

고려대(세종) 약술형논술

수학

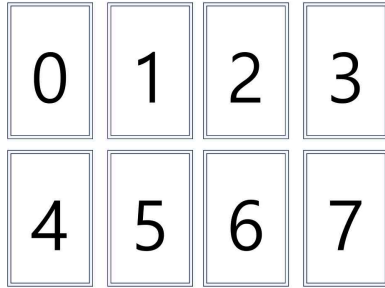
목차

2026학년도 자연계열 I	3
문항 1	3
문항 2	5
문항 3	7
문항 4	9
문항 5	11
문항 6	13
 2026학년도 자연계열 II (약학과)	 15
문항 1 (1-1~1-4)	15
문항 2 (2-1~2-3)	19
문항 3 (3-1~3-4)	22

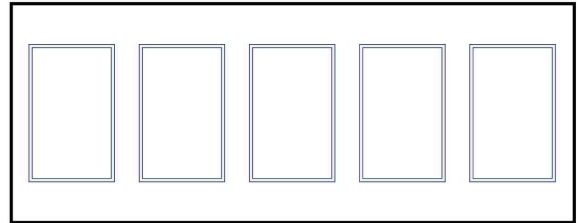
2026학년도 자연계열 I

문항 1

[문제 1] <그림 1>과 같이 숫자가 적힌 8장의 카드가 있다.



<그림 1>



<그림 2>

이 카드 중에서 5장을 순서대로 뽑아 <그림 2>의 빈칸에 왼쪽부터 차례대로 나열하는 시행을 하려 한다. 이때, 만들어진 숫자가 홀수이고, 25000보다 작을 경우의 수를 구하시오.

(단, 0, 3, 1, 5, 7의 순서로 뽑게 되었을 때의 숫자는 3157이다.) [160점]

예시 답안

뽑은 숫자가 홀수가 되기 위해서는 1의 자리 숫자가 홀수이어야 한다.

주어진 카드 중 홀수는 1, 3, 5, 7이므로 이 중에서 마지막 숫자가 나와야 한다.

그리고 25000보다 작은 숫자가 되어야 하므로 처음 뽑을 수 있는 숫자는 0, 1, 2뿐이다.

각각의 경우마다 경우의 수가 다르므로 각각을 나눠서 계산해보자.

CASE1) 만의 자리에 0을 뽑은 경우

나머지 4개의 숫자가 어떤 숫자인지와 상관없이 25000보다 작으므로 나머지 4개의 숫자를 뽑을 때 홀수가 되는 경우의 수를 생각하면 된다. 따라서 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중 4개의 숫자를 뽑아서 순서대로 나열할 때, 홀수가 되는 경우를 찾으면 된다.

이는 일의 자리부터 차례로 나열할 때 홀수가 되는 경우의 수와 동일하므로 일의 자리부터 나열하는 경우를 생각해보자.

일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 5, 7 중 하나이므로 ${}_4C_1 = 4$ 이다.

남은 자리의 숫자는 아무거나 뽑아도 홀수가 되므로 그 경우의 수는 ${}_6P_3 = \frac{6!}{3!} = 120$ 이다.

따라서 만의 자리에 0을 뽑은 경우 25000보다 작은 홀수가 되는 경우의 수는 480이다.

CASE2) 만의 자리에 1을 뽑은 경우

나머지 4개의 숫자가 어떤 숫자인지와 상관없이 25000보다 작으므로 나머지 4개의 숫자를 뽑을 때 홀수가 되는 경우의 수를 생각하면 된다. 따라서 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중 4개의 숫자를 뽑아서 순서대로 나열할 때, 홀수가 되는 경우를 찾으면 된다.

이는 일의 자리부터 차례로 나열할 때 홀수가 되는 경우의 수와 동일하므로 일의 자리부터 나열하는 경우를 생각해보자.

일의 자리에 올 수 있는 수는 3, 5, 7 중 하나이므로 ${}_3C_1 = 3$ 이다.

남은 자리의 숫자는 아무거나 뽑아도 홀수가 되므로 그 경우의 수는 ${}_6P_3 = \frac{6!}{3!} = 120$ 이다.

따라서 만의 자리에 1을 뽑은 경우 25000보다 작은 홀수가 되는 경우의 수는 360이다.

CASE3) 만의 자리에 2를 뽑은 경우

천의 자리의 숫자에 가능한 숫자는 0, 1, 3, 4이다. 각각의 경우마다 나머지 경우의 수가 다르므로 각각을 계산해보자.

case3-1) 천의 자리에 0 또는 4가 뽑힌 경우

1, 3, 4, 5, 6, 7 또는 0, 1, 3, 5, 6, 7 중 3개를 뽑아 홀수를 만드는 경우의 수는 동일하므로 한 가지 경우만 구한 뒤 2배를 하면 된다. 따라서 1, 3, 4, 5, 6, 7 중 3개를 뽑아 홀수를 만드는 경우를 생각해보자.

일의 자리부터 채워 넣는 경우의 수와 동일하므로 일의 자리부터 생각을 하자.

홀수가 되기 위해서는 1, 3, 5, 7 중 하나가 일의 자리에 와야 하므로 그 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$ 이다.

남은 자리의 숫자는 아무거나 뽑아도 홀수가 되므로 그 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$ 이다.

따라서 천의 자리에 0 또는 4가 뽑힌 경우의 수는 $2 \times 4 \times 20 = 160$ 이다.

case3-2) 천의 자리에 1 또는 3이 뽑힌 경우

0, 3, 4, 5, 6, 7 또는 0, 1, 4, 5, 6, 7 중 3개를 뽑아 홀수를 만드는 경우의 수는 동일하므로 한 가지 경우만 구한 뒤 2배를 하면 된다. 따라서 0, 3, 4, 5, 6, 7 중 3개를 뽑아 홀수를 만드는 경우의 수를 생각해보자. 일의 자리부터 채워 넣는 경우의 수와 동일하므로 일의 자리부터 생각을 하자. 홀수가 되기 위해서는 3, 5, 7 중 하나가 일의 자리에 와야 하므로 그 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$ 이다.

남은 자리의 숫자는 아무거나 뽑아도 홀수가 되므로 그 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$ 이다.

따라서 천의 자리에 1 또는 3이 뽑힌 경우의 수는 $2 \times 3 \times 20 = 120$ 이다.

그러므로 25000보다 작은 홀수가 뽑히는 경우의 수는 $480 + 360 + 160 + 120 = 1120$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1번	처음 뽑은 카드가 0인 경우에서 조건을 만족하는 경우의 수를 찾음.	35점
	처음 뽑은 카드가 1인 경우에서 조건을 만족하는 경우의 수를 찾음.	35점
	처음 뽑은 카드가 2이고, 두 번째 뽑은 카드가 0 또는 4인 경우에서 조건을 만족하는 경우의 수를 찾음.	35점
	처음 뽑은 카드가 2이고, 두 번째 뽑은 카드가 1 또는 3인 경우에서 조건을 만족하는 경우의 수를 찾음.	35점
	총 경우의 수를 구함.	20점

문항 2

[문제 2] 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

<가> $f(1) = 0$

<나> $\int_0^4 \{f(x)\}^2 f'(x) dx = 0$

상수 a ($a \neq 0$)에 대하여 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} e^x + a & (x > 3) \\ f(x) & (x \leq 3) \end{cases}$$

이라 하자.

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(\ln(a^2))$ 의 값을 구하시오. [170점]

■ 예시 답안

$f(x) = t$ 라 하자. $x = 0$ 일 때 $t = f(0)$, $x = 4$ 일 때 $t = f(4)$ 이고, $\frac{dt}{dx} = f'(x)$ 이다.
따라서

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^4 \{f(x)\}^2 f'(x) dx \\ &= \int_{f(0)}^{f(4)} t^2 dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{f(0)}^{f(4)} \\ &= \frac{1}{3} (f(4)^3 - f(0)^3) \\ &= \frac{1}{3} (f(4) - f(0))(f(4)^2 + f(4)f(0) + f(0)^2) \end{aligned}$$

이므로

$$f(4) - f(0) = 0 \quad \dots (1)$$

이다. $g(x)$ 가 미분가능하므로 $h(x) = e^x + a$ 이면

$$f(3) = h(3) \Rightarrow f(3) = e^3 + a, \quad f'(3) = h'(3) \Rightarrow f'(3) = e^3$$

이다.

(1)에서 $f(4) = f(0)$ 이므로 이차함수인 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 대칭이다. 따라서 $f(1) = f(3)$ 이므로 $f(3) = 0$ 이다.

따라서 $f(x) = k(x-1)(x-3) = k(x^2 - 4x + 3)$ (k 는 상수)이고, $h(x) = e^x + a$ 이므로

$$0 = f(3) = h(3) = e^3 + a$$

이다. 따라서 $a = -e^3$ 이다.

또한 $f'(3) = h'(3)$ 이고, $f'(x) = k(2x-4)$ 이므로 $h'(x) = e^x$ 이고 $f'(3) = h'(3) = e^3$ 이다.

따라서 $k(6-4) = e^3$ 이므로 $k = \frac{e^3}{2}$ 이다.

그러므로 $f(x) = \frac{e^3}{2}(x^2 - 4x + 3)$ 이고,

$$f(\ln(a^2)) = f(\ln(e^6)) = f(6) = \frac{e^3}{2}(36 - 24 + 3) = \frac{15}{2}e^3$$

이다.

별해

함수 $g(x)$ 가 모든 실수에 대하여 미분가능하므로 모든 실수에 대해서 연속이다.

따라서 $x = 3$ 에서도 연속이고 미분가능하므로 $\lim_{x \rightarrow 3+} g'(x) = f'(3)$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 3+} g(x) = f(3)$ 이다.

따라서 $e^3 = f'(3)$ 이고, $e^3 + a = f(3)$ 이다.

(나)의 조건에 의해

$$\int_0^4 \{f(x)\}^2 f'(x) dx = \left[\frac{\{f(x)\}^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{3} [\{f(4)\}^3 - \{f(0)\}^3] = 0$$

이므로 $f(4) = f(0)$ 이다. 따라서 $f(4) = f(0) = k$ 라 하면

$$f(x) = bx(x-4) + k = bx^2 - 4bx + k$$

이다. 그러므로 $f'(x) = 2bx - 4b$ 이므로 $e^3 = 6b - 4b = 2b$ 이다. 따라서 $b = \frac{e^3}{2}$ 이다.

그리고 $f(1) = 0$ 이므로 $f(1) = -\frac{3e^3}{2} + k = 0$ 이다. 따라서 $f(x) = \frac{e^3}{2}x^2 - 2e^3x + \frac{3e^3}{2}$ 이다.

그리고 $f(3) = \frac{9e^3}{2} - 6e^3 + \frac{3e^3}{2} = 0 = e^3 + a$ 이므로 $a = -e^3$ 이다. 그러므로

$$f(\ln(a^2)) = f(6) = \frac{15e^3}{2}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2번	치환적분을 구함.	40점
	$f(4) - f(0) = 0$ 임을 보임.	10점
	$f'(3) = e^3$ 임을 보임.	30점
	$x = 2$ 가 대칭축임을 이용하여 $f(x) = k(x-1)(x-3)$ 을 구함.	20점
	$a = -e^3$ 임을 보임.	30점
	$k = \frac{e^3}{2}$ 임을 보임.	20점
	$f(\ln(a^2)) = \frac{15}{2}e^3$ 임을 보임.	20점

문항 3

[문제 3] 두 상수 a ($a > 0$)와 b ($b > 1$)에 대하여 함수 $f(x) = \ln(ax + b)$ 의 그래프가 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 이 그래프의 점근선과 x 축이 만나는 점을 H라 하자. 원점 O에 대하여 $3\overline{OA} = \overline{OH}$, $\overline{OA} = 2\overline{OB}$ 일 때, $e^{\frac{1}{a}}$ 의 값을 구하시오. [160점]

예시 답안

$y = 0$ 이면 $0 = \ln(ax + b)$ 이므로 $ax + b = 1$ 이고, 따라서 $x = \frac{1-b}{a}$ 이다.

그러므로 A의 좌표는 $\left(\frac{1-b}{a}, 0\right)$ 이다.

$x = 0$ 이면 $y = f(0) = \ln b$ 이므로 B의 좌표는 $(0, \ln b)$ 이다. 이때 점근선의 방정식은 $x = -\frac{b}{a}$ 이므로 H의 좌표는 $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ 이다.

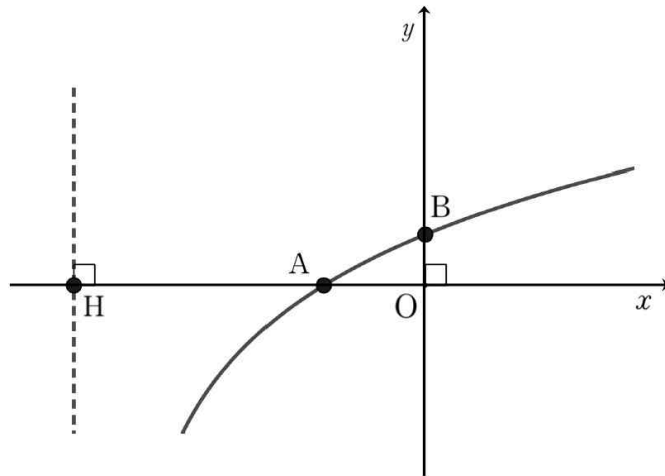
$$\therefore \overline{OA} = \left|\frac{1-b}{a}\right| = \frac{b-1}{a}, \quad \overline{OH} = \left|-\frac{b}{a}\right| = \frac{b}{a}$$

따라서 $3\left(\frac{b-1}{a}\right) = 3\overline{OA} = \overline{OH} = \frac{b}{a}$ 이므로 $3\left(\frac{b-1}{a}\right) = \frac{b}{a}$ 이고, 따라서 $b = \frac{3}{2}$ 이다.

$\overline{OA} = 2\overline{OB}$ 이므로 $\frac{\frac{3}{2}-1}{a} = 2\ln b = 2\ln \frac{3}{2}$ 이다. 따라서 $\frac{\frac{1}{2}}{a} = 2\ln \frac{3}{2}$, $\frac{1}{a} = 4\ln \frac{3}{2}$ 이므로

$$e^{\frac{1}{a}} = e^{4\ln \frac{3}{2}} = e^{\ln \left(\frac{3}{2}\right)^4} = \frac{81}{16}$$

이다.



■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3번	A의 좌표 $\left(\frac{1-b}{a}, 0\right)$ 을 구하거나 $x = \frac{1-b}{a}$ 를 구함.	20점
	H의 좌표 $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ 을 구하거나 $x = -\frac{b}{a}$ 를 구함.	20점
	$\overline{OA} = \left \frac{b-1}{a}\right = \frac{b-1}{a}$ 를 구함.	20점
	$\overline{OH} = \left -\frac{b}{a}\right = \frac{b}{a}$ 를 구함.	20점
	$b = \frac{3}{2}$ 를 구함.	30점
	$\frac{1}{a} = 4 \ln \frac{3}{2}$ 또는 $a = \frac{1}{4 \ln \frac{3}{2}}$ 를 구함.	20점
	$e^{\frac{1}{a}} = \frac{81}{16}$ 을 구함.	30점

문항 4

[문제 4] 수직선 위를 움직이는 두 점 P와 Q가 다음 조건을 만족시킨다. (단, $t \geq 0$ 이다.)

- <가> 양의 정수 k 에 대하여 시각 t 에서 점 P의 위치는 $f(t) = t^3 - \frac{k}{2}t^2 + 6$ 이고, 점 Q의 위치는 $g(t) = \frac{k}{2}t^2 + \frac{k}{2}$ 이다.
 <나> $f(0) - g(0) > 0$ 이고, 두 점 P와 Q는 만나지 않는다.
 <다> $t > 0$ 일 때, 점 P와 Q의 속도가 같으면 그 크기는 양의 정수이다.

이 조건을 만족시키는 k 를 찾고, 두 점 P와 Q 사이의 최소거리를 구하시오. [170점]

■ 예시 답안

P의 속도는 $f'(t) = 3t^2 - kt$ 이고, Q의 속도는 $g'(t) = kt$ 이다. 따라서 P와 Q의 속도가 같을 때는

$$3t^2 - kt = kt \Rightarrow t(3t - 2k) = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3}k, t = 0$$

이다.

제시문 <다>에 의하여 $t = \frac{2}{3}k$ 이면 속도의 크기는 정수이므로 $g'\left(\frac{2}{3}k\right) = \frac{2}{3}k^2$ 이 정수가 되어야 한다.
 k 도 양의 정수이므로 $\frac{2}{3}k^2$ 이 정수가 되기 위해서는 k 는 3의 배수이어야 한다.

P와 Q 사이의 거리는 $h(t) = f(t) - g(t) = t^3 - \frac{k}{2}t^2 + 6 - \frac{k}{2}t^2 - \frac{k}{2}$ 이다.

$h(0) = 6 - \frac{k}{2}$ 이고, $f(0) - g(0) > 0$ 이므로, $6 - \frac{k}{2} > 0$ 이다. 따라서 $k < 12$ 이다.

$h'(t) = 3t^2 - 2kt = t(3t - 2k)$ 이므로 $t = \frac{2}{3}k$ 에서 $h'(t) = 0$ 이다.

$0 < t < \frac{2}{3}k$ 이면 $h'(t) < 0$ 이고, $t > \frac{2}{3}k$ 이면 $h'(t) > 0$ 이므로 $h\left(\frac{2}{3}k\right)$ 가 최소거리가 된다.

그리고 $h(t) > 0$ 이므로

$$h\left(\frac{2}{3}k\right) = \frac{8}{27}k^3 - \frac{2}{9}k^3 + 6 - \frac{2}{9}k^3 - \frac{k}{2} = -\frac{4}{27}k^3 + 6 - \frac{k}{2} > 0$$

이고,

$$6 > \frac{4}{27}k^3 + \frac{k}{2}$$

이다.

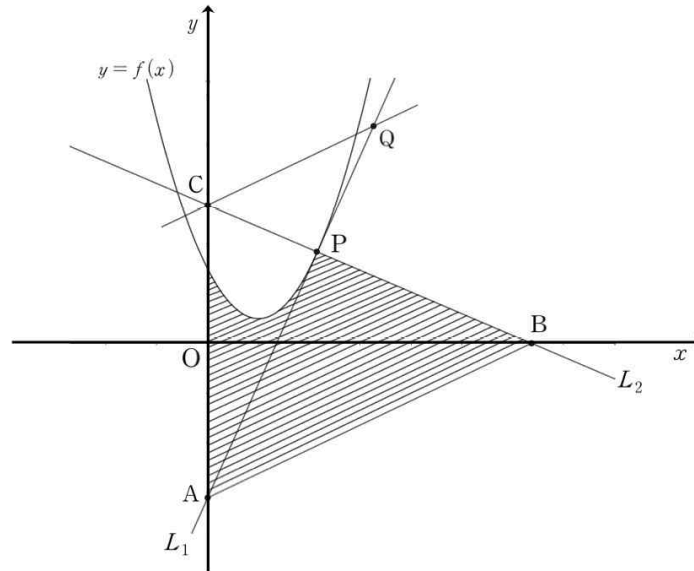
이때, k 는 3의 배수이므로 $k = 3$ 이고, 최소거리는 $h(2) = -4 + 6 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4번	$h'(t) = 0$ 이 되는 점 중 양수인 $t = \frac{2}{3}k$ 를 찾음.	30점
	$g'\left(\frac{2}{3}k\right)$ 가 정수임을 이용하여 k 가 3의 배수임을 보임.	30점
	$f(0) - g(0) > 0$ 임을 이용하여 $k < 12$ 임을 보임.	30점
	$h'(t)$ 를 이용하여 $h\left(\frac{2}{3}k\right)$ 가 최소거리임을 보임.	30점
	$h(t) > 0$ 임을 이용하여 $k = 3$ 임을 보임.	30점
	$h(2) = \frac{1}{2}$ 을 구함.	20점

문항 5

[문제 5] 그림과 같이 양수 a 에 대하여 함수 $f(x) = x^2 - 2x + a$ 의 그래프 위의 한 점 $P(t, f(t))$ 에서 접하고, 기울기가 2인 직선 L_1 이 있다. 직선 L_2 는 점 P 에서 직선 L_1 과 수직으로 만난다. 직선 L_1 이 y 축과 만나는 점을 A 라 하고, 직선 L_2 가 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 하자. 직선 AB 와 직선 CQ 가 평행하도록 하는 직선 L_1 위의 점을 Q 라 하자. 두 삼각형 PAB, PCQ 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하고 $\frac{S_1}{S_2} = 4$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 y 축, 선분 BP 및 선분 AB 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [170점]



예시 답안

점 P 에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t) = 2t - 2 = 2, t = 2$ 이다. 점 $P(2, f(2))$ 에서의 접선 L_1 은 $y = 2(x - 2) + f(2)$ 가 되고, 접선에 수직인 직선 L_2 는 $y = -\frac{1}{2}(x - 2) + f(2)$ 가 된다.

두 직선 L_1 과 L_2 의 x 절편과 y 절편을 계산하면, 점 $A(0, f(2) - 4), B(2f(2) + 2, 0), C(0, f(2) + 1)$ 을 구할 수 있다.

이때, 점 P 가 선분 CB 를 $m : n$ 으로 내분하는 점이라 하면,

$$\frac{2(f(2) + 1)m}{m + n} = 2, \quad \frac{(f(2) + 1)n}{m + n} = f(2)$$

가 된다. $\frac{n}{m} = f(2)$ 이므로 삼각형 PAB 와 PQC 의 닮음비는 $n : m = f(2) : 1$ 이 된다.

따라서 넓이의 비는 $(f(2))^2 : 1$ 이 되므로 $\frac{S_1}{S_2} = (f(2))^2 = 4$, 즉 $f(2) = 2$ 이다.

따라서 $a = 2 (a > 0)$ 이다.

문제에 주어진 부분의 넓이 S 를 구하기 위해 삼각형 ABC 의 넓이를 S_3 , 직선 $CP \left(y = -\frac{1}{2}x + 3 \right)$ 과 곡선 $y = x^2 - 2x + 2$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_4 라 하면, 넓이 $S = S_3 - S_4$ 가 된다.

$$S_3 = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$$

$$S_4 = \int_0^2 -\frac{1}{2}x + 3 - (x^2 - 2x + 2) dx = \int_0^2 -x^2 + \frac{3}{2}x + 1 dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + x \right]_0^2 = \frac{7}{3}$$

이므로 $S = 15 - \frac{7}{3} = \frac{38}{3}$ 이다.

별해 1

$f'(x) = 2x - 2 = 2$ 이고, 접선의 기울기가 2이므로 $t = 2$ 이다. $f(2) = a$ 라 하면 점 $P(2, a)$ 에서의 접선 L_1 은 $y = 2x + a - 4$ 가 되고, 접선의 수직인 직선 L_2 는 $y = -\frac{1}{2}x + a + 1$ 이 된다.

직선 AB와 직선 CQ는 평행하고 마주보는 각들이 같으므로, 두 삼각형 PCQ와 PAB는 닮음이고, 넓이의 비율이 1 : 4이므로 $\overline{CP} : \overline{PB} = 1 : 2$ 이다. 점 $P(2, a)$ 는 점 $C(0, a + 1)$ 와 점 $B(2a + 2, 0)$ 를 잇는 선분을 1 : 2로 내분하므로 $\frac{2a + 2}{3} = 2$ 이고, 따라서 $a = 2$ 이다.

문제에 주어진 넓이(S)를 구하기 위해 곡선 $y = x^2 - 2x + 2$, 직선 L_1 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3 라 하고, 삼각형 PAB의 넓이를 S_4 라 하면, 넓이 $S = S_3 + S_4$ 가 된다.

$$S_3 = \int_0^2 (x^2 - 2x + 2) - (2x - 2) dx = \int_0^2 x^2 - 4x + 4 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \times \overline{PB} \times \overline{PA} = \frac{1}{2} \times \sqrt{20} \times \sqrt{20} = 10$$

이므로 $S = 10 + \frac{8}{3} = \frac{38}{3}$ 이다.

별해 2

문제에 주어진 넓이(S)를 구하기 위해 곡선 $y = x^2 - 2x + 2$, 직선 AB($y = \frac{1}{3}x - 2$), y 축 및 직선 $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3 라 하고, 직선 PB($y = -\frac{1}{2}x + 3$), 직선 AB 및 직선 $x = 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_4 라 하면, 넓이 $S = S_3 + S_4$ 가 된다.

$$S_3 = \int_0^2 (x^2 - 2x + 2) - \left(\frac{1}{3}x - 2 \right) dx = \int_0^2 x^2 - \frac{7}{3}x + 4 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + 4x \right]_0^2 = 6$$

$$S_4 = \int_2^6 \left(-\frac{1}{2}x + 3 \right) - \left(\frac{1}{3}x - 2 \right) dx = \int_2^6 -\frac{5}{6}x + 5 dx$$

$$= \left[-\frac{5}{12}x^2 + 5x \right]_2^6 = \frac{20}{3}$$

이므로 $S = 6 + \frac{20}{3} = \frac{38}{3}$ 이다.

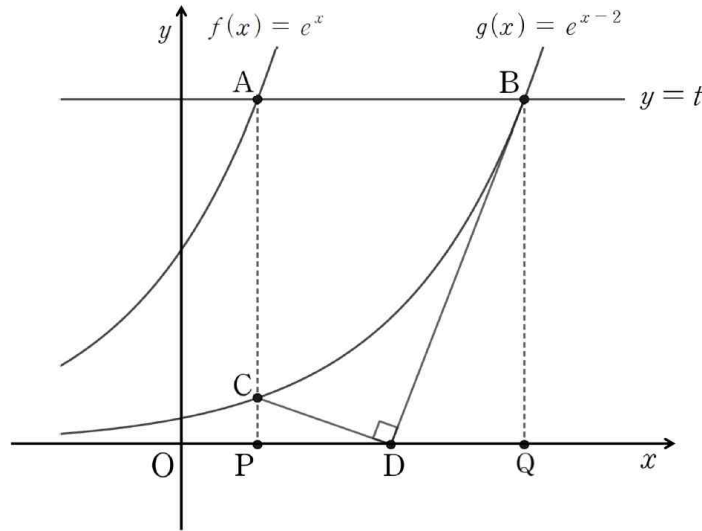
■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
5번	$t = 2$ 에서의 접선 L_1 과 접선에 수직인 방정식 L_2 를 구함.	40점
	A, B, C점의 좌표들을 구함.	40점
	$a = 2$ 를 구함.	40점
	넓이 $S = \frac{38}{3}$ 을 구함.	50점

문항 6

[문제 6] 두 함수 $f(x) = e^x, g(x) = e^{x-2}$ 가 있다. 그림과 같이 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 가 직선 $y = t$ ($1 \leq t \leq 2$)와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 이 두 점에서 x 축 위에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자. 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 C는 점 A와 x 좌표가 같다. x 축 위의 점 D에 대하여 $\angle BDC = \frac{\pi}{2}$ 이다. $\overline{PD} \times \overline{DQ}$ 의 최솟값을 구하시오.

[170점]



예시 답안

점 $B(2 + \ln t, t)$, $C\left(\ln t, \frac{t}{e^2}\right)$, $P(\ln t, 0)$, $Q(2 + \ln t, 0)$ 에 대해 $\overline{PQ} = 2$ 이므로 $\overline{PD} = x$ ($0 < x < 2$)라 하면 $\overline{PD} \times \overline{DQ} = x(2 - x)$ 이다. $\angle BDC = \frac{\pi}{2}$ 이므로 직선 CD와 직선 BD가 서로 수직이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.

$$-\frac{\frac{t}{e^2}}{x} \times \frac{t}{2-x} = -1 \Rightarrow x(2-x) = \frac{t^2}{e^2}$$

이므로 $1 \leq t \leq 2$ 에서 $\overline{PD} \times \overline{DQ} = \frac{t^2}{e^2}$ 의 최솟값은 $\frac{1}{e^2}$ 이다.

별해

각 점의 좌표를 구하면 점 $B(2 + \ln t, t)$, $C\left(\ln t, \frac{t}{e^2}\right)$, $P(\ln t, 0)$, $Q(2 + \ln t, 0)$ 이다.

선분 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형 BCD에 대해 $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$ 이며 삼각형 CPD와 BQD도 직각삼각형이므로 $\overline{CD}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PD}^2$, $\overline{BD}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{DQ}^2$ 를 만족한다. 따라서

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= (\overline{CP}^2 + \overline{PD}^2) + (\overline{BQ}^2 + \overline{DQ}^2) \\ &= \overline{CP}^2 + \overline{BQ}^2 + (\overline{PD} + \overline{DQ})^2 - 2\overline{PD} \times \overline{DQ} \end{aligned}$$

$$= \overline{CP}^2 + \overline{BQ}^2 + \overline{PQ}^2 - 2\overline{PD} \times \overline{DQ}$$

$$\overline{BC}^2 = 4 + \left(t - \frac{t}{e^2}\right)^2, \overline{CP}^2 = \frac{t^2}{e^4}, \overline{BQ}^2 = t^2, \overline{PQ}^2 = 4 \text{ 이므로 위 식에 대입하면}$$

$$4 + \left(t - \frac{t}{e^2}\right)^2 = \frac{t^2}{e^4} + t^2 + 4 - 2\overline{PD} \times \overline{DQ}$$

이므로 $\overline{PD} \times \overline{DQ} = \frac{t^2}{e^2}$ 이다. $y = \frac{t^2}{e^2}$ 은 $t \geq 0$ 에서 증가하므로 $1 \leq t \leq 2$ 에서 최솟값은 $\frac{1}{e^2}$ 이다.

■ 채점 기준

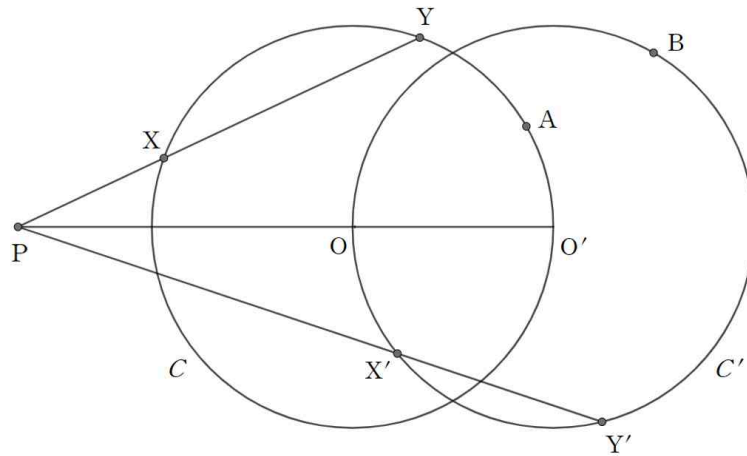
하위 문항	채점 기준	배점
6번	$\overline{PQ} = 2$ 임을 구함.	35점
	$\overline{PD} \times \overline{DQ}$ 의 식을 올바르게 구함.	45점
	$\overline{PD} \times \overline{DQ} = \frac{t^2}{e^2}$ 를 구함.	60점
	최솟값 $\frac{1}{e^2}$ 을 구함.	30점

2026학년도 자연계열 II (약학과)

문항 1 (1-1~1-4)

1. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

- <가> 원의 중심이 각각 O, O' 이고, 반지름의 길이가 3인 두 원 C, C' 이 있다. 그림과 같이 점 O 는 원 C' 위에 있고, 점 O' 는 원 C 위에 있다. 점 A 는 두 원 C, C' 의 내부가 겹쳐진 부분의 경계 위에 있고, 점 B 는 원 C' 위에 있다. 두 점 A, B 는 서로 다른 점이다.
- <나> 두 원 C, C' 외부의 한 점 P 는 직선 OO' 위에 있고, $\overline{PO} = 5$ 이다. 점 P 를 지나는 한 직선은 원 C 와 두 점 X, Y 에서 만나고, 점 P 를 지나는 다른 한 직선은 원 C' 와 두 점 X', Y' 에서 만난다. (단, $\overline{PX} < \overline{PY}, \overline{PX'} < \overline{PY'}$, 두 점 B, Y' 는 서로 다른 점이다.)



- 1-1. $|\overline{PA}| \leq 7, |\overline{PB}| \geq \sqrt{73}, |\overline{PY'}| \geq \sqrt{73}$ 이고 $\angle BAY'$ 의 크기가 최대일 때, 삼각형 BAY' 의 넓이의 최댓값을 구하시오. [80점]
- 1-2. $\overline{OO'} \cdot \overline{BA}$ 가 최대일 때, 선분 AB 의 길이를 구하시오. [80점]
- 1-3. 직선 YO 가 원 C 와 만나는 점을 Q 라 하자. $\overline{PY} = 2\sqrt{13}$ 일 때, 삼각형 YQP 가 직각삼각형임을 보이시오. (단, 두 점 Y, Q 는 서로 다른 점이다.) [80점]
- 1-4. $\overline{PY} = 2\sqrt{13}$ 이고 $\sin \angle OPX' = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 일 때, 모든 $\overline{XY} \cdot \overline{X'Y'}$ 를 구하시오. [100점]

■ 예시 답안

[1-1]

두 원의 교점을 점 C, 점 D라 하고 선분 OO'의 중점을 점 H라 하자. 삼각형 CPH는 직각삼각형이며 $\overline{CH} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $\overline{PC} = 7$ 이다. 따라서 $|\overline{PA}| \leq 7$ 을 만족하는 점 A는 원 C' 위에 있다. 선분 OO'에 수직이며 원의 중심 O'를 지나는 지름의 양 끝점을 점 I, J라 하자. 삼각형 IPO'는 직각삼각형이며 $\overline{IO'} = 3$, $\overline{PO'} = 8$ 이므로 $\overline{PI} = \sqrt{73}$ 이다. 따라서 $|\overline{PB}| \geq \sqrt{73}$, $|\overline{PY'}| \geq \sqrt{73}$ 이므로 두 점 B, Y'은 호 IJ(원의 중심 O를 지나지 않는 호 IJ) 위에 있다. $\angle BAY'$ 는 원 C'의 원주각이므로 $\angle BAY' = \frac{\pi}{2}$ 일 때 최대이다. 즉, 선분 BY'는 지름이며 $\overline{BY'} = 6$ 이다. 선분 AO'와 선분 BY'가 수직일 때의 삼각형 BAY'의 넓이는 최댓값이다. 그러므로 삼각형 BAY'의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ 이다.

[1-2]

선분 OO'의 중점을 점 H라 하면 $\overline{BA} = \overline{BH} + \overline{HA}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{OO'} \cdot \overline{BA} &= \overline{OO'} \cdot (\overline{BH} + \overline{HA}) \\ &= \overline{OO'} \cdot \overline{BH} + \overline{OO'} \cdot \overline{HA} \\ &= 2\overline{HO'} \cdot (-\overline{HB}) + \overline{OO'} \cdot \overline{HA} \\ &= -2(\overline{HO'} \cdot \overline{HB}) + \overline{OO'} \cdot \overline{HA}\end{aligned}$$

$\overline{OA} = \overline{OH} + \overline{HA}$ 이며 $|\overline{OO'}| = 3$, $|\overline{OA}| \leq 3$, $|\overline{OH}| = \frac{3}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{OO'} \cdot \overline{HA} &= \overline{OO'} \cdot (\overline{OA} - \overline{OH}) = \overline{OO'} \cdot \overline{OA} - \overline{OO'} \cdot \overline{OH} \\ &= |\overline{OO'}| |\overline{OA}| \cos \theta - 3 \times \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(θ 는 $\overline{OO'}$ 와 $\overline{OA}$ 의 사잇각)이므로 $\theta = 0$ (점 A가 점 O'와 같을 때)일 때 $\overline{OO'} \cdot \overline{HA}$ 의 최대이다.

또한, $\overline{HO'} \cdot \overline{HB} \leq 0$ 인 점 B에서 $-2(\overline{HO'} \cdot \overline{HB})$ 가 최댓값을 가진다. $\overline{HB} + \overline{BO'} = \overline{HO'}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{HO'} \cdot \overline{HB} &= \overline{HO'} \cdot (\overline{HO'} - \overline{BO'}) = \overline{HO'} \cdot \overline{HO'} - \overline{HO'} \cdot \overline{BO'} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \overline{O'H} \cdot \overline{O'B}\end{aligned}$$

그러므로 점 A는 점 O', 점 B는 점 O가 될 때 $\overline{OO'} \cdot \overline{BA}$ 가 최대가 되며 이때 $\overline{AB} = 3$ 이다.

[1-3]

점 P에서 원 C에 그은 접선의 접점이 직선 OO'를 기준으로 점 Y와 다른 영역에 있다고 하고 이때, 접점을 F라 하자. 삼각형 OFP는 직각삼각형이며 $\overline{PO} = 5$, $\overline{OF} = 3$ 이므로 $\overline{PF} = 4$ 이다. 또한, 직선 OF가 원 C와 만나는 점을 G(점 F와 다른 점)라 하면 삼각형 GFP는 직각삼각형이며 $\overline{PF} = 4$, $\overline{FG} = 6$ 이므로 $\overline{PG} = 2\sqrt{13}$ 이다. 직선 OO'를 기준으로 점 G와 같은 영역의 원 C 위의 점 중에서 점 P와의 거리가 $2\sqrt{13}$ 인 점은 유일하므로 점 G와 점 Y는 같은 점이며 직선 YO가 원 C와 만나는 점은 Q이므로 점 F와 점 Q도 같은 점이다. 따라서 삼각형 YQP는 직각삼각형이다.

[1-4]

문제 [1-3]의 결과에 의해 $\overline{PQ} = 4$ 이며 직선 PQ는 원 C에 접한다. $\overline{PQ}^2 = \overline{PX} \times \overline{PY}$ 에 의해 $\overline{PX} = \frac{8}{\sqrt{13}}$ 이므로 $\overline{XY} = \frac{18\sqrt{13}}{13}$ 이다. 점 O'에서 선분 X'Y'에 내린 수선의 발을 점 R이라 하면 삼각형 O'RP는 직각삼각형이며 $\sin \angle OPX' = \sin \angle O'PR = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 이므로 $\overline{O'R} = \frac{8}{\sqrt{10}}$ 이다. 따라서 $\overline{X'Y'} = \frac{2}{5}\sqrt{65}$ 이다.

직선 OO'를 기준으로 위, 아래 두 영역이 구분될 때, 같은 영역에 $\overline{XY}$ 와 $\overline{X'Y'}$ 가 같이 있는 경우와 각 영역에 한 벡터씩 각각 있는 경우는 두 벡터의 사잇각이 다르다.

(i) $\overline{XY}$ 와 $\overline{X'Y'}$ 가 위, 아래 영역에 각각 있는 경우

$$\alpha = \angle O'PY', \beta = \angle YPQ, \gamma = \angle O'PQ, \delta = \angle YPO' \text{라 하면 } \tan \alpha = \frac{1}{3}, \tan \beta = \frac{3}{2}, \tan \gamma = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\tan \delta = \tan(\beta - \gamma) = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{2} \times \frac{3}{4}} = \frac{6}{17}$$

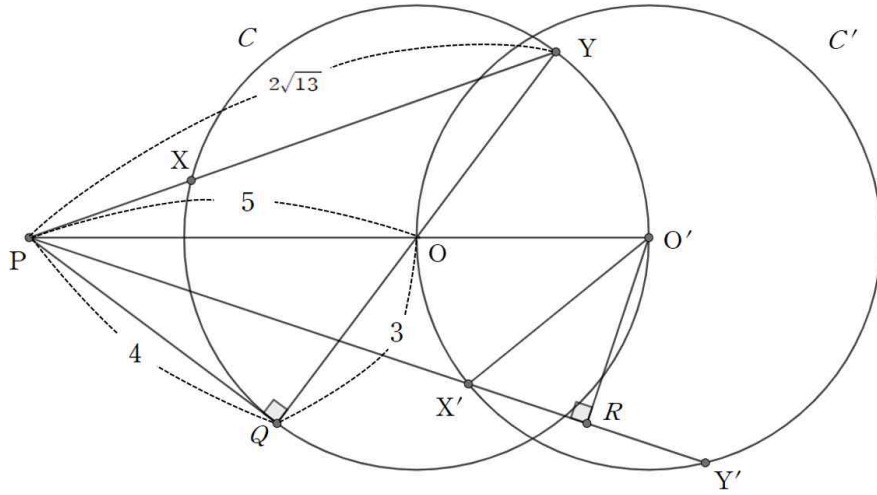
이며

$$\tan \angle YPY' = \tan(\delta + \alpha) = \frac{\frac{6}{17} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{6}{17} \times \frac{1}{3}} = \frac{7}{9}$$

이다. $\sec^2 \angle YPY' = 1 + \tan^2 \angle YPY' = 1 + \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{130}{81}$ 이므로

$$\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{X'Y'} = |\overrightarrow{XY}| |\overrightarrow{X'Y'}| \cos \angle YPY' = \left(\frac{18}{13}\sqrt{13}\right) \left(\frac{2}{5}\sqrt{65}\right) \frac{9}{\sqrt{130}} = \frac{162}{65}\sqrt{26}$$

이다.



(ii) $\overrightarrow{XY}$ 와 $\overrightarrow{X'Y'}$ 가 같은 영역에 있는 경우

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}, \tan \beta = \frac{3}{2}, \tan \gamma = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

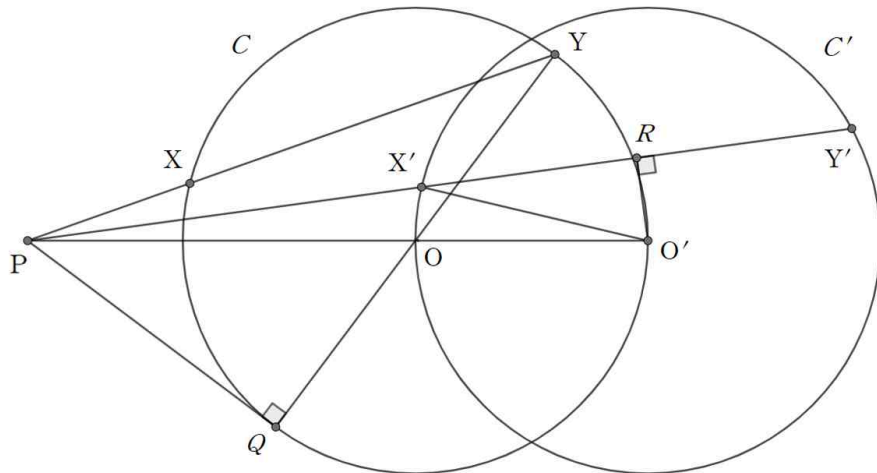
$$\tan \angle YPY' = \tan(\delta - \alpha) = \frac{\frac{6}{17} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{6}{17} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{57}$$

이다. 직선 XY와 직선 X'Y'의 교점이 점 P이므로 두 벡터 $\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{X'Y'}$ 가 이루는 각은 $\angle YPY'$ 이다.

$$\sec^2 \angle YPY' = 1 + \tan^2 \angle YPY' = 1 + \left(\frac{1}{57}\right)^2 = \frac{3250}{3249} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{X'Y'} = |\overrightarrow{XY}| |\overrightarrow{X'Y'}| \cos \angle YPY' = \left(\frac{18}{13}\sqrt{13}\right) \left(\frac{2}{5}\sqrt{65}\right) \frac{57}{5\sqrt{130}} = \frac{1026}{325}\sqrt{26}$$

이다.



■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1-1	$ \overrightarrow{PA} \leq 7$ 를 이해하여 점 A의 위치를 구함.	15점
	$ \overrightarrow{PB} \geq \sqrt{73}, \overrightarrow{PY'} \geq \sqrt{73}$ 를 이해하여 두 점 B, Y'의 위치를 구함.	15점
	$\angle BAY'$ 가 원주각임을 이해하여 최댓값이 $\angle BAY' = \frac{\pi}{2}$ 를 구함.	25점
	$\angle BAY' = \frac{\pi}{2}$ 를 만족하는 선분 BY'가 지름임을 확인하여 삼각형 BAY'의 넓이 9를 구함.	25점
1-2	선분 OO'의 중점인 점 H를 이용하여 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}$ 를 구함.	10점
	$\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{BA} = -2(\overrightarrow{HO'} \cdot \overrightarrow{HB}) + \overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{HA}$ 를 구함.	20점
	$-2(\overrightarrow{HO'} \cdot \overrightarrow{HB})$ 가 최댓값이 되는 점 B의 위치를 구함.	20점
	$\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{HA}$ 가 최댓값이 되는 점 A의 위치를 구함.	20점
	$\overrightarrow{AB} = 3$ 을 구함.	10점
1-3	$\overrightarrow{PF} = 4$ 를 구함.	10점
	$\overrightarrow{PF} = 4$ 를 이용하여 삼각형 GFP는 직각삼각형임을 보임.	20점
	$\overrightarrow{PG} = 2\sqrt{13}$ 을 이용하여 점 G와 점 Y는 같은 점임을 보임.	30점
	점 F와 점 Q도 같은 점임을 보임.	20점
1-4	$\overrightarrow{XY} = \frac{18\sqrt{13}}{13}$ 을 구함.	15점
	$\overrightarrow{X'Y'} = \frac{2}{5}\sqrt{65}$ 를 구함.	15점
	경우(i)의 두 벡터 사잇각 $\cos \angle YPY' = \frac{9}{\sqrt{130}}$ 를 구함.	20점
	경우(i)의 $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{X'Y'} = \frac{162}{65}\sqrt{26}$ 을 구함.	15점
	경우(ii)의 $\cos \angle YPY' = \frac{57}{5\sqrt{130}}$ 을 구함.	20점
	경우(ii)의 $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{X'Y'} = \frac{1026}{325}\sqrt{26}$ 을 구함.	15점

문항 2 (2-1~2-3)

2. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

<가> 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 와 삼차함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} & \cdot f(g(x)) = (x^2 + 2)e^x \\ & \cdot \frac{x(f'(g(x)) - e^x)}{f(g(x))} \leq 0 \end{aligned}$$

<나> 최고차항의 계수가 k ($k > 0$)이고 $x = \beta$ 에서 최솟값을 갖는 이차함수 $u(x)$ 와 함수 $v(x) = (ax + b)e^{u(x)}$ ($a < 0$)이 다음을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} & \cdot \text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } m(x - \beta)^2 - v(x)(x - \beta) \geq 0 \text{을 만족시키는 실수 } m \text{의 최솟값은 } -1 \text{이다.} \\ & \quad (\text{단, } \beta < 0 \text{이다.}) \\ & \cdot \int_0^2 v(x) dx = \int_{-2u(\beta+1)}^2 v(x) dx = \frac{e^{\beta^2} - e^{(\beta-2)^2}}{2k} \quad (\text{단, } u(\beta+1) \neq 0 \text{이다.}) \end{aligned}$$

2-1. 모든 실수 x 에 대하여 항상 $x(x^2 + 2x + 2 - g'(x)) \geq 0$ 이거나, 모든 실수 x 에 대하여 항상 $x(x^2 + 2x + 2 - g'(x)) \leq 0$ 임을 보이시오. [80점]

2-2. $u(0) = 1$ 일 때, 제시문 <나>의 조건을 만족시키는 함수 $v(x)$ 를 구하시오. [100점]

2-3. 문제 [2-2]에서 구한 함수 $v(x)$ 와 β 에 대하여 곡선 $y = \ln \left| \frac{v(x)}{x - \beta} \right|$ 와 x 축 및 두 직선 $x = \beta + 1, x = 2u(\beta + 1)$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고, x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 정사각형인 입체도형의 부피를 구하시오. [80점]

예시 답안

[2-1]

$f(g(x)) = (x^2 + 2)e^x$ 를 미분하면

$$f'(g(x))g'(x) = (2x)e^x + (x^2 + 2)e^x = (x^2 + 2x + 2)e^x. \text{ 여기서 } x^2 + 2x + 2 > 0.$$

$\therefore$ 모든 실수 x 에 대하여 $(x^2 + 2x + 2)e^x > 0$ 이므로 $g'(x) \neq 0$ 이다.

따라서 $g'(x)$ 의 부호는 일정하다.

$$\frac{f'(g(x))g'(x)}{f(g(x))} = \frac{(x^2 + 2x + 2)e^x}{(x^2 + 2)e^x} = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2}$$

따라서

$$\frac{f'(g(x))}{f(g(x))} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2)g'(x)}$$

이다.

한편,

$$\frac{e^x}{f(g(x))} = \frac{e^x}{(x^2 + 2)e^x} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

그러므로

$$\frac{f'(g(x)) - e^x}{f(g(x))} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2)g'(x)} - \frac{1}{x^2 + 2} = \frac{1}{x^2 + 2} \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{g'(x)} - 1 \right)$$

모든 실수 x 에 대하여 $\frac{x(x^2 + 2x + 2 - g'(x))}{(x^2 + 2)g'(x)} = \frac{x(f'(g(x)) - e^x)}{f(g(x))} \leq 0$ 이므로

㉠ $g'(x) > 0$ 이면 $x(x^2 + 2x + 2 - g'(x)) \leq 0$ 이고

㉡ $g'(x) < 0$ 이면 $x(x^2 + 2x + 2 - g'(x)) \geq 0$ 이다.

(참고)

$g'(x) < 0$ 이면 모든 실수 x 에 대하여 $(x^2 + 2x + 2 - g'(x)) \geq 0$ 이다.

이때 x 가 음수인 경우 $x(x^2 + 2x + 2 - g'(x)) \leq 0$ 이므로 ⑥ 명제는 제시문 <가>의 조건인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\frac{x(f'(g(x)) - e^x)}{f(g(x))} \leq 0$ 에 맞지 않게 된다.

[2-2]

이차함수 $u(x)$ 가 $x = \beta$ 에서 최소이므로 $x = \beta$ 에 대해 대칭이고, $u(0) = 1$ 이므로 $u(x) = kx^2 - 2\beta kx + 1$ 로 둘 수 있다.

조건 $m(x - \beta)^2 - v(x)(x - \beta) \geq 0$ 를 정리하면 $(x - \beta)(v(x) - m(x - \beta)) \leq 0$ 이므로

$$\begin{cases} v(x) \leq m(x - \beta) & (x \geq \beta) \\ v(x) \geq m(x - \beta) & (x < \beta) \end{cases} \quad \cdots (*)$$

임을 알 수 있다. $v(x)$ 는 연속함수이므로 $v(\beta) = 0$ 이 되어

$v(\beta) = (a\beta + b)e^{u(\beta)} = 0$ 즉, $b = -a\beta$ 이다. 따라서 $v(x) = a(x - \beta)e^{u(x)}$ 이다. 이를 미분하면

$v'(x) = a(1 + 2k(x - \beta)^2)e^{kx^2 - 2\beta kx + 1}$ 은 $k > 0$, $a < 0$ 이므로 항상 $v'(x) < 0$ 이다.

$v''(x) = 2ak(x - \beta)(2k(x - \beta)^2 + 3)e^{kx^2 - 2\beta kx + 1}$ 는 $v''(\beta) = 0$ 이고, $x = \beta$ 에서 부호가 양수에서 음수로 바뀌므로 변곡점이 된다.

이때, (*)에 의해 $x = \beta$ 에서 직선 $y = m(x - \beta)$ 의 기울기가 $v(x)$ 의 접선의 기울기보다 크거나 같다는 것을 알 수 있다. $v'(\beta)$ 는 직선 $y = m(x - \beta)$ 의 기울기 m 중의 하나이고, $m \geq v'(\beta)$ 로 나타낼 수 있다. m 의 최솟값이 -1 이므로 $v'(\beta) = ae^{-k\beta^2 + 1} = -1$ 이 된다. 따라서 $a = -e^{k\beta^2 - 1}$ 이다.

조건을 치환적분하여 계산하면

$$\begin{aligned} \int_0^2 v(x) dx &= \int_0^2 a(x - \beta)e^{kx^2 - 2\beta kx + 1} dx \\ &= \frac{a}{2k} [e^{kx^2 - 2\beta kx + 1}]_0^2 = \frac{a}{2k} (e^{4k - 4\beta k + 1} - e) \\ &= \frac{-e^{k\beta^2 - 1}(e^{4k - 4\beta k + 1} - e)}{2k} = \frac{-e^{k(\beta - 2)^2} + e^{k\beta^2}}{2k} \end{aligned}$$

이고, 이는 $\frac{-e^{(\beta - 2)^2} + e^{\beta^2}}{2k}$ 과 같으므로 $k = 1$ 을 구할 수 있다.

$$\int_0^2 v(x) dx = \int_{-2u(\beta+1)}^2 v(x) dx$$

에서

$$\int_0^2 v(x) dx - \int_{-2u(\beta+1)}^2 v(x) dx = \int_0^{-2u(\beta+1)} v(x) dx = 0$$

이 된다.

치환 적분하면

$$\int_{-2u(\beta+1)}^0 -e^{\beta^2 - 1}(x - \beta)e^{x^2 - 2\beta x + 1} dx = -\frac{e^{\beta^2 - 1}}{2} [e^{x^2 - 2\beta x + 1}]_{-2u(\beta+1)}^0$$

이고,

$$-\frac{1}{2}e^{\beta^2} (1 - e^{4(u(\beta+1))^2 + 4\beta u(\beta+1)}) = 0$$

이 되므로 $e^{4(u(\beta+1))^2 + 4\beta u(\beta+1)} = 1$ 이다.

이는 $0 = (u(\beta + 1))^2 + \beta u(\beta + 1) = u(\beta + 1)(u(\beta + 1) + \beta)$ 이므로, $u(\beta + 1) = -\beta$ 이다. ($\because u(\beta + 1) \neq 0$)

$u(\beta + 1) = (\beta + 1)^2 - 2\beta(\beta + 1) + 1 = -\beta^2 + 2 = -\beta$ 이고,

$\beta^2 - \beta - 2 = 0$ 이므로 $\beta = -1$ ($\because \beta < 0$)이다.

따라서 $a = -1$ 이고, $b = -a\beta = -1$ 이고,

함수 $u(x) = x^2 + 2x + 1$ 와 $v(x) = -(x+1)e^{x^2+2x+1}$ 이 된다.

[2-3]

$\beta = -1$ 이므로 곡선 $y = \ln \left| \frac{v(x)}{x - \beta} \right| = \ln \left| -\frac{(x+1)e^{(x+1)^2}}{x+1} \right| = (x+1)^2$ (단, $x \neq -1$)와 x 축 및 두 직선 $x = 0$, $x = 2u(0) = 2$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 정사각형 단면의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = (t+1)^4$$

이므로 입체도형의 부피는

$$\int_0^2 (t+1)^4 dt = \frac{242}{5}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2-1	$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ 임을 보임	10점
	$g'(x) \neq 0$ 임을 보임.	30점
	$g'(x) > 0$ 이면 $x(x^2 + 2x + 2 - g'(x)) \leq 0$ 임을 보임.	20점
	$g'(x) < 0$ 이면 $x(x^2 + 2x + 2 - g'(x)) \geq 0$ 임을 보임. 또는 이 명제는 제시문의 조건에 맞지 않음을 보임.	20점
2-2	조건에 의해 $v'(\beta) = -1$ 임을 보이고, 이를 이용하여 $a = -e^{k\beta^2-1}$ 을 구함.	25점
	치환적분을 이용하여 $k = 1$ 을 구함.	25점
	치환적분을 이용하여 $u(\beta + 1) = -\beta$ 를 구함.	25점
	함수 $u(x)$ 와 $v(x)$ 를 구함.	25점
2-3	밑면의 경계를 $y = (x+1)^2$, x 축, $x = 0$, $x = 2$ 로 표현함.	20점
	단면의 넓이 $S(t) = (t+1)^4$ 를 구함.	30점
	적분값 $\int_0^2 (t+1)^4 dt = \frac{242}{5}$ 를 구함.	30점

문항 3 (3-1~3-4)

3. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

- <가> 한 회사에서 출시한 스마트워치는 Ω 질환 치료제의 치료 성분인 A의 혈중 농도를 채혈하지 않고 측정할 수 있다.
- <나> 한 제약회사에서 Ω 질환 치료제 $\mathcal{H}$ 를 만들었다. 치료제 $\mathcal{H}$ 한 알에 포함된 치료 성분 A의 양은 β 이다. Ω 질환을 갖고 있는 환자 100명을 모집하여 임상실험을 실시하였다. 약은 24시간마다 주기적으로 한 알씩 복용하였고, 실시간으로 A의 혈중 농도를 측정하여 평균값을 구하였다. 이를 이용하여 시각 t 에서 A의 혈중 농도를 나타내는 함수 $f(t)$ 를 구하였다. 복용 직전 A의 혈중 농도 α 에 대하여 함수 $f(t)$ 는 다음과 같다.

$$f(t) = \begin{cases} \alpha + 0.27\beta t & (0 \leq t \leq 2) \\ (\alpha + 0.54\beta)e^{-\sqrt{\frac{t-2}{10}}} & (2 < t \leq 24) \end{cases}$$

n 번째 복용 주기에서 함수 $f(t)$ 의 최댓값을 a_n , 최솟값을 b_n 이라 한다. A의 혈중 농도가 10 ppm과 100 ppm 사이일 때 치료 효과가 있고, 100 ppm 이상이 되면 부작용이 발생할 가능성이 있다. (단, 매일 약을 복용하는 시각은 $t = 0$ 이다.)

- 3-1. 제시문 <나>의 실험에서 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 125$ 일 때, 함수 $f(t)$ 를 따르는 환자가 3번째 약을 복용하기 직전 A의 혈중 농도를 구하시오. (단, $e^{-\sqrt{2.2}}$ 은 0.23으로 계산하고, 소수점 둘째 자리에서 반올림하시오.) [60점]
- 3-2. 제시문 <나>의 실험에서 $\alpha = 5$ 이고 $\beta = 100$ 일 때, 함수 $f(t)$ 를 따르는 환자의 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 을 구하시오. (단, $e^{-\sqrt{2.2}}$ 은 0.23으로 계산하고, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 과 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 은 소수점 둘째 자리에서 반올림하시오.) [80점]
- 3-3. 제시문 <나>의 실험에서 $\alpha = 0$ 일 때, 함수 $f(t)$ 를 따르는 환자에게서 부작용이 발생할 가능성을 없게 하려 한다. 이때, β 가 될 수 있는 가장 큰 정수를 구하시오. [90점]
- 3-4. 제시문 <나>에서 $\alpha = 0$ 이고, $\beta = 100$ 이다. 임상실험 참가자의 n 번째 복용 주기에서 A의 혈중 최대 농도는 정규분포 $N(a_n, \sigma^2)$ 을 따른다. 부작용이 발생할 가능성이 있는 사람이 1명 이하가 되게 하는 표준편차 σ 중 가장 큰 정수를 구하시오. (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \leq 2.58) = 0.99$, $P(Z \leq 2.33) = 0.99$ 로 계산한다.) [90점]

예시 답안

[3-1]

첫 번째 약을 복용하기 직전의 A의 혈중 농도는 0이고, 이는 첫 번째 주기에서의 최소 농도 b_1 과 같다. 두 번째 약을 복용하기 직전의 A의 혈중 농도는 $\alpha = 0$ 일 때의 $f(24)$ 의 값과 같으므로

$$b_2 = f(24) = 0.54 \times 125 \times e^{-\sqrt{2.2}} = 0.54 \times 125 \times 0.23$$

이다. 마찬가지로 세 번째 약을 복용하기 직전의 A의 혈중 농도는 세 번째 약을 복용한 주기에서의 최소 농도 b_3 이다. 따라서 $\alpha = b_2$ 일 때의 $f(24)$ 의 값과 같으므로

$$b_3 = 0.54 \times 125 \times 0.23 + 0.54 \times 125 \times 0.23^2 = \frac{76383}{4000} \approx 19.1$$

이다.

[3-2]

한 주기에서 A의 혈중 농도가 최대가 되는 시기는 약을 복용한 후 2시간이 지났을 때이다. 그리고 한 주기에서 A의 혈중농도가 최소가 되는 시기는 약을 복용한 직후이다. 첫 번째 약을 복용하기 직전의 치료 성분의 체내 농도가 5 ppm이었으므로, $\alpha = 5$ 이다. $\beta = 100$ 이므로 첫 번째 주기에서의 치료 성분의 최대 농도 a_1 과 최소 농도 b_1 은 다음과 같다.

$$b_1 = 5, \quad a_1 = 5 + 54 = 59$$

두 번째 주기에서 치료 성분의 최대 농도 a_2 와 b_2 는 다음과 같다.

$$b_2 = 59e^{-\sqrt{2.2}} = 59 \times 0.23, \quad a_2 = 59 \times 0.23 + 54$$

세 번째 주기에서 치료 성분의 최대 농도 a_3 와 b_3 는 다음과 같다.

$$b_3 = (59 \times 0.23 + 54) \times 0.23 = 59 \times (0.23)^2 + 54 \times 0.23, \quad a_3 = 59 \times (0.23)^2 + 54 \times 0.23 + 54$$

이를 반복적으로 적용하면,

$$b_n = 59 \times (0.23)^{n-1} + 54 \times (0.23)^{n-2} + \dots + 54 \times (0.23)$$

$$a_n = 59 \times (0.23)^{n-1} + 54 \times (0.23)^{n-2} + \dots + 54$$

이다. 따라서 $a_n = b_n + 54$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [59 \times (0.23)^{n-1} + \{54 \times 0.23 + 54 \times (0.23)^2 + \dots + 54 \times (0.23)^{n-2}\}]$$

$$= \frac{54 \times 0.23}{1 - 0.23} = \frac{12.42}{0.77} = \frac{1242}{77} \approx 16.1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 54 + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 54 + 16.1 = 70.1$$

[3-3]

치료 성분의 함량이 β 인 약을 복용한 경우 n 번째 주기에서의 최대 농도를 a_n 이라 하자. $\alpha = 0$ 일 때 이므로

$$a_n = \frac{54\beta}{100} + \frac{54\beta}{100} \times 0.23 + \frac{54\beta}{100} \times (0.23)^2 + \dots + \frac{54\beta}{100} \times (0.23)^{n-1}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{0.54\beta}{0.77} = \frac{54\beta}{77} < 100$$

이어야 하므로 $\beta < \frac{7700}{54} \approx 142.6$ 이다. 따라서 최대 정수인 $\beta = 142$ 이다.

[3-4]

100명의 임상실험자 중 부작용이 발생하는 사람이 많아 1명이기 위해서는 99명의 실험자의 A의 혈중 농도의 최댓값이 100 ppm보다 작아야 한다. 확률변수 X 가 정규분포 $N(a_n, \sigma^2)$ 을 따르면 $Z = \frac{X - a_n}{\sigma}$ 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 따라서 $P(Z \leq 2.33) = 0.99$ 이므로

$$\frac{X - a_n}{\sigma} \leq 2.33 \Rightarrow X \leq a_n + 2.33\sigma$$

이다. 주기가 반복될 때마다 체내 치료 성분의 농도는 지속적으로 증가하므로 모든 a_n 에 대하여 $a_n + 2.33\sigma < 100$ 이려면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2.33\sigma) < 100$$

을 만족해야 한다. $\beta = 100$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 70.1$ 이고,

$$\sigma < 12.8$$

이다. 따라서 정수인 σ 의 최댓값은 $\sigma = 12$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
[3-1]	두 번째 약을 복용하기 직전의 혈중 농도가 $f(24) = b_2$ 임을 보임.	30점
	세 번째 약을 복용하기 직전의 혈중 농도가 $b_3 = \frac{76383}{4000} \approx 19.1$ 를 구함.	30점
[3-2]	$b_n = 59 \times (0.23)^{n-1} + 54 \times (0.23)^{n-2} + \dots + 54 \times (0.23)$ 을 구함.	20점
	$a_n = 59 \times (0.23)^{n-1} + 54 \times (0.23)^{n-2} + \dots + 54$ 를 구함.	20점

하위 문항	채점 기준	배점
	$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1242}{77} \approx 16.1$ 을 구함.	20점
	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{5400}{77} \approx 70.1$ 을 구함.	20점
[3-3]	$a_n = \frac{54\beta}{100} + \frac{54\beta}{100} \times 0.23 + \frac{54\beta}{100} \times (0.23)^2 + \dots + \frac{54\beta}{100} \times (0.23)^{n-1}$ 을 구함.	30점
	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{0.54\beta}{0.77} = \frac{54\beta}{77} \approx 0.7\beta$ 를 구함.	30점
	최대 정수인 $\beta = 142$ 를 구함.	30점
[3-4]	$\frac{X - a_n}{\sigma} \leq 2.33 \Rightarrow X \leq a_n + 2.33\sigma$ 를 구함.	30점
	$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2.33\sigma) < 100$ 이어야 함을 보임.	30점
	$\sigma = 12$ 를 구함.	30점

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다