

수원대 약술형논술

수학

목차

2026학년도 논술고사 수학영역	3
문항 6	3
문항 7	4
문항 8	5
문항 9	6
문항 10	7
문항 11	9
문항 12	10
문항 13	11
문항 14	12
문항 15	13
 2025학년도 논술고사 수학영역	 15
문항 6	15
문항 7	16
문항 8	17
문항 9	19
문항 10	20
문항 11	22
문항 12	23
문항 13	24
문항 14	25
문항 15	27
 2024학년도 논술고사 수학영역	 29
문항 6	29
문항 7	30
문항 8	31
문항 9	32
문항 10	33
문항 11	34
문항 12	35
문항 13	36
문항 14	37
문항 15	38

2026학년도

논술고사 수학영역

문항 6

6. 등식 $9^a = 6^{\log_{\sqrt{2}} 3} \div b^{\log_2 3}$ 이 성립하도록 하는 두 자연수 a 와 b 의 값을 구하는 과정을 논술하시오.

예시 답안

로그성질 $\log_{\sqrt{2}} 3 = 2 \log_2 3 = \log_2 9$ 과 $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ 를 이용하면,

$$3^{2a} = 9^a = 6^{\log_{\sqrt{2}} 3} \div b^{\log_2 3} = 9^{\log_2 6} \div 3^{\log_2 b} = 3^{\log_2 36 - \log_2 b} = 3^{\log_2 \frac{36}{b}}$$

에서 $2a = \log_2 \frac{36}{b}$, 즉, $2^{2a} = \frac{36}{b}$ 이다.

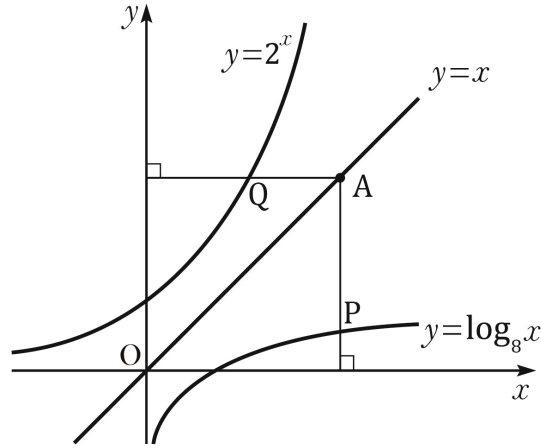
$36 = 4 \times 9 = 4^a \times b$ 가 성립하기 위한 두 자연수는 $a = 1, b = 9$

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	로그성질 $\log_{\sqrt{2}} 3 = 2 \log_2 3 = \log_2 9$ 과 $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ 를 이용하여 정리, $3^{2a} = 9^a = 6^{\log_{\sqrt{2}} 3} \div b^{\log_2 3} = 9^{\log_2 6} \div 3^{\log_2 b} = 3^{\log_2 36 - \log_2 b} = 3^{\log_2 \frac{36}{b}}$. (또는, $9^a = 6^{\log_{\sqrt{2}} 3} \div b^{\log_2 3} = 3^{\log_{\sqrt{2}} 6} \div 3^{\log_2 b} = 3^{2 \log_2 6} \div 3^{\log_2 b} = 3^{\log_2 36 - \log_2 b} = 3^{\log_2 \frac{36}{b}}$)	5점
(2)	$2a = \log_2 \frac{36}{b}$, 즉, $2^{2a} = \frac{36}{b}$	2점
(3)	$36 = 4 \times 9 = 4^a \times b$ 가 성립하기 위한 두 자연수는 $a = 1, b = 9$.	3점

문항 7

7. 그림과 같이 직선 $y = x$ 위의 점 $A(a, a)$ 를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \log_8 x$ 와 만나는 점을 P, 점 A를 지나고 y 축에 수직인 직선이 곡선 $y = 2^x$ 와 만나는 점을 Q라 하자. $|\overline{AP} - \overline{AQ}|$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 최소의 자연수 a 에 대하여 선분 PQ의 길이를 구하는 과정을 논술하시오. (단, $a > 1$)



■ 예시 답안

두 점의 좌표를 각각 구하면, $P = P(a, \log_8 a)$, $Q = Q(\log_2 a, a)$ 이다.

$\overline{AP} = a - \log_8 a$, $\overline{AQ} = a - \log_2 a$ 이므로,

$$|\overline{AP} - \overline{AQ}| = \log_2 a - \log_8 a = \frac{2}{3} \log_2 a.$$

$\frac{2}{3} \log_2 a$ 가 자연수이려면 $\log_2 a = \frac{3}{2}k$ (단, $k = 1, 2, 3, \dots$) 형태.

$a = 2^{\frac{3k}{2}} = \sqrt{8^k}$ 가 최소의 자연수이려면 $k = 2$ 일 때 $a = 8$ 이다.

그래서 $P(8, 1)$, $Q(3, 8)$ 에 대하여, $\overline{PQ} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	두 점의 좌표를 각각 구하면, $P = P(a, \log_8 a)$, $Q = Q(\log_2 a, a)$ 이다.	3점
(2)	$\overline{AP} = a - \log_8 a$, $\overline{AQ} = a - \log_2 a$ 이므로, $ \overline{AP} - \overline{AQ} = \log_2 a - \log_8 a = \frac{2}{3} \log_2 a$.	3점
(3)	$\frac{2}{3} \log_2 a$ 가 자연수이려면 $\log_2 a = \frac{3}{2}k$ (단, $k = 1, 2, 3, \dots$) 형태, $a = 2^{\frac{3k}{2}} = \sqrt{8^k}$ 가 최소의 자연수이려면 $k = 2$ 일 때 $a = 8$ 이다.	2점
(4)	그래서 $P(8, 1)$, $Q(3, 8)$ 에 대하여, $\overline{PQ} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$.	2점

문항 8

8. $\frac{1}{1 + \sin(\pi - \theta)} - \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = 4 \tan \theta$ 를 만족시키는 θ 의 값과 그때의 $\sin \theta$ 의 값을 구하는 과정을 논술 하시오. (단, $-\pi < \theta < \pi$)

■ 예시 답안

$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$ 이므로

준식은 $\frac{1}{1 + \sin \theta} - \frac{1}{1 - \sin \theta} = -\frac{2 \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} = -\frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = 4 \tan \theta = 4 \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 가 된다.

그래서 $\sin \theta = 0$ 또는 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$.

$\cos \theta = -\frac{1}{2}$ 에서 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta = -\frac{2}{3}\pi$. (또는 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$)

그러므로 $\theta = 0$ 일 때 $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$ 이므로	2점
(2)	준식은 $\frac{1}{1 + \sin \theta} - \frac{1}{1 - \sin \theta} = -\frac{2 \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} = -\frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} = 4 \tan \theta = 4 \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 가 된다.	2점
(3)	그래서 $\sin \theta = 0$ 또는 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$.	2점
(4)	$\cos \theta = -\frac{1}{2}$ 에서 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta = -\frac{2}{3}\pi$. (또는 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ 에서 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. $\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.)	2점
(5)	그러므로 $\theta = 0$ 일 때 $\sin 0 = 0$ (위에서 이미 점수 산정) $\sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.	2점

문항 9

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+1} - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - 1} = b$ 일 때, 실수 a 와 b 의 값을 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

극한값 $b (\neq 0)$ 을 가지므로, $x \rightarrow 1$ 일 때 분모 $\rightarrow 0$ 이어서 분자 $\rightarrow 0$ 이어야 함.

그래서 $\sqrt{a+1} - \sqrt{3} = 0$, 즉, $a = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+1} - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1-3}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3}} \\ &= 2 \cdot \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

즉, $b = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	극한값 $b (\neq 0)$ 을 가지므로, $x \rightarrow 1$ 일 때 분모 $\rightarrow 0$ 이어서 분자 $\rightarrow 0$ 이어야 함. 그래서 $\sqrt{a+1} - \sqrt{3} = 0$, 즉, $a = 2$.	2점
(2)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+1} - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - 1}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3}}$	4점
(3)	$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1-3}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3}}$	2점
(4)	$= 2 \cdot \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$ 즉, $b = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.	2점

문항 10

10. 첫째항 $a_1 = 1$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$ 로 주어진 수열 $\{b_n\}$ 의 부분합 $S_{2025} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2024} + b_{2025} = 50$ 일 때, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

공차를 d 라고 하면 $a_n = 1 + (n-1)d$. 그러므로

$$b_n = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{a_n - a_{n+1}} = -\frac{1}{d}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}).$$

$$\begin{aligned} S_{2025} &= -\frac{1}{d}(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_2} - \sqrt{a_3} + \cdots + \sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_{2026}}) \\ &= -\frac{1}{d}(1 - \sqrt{1 + 2025d}) = 50. \end{aligned}$$

그러면 $1 + 2025d = (50d + 1)^2 = 2500d^2 + 100d + 1$.

$$\text{즉, } d = \frac{2025 - 100}{2500} = \frac{81 - 4}{100} = \frac{77}{100} = 0.77.$$

■ 채점 기준

채점 기준 1

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	공차를 d 라고 하면 $a_n = 1 + (n-1)d$. 그러므로 $S_{2025} = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1+d}} + \frac{1}{\sqrt{1+d} + \sqrt{1+2d}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+2024d} + \sqrt{1+2025d}}$	2점
(2)	$= \frac{\sqrt{1} - \sqrt{1+d}}{1 - (1+d)} + \frac{\sqrt{1+d} - \sqrt{1+2d}}{(1+d) - (1+2d)} + \cdots + \frac{\sqrt{1+2024d} - \sqrt{1+2025d}}{1+2024d - (1+2025d)}$	3점
(3)	$= -\frac{1}{d}(\sqrt{1} - \sqrt{1+2025d}) = 50$	2점
(4)	그러면 $1 + 2025d = (50d + 1)^2 = 2500d^2 + 100d + 1$.	1점
(5)	즉, $d = \frac{2025 - 100}{2500} = \frac{81 - 4}{100} = \frac{77}{100} = 0.77$.	2점

채점 기준 2

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	공차를 d 라고 하면 $a_n = 1 + (n-1)d$. 그러므로 $b_n = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{a_n - a_{n+1}} = -\frac{1}{d}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}})$	3점
(2)	$S_{2025} = -\frac{1}{d}(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_2} - \sqrt{a_3} + \cdots + \sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_{2026}})$	2점
(3)	$= -\frac{1}{d}(1 - \sqrt{1 + 2025d}) = 50$	2점
(4)	그러면 $1 + 2025d = (50d + 1)^2 = 2500d^2 + 100d + 1$.	1점
(5)	즉, $d = \frac{2025 - 100}{2500} = \frac{81 - 4}{100} = \frac{77}{100} = 0.77$.	2점

문항 11

11. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = (x^3 - 3)f(x)$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 5}{x - 2} = 22$ 일 때, $f(2) \times f'(2)$ 의 값을 구하는 과정을 논술하시오.

예시 답안

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 5}{x - 2} = 22$ 에서 분모가 0으로 수렴하는데 극한이 존재하므로 분자도 0으로 수렴함.

따라서 $g(2) = 5$.

$g(x) = (x^3 - 3)f(x)$ 식에 $x = 2$ 를 대입하면 $f(2) = 1$.

$$g'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 5}{x - 2} = 22.$$

$g(x) = (x^3 - 3)f(x)$ 에서 $g'(x) = 3x^2f(x) + (x^3 - 3)f'(x)$ 이고

$x = 2$ 를 대입하면 $g'(2) = 12f(2) + 5f'(2)$ 이므로 $f'(2) = 2$

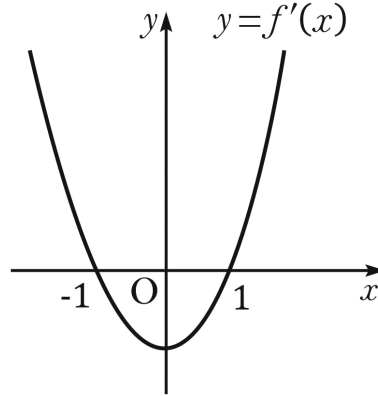
따라서 $f(2) \times f'(2) = 2$.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 5}{x - 2} = 22$ 에서 분모가 0으로 수렴하는데 극한이 존재하므로 분자도 0으로 수렴함. 따라서 $g(2) = 5$.	2점
(2)	$g(x) = (x^3 - 3)f(x)$ 식에 $x = 2$ 를 대입하면 $f(2) = 1$.	2점
(3)	$g'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 5}{x - 2} = 22$.	2점
(4)	$g(x) = (x^3 - 3)f(x)$ 에서 $g'(x) = 3x^2f(x) + (x^3 - 3)f'(x)$ 이고	2점
(5)	$x = 2$ 를 대입하면 $g'(2) = 12f(2) + 5f'(2)$ 이므로 $f'(2) = 2$	1점
(6)	따라서 $f(2) \times f'(2) = 2$.	1점

문항 12

12. 최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. $-1 \leq x \leq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x)f'(x) \leq 0$ 이 성립할 때, $f(3)$ 의 최솟값을 구하는 과정을 논술하시오.



예시 답안

최고차 항의 계수가 2인 삼차함수는 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ 로 표현할 수 있고 이를 미분하면 $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$ 이다.

그래프를 이용하면 $y = f'(x) = k(x-1)(x+1) = kx^2 - k$ 로 표현되므로 $k = 6, a = 0, b = -6$ 이다.

이때 $-1 \leq x \leq 1$ 인 구간에서 $y = f'(x) \leq 0$ 이므로 $f(x)f'(x) \leq 0$ 조건이 성립하기 위해 $f(-1) \geq 0$ 이고 $f(1) \geq 0$ 의 조건을 만족해야 한다.

따라서 $f(x) = 2x^3 - 6x + c$ 에서 $f(-1) = 4 + c \geq 0$ 과 $f(1) = -4 + c \geq 0$ 을 동시에 만족하는 최소의 c 는 4이다.

따라서 $f(3)$ 의 최솟값은 $f(3) = 54 - 18 + 4 = 40$.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	최고차 항의 계수가 2인 삼차함수는 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ 로 표현할 수 있고 이를 미분하면 $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$ 이다.	1점
(2)	그래프를 이용하면 $y = f'(x) = k(x-1)(x+1) = kx^2 - k$ 로 표현되므로 $k = 6, a = 0, b = -6$ 이다.	2점
(3)	이때 $-1 \leq x \leq 1$ 인 구간에서 $y = f'(x) \leq 0$ 이므로 $f(x)f'(x) \leq 0$ 조건이 성립하기 위해 $f(-1) \geq 0$ 이고 $f(1) \geq 0$ 의 조건을 만족해야 한다.	3점
(4)	따라서 $f(x) = 2x^3 - 6x + c$ 에서 $f(-1) = 4 + c \geq 0$ 과 $f(1) = -4 + c \geq 0$ 을 동시에 만족하는 최소의 c 는 4이다.	2점
(5)	따라서 $f(3)$ 의 최솟값은 $f(3) = 54 - 18 + 4 = 40$.	2점

문항 13

13. 시각 t 에서의 위치가 $x(t) = at^3 + bt^2 - 9t$ 인 수직선 위를 움직이는 점 P가 시각 $t = 1$ 일 때 운동 방향을 바꾸며 시각 $t = 5$ 에서 -18 의 가속도를 갖는다고 하자.

점 P가 운동 방향을 다시 바꾸는 시각을 구하는 과정을 논술하시오. (단, a 와 b 는 상수)

■ 예시 답안

운동방향을 바꾸는 순간의 속도는 0임을 이용한다.

$$x'(t) = 3at^2 + 2bt - 9 \text{ 에서 } x'(1) = 3a + 2b - 9 = 0$$

$$x''(t) = 6at + 2b \text{ 에서 } x''(5) = 30a + 2b = -18$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 6$

$$\text{그러므로 } x'(t) = -3t^2 + 12t - 9 = -3(t-1)(t-3)$$

그러므로 P가 운동 방향을 다시 바꾸는 시각은 $t = 3$.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	운동방향을 바꾸는 순간의 속도는 0임을 이용한다. $x'(t) = 3at^2 + 2bt - 9$ 에서 $x'(1) = 3a + 2b - 9 = 0$	2점
(2)	$x''(t) = 6at + 2b$ 에서 $x''(5) = 30a + 2b = -18$	2점
(3)	두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 6$	2점
(4)	그러므로 $x'(t) = -3t^2 + 12t - 9 = -3(t-1)(t-3)$	2점
(5)	그러므로 P가 운동 방향을 다시 바꾸는 시각은 $t = 3$.	2점

문항 14

14. 함수 $f(x) = \int_{-x}^x 3(t+1)(t-4) dt$ 의 극댓값과 극솟값을 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

$$f(x) = 3 \int_{-x}^x (t^2 - 3t - 4) dt = 3 \int_{-x}^x (t^2 - 4) dt = 6 \int_0^x (t^2 - 4) dt$$

미적분 기본정리에 의해 $f'(x) = 6(x^2 - 4) = 6(x-2)(x+2)$

극점은 $x = \pm 2$

$$f(2) = 6 \int_0^2 (t^2 - 4) dt = 2t^3 - 24t \Big|_0^2 = -32$$

$$f(-2) = \int_2^{-2} 3(t+1)(t-4) dt = - \int_{-2}^2 3(t+1)(t-4) dt = -f(2) = 32$$

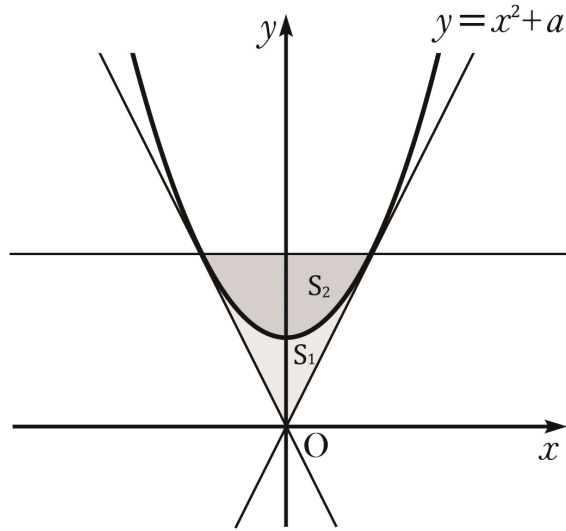
극댓값은 32, 극솟값은 -32.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$f(x) = 3 \int_{-x}^x (t^2 - 3t - 4) dt = 3 \int_{-x}^x (t^2 - 4) dt = 6 \int_0^x (t^2 - 4) dt$	4점
(2)	미적분 기본정리에 의해 $f'(x) = 6(x^2 - 4) = 6(x-2)(x+2)$ 극점은 $x = \pm 2$	3점
(3)	$f(2) = 6 \int_0^2 (t^2 - 4) dt = 2t^3 - 24t \Big _0^2 = -32$ $f(-2) = \int_2^{-2} 3(t+1)(t-4) dt = - \int_{-2}^2 3(t+1)(t-4) dt = -f(2) = 32$ 극댓값은 32, 극솟값은 -32.	3점

문항 15

15. 양수 a 에 대하여 곡선 $y = x^2 + a$ 와 원점에서 곡선에 그은 두 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하고, 곡선과 두 접점을 지나며 x 축과 평행한 직선에 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하자. S_2 는 S_1 의 2배가 됨을 보이는 과정을 논술하시오.



■ 예시 답안

접점의 x 좌표를 t 라 하면 접선의 방정식은 $y = 2t(x - t) + t^2 + a$

원점을 지나므로 $0 = -2t^2 + t^2 + a$ 로부터 $t = \pm\sqrt{a}$

접선은 $y = \pm 2\sqrt{a}x$

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \int_0^{\sqrt{a}} (x^2 + a - 2\sqrt{a}x) dx = \left. \frac{2}{3}x^3 + 2ax - 2\sqrt{a}x^2 \right|_0^{\sqrt{a}} \\ &= \frac{2}{3}a\sqrt{a} + 2a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a} \end{aligned}$$

x 축과 평행한 직선은 $y = 2a$

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \int_0^{\sqrt{a}} \{2a - (x^2 + a)\} dx = 2 \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left. 2ax - \frac{2}{3}x^3 \right|_0^{\sqrt{a}} \\ &= 2a\sqrt{a} - \frac{2}{3}a\sqrt{a} = \frac{4}{3}a\sqrt{a} \end{aligned}$$

또는 삼각형의 넓이 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{a} \times 2a = 2a\sqrt{a}$ 구한 후 $S_2 = 2a\sqrt{a} - S_1 = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
①	접점의 x 좌표를 t 라 하면 접선의 방정식은 $y = 2t(x - t) + t^2 + a$ 원점을 지나므로 $0 = -2t^2 + t^2 + a$ 로부터 $t = \pm\sqrt{a}$	2점
②	접선은 $y = \pm 2\sqrt{a}x$	2점
③	$S_1 = 2 \int_0^{\sqrt{a}} (x^2 + a - 2\sqrt{a}x) dx = \frac{2}{3}x^3 + 2ax - 2\sqrt{a}x^2 \Big _0^{\sqrt{a}}$ $= \frac{2}{3}a\sqrt{a} + 2a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$	3점
④	x 축과 평행한 직선은 $y = 2a$ $S_2 = 2 \int_0^{\sqrt{a}} \{2a - (x^2 + a)\} dx = 2 \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = 2ax - \frac{2}{3}x^3 \Big _0^{\sqrt{a}}$ $= 2a\sqrt{a} - \frac{2}{3}a\sqrt{a} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$ 또는 삼각형의 넓이 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{a} \times 2a = 2a\sqrt{a}$ 구한 후 $S_2 = 2a\sqrt{a} - S_1 = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$	3점

2025학년도

논술고사 수학영역

문항 6

6. 곡선 $y = 9^{x-2}$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 후에 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 곡선을 $y = f(x)$ 라 하자. 그리고 곡선 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+8}$ 을 x 축의 방향으로 a^2 만큼 평행이동한 곡선을 $y = g(x)$ 라 하자. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 일 때 양수 a 의 값을 구하는 과정을 논술하시오.

예시 답안

곡선 $y = 9^{x-2}$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y = 9^{-x-2}$ 이고,

이 곡선을 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 곡선은 $y = 9^{-(x-a)-2}$

$$\Rightarrow f(x) = 9^{-(x-a)-2}$$

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+8}$ 을 x 축의 방향으로 a^2 만큼 평행이동한 곡선은 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x-a^2)+8}$

$$\Rightarrow g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x-a^2)+8}$$

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 이므로 $9^{-(x-a)-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x-a^2)+8}$

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{9}\right)^{(x-a)+2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-a^2+4}$$

그러므로 $x - a + 2 = x - a^2 + 4$ 또는 $a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1) = 0$

$a > 0$ 이므로 $a = 2$

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
①	곡선 $y = 9^{x-2}$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y = 9^{-x-2}$ 이고, 이 곡선을 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 곡선은 $y = 9^{-(x-a)-2}$ $\Rightarrow f(x) = 9^{-(x-a)-2}$	3점
②	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+8}$ 을 x 축의 방향으로 a^2 만큼 평행이동한 곡선은 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x-a^2)+8}$ $\Rightarrow g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x-a^2)+8}$	3점
③	모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 이므로 $9^{-(x-a)-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x-a^2)+8}$ 즉, $\left(\frac{1}{9}\right)^{(x-a)+2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-a^2+4}$ 그러므로 $x - a + 2 = x - a^2 + 4$ 또는 $a^2 - a - 2 = (a - 2)(a + 1) = 0$ $a > 0$ 이므로 $a = 2$	4점

문항 7

7. 두 직선 $y = (\log_3 2)x$ 와 $y = (\log_8 a)x$ 가 서로 수직이 되도록 하는 양수 a 의 값을 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

두 직선 $y = (\log_3 2)x$, $y = (\log_8 a)x$ 가 서로 수직이므로 $\log_3 2 \times \log_8 a = -1$

$$\log_3 2 \times \log_{2^3} a = -1$$

$$\frac{\log 2}{\log 3} \times \frac{\log a}{3 \log 2} = -1.$$

$$\frac{\log a}{\log 3} = \log_3 a = -3$$

$$\text{그러므로 } a = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

■ 채점 기준

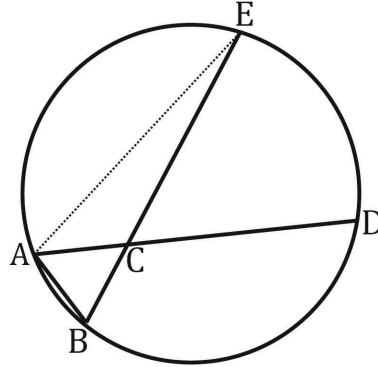
하위 문항	채점 기준	배점
①	두 직선 $y = (\log_3 2)x$, $y = (\log_8 a)x$ 가 서로 수직이므로 $\log_3 2 \times \log_8 a = -1$	4점
②	$\log_3 2 \times \log_{2^3} a = -1$ $\frac{\log 2}{\log 3} \times \frac{\log a}{3 \log 2} = -1.$ $\frac{\log a}{\log 3} = \log_3 a = -3$	4점
③	그러므로 $a = 3^{-3} = \frac{1}{27}$	2점

[별해]

하위 문항	채점 기준	배점
①	두 직선 $y = (\log_3 2)x$, $y = (\log_8 a)x$ 가 서로 수직이므로 $\log_3 2 \times \log_8 a = -1$	4점
②	$\log_8 a = -\frac{1}{\log_3 2} \Rightarrow \frac{1}{3} \log_2 a = -\log_2 3$	4점
③	$a^{1/3} = 3^{-1} \Rightarrow a = 3^{-3} = \frac{1}{27}$	2점

문항 8

8. 그림에서 $\triangle ABC$ 는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이고 점 C는 선분 AD의 1 : 4 내분점이다. 선분 AE의 길이를 구하는 과정을 논술하시오.



■ 예시 답안

(1) $\overline{AC} = 1$.

점 C가 선분 AD의 1 : 4 내분점이므로 $\overline{CD} = 4$.

(2) $\triangle ABC$ 가 정삼각형이므로, $\triangle DEC$ 도 정삼각형.

[$\because \angle DCE = \angle ACB = \frac{\pi}{3}$, $\angle CDE = \angle ADE = \angle ABE = \frac{\pi}{3}$, 그래서 $\triangle DEC$ 는 정삼각형.]

그러므로 $\overline{CE} = 4$.

(3) $\triangle ACE$ 에 코사인법칙을 적용하면

$$\begin{aligned}\overline{AE}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 - 2\overline{AC}\overline{CE}\cos(\angle ACE) \\ &= 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 21 \quad \left(\because \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

그러므로 $\overline{AE} = \sqrt{21}$.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
①	$\overline{AC} = 1$. 점 C가 선분 AD의 1 : 4 내분점이므로, $\overline{CD} = 4$.	2점
②	$\triangle ABC$ 가 정삼각형이므로, $\triangle DEC$ 도 정삼각형. $[\because \angle DCE = \angle ACB = \frac{\pi}{3}, \angle CDE = \angle ADE = \angle ABE = \frac{\pi}{3},$ 그래서 $\triangle DEC$ 는 정삼각형.] 그러므로 $\overline{CE} = 4$.	4점
③	$\triangle ACE$ 에 코사인법칙을 적용하면 $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2 - 2\overline{AC}\overline{CE}\cos(\angle ACE)$ $= 1^2 + 4^2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 21 \quad \left(\because \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \right)$ 그러므로 $\overline{AE} = \sqrt{21}$. <또는> $\triangle ABE$ 에 코사인법칙을 적용, 이때 $\overline{BE} = 5$. $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 - 2\overline{AB}\overline{BE}\cos(\angle ABE) = 1^2 + 5^2 - 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 21.$ 그래서 $\overline{AE} = \sqrt{21}$.	4점

문항 9

9. 자연수 n 에 대하여 이차방정식 $x^2 + \frac{x}{n} - n - 1 = 0$ 의 두 근을 a_n 과 b_n 이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right)$ 의 값을 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

$$a_n + b_n = -\frac{1}{n}, a_n b_n = -n - 1$$

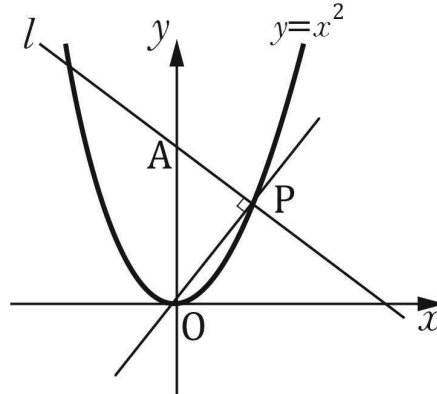
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) &= \sum_{n=1}^{10} \frac{a_n + b_n}{a_n b_n} = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \\ &= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
①	$a_n + b_n = -\frac{1}{n}, a_n b_n = -n - 1$	2점
②	$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{10} \frac{a_n + b_n}{a_n b_n} \\ &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$	2점
③	$= \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$	2점
④	$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \\ &= 1 - \frac{1}{11} \\ &= \frac{10}{11} \end{aligned}$	4점

문항 10

10. 아래 그림과 같이 곡선 $y = x^2$ 위의 점 $P(t, t^2)$ 을 지나고 직선 OP에 수직인 직선 l 이 y 축과 만나는 점을 A라고 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{OA} - \overline{OP})$ 의 값을 구하는 과정을 논술하시오. (단, $t > 0$)



■ 예시 답안

직선 OP의 기울기는 $\frac{t^2}{t} = t$

직선 l 의 방정식은 $y - t^2 = -\frac{1}{t}(x - t)$

$x = 0$ 을 대입하면 $\overline{OA} = t^2 + 1$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{OA} - \overline{OP}) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} (t^2 + 1 - \sqrt{t^2 + t^4}) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2 + 1)^2 - (t^2 + t^4)}{t^2 + 1 + \sqrt{t^2 + t^4}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 1}{t^2 + 1 + \sqrt{t^2 + t^4}} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
①	직선 OP의 기울기는 $\frac{t^2}{t} = t$ 직선 l의 방정식은 $y - t^2 = -\frac{1}{t}(x - t)$	3점
②	$x = 0$ 을 대입하면 $\overline{OA} = t^2 + 1$	1점
③	$\lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{OA} - \overline{OP})$ $= \lim_{t \rightarrow \infty} (t^2 + 1 - \sqrt{t^2 + t^4})$ $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t^2 + 1)^2 - (t^2 + t^4)}{t^2 + 1 + \sqrt{t^2 + t^4}}$	4점
④	$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 1}{t^2 + 1 + \sqrt{t^2 + t^4}}$ $= \frac{1}{2}$	2점

문항 11

11. 두 다항함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 두 조건

$$f(x)g(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 8, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = \frac{1}{2}g(1)$$

이 성립할 때, 미분계수 $g'(1)$ 의 값을 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = \frac{1}{2}g(1)$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 분모 $\rightarrow 0$ 이므로 분자 $\rightarrow 0$ 이어야 해서 $f(1) = 5$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{2}g(1).$$

$f(x)g(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 8$ 에서 $f(1)g(1) = 20$ 이므로 $g(1) = 4$, $f'(1) = 2$.

$f(x)g(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 8$ 을 미분하면,

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 12x + 4 \text{ 이므로,}$$

$$f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 8 + 5g'(1) = 23, \text{ 즉, } g'(1) = 3 \text{이다.}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
①	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = \frac{1}{2}g(1)$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 분모 $\rightarrow 0$ 이므로 분자 $\rightarrow 0$ 이어야 해서 $f(1) = 5$.	2점
②	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{2}g(1)$.	2점
③	$f(x)g(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 8$ 에서 $f(1)g(1) = 20$ 이므로 $g(1) = 4$, $f'(1) = 2$.	2점
④	$f(x)g(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 8$ 을 미분하면, $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 12x + 4$	2점
⑤	$f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 8 + 5g'(1) = 23$, 즉, $g'(1) = 3$ 이다.	2점

문항 12

12. 함수 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx$ 가 $x = 0, k, 2k$ 에서 극값을 가질 때, 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 구하는 과정을 논술하시오. (단, a, b, k 는 실수, $k \neq 0$)

■ 예시 답안

$f(x)$ 가 $x = 0, k, 2k$ 일 때 극값을 가지므로,

$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 2ax + b = x(x - k)(x - 2k)$ 이어야 한다. 그래서 $b = 0$.

$x^2 - 6x + 2a = (x - k)(x - 2k)$ 에서 $6 = 3k$, 즉, $k = 2$. 그래서 $a = k^2 = 4$.

$f'(x) = x(x - 2)(x - 4)$ 이고 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2$.

극솟값은 $f(0) = 0, f(4) = 4^3 - 2 \times 4^3 + 4^3 = 0$, 극댓값은 $f(2) = 4 - 16 + 16 = 4$.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
①	$f(x)$ 가 $x = 0, k, 2k$ 일 때 극값을 가지므로, $f'(x) = x^3 - 6x^2 + 2ax + b = x(x - k)(x - 2k)$	2점
②	$b = 0$	1점
③	$x^2 - 6x + 2a = (x - k)(x - 2k)$ 에서 $6 = 3k$, 즉, $k = 2$. $a = k^2 = 4$. $f'(x) = x(x - 2)(x - 4)$ 이고 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2$.	3점
④	극솟값은 $f(0) = 0, f(4) = 4^3 - 2 \times 4^3 + 4^3 = 0$, 극댓값은 $f(2) = 4 - 16 + 16 = 4$.	4점

문항 13

13. 곡선 $y = x^3 - 2x^2$ 의 $x = 1$ 에서의 접선이 $x = -1$ 에서 곡선 $y = x^2 + ax + b$ 에 접할 때, 실수 a 와 b 의 값을 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

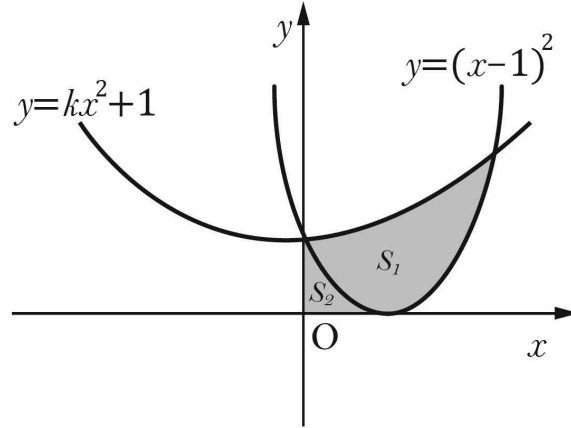
곡선 $y = x^3 - 2x^2$ 의 $x = 1$ 에서의 접선은
 접점이 $(1, -1)$ 이고 기울기가 $y'|_{x=1} = 3x^2 - 4x|_{x=1} = -1$ 이므로
 $y - (-1) = (-1)(x - 1)$, 즉, $y = -x$ 이다.
 접선 $y = -x$ 이 $x = -1$ 에서 곡선 $y = x^2 + ax + b$ 에 접하므로
 기울기 $y'|_{x=-1} = 2x + a|_{x=-1} = -2 + a = -1$ 이다. 그래서 $a = 1$.
 접점은 $(-1, 1) = (-1, 1 - a + b)$ 여야 하므로 $1 = 1 - a + b = b$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
①	곡선 $y = x^3 - 2x^2$ 의 $x = 1$ 에서의 접선은 접점이 $(1, -1)$ 이고 기울기가 $y' _{x=1} = 3x^2 - 4x _{x=1} = -1$ 이므로 $y - (-1) = (-1)(x - 1)$, 즉, $y = -x$.	4점
②	접선 $y = -x$ 이 $x = -1$ 에서 곡선 $y = x^2 + ax + b$ 에 접하므로 기울기 $y' _{x=-1} = 2x + a _{x=-1} = -2 + a = -1$. 그래서 $a = 1$.	3점
③	접점은 $(-1, 1) = (-1, 1 - a + b)$ 여야 하므로 $1 = 1 - a + b = b$ 이다.	3점

문항 14

14. 그림에서 두 곡선 $y = (x-1)^2$ 과 $y = kx^2 + 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1 이 $y = (x-1)^2$ 과 x 축, y 축이 둘러싸인 부분의 넓이 S_2 의 9배일 때, 실수 k 의 값을 구하는 과정을 논술하시오. (단, $0 < k < 1$)



■ 예시 답안

(1)

$$S_2 = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{3}(x-1)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(2)

$(x-1)^2 = kx^2 + 1$, 즉, $(1-k)x^2 = 2x$.

그러므로 두 곡선의 교점의 x 좌표는 $x = 0, \frac{2}{1-k}$.

(3)

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{2}{1-k}} [(kx^2 + 1) - (x-1)^2] dx = \int_0^{\frac{2}{1-k}} [-(1-k)x^2 + 2x] dx \\ &= -\frac{1}{3}(1-k)x^3 + x^2 \Big|_0^{\frac{2}{1-k}} = -\frac{1}{3}(1-k) \frac{8}{(1-k)^3} + \frac{4}{(1-k)^2} = \frac{4}{3(1-k)^2}. \end{aligned}$$

(4)

$S_1 = 9S_2$ 이므로, $\frac{4}{3(1-k)^2} = 9 \times \frac{1}{3} = 3$, 즉, $4 = 9(1-k)^2$.

그래서 $9k^2 - 18k + 5 = (3k-5)(3k-1) = 0$. 그래서 $k = \frac{1}{3}, \frac{5}{3}$.

그런데 $0 < k < 1$ 이므로 $k = \frac{1}{3}$.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$S_2 = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{3}(x-1)^3 \Big _0^1 = \frac{1}{3}.$	2점
(2)	$(x-1)^2 = kx^2 + 1$, 즉, $(1-k)x^2 = 2x$. 그러므로 두 곡선의 교점의 x 좌표는 $x = 0, \frac{2}{1-k}.$	3점
(3)	$S_1 = \int_0^{\frac{2}{1-k}} [(kx^2 + 1) - (x-1)^2] dx = \int_0^{\frac{2}{1-k}} [-(1-k)x^2 + 2x] dx$ $= -\frac{1}{3}(1-k)x^3 + x^2 \Big _0^{\frac{2}{1-k}} = -\frac{1}{3}(1-k)\frac{8}{(1-k)^3} + \frac{4}{(1-k)^2} = \frac{4}{3(1-k)^2}$	3점
(4)	$S_1 = 9S_2$ 이므로, $\frac{4}{3(1-k)^2} = 9 \times \frac{1}{3} = 3$, 즉, $4 = 9(1-k)^2$. 그래서 $9k^2 - 18k + 5 = (3k-5)(3k-1) = 0$. 그래서 $k = \frac{1}{3}, \frac{5}{3}$. 그런데 $0 < k < 1$ 이므로 $k = \frac{1}{3}$.	2점

문항 15

15. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x (x^2 - t^2)f(t) dt = x^4 + 2ax^3 + bx^2$$

을 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x) dx$ 의 값을 구하는 과정을 논술하시오. (단, a 와 b 는 상수)

■ 예시 답안

(1)

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 0 = \int_1^1 (1 - t^2)f(t) dt = 1 + 2a + b,$$

$$\text{그래서 } b = -1 - 2a \text{ 또는 } 2a + b + 1 = 0$$

(2)

$$\text{준식 } x^2 \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t^2 f(t) dt = x^4 + 2ax^3 + bx^2 \text{ 을 미분하면}$$

$$2x \int_1^x f(t) dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 4x^3 + 6ax^2 + 2bx$$

$$\text{또는 } \int_1^x f(t) dt = 2x^2 + 3ax + b.$$

(3)

$$\text{위의 식에 } x = 1 \text{을 대입하면, } 4 + 6a + 2b = 0 \quad \text{또는 } 2 + 3a + b = 0$$

$$\text{그래서 (1)에서 구한 식과 연립하여 풀면 } a = -1, b = 1$$

$$\text{그러므로 } \int_1^x f(t) dt = 2x^2 - 3x + 1.$$

$$\text{또는 } f(x) = 4x - 3$$

(4)

$$x = 0 \text{을 대입하면 } \int_1^0 f(t) dt = 1 \text{ 그래서 } \int_0^1 f(x) dx = -1.$$

$$\text{또는 } f(x) = 4x - 3 \text{에서 } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (4x - 3) dx = 2x^2 - 3x \Big|_0^1 = -1$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$x = 1$ 을 대입하면 $0 = \int_1^1 (1 - t^2)f(t) dt = 1 + 2a + b$, 그래서 $b = -1 - 2a$ 또는 $2a + b + 1 = 0$	2점
(2)	준식 $x^2 \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t^2 f(t) dt = x^4 + 2ax^3 + bx^2$ 을 미분하면 $2x \int_1^x f(t) dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 4x^3 + 6ax^2 + 2bx$ 또는 $\int_1^x f(t) dt = 2x^2 + 3ax + b$.	3점
(3)	위의 식에 $x = 1$ 을 대입하면, $4 + 6a + 2b = 0$ 또는 $2 + 3a + b = 0$ 그래서 (1)에서 구한 식과 연립하여 풀면 $a = -1, b = 1$ 그러므로 $\int_1^x f(t) dt = 2x^2 - 3x + 1$. 또는 $f(x) = 4x - 3$	3점
(4)	$x = 0$ 을 대입하면 $\int_1^0 f(t) dt = 1$ 그래서 $\int_0^1 f(x) dx = -1$. 또는 $f(x) = 4x - 3$ 에서 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (4x - 3) dx = 2x^2 - 3x \Big _0^1 = -1$	2점

2024학년도

논술고사 수학영역

문항 6

6. 실수 a 와 b 가 $a \log_3 8 = b \log_3 \frac{1}{5} = 1$ 을 만족시킬 때, $3^{\frac{1}{a}-\frac{3}{b}} + \sqrt[3a]{3^{10}}$ 의 값을 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

$$\frac{1}{a} = \log_3 8. \text{ 그래서 } 3^{\frac{1}{a}} = 8 \text{ 또한 } 3^{\frac{1}{3a}} = 2.$$

$$\frac{1}{b} = \log_3 \frac{1}{5} = -\log_3 5. \text{ 그래서 } 3^{-\frac{1}{b}} = 5.$$

$$3^{\frac{1}{a}-\frac{3}{b}} = 3^{\frac{1}{a}} \left(3^{-\frac{1}{b}}\right)^3 = 8 \cdot 5^3 = 1000.$$

$$\sqrt[3a]{3^{10}} = \left(3^{\frac{1}{3a}}\right)^{10} = 2^{10} = 1024.$$

$$3^{\frac{1}{a}-\frac{3}{b}} + \sqrt[3a]{3^{10}} = 1000 + 1024 = 2024.$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$\frac{1}{a} = \log_3 8. \text{ 그래서 } 3^{\frac{1}{a}} = 8 \text{ 또한 } 3^{\frac{1}{3a}} = 2.$	2점
2	$\frac{1}{b} = \log_3 \frac{1}{5} = -\log_3 5. \text{ 그래서 } 3^{-\frac{1}{b}} = 5.$	2점
3	$3^{\frac{1}{a}-\frac{3}{b}} = 3^{\frac{1}{a}} \left(3^{-\frac{1}{b}}\right)^3 = 8 \cdot 5^3 = 1000.$	2점
4	$\sqrt[3a]{3^{10}} = \left(3^{\frac{1}{3a}}\right)^{10} = 2^{10} = 1024.$	2점
5	$3^{\frac{1}{a}-\frac{3}{b}} + \sqrt[3a]{3^{10}} = 1000 + 1024 = 2024.$	2점

문항 7

7. 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 두 점 A와 B, 그리고 원점 O를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB의 $\angle AOB$ 가 직각이고 점 A의 y 좌표가 2일 때, 직각삼각형 AOB의 넓이를 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

점 A는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로 $2 = \log_2 x$ 에서 $x = 4$. 그래서 $A(4, 2)$.

선분 OA의 기울기는 $\frac{1}{2}$. 그래서 선분 OB의 기울기는 -2 ,

그래서 $B(b, \log_2 b)$ 의 좌표는 $(b, -2b)$. $\log_2 b = -2b$ 에서 $b = \frac{1}{2}$. 그래서 $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

$$\triangle AOB = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 2^2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 5} \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{5}{2}.$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	점 A는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로 $2 = \log_2 x$ 에서 $x = 4$. 그래서 $A(4, 2)$.	2점
2	선분 OA의 기울기는 $\frac{1}{2}$. 그래서 선분 OB의 기울기는 -2 ,	2점
3	그래서 $B(b, \log_2 b)$ 의 좌표는 $(b, -2b)$. $\log_2 b = -2b$ 에서 $b = \frac{1}{2}$. 그래서 $B\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.	2점
4	$\triangle AOB = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 + 2^2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 5} \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{5}{2}.$	2점

문항 8

8. 방정식 $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos^2 x - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + \sqrt{2}$ 의 모든 해 x 를 구하는 과정을 논술하시오. (단, $0 \leq x \leq 2\pi$)

■ 예시 답안

$$\text{준식} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin x) + 1 - \sin^2 x - 2 \sin x = 1 + \sqrt{2}$$

$$\sin^2 x + \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x + \sqrt{2} = 0 \quad \text{또는} \quad (\sin x + 2) \left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\sin x + 2 > 0 \text{ 이므로 } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{즉, } x = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi.$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	준식 $\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin x) + 1 - \sin^2 x - 2 \sin x = 1 + \sqrt{2}$	2점
2	$\sin^2 x + \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x + \sqrt{2} = 0$ 또는 $(\sin x + 2) \left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$	3점
3	$\sin x + 2 > 0$ 이므로 $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$	2점
4	즉, $x = \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi.$	3점

문항 9

9. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_3 = 14$, $S_5 = S_7$ 일 때, S_n 의 최댓값을 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

$$a_3 = 14 \Rightarrow a_1 + 2d = 14$$

$$S_7 - S_5 = a_6 + a_7 = 2a_1 + 11d = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $d = -4$, $a_1 = 22$

$a_6 + a_7 = 0$, $d = -4$ 이므로 $a_6 > 0 > a_7$ 이므로 S_6 가 S_n 의 최댓값이다.

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} \Rightarrow \text{최댓값 } S_6 = \frac{6(2 \cdot 22 + 5 \cdot (-4))}{2} = 72$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$a_3 = 14 \Rightarrow a_1 + 2d = 14$	2점
2	$S_7 - S_5 = a_6 + a_7 = 2a_1 + 11d = 0$	3점
3	두 식을 연립하여 풀면 $d = -4$, $a_1 = 22$	2점
4	$a_6 + a_7 = 0$, $d = -4$ 이므로 $a_6 > 0 > a_7$ 이므로 S_6 가 S_n 의 최댓값이다. $S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2} \Rightarrow \text{최댓값 } S_6 = \frac{6(2 \cdot 22 + 5 \cdot (-4))}{2} = 72$	3점

문항 10

10. 다항함수 $f(x)$ 가 두 조건

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x - 1} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = a$$

를 만족시킬 때, 상수 a 의 값을 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x - 1} = 2$ 를 만족시키는 다항함수 $f(x) - x^2$ 은 최고차항의 계수가 2인 일차함수이므로 $f(x) = x^2 + 2x + b$ (단, b 는 상수) ---(1)

또한 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = a$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 분모 $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 분자 $\rightarrow 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 2\} = f(1) - 2 = 0. \quad \text{즉 } f(1) = 2$$

(1)에서 $f(1) = 1 + 2 + b = 2$. 따라서 $b = -1$

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2x - 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x - 1} = 2$ 를 만족시키는 다항함수 $f(x) - x^2$ 은 최고차항의 계수가 2인 일차함수이므로 $f(x) = x^2 + 2x + b$ (단, b 는 상수) ---(1)	3점
2	또한 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = a$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 분모 $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 분자 $\rightarrow 0$ 이다. $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 2\} = f(1) - 2 = 0$. 즉 $f(1) = 2$	3점
3	(1)에서 $f(1) = 1 + 2 + b = 2$. 따라서 $b = -1$ $a = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2x - 1) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$ (또는 $a = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2x + 2 _{x=1} = 4$)	4점

문항 11

11. 다항함수 $y = f(x)$ 의 $x = 1$ 에서의 접선의 방정식이 $y = 3x - 1$ 일 때, 함수 $y = \{f(x)\}^2 - 2f(x)$ 의 $x = 1$ 에서의 접선의 방정식을 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

$f(1) = 3 \times 1 - 1 = 2$ 이고 $f'(1) = 3$ 이다.

$y = (f(x))^2 - 2f(x)$ 를 미분하면 $y' = 2f(x)f'(x) - 2f'(x)$ 이다.

$x = 1$ 을 대입하면 $y'(1) = 2 \times 2 \times 3 - 2 \times 3 = 6$ 이다.

$y = (f(x))^2 - 2f(x)$ 의 $x = 1$ 에서의 값은 $2^2 - 2 \times 2 = 0$ 이다.

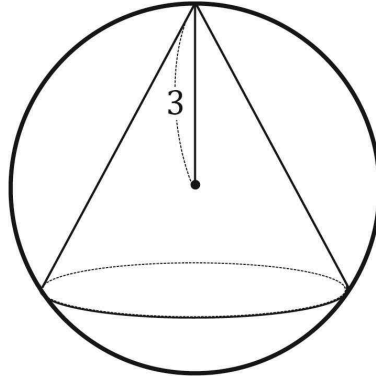
접선의 방정식은 $y - 0 = 6(x - 1)$, 즉 $y = 6x - 6$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$f(1) = 3 \times 1 - 1 = 2$ 이고 $f'(1) = 3$ 이다.	3점
2	$y = (f(x))^2 - 2f(x)$ 를 미분하면 $y' = 2f(x)f'(x) - 2f'(x)$ 이다.	3점
3	$x = 1$ 을 대입하면 $y'(1) = 2 \times 2 \times 3 - 2 \times 3 = 6$ 이다.	1점
4	$y = (f(x))^2 - 2f(x)$ 의 $x = 1$ 에서의 값은 $2^2 - 2 \times 2 = 0$ 이다.	1점
5	접선의 방정식은 $y - 0 = 6(x - 1)$, 즉 $y = 6x - 6$ 이다.	2점

문항 12

12. 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 구에 내접하는 원뿔 중에 그 부피가 최대가 되도록 하는 원뿔의 높이를 구하는 과정을 논술하시오.



■ 예시 답안

피타고라스 정리 $9 = r^2 + (h - 3)^2$ 으로부터 $r^2 = 6h - h^2$ 이다.

원뿔 부피공식에 대입하면 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6h - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(6h^2 - h^3)$ 이다.

미분하면 $\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi(12h - 3h^2) = \pi(4 - h)h$ 이다.

높이 $h = 4$ 일 때 원뿔의 부피가 최대이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	피타고라스 정리 $9 = r^2 + (h - 3)^2$ 으로부터 $r^2 = 6h - h^2$ 이다.	2점
2	원뿔 부피공식에 대입하면 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6h - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(6h^2 - h^3)$ 이다.	3점
3	미분하면 $\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi(12h - 3h^2) = \pi(4 - h)h$ 이다.	3점
4	높이 $h = 4$ 일 때 원뿔의 부피가 최대이다.	2점

문항 13

13. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $x^2 - kx$ 이다.

(나) 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 차이가 $\frac{4}{3}$ 이다.

이때 $\int_{-k}^k (x^2 - kx)dx$ 를 구하는 과정을 논술하시오. (단, k 는 양의 상수)

■ 예시 답안

(가)에서 $f'(x) = x^2 - kx$ 이므로 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2 + C$.

(나)에서 $|f(0) - f(k)| = \frac{4}{3}$ 이므로 $\frac{k^3}{6} = \frac{4}{3}$. 그래서 $k = 2$.

$$\int_{-k}^k (x^2 - kx)dx = \int_{-2}^2 f'(x)dx = f(2) - f(-2) = \frac{16}{3}.$$

$$\left(\text{또는, } \int_{-k}^k (x^2 - kx)dx = 2 \int_0^2 x^2 dx = \frac{16}{3} \right)$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	접선의 기울기로부터 함수를 구한다: $f'(x) = x^2 - kx$ 이므로 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2 + C$	2점
(2)	접선의 기울기로부터 함수의 극대, 극소를 안다: $f(0) - f(k) = \frac{4}{3}$	3점
	$\frac{k^3}{6} = \frac{4}{3}$. 그래서 $k = 2$.	2점
	$\int_{-k}^k (x^2 - kx)dx = \int_{-2}^2 f'(x)dx = f(2) - f(-2) = \frac{16}{3}$. (또는, $\int_{-k}^k (x^2 - kx)dx = 2 \int_0^2 x^2 dx = \frac{16}{3}$)	3점

문항 14

14. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$(x^2 + 1)f(x) = (x^2 + 1)^2 + 2 \int_0^x tf(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(x)$ 를 구하는 과정을 논술하시오.

■ 예시 답안

준식을 미분하면, $2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = 2(x^2 + 1)(2x) + 2xf(x)$

그래서 $f'(x) = 4x$ 이고, $f(x) = 2x^2 + C$ (단, C 는 적분상수) 이다.

다시 준식에 $x = 0$ 을 대입하면, $f(0) = 1$, 그래서 $f(x) = 2x^2 + 1$.

■ 채점 기준

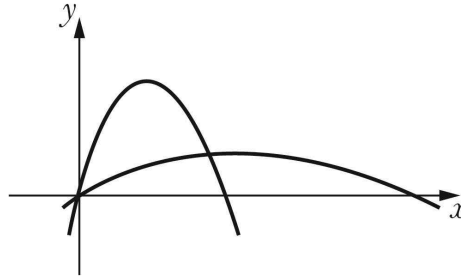
하위 문항	채점 기준	배점
	준식을 미분하면, $2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = 2(x^2 + 1)(2x) + 2xf(x)$	5점
	그래서 $f'(x) = 4x$	1점
	$f(x) = 2x^2 + C$ (단, C 는 적분상수)	1점
	준식에 $x = 0$ 을 대입하면, $f(0) = 1$,	2점
	그래서 $f(x) = 2x^2 + 1$	1점

문항 15

15. 자연수 $n = 2, 3, 4, \dots$ 에 대하여 두 곡선 $y = x - x^2$ 과 $y = \frac{x}{n} - \left(\frac{x}{n}\right)^2$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $S_n = \frac{5}{54}$ 인 자연수 n 의 값을 구하는 과정을 논술하시오.

예시 답안

그래프를 그리면 다음과 같은 형태이다.



$y = x - x^2 = \frac{x}{n} - \left(\frac{x}{n}\right)^2$ 에서 교점의 x 좌표는 $x = 0, \frac{n}{n+1}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\frac{n}{n+1}} \left(x - x^2 - \frac{1}{n}x + \frac{1}{n^2}x^2 \right) dx = \int_0^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{n-1}{n}x - \frac{n^2-1}{n^2}x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{n-1}{2n}x^2 - \frac{n^2-1}{3n^2}x^3 \right]_0^{\frac{n}{n+1}} = \frac{n(n-1)}{2(n+1)^2} - \frac{n(n^2-1)}{3(n+1)^3} = \frac{1}{6} \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{5}{54} \text{ 이려면 } \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} = \frac{5}{9}.$$

즉, $4n^2 - 19n - 5 = (4n+1)(n-5) = 0$ 이어야 한다. 그래서 $n = 5$.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
	$y = x - x^2 = \frac{x}{n} - \left(\frac{x}{n}\right)^2$ 에서 교점의 x 좌표는 $x = 0, \frac{n}{n+1}$.	2점
	$S_n = \int_0^{\frac{n}{n+1}} \left(x - x^2 - \frac{1}{n}x + \frac{1}{n^2}x^2 \right) dx$	2점
	$= \left[\frac{n-1}{2n}x^2 - \frac{n^2-1}{3n^2}x^3 \right]_0^{\frac{n}{n+1}} = \frac{n(n-1)}{2(n+1)^2} - \frac{n(n^2-1)}{3(n+1)^3} = \frac{1}{6} \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}$	2점
	$S_n = \frac{5}{54}$ 이려면 $\frac{n(n-1)}{(n+1)^2} = \frac{5}{9}$. 즉, $4n^2 - 19n - 5 = (4n+1)(n-5) = 0$	2점
	$n = 5$	2점

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다