 의 값 중에서 a_2 보다 큰 값은 $\boxed{\text{③}}$ 이므로, 30 이하의 자연수 k 의 개수는 $\boxed{\text{④}}$ 이다.

예시 답안

수열 $\{a_n\}$ 은 a_{30} 이하에서 첫째항 이후 3, 1, 4, 5, 9가 5회 반복되며, (3, 1, 4, 5)로 끝난다. 이때, $a_2 = 3$ 보다 큰 수는 4, 5, 9이므로, 총 k 의 개수는 첫째항을 포함하여 $1(\text{첫째항 } 4) + 3(4, 5, 9) \times 5 + 2(\text{마지막 } 4, 5) = 18$ 이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 $a_7 = \boxed{\text{① } 3}$ 이다. a_4, a_3, a_2 는 각각 $\boxed{\text{② } 4, 1, 3}$ 이고, $a_n = a_{n+5} \ (n \geq 2)$ 이다. a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 의 값 중에서 a_2 보다 큰 값은 $\boxed{\text{③ } 4, 5, 9}$ 이므로, 30 이하의 자연수 k 의 개수는 $\boxed{\text{④ } 18}$ 이다.

채점 기준

답안	배점
① 3	3점
② 4, 1, 3	2점
③ 4, 5, 9	3점
④ 18	2점

문항 10

[문항 10] 다항함수 $f(x) = x^3 - 2ax^2 + x + 3$ 이 일대일 함수일 때, 실수 a 의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

풀이 1: 도함수 $f'(x) = 3x^2 - 4ax + 1$ 의 값이 0 이상이 되는 실수 a 의 최댓값을 구하면 충분하다. 이 함수는 $f''(x) = 6x - 4a = 0$ 일 때, 즉 $x = \frac{2}{3}a$ 일 때 최솟값을 갖는다. 즉, $f'\left(\frac{2}{3}a\right) = -\frac{4}{3}a^2 + 1$ 이 최솟값이고, 0 이상이 되기 위해서는 $-\frac{4}{3}a^2 + 1 \geq 0$ 이 되어야 한다. $a^2 \leq \frac{3}{4}$. 따라서 a 의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

풀이 2: $f'(x) = 3x^2 - 4ax + 1 = 3\left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + 1 - \frac{4}{3}a^2 \geq 0$ 가 모든 x 에 대하여 성립할 때 f 는 증가함수이고 일대일 함수이다. 따라서 $1 - \frac{4}{3}a^2 \geq 0$ 일 때(또는 $f'(x) = 0$ 의 판별식 $16a^2 - 12 \leq 0$), f 는 일대일 함수이므로 a 의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

■ 채점 기준

답안	배점
$f'(x) = 3x^2 - 4ax + 1 \geq 0$	3점
$1 - \frac{4}{3}a^2 \geq 0$	4점
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	3점

문항 11

[문항 11] 자연수 n 에 대하여 $6 \log_8 \left(\frac{7}{3n+17} \right)$ 의 값이 정수가 되도록 하는 100 이하의 모든 n 의 값을 구하는 다음의 풀이 과정을 완성하십시오.

$6 \log_8 \left(\frac{7}{3n+17} \right)$ 이 정수가 되려면 $\left(\frac{7}{3n+17} \right)^2 = 2^m$ (m 은 정수) ㉠ 이어야 한다. 이때 $3n+17$ 은 7의 배수가 되어야 하므로 $n = 7k - 1$ (k 는 $1 \leq k \leq$ ㉡ 인 자연수)이어야 한다. $n = 7k - 1$ 을 ㉠에 대입하면 $\left(\frac{1}{3k+2} \right)^2 = 2^m$ 이며, 이 식을 성립시키기 위해서는 $3k+2$ 는 2의 거듭제곱이어야 한다. 위의 조건을 만족시키는 자연수 k 의 값을 구하면 $k =$ ㉢ 또는 $k =$ ㉣ 이다. 따라서 모든 n 의 값의 합은 ㉤ 이다.

예시 답안

$$6 \log_8 \left(\frac{7}{3n+17} \right) = \log_2 \left(\frac{7}{3n+17} \right)^2$$

이 값이 정수가 되려면 $\left(\frac{7}{3n+17} \right)^2 = 2^m$ (m 은 정수) ㉠

이어야 한다. 이때 $3n+17$ 은 7의 배수가 되어야 하므로 $n = 7k - 1$ (k 는 $1 \leq k \leq 14$ 인 자연수) 이어야 한다.

$n = 7k - 1$ 을 ㉠에 대입하면 $\left(\frac{1}{3k+2} \right)^2 = 2^m$. $(3k+2)^2 = 2^{-m}$ 이므로 $3k+2$ 는 2의 거듭제곱이어야 한다.

$1 \leq k \leq 14$ 일 때, $5 \leq 3k+2 \leq 44$ 에서의 2의 거듭제곱은 8, 16, 32이다.

$3k+2 = 8, 3k+2 = 16, 3k+2 = 32$ 에서 $k = 2$ 또는 $k = 10$.

따라서 $n = 13$ 또는 $n = 69$ 이므로 모든 n 의 값의 합은 82이다.

채점 기준

답안	배점
㉠ 14	2점
㉡ 2 (또는 10)	3점
㉢ 10 (또는 2)	3점
㉤ 82	2점

문항 12

[문항 12] 곡선 $y = ax^3 - 2x$ ($a > 0$)과 원 $x^2 + y^2 = \frac{1}{18}$ 의 서로 다른 교점의 개수가 4가 되도록 하는 모든 a 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

곡선 $y = ax^3 - 2x$ ($a > 0$)과 원 $x^2 + y^2 = \frac{1}{18}$ 의 서로 다른 교점의 개수가 4가 되기 위해서는 방정식 $x^2 + (ax^3 - 2x)^2 = \frac{1}{18}$ 즉, $a^2x^6 - 4ax^4 + 5x^2 - \frac{1}{18} = 0$ 이 서로 다른 4개의 실근을 가져야 한다. 이 때 $x^2 = t$ ($t \geq 0$)이라 하면 $a^2t^3 - 4at^2 + 5t - \frac{1}{18} = 0$ 이고 이 방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 한다. 따라서 $f(t) = a^2t^3 - 4at^2 + 5t - \frac{1}{18}$ 이라 하면

$f'(t) = 3a^2t^2 - 8at + 5 = (3at - 5)(at - 1)$ 에서 방정식 $f'(t) = 0$ 의 해는 $t = \frac{5}{3a}$ 또는 $t = \frac{1}{a}$. $f(t) = 0$ 이 두 개의 양의 실근을 가지려면 $f\left(\frac{5}{3a}\right) = \frac{50}{27a} - \frac{1}{18} = 0$ 또는 $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a} - \frac{1}{18} = 0$ 이어야 하므로 $a = \frac{100}{3}$ 또는 $a = 36$.

채점 기준

답안	배점
$x^2 + (ax^3 - 2x)^2 = \frac{1}{18}$	1점
$x^2 = \frac{5}{3a}$ 또는 $x^2 = \frac{1}{a}$ (또는 $t = \frac{5}{3a}$ 또는 $t = \frac{1}{a}$, $t = x^2$)	4점
$a = \frac{100}{3}$	2점
$a = 36$	3점

문항 13

[문항 13] 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t) = 3t^2 - 18t + k$ 이다. 시각 $t = 0$ 에서의 점 P의 위치는 1이고 시각 $t = 1$ 에서의 점 P의 위치는 17이다. 점 P가 시각 $t = 0$ 에서 $t = 3$ 까지 움직인 거리를 구하는 과정을 서술하시오. (단, k 는 상수이다.)

■ 예시 답안

시각 $t = 0$ 에서의 점 P의 위치는 1이고, 시각 $t = 1$ 에서의 점 P의 위치는 17이므로

$$1 + \int_0^1 v(t) dt = 1 + [t^3 - 9t^2 + kt]_0^1 = k - 7 = 17, \quad \therefore k = 24$$

시각 $t = 0$ 에서 $t = 3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)| dt = \int_0^2 (3t^2 - 18t + 24) dt + \int_2^3 (-3t^2 + 18t - 24) dt = 20 + 2 = 22$$

■ 채점 기준

답안	배점
$k = 24$	3점
$\int_0^3 v(t) dt = \int_0^2 (3t^2 - 18t + 24) dt + \int_2^3 (-3t^2 + 18t - 24) dt$	3점
$\int_0^2 (3t^2 - 18t + 24) dt = 20$	2점
$\int_2^3 (-3t^2 + 18t - 24) dt = 2$	2점

문항 14

[문항 14] 첫째항이 정수이고 모든 항이 서로 다른 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 두 집합 A, B 는 다음과 같다.

(가) $A = \{a_k^2 \mid a_k \text{ 는 수열 } \{a_n\} \text{ 의 항, } k \text{ 는 } 1 \leq k \leq 10 \text{ 인 자연수}\}$

(나) $B = \{(-1)^{k+1}a_k \mid a_k \text{ 는 수열 } \{a_n\} \text{ 의 항, } k \text{ 는 } 1 \leq k \leq 10 \text{ 인 자연수}\}$

집합 A 의 원소를 큰 수부터 차례로 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{10}$ 이라 하고, 집합 B 의 원소를 큰 수부터 차례로 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{10}$ 이라 하자. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2$, $\beta_2 = 2$, $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} = 5$ 일 때, $\alpha_2 \times \beta_3$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

모든 항이 다른 등비수열에서 공비 r 은 $0, 1, -1$ 이 되어서는 안된다. (가)에서 공비 r 의 부호에 관계없이 $|r| > 1$ 이면 α_1, α_2 는 각각 a_{10}^2, a_9^2 이고 그렇지 않으면 a_1^2, a_2^2 가 된다. (나)에서는 짝수항에 -1 을 곱하는데, 공비 r 과 첫째항 부호에 따라 부호가 달라진다.

1) $r > 1$ 과 2) $0 < r < 1$ 에 대해서, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2$ 조건을 만족하지 않는다.

3) $-1 < r < 0$ 의 경우, 첫째항이 음수이면 모든 항이 음수이므로 β_1, β_2 는 $-a_{10}, a_9$ 가 되어 $\frac{a_1^2}{a_2^2} \neq \left(\frac{a_{10}}{-a_9}\right)^2$ 이고, 첫째항이 양수이면 B 집합의 모든 항이 양수가 되어 β_1, β_2 는 $a_1, -a_2$ 가 되어 해당 조건을 만족한다.

4) $r < -1$ 에 대해서 첫째항이 음수이면 B 집합의 모든 항이 음수이고 β_1, β_2 는 $a_1, -a_2$ 로 $\frac{a_{10}^2}{a_9^2} \neq \left(\frac{a_1}{-a_2}\right)^2$, 첫째항이 양수이면 B 집합의 모든 항이 양수이고 β_1, β_2 는 $-a_{10}, a_9$ 가 되어 해당 조건을 만족한다.

상기 3)과 4) 경우에 대해서 $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2} = 5$ 식을 풀이해 보면,

3) $\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 + a_2} = a_1 - a_2 = 5$, $\beta_2 = -a_2 = 2$ 이므로 $a_1 = 3$. 첫째항의 양의 정수 조건을 만족하고, $r = -\frac{2}{3}$ ($-1 < r < 0$)이다.

4) $\frac{a_{10}^2 - a_9^2}{-a_{10} - a_9} = -a_{10} + a_9 = 5$ 이고 $\beta_2 = a_9 = 2$ 이므로 $\frac{a_{10}}{a_9} = \frac{-3}{2} = r$ ($r < -1$).

$a_9 = a_1 \left(\frac{-3}{2}\right)^8 = 2$, $a_1 = \frac{2^9}{3^8}$ 첫째항이 정수가 아니다.

따라서, 3)에서

$$\alpha_2 \times \beta_3 = a_2^2 \times a_3 = (ar)^2 ar^2 = a^3 r^4 = 27 \times \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{3}$$

■ 채점 기준

답안	배점
공비 r 은 $-1 < r < 0$	4점
$a_1 = 3$	2점
$r = -\frac{2}{3}$	2점
$\frac{16}{3}$	2점

문항 15

[문항 15] 양의 실수 t 에 대하여 직선 $y = -t$ 가 두 함수

$$y = \frac{5}{x-3}, \quad y = -\frac{2}{x-3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y = t$ 가 두 함수

$$y = \frac{1}{x} - 2, \quad y = -\frac{3}{x} - 2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ABCD의 넓이를 $f(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

예시 답안

사각형 ABCD의 넓이는 두 삼각형 ABC와 ACD의 합이다. (또는 사다리꼴 ABCD의 넓이로 구할 수도 있다.)

A의 x 좌표는 $x = 3 - \frac{5}{t}$, B의 x 좌표는 $x = 3 + \frac{2}{t}$

C의 x 좌표는 $x = \frac{1}{t+2}$, D의 x 좌표는 $x = \frac{-3}{t+2}$

따라서

$$f(t) = \frac{1}{2} \times 2t \times \left\{ 3 + \frac{2}{t} - 3 + \frac{5}{t} \right\} + \frac{1}{2} \times 2t \times \left\{ \frac{1}{t+2} - \frac{-3}{t+2} \right\} = 7 + \frac{4t}{t+2}$$

이므로 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(7 + \frac{4t}{t+2} \right) = 11$.

채점 기준

답안	배점
A의 x 좌표는 $x = 3 - \frac{5}{t}$, B의 x 좌표는 $x = 3 + \frac{2}{t}$ (또는 선분 AB의 길이 $= \frac{7}{t}$)	2점
C의 x 좌표는 $x = \frac{1}{t+2}$, D의 x 좌표는 $x = \frac{-3}{t+2}$ (또는 선분 CD의 길이 $= \frac{4}{t+2}$)	2점
$f(t) = 7 + \frac{4t}{t+2}$	4점
11	2점

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다