

한국공학대 약술형논술

수학

목차

2026학년도 수리논술 · 오전	4
문항 1	4
문항 2	5
문항 3	6
문항 4	7
문항 5	8
문항 6	9
문항 7	10
문항 8	11
문항 9	12
2026학년도 수리논술 · 오후	14
문항 1	14
문항 2	15
문항 3	16
문항 4	17
문항 5	18
문항 6	19
문항 7	20
문항 8	21
문항 9	22
2025학년도 수리논술 · 오전	24
문항 1	24
문항 2	25
문항 3	26
문항 4	27
문항 5	28
문항 6	29
문항 7	30
문항 8	31
문항 9	32
2025학년도 수리논술 · 오후	33
문항 1	33
문항 2	34
문항 3	35
문항 4	36
문항 5	37
문항 6	38

문항 7	39
문항 8	40
문항 9	41

2024학년도 수리논술 · 오전 42

문항 1-1	42
문항 1-2	44
문항 1-3	45
문항 2-1	46
문항 2-2	47
문항 2-3	48
문항 3-1	49
문항 3-2	50
문항 3-3	51

2024학년도 수리논술 · 오후 52

문항 1-1	52
문항 1-2	54
문항 1-3	55
문항 2-1	56
문항 2-2	57
문항 2-3	58
문항 3-1	59
문항 3-2	60
문항 3-3	61

2026학년도 모의논술 62

문항 1	62
문항 2	63
문항 3	64
문항 4	65
문항 5	66
문항 6	67

2026학년도 수리논술 · 오전

문항 1

[문제1] [10점]

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \frac{2}{3}$ 일 때, $\sin \theta \times \tan \theta$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

예시 답안

$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos \theta$ 이므로 $\cos \theta = \frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 에서 $\sin \theta < 0$

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

따라서

$$\sin \theta \times \tan \theta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{5}{6}$$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 2

[문제2] [10점]

$0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 방정식 $2 \cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ 의 모든 실근의 곱을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$2 \cos^2 x - \sin x - 1 = 2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0, \quad 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \text{에서 } \sin x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = -1$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{에서 } \sin x \geq 0 \text{이므로 } \sin x = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 모든 실근의 곱은

$$\frac{\pi}{6} \times \frac{5}{6}\pi = \frac{5}{36}\pi^2$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 3

[문제3] [10점]

함수 $f(x) = -\log_3 x + a$ 가 닫힌구간 $[\frac{1}{27}, 9]$ 에서 최댓값 6, 최솟값 b 를 가질 때, 두 상수 a 와 b 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

함수 $f(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로 함수 $f(x)$ 는

$$x = \frac{1}{27} \text{에서 최댓값 } 6, x = 9 \text{에서 최솟값 } b$$

를 갖는다.

$$f\left(\frac{1}{27}\right) = -\log_3 \frac{1}{27} + a = 6, 3 + a = 6 \text{에서 } a = 3$$

$$b = f(9) = -\log_3 9 + 3 = -2 + 3 = 1$$

■ 채점 기준

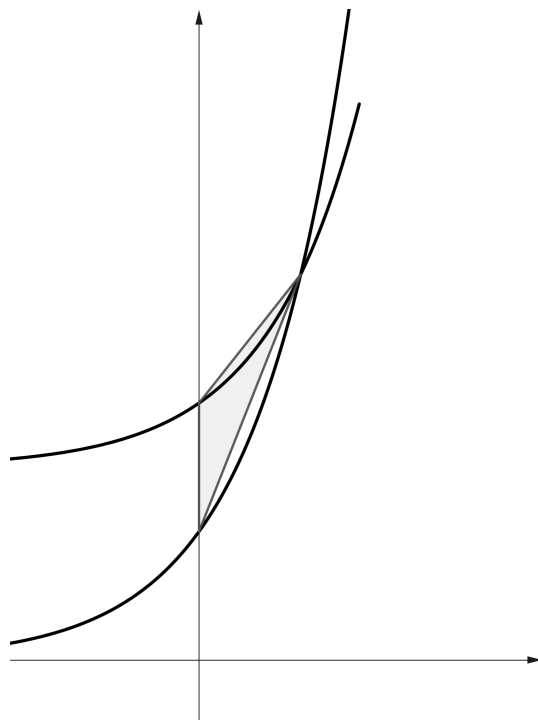
※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 4

[문제4] [10점]

두 곡선 $y = 2^x + 3$ 과 $y = 2^{x+1}$ 이 만나는 점을 A, 곡선 $y = 2^x + 3$ 이 y 축과 만나는 점을 B, 곡선 $y = 2^{x+1}$ 이 y 축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안



(그림 표기: 두 곡선 $y = 2^x + 3$, $y = 2^{x+1}$, 교점 A, y 축 위의 점 B(위)와 C(아래), 원점 O)

두 곡선 $y = 2^x + 3$ 과 $y = 2^{x+1}$ 이 만나는 점 A의 x 좌표는

$$2^x + 3 = 2^{x+1}, 2^x = 3 \text{에서 } x = \log_2 3$$

점 B의 y 좌표는 $y = 2^0 + 3$ 에서 $y = 4$

점 C의 y 좌표는 $y = 2$ 이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (4 - 2) \times \log_2 3 = \log_2 3$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 5

[문제5] [10점]

함수 $f(x) = 3x^2 - 6x$ 에 대하여

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^2 |f(x)| dx = 0$$

을 만족시키는 모든 실수 a 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) = 3x(x-2) \leq 0$ 이므로 $\int_0^2 |f(x)| dx = -\int_0^2 f(x) dx$

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx + \int_0^2 |f(x)| dx &= \int_0^a f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_2^a f(x) dx \\ &= \int_2^a (3x^2 - 6x) dx \\ &= [x^3 - 3x^2]_2^a \\ &= a^3 - 3a^2 + 4 = (a+1)(a-2)^2 = 0 \end{aligned}$$

에서 $a = -1$ 또는 $a = 2$. 따라서 모든 실수 a 의 값은 $-1, 2$

■ 채점 기준

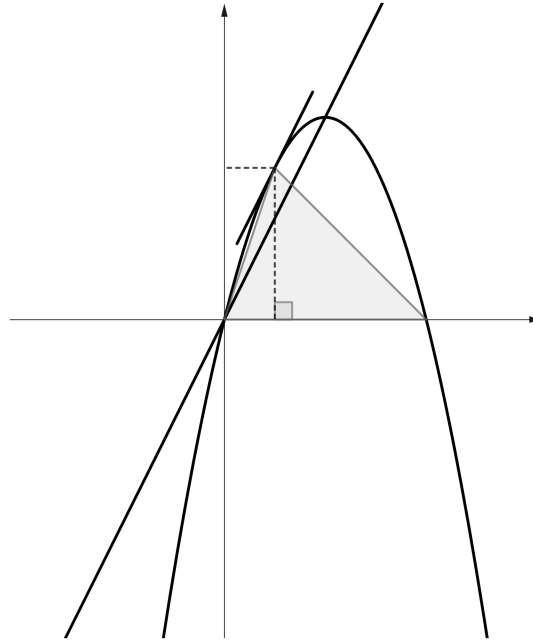
※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 6

[문제6] [10점]

함수 $f(x) = -x^2 + 2ax$ ($a > 1$)에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 P라 하고, 직선 $y = 2x$ 에 평행한 직선이 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(a)$ 라 할 때, $\lim_{a \rightarrow 1+} \frac{S(a)}{a-1}$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, O는 원점이다.)

예시 답안



(그림 표기: 곡선 $y = -x^2 + 2ax$, 직선 $y = 2x$, 원점 O, 점 P(x 축 위 $2a$), 점 Q, y 축 위 눈금 $a^2 - 1$)

곡선 $y = f(x)$ 와 x 축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점 P의 x 좌표는

$$-x^2 + 2ax = 0, \quad x(x - 2a) = 0$$

에서 $x = 2a$ 이므로 점 P의 좌표는 $P(2a, 0)$

직선 $y = 2x$ 에 평행한 직선이 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 점 Q의 x 좌표는 $f'(x) = -2x + 2a = 2$ 에서 $x = a - 1$ 이므로 점 Q의 좌표는 $Q(a - 1, a^2 - 1)$

삼각형 OPQ의 넓이는

$$S(a) = \frac{1}{2} \times 2a \times (a^2 - 1) = a(a^2 - 1)$$

따라서

$$\lim_{a \rightarrow 1+} \frac{S(a)}{a-1} = \lim_{a \rightarrow 1+} \frac{a(a-1)(a+1)}{a-1} = \lim_{a \rightarrow 1+} a(a+1) = 2$$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 7

[문제7] [10점]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 집합

$$\left\{ x \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 4 \right\}$$

의 원소가 -2 와 3 이다. 실수 t 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기를 $g(t)$ 라 할 때, $g(4)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

예시 답안

$$\left\{ x \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 4 \right\} = \{x \mid f'(x) = 4\} = \{-2, 3\}$$

이므로 $f'(-2) = 4, f'(3) = 4$

$f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 $f'(x) = 3x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f'(-2) = 12 - 2a + b = 4, \quad 2a - b = 8 \quad \dots\dots\textcircled{㉠}$$

$$f'(3) = 27 + 3a + b = 4, \quad 3a + b = -23 \quad \dots\dots\textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -3, b = -14$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 14$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기가 $g(t)$ 이므로 $g(t) = f'(t)$

따라서 $g(4) = f'(4) = 48 - 12 - 14 = 22$

(별해)

$$\left\{ x \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 4 \right\} = \{x \mid f'(x) = 4\} = \{-2, 3\}$$

이므로 $f'(-2) = 4, f'(3) = 4$ 이고 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$$f'(x) - 4 = 3(x+2)(x-3), \quad f'(x) = 3(x+2)(x-3) + 4$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기가 $g(t)$ 이므로 $g(t) = f'(t)$

따라서 $g(4) = f'(4) = 3 \times 6 \times 1 + 4 = 22$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 8

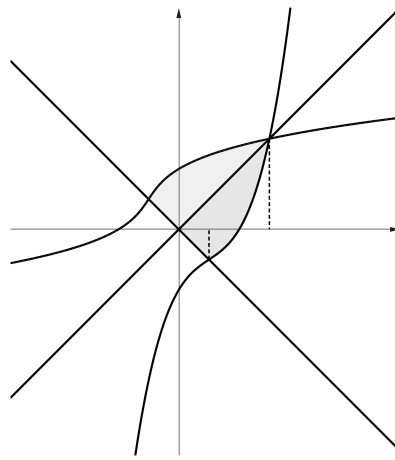
[문제8] [15점]

함수 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{3}x - 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 두 함수 $y = g(x)$, $y = |x|$ 의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{3}x - 2$, $f'(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{3} = (x-1)^2 + \frac{2}{3} > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 존재한다.

두 함수 $y = g(x)$, $y = |x|$ 의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이는 곡선 $y = f(x)$ 와 두 직선 $y = x$, $y = -x$ 로 둘러싸인 영역의 넓이와 같다.



(그림 표기: 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$, 직선 $y = x$, $y = -x$, 원점 O, x 축 위 눈금 1, 3)

(i) 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{3}x - 2 = x$$

에서 $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = (x-3)(x^2 + 2) = 0$ 이므로 $x = 3$

(ii) 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{3}x - 2 = -x$$

에서 $x^3 - 3x^2 + 8x - 6 = (x-1)(x^2 - 2x + 6) = 0$ 이고 $x^2 - 2x + 6 = (x-1)^2 + 5 > 0$ 이므로 $x = 1$ 따라서 구하는 넓이를 A 라 하면

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \{x - (-x)\} dx + \int_1^3 \left\{x - \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{3}x - 2\right)\right\} dx \\ &= \int_0^1 2x dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) dx \\ &= [x^2]_0^1 + \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x\right]_1^3 = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 9

[문제9] [15점]

시각 $t = 0$ 일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 t ($t \geq 0$)에서 점 P의 위치 $x(t)$ 는

$$x(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{2}t^3 + 6t^2 + kt$$

이고, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 시각 $t = 2$ 일 때 점 P의 속도는 0보다 작다.

(나) 시각 $t = p$ 와 $t = q$ ($0 < p < q$)일 때만 점 P의 속도가 $\frac{5}{2}$ 이다.

시각 $t = q$ 일 때 점 P의 가속도를 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, k, p, q 는 상수이다.)

■ 예시 답안

시각 t 에서 점 P의 속도를 $v(t)$ 라 하면 $v(t) = \frac{dx}{dt} = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + k$

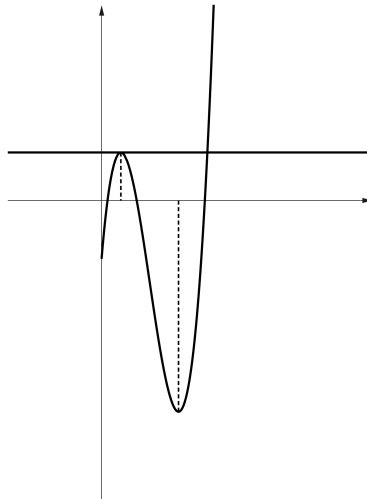
조건 (가)에서 $v(2) = k + 2 < 0$ 이므로 $k < -2$

$f(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t + k$ 라 하면

$f'(t) = 3t^2 - 15t + 12 = 3(t-1)(t-4) = 0$ 에서 $t = 1$ 또는 $t = 4$

$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	...	1	...	4	...
$f'(t)$		+	0	-	0	+
$f(t)$	(k)	↗	$k + \frac{11}{2}$	↘	$k - 8$	↗



(그림 표기: 곡선 $y = f(t)$, 직선 $y = \frac{5}{2}$, 원점 O, t 축 위 눈금 1, 4, y 축 위 눈금 k)

점 P는 출발한 후 시각 $t = p$ 와 $t = q$ ($0 < p < q$)일 때만 점 P의 속도가 $\frac{5}{2}$ 이므로 $t > 0$ 에서 곡선 $y = f(t)$ 와 직선 $y = \frac{5}{2}$ 는 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

곡선 $y = f(t)$ 와 직선 $y = \frac{5}{2}$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 $f(1) = \frac{5}{2}$ 이어야 하므로

$$f(1) = k + \frac{11}{2} = \frac{5}{2} \text{에서 } k = -3. \text{ 따라서 } f(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t - 3$$

곡선 $y = f(t)$ 와 직선 $y = \frac{5}{2}$ 가 만나는 t 의 값은

$$t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 12t - 3 = \frac{5}{2}, \quad 2t^3 - 15t^2 + 24t - 11 = (t-1)^2(2t-11) = 0$$

에서 $t = 1$ 또는 $t = \frac{11}{2}$. $p < q$ 이므로 $p = 1, q = \frac{11}{2}$

시각 t 에서 점 P의 가속도를 $a(t)$ 라 하면

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 3t^2 - 15t + 12$$

따라서 시각 $t = q = \frac{11}{2}$ 일 때 점 P의 가속도는

$$a\left(\frac{11}{2}\right) = 3 \times \left(\frac{11}{2}\right)^2 - 15 \times \frac{11}{2} + 12 = \frac{81}{4}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

2026학년도 수리논술 · 오후

문항 1

문제1 [10점]

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{4}{5}$ 일 때, $\cos \theta + \tan \theta$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

예시 답안

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ 이므로 $\sin \theta = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\cos \theta < 0$

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

따라서

$$\cos \theta + \tan \theta = \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{29}{15}$$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 2

문제2 [10점]

닫힌구간 $[0, \pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = 4 \sin 2x$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 2$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 α, β ($\alpha < \beta$) 라 할 때, $\beta - \alpha$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

예시 답안

닫힌구간 $[0, \pi]$ 에서 함수 $y = 4 \sin 2x$ 의 그래프와 직선 $y = 2$ 가 만나는 두 점의 x 좌표는

$$4 \sin 2x = 2, \sin 2x = \frac{1}{2}, 0 \leq 2x \leq 2\pi \text{ 에서 } 2x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } 2x = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{12} \text{ 또는 } x = \frac{5}{12}\pi \text{ 이므로 } \alpha = \frac{\pi}{12}, \beta = \frac{5}{12}\pi. \text{ 따라서 } \beta - \alpha = \frac{\pi}{3}$$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 3

문제3 [10점]

함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 그래프가 두 점 $(-2, 0)$ 과 $(0, 8)$ 을 지날 때, 두 상수 p 와 q 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

예시 답안

함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y = 3^{x-p} + q$

점 $(-2, 0)$ 을 지나므로 $3^{-2-p} + q = 0$ ㉠

점 $(0, 8)$ 을 지나므로 $3^{-p} + q = 8$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\frac{8}{9} \times 3^{-p} = 8$ 에서 $p = -2$, 이때 $q = -1$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 4

문제4 [10점]

곡선 $y = \log_2(x-1) + 2$ 가 직선 $y = 2$ 와 만나는 점을 A, 곡선 $y = \log_2(x-1) + 2$ 가 직선 $y = 5$ 와 만나는 점을 B, 점 B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 C 라 하자. 삼각형 ACB 의 넓이를 구하고 그 과정을 서술하시오.

예시 답안

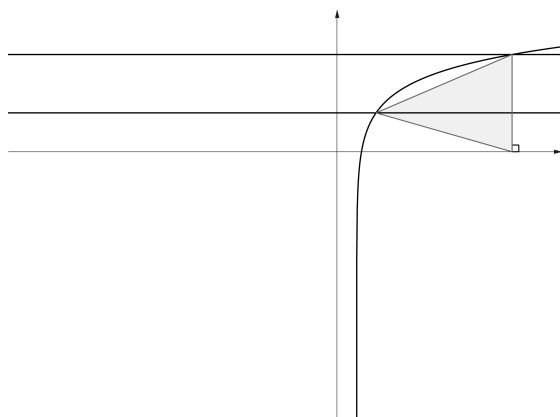


그림 속 표기: O, x , y , $y = 2$, $y = 5$, $y = \log_2(x-1) + 2$, A, B, C

점 A 의 x 좌표는

$$\log_2(x-1) + 2 = 2, \log_2(x-1) = 0 \text{ 에서 } x = 2$$

이므로 점 A 의 좌표는 A(2, 2).

점 B 의 x 좌표는

$$\log_2(x-1) + 2 = 5, \log_2(x-1) = 3 \text{ 에서 } x = 9$$

이므로 점 B 의 좌표는 B(9, 5).

따라서 점 C 의 좌표는 C(9, 0) 이므로

삼각형 ACB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times (9 - 2) = \frac{35}{2}$$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 5

문제5 [10점]

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_{-1}^x f(t) dt = x^3 + ax^2 + \int_{-1}^1 f(t) dt$$

를 만족시킨다. 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 라 할 때, $g(3)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, a 는 상수이다.)

■ 예시 답안

$$\int_{-1}^x f(t) dt = x^3 + ax^2 + \int_{-1}^1 f(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $\int_{-1}^1 f(t) dt = 1 + a + \int_{-1}^1 f(t) dt$ 에서 $a = -1$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f(x) = 3x^2 + 2ax = 3x^2 - 2x$ 이므로

$$g(3) = \int_{-1}^3 f(t) dt = \int_{-1}^3 (3t^2 - 2t) dt = [t^3 - t^2]_{-1}^3 = 20$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 6

문제6 [10점]

양수 a 에 대하여 곡선 $y = x^2$ 위의 점 $P(a, a^2)$ 에서의 접선과 수직이고 점 P 를 지나는 직선이 y 축과 만나는 점을 Q 라 하자. 삼각형 OPQ 의 넓이를 $S(a)$ 라 할 때, $\lim_{a \rightarrow 0+} \frac{S(a)}{a}$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, O 는 원점이다.)

예시 답안

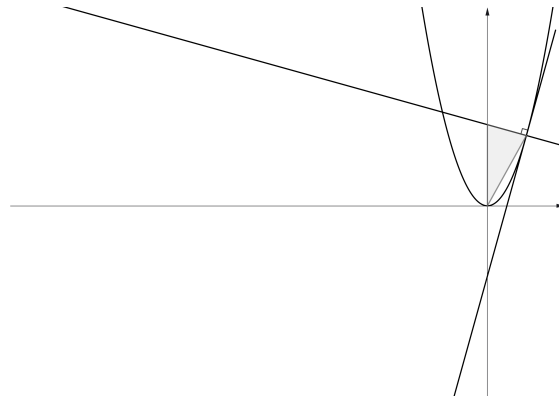


그림 속 표기: $O, x, y, y = x^2, P, Q$

$f(x) = x^2$ 이라 하면 $f'(x) = 2x, f'(a) = 2a$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(a, a^2)$ 에서의 접선과 수직이고

점 P 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2a}(x - a) + a^2$$

이므로 점 Q 의 좌표는 $Q\left(0, a^2 + \frac{1}{2}\right)$

삼각형 OPQ 의 넓이는

$$S(a) = \frac{1}{2} \times \left(a^2 + \frac{1}{2}\right) \times a = \frac{a}{2} \left(a^2 + \frac{1}{2}\right)$$

따라서

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \frac{S(a)}{a} = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{\frac{a}{2} \left(a^2 + \frac{1}{2}\right)}{a} = \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 7

문제7 [10점]

시각 $t = 0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 가 있다. 시각 $t (t \geq 0)$ 에서 두 점 P, Q 의 속도를 각각 $v_1(t), v_2(t)$ 라 하면

$$v_1(t) = 3t^2 + kt + k, \quad v_2(t) = 2t - 4$$

이다. 두 점 P, Q 는 출발한 후 시각 $t = a$ 일 때 동시에 운동 방향을 바꾼다. 시각 $t = a$ 일 때 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, k, a 는 상수이다.)

■ 예시 답안

두 점 P, Q 가 시각 $t = a$ 일 때 동시에 운동 방향을 바꾸므로 $v_1(a) = 0, v_2(a) = 0$

$v_2(a) = 2a - 4 = 0$ 에서 $a = 2$

$v_1(a) = v_1(2) = 12 + 2k + k = 0$ 에서 $k = -4$. 따라서 $v_1(t) = 3t^2 - 4t - 4$

시각 $t = 2$ 일 때 점 P 의 위치는

$$0 + \int_0^2 v_1(t) dt = [t^3 - 2t^2 - 4t]_0^2 = -8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

시각 $t = 2$ 일 때 점 Q 의 위치는

$$0 + \int_0^2 v_2(t) dt = [t^2 - 4t]_0^2 = -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

이므로 ㉠, ㉡에서 시각 $t = 2$ 일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는 4

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 8

문제8 [15점]

함수 $f(x) = \frac{x^3}{4} + ax - a^2 + 3$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 일 때 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.
 (나) x 에 대한 방정식 $f(x) - x = 0$ 의 실근은 2 뿐이다.

함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 와 직선 $y = -x - 16$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, a 는 상수이다.)

예시 답안

$f(x) = \frac{x^3}{4} + ax - a^2 + 3, f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + a$ 이므로 조건 (가)에서 $a \geq 0$ ㉠

조건 (나)에서 $f(2) - 2 = 2 + 2a - a^2 + 3 - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$ 또는 $a = 3$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = 3$. 따라서 $f(x) = \frac{x^3}{4} + 3x - 6$

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 와 직선 $y = -x - 16$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이는 곡선 $y = f(x)$ 와 두 직선 $y = -x - 16, y = x$ 로 둘러싸인 영역의 넓이의 2 배이다.

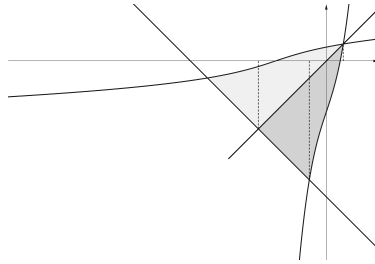


그림 속 표기: O, $x, y, y = g(x), y = f(x), y = x, -8, -2, 2, y = -x - 16$

(i) 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -x - 16$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{x^3}{4} + 3x - 6 = -x - 16 \quad \text{에서}$$

$$\frac{x^3}{4} + 4x + 10 = \frac{1}{4}(x+2)(x^2 - 2x + 20) = 0$$

이때 $x^2 - 2x + 20 = (x-1)^2 + 19 > 0$ 이므로 $x = -2$

(ii) 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는 조건 (나)에 의해 $x = 2$

(iii) 두 직선 $y = -x - 16$ 과 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는 $-x - 16 = x$ 에서 $x = -8$

곡선 $y = f(x)$ 와 두 직선 $y = -x - 16, y = x$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 A 라 하면

$$\begin{aligned} A &= \int_{-8}^{-2} \{x - (-x - 16)\} dx + \int_{-2}^2 \left\{ x - \left(\frac{x^3}{4} + 3x - 6 \right) \right\} dx \\ &= [x^2 + 16x]_{-8}^{-2} + \left[-\frac{x^4}{16} - x^2 + 6x \right]_{-2}^2 = 60 \end{aligned}$$

따라서 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 와 직선 $y = -x - 16$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이는 120

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 9

문제9 [15점]

최고차항의 계수가 1 이고 상수항이 k 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극솟값을 갖는다.
 (나) 집합 $\left\{x \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -12\right\}$ 의 원소의 개수는 1 이다.

곡선 $y = f(x)$ 가 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k 의 최댓값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + k$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

조건 (가)에서 $f'(3) = 27 + 6a + b = 0$, $b = -27 - 6a$ ㉠

조건 (나)에서 방정식 $f'(x) = -12$ 의 실근의 개수가 1 이므로

방정식 $3x^2 + 2ax + b + 12 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 4a^2 - 12(b + 12) = 0, \quad a^2 - 3(b + 12) = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a^2 + 18a + 45 = (a + 15)(a + 3) = 0$$

에서 $a = -15$ 또는 $a = -3$

(i) $a = -15$ 일 때

㉠에서 $b = -27 - 6a = 63$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 30x + 63 = 3(x - 3)(x - 7) = 0 \text{ 에서 } x = 3 \text{ 또는 } x = 7$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	3	...	7	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극댓값을 가지므로 조건 (가)에 모순이다.

(ii) $a = -3$ 일 때

㉠에서 $b = -27 - 6a = -9$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3) = 0 \text{ 에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극솟값을 가지므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + k$$

함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1) = 5 + k$, 극솟값은 $f(3) = -27 + k$ 이므로

곡선 $y = f(x)$ 가 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나려면

$$f(-1) = 5 + k > 0, \quad f(3) = -27 + k < 0$$

$-5 < k < 27$ 이므로 정수 k 의 최댓값은 26

(별해)

조건 (가)에서 $f'(3) = 0$ ㉠

삼차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 가지므로 함수 $f(x)$ 는 극댓값도 갖는다.

함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극댓값을 갖는다고 하면 $f'(\alpha) = 0$ ㉡

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수이므로 $\alpha < 3$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이므로 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3 인 이차함수이다. ㉠, ㉡에서 $f'(x) = 3(x - \alpha)(x - 3)$

조건 (나)에서 방정식 $f'(x) = -12$ 의 실근의 개수가 1 이므로 방정식

$$3(x - \alpha)(x - 3) = -12, \quad x^2 - (3 + \alpha)x + 3\alpha + 4 = 0$$

의 판별식을 D 라 하면

$$D = (3 + \alpha)^2 - 4(3\alpha + 4) = 0, \quad \alpha^2 - 6\alpha - 7 = (\alpha + 1)(\alpha - 7) = 0$$

에서 $\alpha = -1$ 또는 $\alpha = 7$, $\alpha < 3$ 이므로 $\alpha = -1$

따라서 $f'(x) = 3(x + 1)(x - 3) = 3x^2 - 6x - 9$

상수항이 k 이므로 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + k$

함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1) = 5 + k$, 극솟값은 $f(3) = -27 + k$ 이므로

곡선 $y = f(x)$ 가 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나려면

$$f(-1) = 5 + k > 0, \quad f(3) = -27 + k < 0$$

$-5 < k < 27$ 이므로 정수 k 의 최댓값은 26

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

2025학년도 수리논술 · 오전

문항 1

[문제1] 함수 $f(x) = a \sin bx + c$ 는 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 최댓값은 7, 최솟값은 3이다. 다음은 함수 $f(x)$ 에 대하여 세 상수 a, b, c 의 값을 구하는 과정이다. (1) ~ (5)에 알맞은 식 또는 수를 구하시오. (단, $a > 0, b > 0$) [10점]

함수 $f(x)$ 는 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 $b = \boxed{(1)}$ 이다.

함수 $f(x) = a \sin bx + c$ 의 최댓값과 최솟값을 a 와 c 에 대한 식으로 나타내면

최댓값은 $\boxed{(2)}$ 이고 최솟값은 $\boxed{(3)}$ 이므로

$a = \boxed{(4)}$, $c = \boxed{(5)}$ 이다.

예시 답안

함수 $f(x)$ 는 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$, $b = 4$ 이다.

함수 $f(x) = a \sin bx + c$ 의 최댓값과 최솟값을 a 와 c 에 대한 식으로 나타내면 $a > 0$ 이므로 최댓값은 $a + c$ 이고 최솟값은 $-a + c$ 이다. 따라서 $a + c = 7$, $-a + c = 3$ 에서 $a = 2$, $c = 5$ 이다.

(1) 4 (2) $a + c$ (3) $-a + c$ (4) 2 (5) 5

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 2

[문제2] 1이 아닌 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여

$$2 \log_a b : \log_a b + 1 = 1 : \log_a b$$

일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. [10점]

■ 예시 답안

$2 \log_a b : \log_a b + 1 = 1 : \log_a b$ 에서

$$2(\log_a b)^2 = \log_a b + 1, \quad 2(\log_a b)^2 - \log_a b - 1 = 0, \quad (2 \log_a b + 1)(\log_a b - 1) = 0$$

$\log_a b = -\frac{1}{2}$ 또는 $\log_a b = 1$ 이고 $a \neq b$ 이므로 $\log_a b = -\frac{1}{2}$ 따라서

$$\log_a b + \log_b a = \log_a b + \frac{1}{\log_a b} = \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) = -\frac{5}{2}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 3

[문제3] 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{5a_2}{a_3 + a_4} = 16$ 일 때, $\frac{a_3}{a_5}$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.
[10점]

■ 예시 답안

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면 수열의 모든 항이 양수이므로 $r > 0$

$$\frac{5a_2}{a_3 + a_4} = \frac{5ar}{ar^2 + ar^3} = \frac{5}{r + r^2} = 16$$

이므로 $16r^2 + 16r - 5 = 0$, $(4r - 1)(4r + 5) = 0$, $r = \frac{1}{4}$ 또는 $r = -\frac{5}{4}$

$r > 0$ 이므로 $r = \frac{1}{4}$ 따라서 $\frac{a_3}{a_5} = \frac{1}{r^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 4^2 = 16$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 4

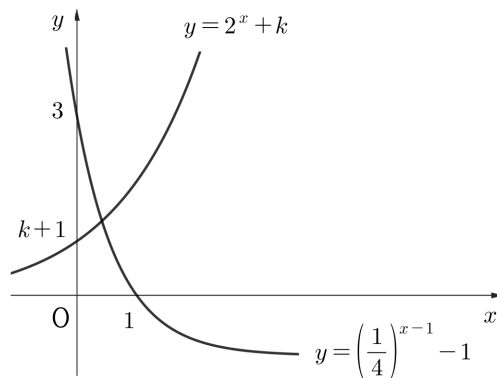
[문제4] 두 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} - 1$, $y = 2^x + k$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위가 $\alpha < k < \beta$ 일 때, $\log_{\sqrt{2}}(\beta - \alpha)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. [10점]

예시 답안

함수 $y = 2^x + k$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지날 때 $k = -2$
 함수 $y = 2^x + k$ 의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지날 때 $k = 2$
 이므로 두 함수의 그래프가 제1사분면에서 만나도록 하는 모든 k 의 값의 범위는

$$-2 < k < 2$$

따라서 $\alpha = -2$, $\beta = 2$ 이므로 $\log_{\sqrt{2}}(\beta - \alpha) = 2 \log_2 4 = 4$



채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 5

[문제5] 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. [10점]

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} = 0 \\ \text{(나)} \quad & f(x)g(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \end{aligned}$$

 $f'(1)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $f(1) > 0$)

■ 예시 답안

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - g(x)\} = 0, f(1) - g(1) = 0 \text{에서 } f(1) = g(1) \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) - g(x) + g(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \\ &= f'(1) - g'(1) = 0 \end{aligned}$$

에서 $f'(1) = g'(1)$ $\dots \textcircled{㉡}$

조건 (나)에서

(i) 양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $f(1)g(1) = 4$ $\textcircled{㉠}$ 에 의하여 $\{f(1)\}^2 = 4$ 이고 $f(1) > 0$ 이므로 $f(1) = 2$ $\dots \textcircled{㉢}$ (ii) 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 3x^2 - 8x + 1$$

에서 양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = -4$ $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 의하여 $2f'(1)f(1) = -4$ 이고 $\textcircled{㉢}$ 에 의하여 $f'(1) = -1$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 6

[문제6] 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} -x - a & (x < 1) \\ 2a & (x = 1) \\ bx - 3 & (x > 1) \end{cases}$$

이다. 함수 $\{f(x)\}^2$ 이 모든 실수 x 에서 연속일 때, $f(a-b) + f(a+b)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.
[10점]

예시 답안

함수

$$\{f(x)\}^2 = \begin{cases} (-x - a)^2 & (x < 1) \\ (2a)^2 & (x = 1) \\ (bx - 3)^2 & (x > 1) \end{cases}$$

이 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x = 1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)\}^2 = \{f(1)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)\}^2$$

이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x - a)^2 = (1 + a)^2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\{f(1)\}^2 = 4a^2 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow 1+} (bx - 3)^2 = (b - 3)^2 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡에 의하여 $(1 + a)^2 = 4a^2$, $3a^2 - 2a - 1 = (a - 1)(3a + 1) = 0$ 에서 $a = 1$ 또는 $a = -\frac{1}{3}$

a 는 양수이므로 $a = 1$

㉡, ㉢에 의하여 $4a^2 = (b - 3)^2$, $a = 1$ 을 대입하면 $b - 3 = 2$ 또는 $b - 3 = -2$ 에서

$b = 5$ 또는 $b = 1$

$a \neq b$ 이므로 $b = 5$ 따라서 $a = 1, b = 5$

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & (x < 1) \\ 2 & (x = 1) \\ 5x - 3 & (x > 1) \end{cases}$$

이므로 $f(a - b) + f(a + b) = f(-4) + f(6) = 3 + 27 = 30$

채점 기준

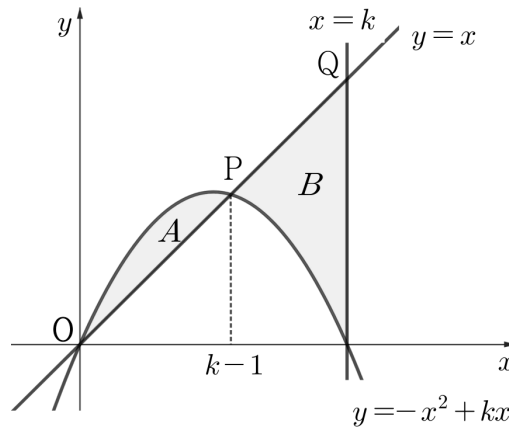
※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 7

[문제7] 실수 k ($k > 1$)에 대하여 곡선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 두 점 중 원점이 아닌 점을 P라 하고, 직선 $y = x$ 가 직선 $x = k$ 와 만나는 점을 Q라 하자. 곡선 $y = -x^2 + kx$ 와 선분 OP로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고, 곡선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $x = k$ 및 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B - A = \frac{2}{3}$ 일 때, k 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, O는 원점이다.) [10점]

예시 답안

좌표평면 위에 곡선 $y = -x^2 + kx$ 와 두 직선 $y = x$, $x = k$ 를 나타내면 그림과 같다.



곡선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 점 P의 x 좌표는 $k-1$ 이고 $B - A = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\int_{k-1}^k \{x - (-x^2 + kx)\} dx - \int_0^{k-1} (-x^2 + kx - x) dx = \frac{2}{3} \quad \cdots \textcircled{7}$$

⑦에서 $\int_0^k (x^2 - kx + x) dx = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \int_0^k (x^2 - kx + x) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1-k}{2} x^2 \right]_0^k \\ &= \frac{k^3}{3} + \frac{1-k}{2} k^2 \\ &= -\frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{2} = \frac{2}{3} \quad \cdots \textcircled{8} \end{aligned}$$

⑧에서 $k^3 - 3k^2 + 4 = (k+1)(k-2)^2 = 0$ 이므로 $k = 2$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 8

[문제8] 시각 $t = 0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가 두 상수 a, b ($a > 4b > 0$)에 대하여

$$v(t) = 6t^2 - (a + 8b)t + (a + 2b)b$$

일 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다. [15점]

- (가) 점 P는 시각 $t = t_1$ 과 $t = t_2$ 에서 운동 방향을 바꾸고 $t_2 - t_1 = \frac{1}{3}$ 이다.
 (나) 시각 $t = 0$ 에서 $t = b$ 까지 점 P가 움직인 거리는 3이다.

시각 $t = 2$ 에서의 점 P의 위치를 구하고 그 과정을 서술하시오.

예시 답안

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 속도가 0이므로

$$v(t) = 6t^2 - (a + 8b)t + (a + 2b)b = (t - b)(6t - a - 2b) = 0$$

에서 $t = b$ 또는 $t = \frac{a + 2b}{6}$, $a > 4b$ 이므로 $\frac{a + 2b}{6} > b$

조건 (가)에서 $t_2 - t_1 = \frac{a + 2b}{6} - b = \frac{a - 4b}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로 $a - 4b = 2$ ㉠

한편 $0 \leq t \leq b$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이고 조건 (나)에서 $\int_0^b |v(t)| dt = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^b |v(t)| dt &= \int_0^b v(t) dt \\ &= \int_0^b \{6t^2 - (a + 8b)t + (a + 2b)b\} dt \\ &= \left[2t^3 - \frac{1}{2}(a + 8b)t^2 + (a + 2b)bt \right]_0^b \\ &= 2b^3 - \frac{b^2}{2}(a + 8b) + (a + 2b)b^2 \\ &= \frac{1}{2}ab^2 = 3 \quad \text{.....㉡} \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $a = 6, b = 1$ 따라서 $v(t) = 6t^2 - 14t + 8$

시각 t 에서의 점 P의 위치를 $x(t)$ 라 하면 $t = 2$ 에서의 점 P의 위치는

$$x(2) = x(0) + \int_0^2 v(t) dt = 0 + \int_0^2 (6t^2 - 14t + 8) dt = [2t^3 - 7t^2 + 8t]_0^2 = 4$$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 9

[문제9] 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = f(x) - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 2x - 2$$

를 만족시킨다. 양수 k 에 대하여 직선 $y = k$ 가 곡선 $y = f(x)$ 와 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 삼각형 AOB의 넓이를 $g(k)$ 라 하자. $g(k)$ 가 최대일 때, k 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, O는 원점이다.) [15점]

예시 답안

$$\int_0^x f(t)dt = f(x) - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 2x - 2$$

에서

(i) 양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $f(0) = 2$ (ii) 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f'(x) - 2x^2 + 8x - 2 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

에서 $f(x)$ 의 최고차항은 $-2x^2$ 이고 $f(0) = 2$ 이므로 $f(x) = -2x^2 + ax + 2$ 라 하자.

$\textcircled{7}$ 에 의하여 $-2x^2 + ax + 2 = -4x + a - 2x^2 + 8x - 2$

에서 $a = 4$ 이므로 $f(x) = -2x^2 + 4x + 2$

곡선 $y = -2x^2 + 4x + 2$ 와 직선 $y = k$ 는 서로 다른 두 점에서 만나므로

방정식 $-2x^2 + 4x + 2 = k$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

방정식 $2x^2 - 4x + k - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 16 - 8(k - 2) > 0, \quad k < 4$$

k 는 양수이므로 $0 < k < 4$

$2x^2 - 4x + k - 2 = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{k-2}{2}$

$$\overline{AB} = |\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{4 - 2(k - 2)} = \sqrt{8 - 2k}$$

이므로 삼각형 AOB의 넓이 $g(k)$ 는

$$g(k) = \frac{1}{2} \times \sqrt{8 - 2k} \times k = \frac{1}{2} \sqrt{8k^2 - 2k^3}$$

$0 < k < 4$ 에서 함수 $h(k)$ 를 $h(k) = 8k^2 - 2k^3$ 이라 하면 $h(k)$ 가 최대일 때 $g(k)$ 도 최대이다.

$$h'(k) = 16k - 6k^2 = 2k(8 - 3k)$$

$h'(k) = 0$ 에서 $k = 0$ 또는 $k = \frac{8}{3}$

함수 $h(k)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	(0)	...	$\frac{8}{3}$	...	(4)
$h'(k)$		+	0	-	
$h(k)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $h(k)$ 가 $k = \frac{8}{3}$ 에서 최대이므로 $g(k)$ 도 $k = \frac{8}{3}$ 일 때 최대이다.

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

2025학년도

수리논술 · 오후

문항 1

[문제 1] [10점] $\angle A > \frac{\pi}{2}$ 인 이등변삼각형 ABC에 대하여

$$\sin A = \cos B, \quad \overline{AC} = 2\sqrt{3}$$

이다. 다음은 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 구하는 과정이다. (1) ~ (4)에 알맞은 수를 구하시오.

삼각형 ABC는 $\angle A > \frac{\pi}{2}$ 인 이등변삼각형이므로 $\angle B = \angle C$ ㉠

$\angle A > \frac{\pi}{2}$ 이고 $\sin A = \cos B$ 이므로 $\angle A = \frac{\pi}{2} + \angle B$ ㉡

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π 이므로 $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $\angle A = \boxed{(1)}$, $\angle B = \boxed{(2)}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 $R = \boxed{(3)}$ 이므로

외접원의 넓이는 $\boxed{(4)}$ 이다.

예시 답안

삼각형 ABC는 $\angle A > \frac{\pi}{2}$ 인 이등변삼각형이므로 $\angle B = \angle C$ ㉠

$\angle A > \frac{\pi}{2}$ 이고 $\sin A = \cos B$ 이므로 $\angle A = \frac{\pi}{2} + \angle B$ ㉡

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π 이므로 $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $\angle B = \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\angle A = \frac{\pi}{2} + \angle B = \frac{2}{3}\pi$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 할 때 사인법칙을 이용하면

$$2R = \frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}$$

따라서 $R = 2\sqrt{3}$ 이므로 외접원의 넓이는 $\pi R^2 = 12\pi$ 이다.

(1) $\frac{2}{3}\pi$ (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $2\sqrt{3}$ (4) 12π

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 2

[문제 2] [10점] 좌표평면 위의 두 점 $(0, 0)$, $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{2})$ 를 지나는 직선이 직선 $ax + 2y = 1$ 과 서로 수직일 때, a^2 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, a 는 상수이다.)

예시 답안

두 점 $(0, 0)$ 과 $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{2})$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{4}} = 2^{\frac{1}{6} - \frac{2}{3}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이고 직선 $ax + 2y = 1$ 의 기울기는 $-\frac{a}{2}$ 이다. 두 직선이 서로 수직이므로

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{a}{2}\right) = -1, \quad a = 2\sqrt{2}$$

따라서 $a^2 = 8$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 3

[문제 3] [10점] 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여

$$S_{n+2} - S_n = 10n + 9$$

가 성립할 때, a_3 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여

$$S_{n+2} - S_n = a_{n+2} + a_{n+1} = a + (n+1)d + a + nd = 2dn + 2a + d = 10n + 9$$

에서 $2d = 10$, $2a + d = 9$ 이므로 $d = 5$, $a = 2$

따라서 $a_3 = 2 + 2 \times 5 = 12$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 4

[문제 4] [10점] 두 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + 3$, $y = \log_2(x+k)$ 의 그래프가 제1사분면에서 만나도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위가 $\alpha < k < \beta$ 일 때, $\log_4(\alpha + \beta)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

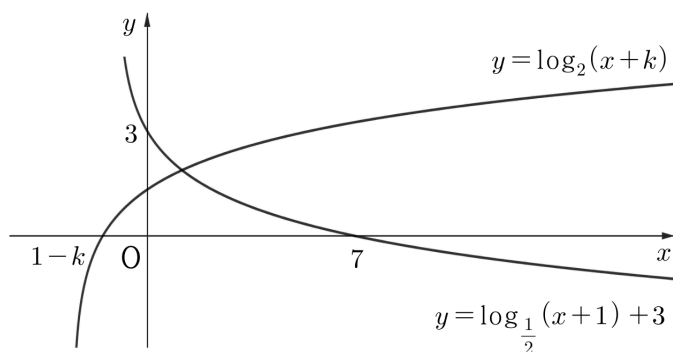
■ 예시 답안

함수 $y = \log_2(x+k)$ 의 그래프가 점 $(7, 0)$ 을 지날 때 $k = -6$

함수 $y = \log_2(x+k)$ 의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지날 때 $k = 8$

이므로 두 함수의 그래프가 제1사분면에서 만나도록 하는 모든 k 의 값의 범위는

$$-6 < k < 8$$



따라서 $\alpha = -6$, $\beta = 8$ 이므로 $\log_4(\alpha + \beta) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 5

[문제 5] [10점] 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 4}{x - 2} = 2f(2) \\ \text{(나)} \quad & f(x)g(x) = x^4 - x^2 \end{aligned}$$

$f'(2)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

예시 답안

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} \{g(x) - 4\} = 0, g(2) - 4 = 0 \text{에서 } g(2) = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = g'(2)$$

$$\text{이므로 } g'(2) = 2f(2) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

조건 (나)에서

$$\text{(i) 양변에 } x = 2 \text{를 대입하면 } f(2)g(2) = 12$$

$$\text{에서 } \textcircled{㉠} \text{에 의하여 } f(2) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에 의하여 } g'(2) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$\text{(ii) 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 4x^3 - 2x$$

에서 양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 28$$

$$\text{이므로 } \textcircled{㉠}, \textcircled{㉢}, \textcircled{㉣} \text{에 의하여 } f'(2) = \frac{5}{2}$$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 6

[문제 6] [10점] 두 자연수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b^2}{x^2 + bx + 1} & (x \neq 0) \\ \frac{a^2}{4} & (x = 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속일 때, a 와 b 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

(i) 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x = 0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^2}{x^2 + bx + 1} = b^2 \text{이고 } f(0) = \frac{a^2}{4} \text{이므로 } b^2 = \frac{a^2}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠에서 $a = 2b$ 또는 $a = -2b$

$$a, b \text{가 모두 자연수이므로 } a = 2b \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

(ii) 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \frac{b^2}{x^2 + bx + 1} \ (x \neq 0)$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 가 $x \neq 0$ 인 모든 실수 x 에서

연속이어야 하므로 $x \neq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + bx + 1 \neq 0$ 이어야 한다.

$x = 0$ 이면 $x^2 + bx + 1 = 1 \neq 0$ 이므로 이차방정식 $x^2 + bx + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 한다.

$$D = b^2 - 4 = (b + 2)(b - 2) < 0$$

에서 $-2 < b < 2$

따라서 자연수 b 의 값은 $b = 1$ 이고 ㉡에 의하여 $a = 2$

■ 채점 기준

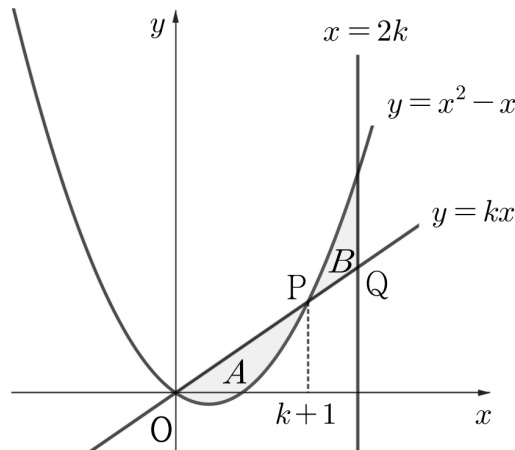
※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 7

[문제 7] [10점] 실수 k ($k > 1$)에 대하여 곡선 $y = x^2 - x$ 와 직선 $y = kx$ 가 만나는 두 점 중 원점이 아닌 점을 P라 하고, 직선 $y = kx$ 가 직선 $x = 2k$ 와 만나는 점을 Q라 하자. 곡선 $y = x^2 - x$ 와 선분 OP로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고, 곡선 $y = x^2 - x$ 와 직선 $x = 2k$ 및 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A - B = \frac{8}{3}$ 일 때, k 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.
(단, O는 원점이다.)

예시 답안

$k > 1$ 이므로 좌표평면 위에 곡선 $y = x^2 - x$ 와 두 직선 $y = kx$, $x = 2k$ 을 나타내면 그림과 같다.



곡선 $y = x^2 - x$ 와 직선 $y = kx$ 가 만나는 점 P의 x 좌표는 $k+1$ 이고 $A - B = \frac{8}{3}$ 이므로

$$\int_0^{k+1} \{kx - (x^2 - x)\} dx - \int_{k+1}^{2k} (x^2 - x - kx) dx = \frac{8}{3} \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } \int_0^{2k} \{x^2 - (k+1)x\} dx = -\frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2k} \{x^2 - (k+1)x\} dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{k+1}{2}x^2 \right]_0^{2k} \\ &= \frac{8}{3}k^3 - 2(k+1)k^2 \\ &= \frac{2}{3}k^3 - 2k^2 = -\frac{8}{3} \quad \cdots \textcircled{8} \end{aligned}$$

$\textcircled{8}$ 에서 $k^3 - 3k^2 + 4 = (k+1)(k-2)^2 = 0$ 이므로 $k = 2$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 8

[문제 8] [15점] 시각 $t = 0$ 일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 위치 $x(t)$ 가 두 상수 a, b 에 대하여

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 + at^2 + bt$$

일 때, 시각 t 에서의 점 P의 속도 $v(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $v(1) = 0$

(나) $\int_0^3 |v(t)| dt = \frac{23}{3}$

시각 $t = 6$ 에서의 점 P의 속도를 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $a \leq -2$)

예시 답안

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 + at^2 + bt \text{에서 } v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = t^2 + 2at + b$$

$$\text{조건 (가)에서 } v(1) = 1 + 2a + b = 0 \text{이므로 } b = -2a - 1$$

..... ㉠

$$v(t) = t^2 + 2at + b = t^2 + 2at - (2a + 1) = (t - 1)(t + 2a + 1)$$

$$v(t) = 0 \text{에서 } t = 1 \text{ 또는 } t = -2a - 1 \text{ 이때 } a \leq -2 \text{이므로 } -2a - 1 \geq 3$$

$$\text{한편 } 0 \leq t \leq 1 \text{에서 } v(t) \geq 0, 1 \leq t \leq -2a - 1 \text{에서 } v(t) \leq 0 \text{이고}$$

$$\text{조건 (나)에서 } \int_0^3 |v(t)| dt = \frac{23}{3} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 |v(t)| dt &= \int_0^1 v(t) dt - \int_1^3 v(t) dt \\ &= x(1) - x(0) - \{x(3) - x(1)\} \\ &= 2\{x(1)\} - x(3) \\ &= 2\left(\frac{1}{3} + a + b\right) - (9 + 9a + 3b) = \frac{23}{3} \end{aligned}$$

$$\text{에서 } 7a + b = -16$$

..... ㉡

$$\text{㉠, ㉡에서 } a = -3, b = 5 \text{이므로}$$

$$v(t) = t^2 + 2at + b = t^2 - 6t + 5$$

$$\text{따라서 시각 } t = 6 \text{에서의 점 P의 속도는 } v(6) = 36 - 36 + 5 = 5$$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 9

[문제 9] [15점] 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{6}x^4 + ax^3 + bx^2$ 이다.
 (나) $|f'(-1)| + |f'(2)| = 0$

함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \frac{1}{4} |3f(x) - 24x - 4|$$

라 하자. 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 모든 자연수 k 의 개수를 구하고 그 과정을 서술하시오.

예시 답안

조건 (가)에서 $\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{6}x^4 + ax^3 + bx^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3ax^2 + 2bx$

조건 (나)에서 $|f'(-1)| + |f'(2)| = 0$ 이므로 $f'(-1) = 0$ 이고 $f'(2) = 0$

$f'(x) = 2x^2 + 6ax + 2b$ 이므로

$f'(-1) = 2 - 6a + 2b = 0$ 에서 $3a - b = 1$ ㉠

$f'(2) = 8 + 12a + 2b = 0$ 에서 $6a + b = -4$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -\frac{1}{3}, b = -2$ 이므로 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$

$$g(x) = \frac{1}{4} |3f(x) - 24x - 4| = \frac{1}{4} |2x^3 - 3x^2 - 36x - 4|$$

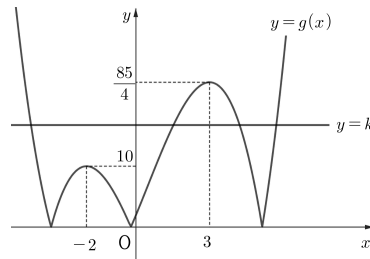
함수 $h(x)$ 를 $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 4$ 라 하면 $h'(x) = 6x^2 - 6x - 36$ 이고

$h'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 3$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	3	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$h(-2) = 40, h(3) = -85$ 이고 $g(x) = \frac{1}{4} |h(x)|$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 모든 k 의 값의 범위가 $10 < k < \frac{85}{4}$ 이므로 자연수 k 의 개수는 11이다.

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

2024학년도 수리논술 · 오전

문항 1-1

[문제 1] [1-1] [10점]

다음은 $0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 이차방정식

$$x^2 + (4 \sin \theta)x + 2 \cos \theta + 2 = 0$$

이 중근을 갖도록 하는 모든 θ 의 값을 구하는 과정이다.

이차방정식 $x^2 + (4 \sin \theta)x + 2 \cos \theta + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$$D = (4 \sin \theta)^2 - 4(2 \cos \theta + 2) = 0$$

이어야 한다. 즉, $2 \sin^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$

이고, $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ 이므로

$$2(1 - \cos^2 \theta) - \cos \theta - 1 = 0$$

이다. 따라서

$$(\boxed{\text{가}})(\cos \theta + 1) = 0$$

이므로

$$\cos \theta = \boxed{\text{나}} \quad \text{또는} \quad \cos \theta = -1$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서

$\cos \theta = \boxed{\text{나}}$ 일 때, $\theta = \boxed{\text{다}}$ 또는 $\theta = \boxed{\text{라}}$ 이고

$\cos \theta = -1$ 일 때, $\theta = \boxed{\text{마}}$ 이다.

위의 과정에서 (가) ~ (마)에 알맞은 식 또는 값을 구하시오.

■ 예시 답안

이차방정식 $x^2 + (4 \sin \theta)x + 2 \cos \theta + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

이차방정식이 중근을 가져야 하므로 $D = (4 \sin \theta)^2 - 4(2 \cos \theta + 2) = 0$ 이어야 한다.

즉, $2 \sin^2 \theta - \cos \theta - 1 = 0$ 이고 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ 이므로 $2(1 - \cos^2 \theta) - \cos \theta - 1 = 0$ 이다.

따라서

$$(\boxed{2 \cos \theta - 1})(\cos \theta + 1) = 0$$

에서 $\cos \theta = \boxed{\frac{1}{2}}$ 또는 $\cos \theta = -1$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서

$\cos \theta = \boxed{\frac{1}{2}}$ 일 때, $\theta = \boxed{\frac{\pi}{3}}$ 또는 $\theta = \boxed{\frac{5\pi}{3}}$ 이고 ($\theta = \frac{5\pi}{3}$ 또는 $\theta = \frac{\pi}{3}$)

$\cos \theta = -1$ 일 때, $\theta = \boxed{\pi}$ 이다.

- (가) $2 \cos \theta - 1$ (또는 $-2 \cos \theta + 1$) (나) $\frac{1}{2}$ (다) $\frac{\pi}{3}$ (라) $\frac{5\pi}{3}$ (마) π
 또는
 (가) $2 \cos \theta - 1$ (또는 $-2 \cos \theta + 1$) (나) $\frac{1}{2}$ (다) $\frac{5\pi}{3}$ (라) $\frac{\pi}{3}$ (마) π

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 1-2

[문제 1] [1-2] [10점]

두 곡선

$$y = -3^{x-2} + a, \quad y = 2^x$$

이 직선 $y = 2$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB} = 2$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $a > 3$)

■ 예시 답안

$-3^{x-2} + a = 2$ 에서 $x = \log_3(a - 2) + 2$ 이므로 점 A의 좌표는 $A(\log_3(a - 2) + 2, 2)$

$2^x = 2$ 에서 $x = 1$ 이므로 점 B의 좌표는 $B(1, 2)$

$\overline{AB} = 2$ 이므로 $\{\log_3(a - 2) + 2\} - 1 = 2$

$\log_3(a - 2) = 1$ 에서 $a - 2 = 3, a = 5$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 1-3

[문제 1] [1-3] [10점]

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\log_3 a_{n+2} - \log_3 a_n = 2$$

를 만족시킨다. $a_2 \times a_4 \times a_6 = 3^{15}$ 일 때, $a_k = 3^{46}$ 인 자연수 k 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$\log_3 a_{n+2} - \log_3 a_n = 2 \text{에서 } \log_3 \frac{a_{n+2}}{a_n} = \log_3 9, a_{n+2} = 9a_n$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 $a_1 = a$, 공비를 r 라 하면

$$a_{n+2} = 9a_n \text{에서 } ar^{n+1} = 9ar^{n-1}, r^2 = 9$$

모든 항이 양수이므로 $r = 3$

$$a_2 \times a_4 \times a_6 = ar \times ar^3 \times ar^5 = a^3 r^9 = a^3 3^9 = 3^{15} \text{에서 } a^3 = 3^6, a = 9$$

$$a_k = 3^{46} \text{에서 } 9 \times 3^{k-1} = 3^{46}, 3^{k+1} = 3^{46}, k+1 = 46 \text{이므로 } k = 45$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 2-1

[문제 2] [2-1] [10점]

이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{2x^2 f(x) + 3f(x^2)} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$$

■ 예시 답안

함수 $f(x)$ 를 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하자.

조건 (가)에서 분모, 분자의 최고차항을 비교하면

$$\frac{a^2}{5a} = \frac{a}{5} = 2 \text{ 에서 } a = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{가}$$

조건 (나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이고 $f(0) = c$ 이므로 $c = 0$

$\cdots \cdots \textcircled{나}$

$\textcircled{가}, \textcircled{나}$ 으로부터 $f(x) = 10x^2 + bx$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2 + bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (10x + b) = b = 3$$

이므로 $f(x) = 10x^2 + 3x$, 따라서 $f(1) = 13$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 2-2

[문제 2] [2-2] [10점]

실수 a ($a > 2$)에 대하여 함수

$$f(x) = -2x^3 + 3(a+2)x^2 - 12ax - \frac{3}{2}a^2 + 18a$$

의 극댓값을 $g(a)$ 라 할 때, $\lim_{a \rightarrow 2+} \frac{g'(a)}{a-2}$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$f'(x) = -6x^2 + 6(a+2)x - 12a = -6(x-2)(x-a)$ 이므로 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 $x = 2$ 또는 $x = a$

$a > 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극댓값 $f(a) = a^3 - \frac{15}{2}a^2 + 18a = g(a)$ 를 갖는다.

$g'(a) = 3a^2 - 15a + 18$ 이므로

$$\lim_{a \rightarrow 2+} \frac{g'(a)}{a-2} = \lim_{a \rightarrow 2+} \frac{3a^2 - 15a + 18}{a-2} = \lim_{a \rightarrow 2+} \frac{3(a-2)(a-3)}{a-2} = \lim_{a \rightarrow 2+} 3(a-3) = -3$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 2-3

[문제 2] [2-3] [10점]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 와 가속도 $a(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq t \leq 1$ 일 때, $v(t) = t^3 - t$ 이다.

(나) $t \geq 1$ 일 때, $a(t) = 2t + 1$ 이다.

시각 $t = 0$ 에서 $t = 2$ 까지 점 P가 움직인 거리를 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

조건 (가)에서 $t = 1$ 일 때 $v(1) = 0$

..... ㉠

조건 (나)에서 $t \geq 1$ 일 때 $a(t) = 2t + 1$ 이므로 $v(t) = t^2 + t + C$ (단, C 는 적분상수)

$t = 1$ 일 때 $v(1) = 2 + C$

..... ㉡

㉠, ㉡으로부터 $2 + C = 0$ 에서 $C = -2$. 따라서

$$v(t) = \begin{cases} t^3 - t & (0 \leq t \leq 1) \\ t^2 + t - 2 & (t \geq 1) \end{cases}$$

이므로 시각 $t = 0$ 에서 $t = 2$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 |v(t)| dt = \int_0^1 |v(t)| dt + \int_1^2 |v(t)| dt \\ &= \int_0^1 (-t^3 + t) dt + \int_1^2 (t^2 + t - 2) dt \\ &= \left[-\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) + \left\{ \left(\frac{8}{3} + 2 - 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right\} = \frac{25}{12} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 3-1

[문제 3] [3-1] [10점]

함수 $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\int_{-1}^1 g(x) dx$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

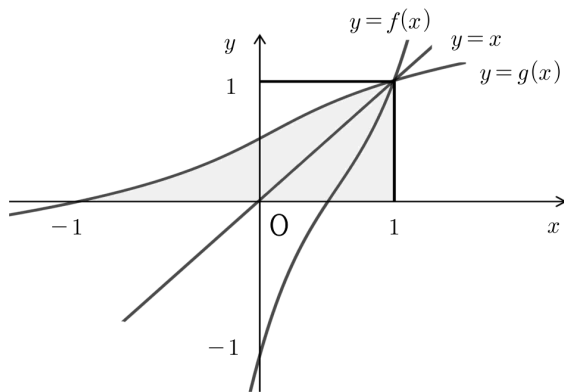
■ 예시 답안

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}$$

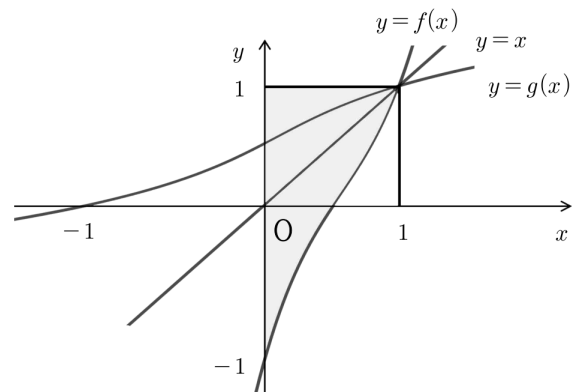
이때 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이다. 따라서 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 역함수 $g(x)$ 가 존재한다.

$f(0) = -1$ 이므로 $g(-1) = 0$ 이고 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 교점의 x 좌표는

$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = x, \quad (x-1)(x^2+1) = 0 \text{에서 } x = 1$$



(그림 1)



(그림 2)

$\int_{-1}^1 g(x) dx$ 는 (그림 1)과 같이 곡선 $y = g(x)$ 와 x 축 및 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 한편 곡선 $y = g(x)$ 와 곡선 $y = f(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 $\int_{-1}^1 g(x) dx$ 는 (그림 2)와 같이 곡선 $y = f(x)$ 와 y 축 및 직선 $y = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(x) dx &= \int_0^1 \{1 - f(x)\} dx \\ &= \int_0^1 (1 - x^3 + x^2 - 2x + 1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^1 = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 3-2

[문제 3] [3-2] [15점]

이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^4 + bx^2 + c = \int_0^x (x^2 + 2t)f'(t) dt$ 이다.

(나) $(a + b)^2 = 4$

$f(1) > 0$ 일 때, $f'(1)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, a, b, c 는 상수이다.)

■ 예시 답안

조건 (가)에서 $ax^4 + bx^2 + c = \int_0^x (x^2 + 2t)f'(t) dt$ 의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $c = 0$ 이므로 $f(x) = ax^2 + bx$ 이고 $f'(x) = 2ax + b$. 따라서

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^2 &= \int_0^x (x^2 + 2t)f'(t) dt = \int_0^x (x^2 + 2t)(2at + b) dt \\ &= \int_0^x \{4at^2 + 2(b + ax^2)t + bx^2\} dt \\ &= 4a \int_0^x t^2 dt + 2(b + ax^2) \int_0^x t dt + bx^2 \int_0^x 1 dt \\ &= \frac{4a}{3} [t^3]_0^x + (b + ax^2) [t^2]_0^x + bx^2 [t]_0^x \\ &= ax^4 + \left(\frac{4a}{3} + b\right)x^3 + bx^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

㉠이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 $b = -\frac{4}{3}a$

..... ㉡

조건 (나)에서 $(a + b)^2 = 4$, $a + b = -2$ 또는 $a + b = 2$

(i) $a + b = -2$ 일 때 ㉡과 연립하여 풀면 $a = 6, b = -8$ 에서 $f(x) = 6x^2 - 8x$
 $f(1) = -2$ 이므로 $f(1) > 0$ 를 만족시키지 않는다.

(ii) $a + b = 2$ 일 때 ㉡과 연립하여 풀면 $a = -6, b = 8$ 에서 $f(x) = -6x^2 + 8x$
 $f(1) = 2$ 이므로 $f(1) > 0$ 를 만족시킨다.

따라서 함수 $f(x) = -6x^2 + 8x$ 이고 $f'(x) = -12x + 8$ 이므로 $f'(1) = -4$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 3-3

[문제 3] [3-3] [15점]

$a > 0$ 인 실수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & (x < 0) \\ -x^2 + ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

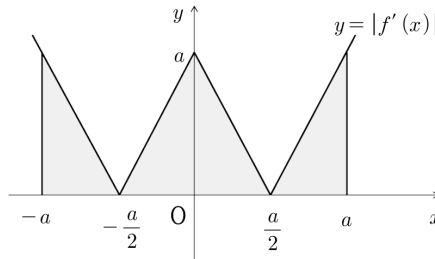
이라 하자. $\int_{-a}^a |f'(x)| dx = 1$ 일 때, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-a+2h) - f(a-h)}{h}$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = a, \quad \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = a$$

이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능하다. 이때 $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & (x < 0) \\ -2x + a & (x \geq 0) \end{cases}$

$\int_{-a}^a |f'(x)| dx$ 는 (그림)과 같이 x 축과 y 축 및 직선 $y = -2x + a$ 로 이루어진 삼각형 넓이의 4배와 같다.



(그림)

$$\int_{-a}^a |f'(x)| dx = 4 \left(\frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times a \right) = a^2$$

$$\int_{-a}^a |f'(x)| dx = 1 \text{ 이므로}$$

$$a^2 = 1 \text{에서 } a = 1 \ (a > 0)$$

이때

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x < 0) \\ -x^2 + x & (x \geq 0) \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & (x < 0) \\ -2x + 1 & (x \geq 0) \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $f(-1) = f(1) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-a+2h) - f(a-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+2h) - f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+2h) - f(-1) + f(1) - f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+2h) - f(-1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{-h} \\ &= 2f'(-1) + f'(1) \end{aligned}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } f'(-1) = -1, f'(1) = -1$$

$$\text{이므로 } 2f'(-1) + f'(1) = -3$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

2024학년도 수리논술 · 오후

문항 1-1

[문제 1] [1-1] [10점]

다음은 $0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때, x 에 대한 이차방정식

$$2x^2 + (4 \cos \theta)x + 3 - 3 \sin \theta = 0$$

이 중근을 갖도록 하는 모든 θ 의 값을 구하는 과정이다.

이차방정식 $2x^2 + (4 \cos \theta)x + 3 - 3 \sin \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$$D = (4 \cos \theta)^2 - 8(3 - 3 \sin \theta) = 0$$

이어야 한다. 즉, $2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta - 3 = 0$

이고, $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ 이므로

$$2(1 - \sin^2 \theta) + 3 \sin \theta - 3 = 0$$

이다. 따라서

$$(\boxed{\text{가}})(\sin \theta - 1) = 0$$

이므로

$$\sin \theta = \boxed{\text{나}} \quad \text{또는} \quad \sin \theta = 1$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서

$\sin \theta = \boxed{\text{나}}$ 일 때, $\theta = \boxed{\text{다}}$ 또는 $\theta = \boxed{\text{라}}$ 이고

$\sin \theta = 1$ 일 때, $\theta = \boxed{\text{마}}$ 이다.

위의 과정에서 (가) ~ (마)에 알맞은 식 또는 값을 구하시오.

예시 답안

이차방정식 $2x^2 + (4 \cos \theta)x + 3 - 3 \sin \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

이차방정식이 중근을 가져야 하므로 $D = (4 \cos \theta)^2 - 8(3 - 3 \sin \theta) = 0$ 이어야 한다.

즉, $2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta - 3 = 0$ 이고 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ 이므로 $2(1 - \sin^2 \theta) + 3 \sin \theta - 3 = 0$

이다. 따라서

$$(\boxed{2 \sin \theta - 1})(\sin \theta - 1) = 0$$

이므로

$$\sin \theta = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \text{또는} \quad \sin \theta = 1$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서

$\sin \theta = \boxed{\frac{1}{2}}$ 일 때, $\theta = \boxed{\frac{\pi}{6}}$ 또는 $\theta = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$ 이고 $\left(\theta = \frac{5\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{\pi}{6}\right)$

$\sin \theta = 1$ 일 때, $\theta = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ 이다.

(가) $2 \sin \theta - 1$ (또는 $-2 \sin \theta + 1$) (나) $\frac{1}{2}$ (다) $\frac{\pi}{6}$ (라) $\frac{5\pi}{6}$ (마) $\frac{\pi}{2}$

또는

(가) $2 \sin \theta - 1$ (또는 $-2 \sin \theta + 1$) (나) $\frac{1}{2}$ (다) $\frac{5\pi}{6}$ (라) $\frac{\pi}{6}$ (마) $\frac{\pi}{2}$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 1-2

[1-2] [10점]

두 곡선

$$y = \log_3(-x), \quad y = \log_{\frac{1}{3}} x + a$$

가 직선 $y = 2$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB} = 18$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$\log_3(-x) = 2$ 에서 $x = -9$ 이므로 점 A의 좌표는 $A(-9, 2)$

$\log_{\frac{1}{3}} x + a = 2$ 에서 $\log_{\frac{1}{3}} x = 2 - a$, $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-a} = 3^{a-2}$

이므로 점 B의 좌표는 $B(3^{a-2}, 2)$

$\overline{AB} = 18$ 이므로 $3^{a-2} + 9 = 18$, $3^{a-2} = 9 = 3^2$ 에서 $a = 4$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 1-3

[1-3] [10점]

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$2^{a_{n+2}} = 16^{a_n}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_8 - S_4 = 160$ 일 때, a_5 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$2^{a_{n+2}} = 16^{a_n} \text{에서 } 2^{a_{n+2}} = (2^4)^{a_n} = 2^{4a_n}, a_{n+2} = 4a_n$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 $a_1 = a$, 공비를 r 라 하면

$$a_{n+2} = 4a_n \text{에서 } ar^{n+1} = 4ar^{n-1}, r^2 = 4$$

모든 항이 양수이므로 $r = 2$

$$S_8 - S_4 = \frac{a(2^8 - 1)}{2 - 1} - \frac{a(2^4 - 1)}{2 - 1} = a(2^8 - 2^4) = 160 \text{에서 } a = \frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } a_5 = ar^4 = \frac{2}{3} \times 2^4 = \frac{32}{3}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 2-1

[문제 2] [2-1] [10점]

서로 다른 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 4$ 가

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b) - f(b-3h)}{h} = 9$$

를 만족시킬 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a+b, f(a+b))$ 에서의 접선의 방정식을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} \times 3 = 3f'(a) = 9 \text{에서 } f'(a) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b) - f(b-3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b-3h) - f(b)}{-3h} \times 3 = 3f'(b) = 9 \text{에서 } f'(b) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

 $f'(x) = 3x^2 - 3x - 3$ 이므로 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 의해서 a, b 는 이차방정식 $3x^2 - 3x - 3 = 3$ 의 서로 다른 두 실근이다.이때 $3x^2 - 3x - 6 = 0$ 에서 $3(x+1)(x-2) = 0$ $x = -1$ 또는 $x = 2$ 이므로 $a+b = 1$ 이다.

$$f(a+b) = f(1) = \frac{1}{2}, \quad f'(a+b) = f'(1) = -3$$

따라서 점 $(a+b, f(a+b)) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = -3(x-1), \quad y = -3x + \frac{7}{2}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 2-2

[2-2] [10점]

실수 a ($a > 1$)에 대하여 함수

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(a+1)x^2 + 3ax - \frac{9}{4}a^2 + 3a$$

의 극솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $\lim_{a \rightarrow 1+} \frac{g'(a)}{a-1}$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

$f'(x) = 3x^2 - 3(a+1)x + 3a = 3(x-1)(x-a)$ 이므로 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 $x = 1$ 또는 $x = a$

$a > 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 극솟값 $f(a) = -\frac{a^3}{2} - \frac{3}{4}a^2 + 3a = g(a)$ 를 갖는다.

$g'(a) = -\frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2}a + 3$ 이므로

$$\lim_{a \rightarrow 1+} \frac{g'(a)}{a-1} = \lim_{a \rightarrow 1+} \frac{-\frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2}a + 3}{a-1} = \lim_{a \rightarrow 1+} \frac{-\frac{3}{2}(a+2)(a-1)}{a-1} = -\frac{3}{2} \lim_{a \rightarrow 1+} (a+2) = -\frac{9}{2}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 2-3

[2-3] [10점]

두 점 P, Q는 시각 $t = 0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2 - 11t + 8, \quad v_2(t) = -3t^2 + 5t$$

이다. 점 P가 출발한 후 점 Q와 만날 때까지 점 P가 움직인 거리를 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

시각 t 에서 점 P와 점 Q의 위치를 각각 $x_1(t), x_2(t)$ 라 하면

$$x_1(t) = t^3 - \frac{11}{2}t^2 + 8t + C_1, \quad x_2(t) = -t^3 + \frac{5}{2}t^2 + C_2 \quad (\text{단, } C_1, C_2 \text{는 적분상수})$$

점 P와 점 Q가 시각 $t = 0$ 일 때 동시에 원점을 출발하였으므로

$$x_1(0) = C_1 = 0, \quad x_2(0) = C_2 = 0$$

$$\text{따라서 } x_1(t) = t^3 - \frac{11}{2}t^2 + 8t, \quad x_2(t) = -t^3 + \frac{5}{2}t^2$$

점 P가 출발한 후 점 Q와 만나는 시각 t ($t > 0$)는

$$t^3 - \frac{11}{2}t^2 + 8t = -t^3 + \frac{5}{2}t^2, \quad 2t^3 - 8t^2 + 8t = 2t(t-2)^2 = 0$$

에서 $t = 2$ 이다.

$$v_1(t) = 3t^2 - 11t + 8 = (t-1)(3t-8) = 0$$

에서 $0 \leq t \leq 1$ 일 때 $v_1(t) \geq 0$ 이고 $1 \leq t \leq 2$ 일 때 $v_1(t) \leq 0$

이므로 점 P가 출발한 후 점 Q와 만날 때까지 점 P가 움직인 거리를 s 라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 |v_1(t)| dt = \int_0^1 |v_1(t)| dt + \int_1^2 |v_1(t)| dt \\ &= \int_0^1 (3t^2 - 11t + 8) dt + \int_1^2 (-3t^2 + 11t - 8) dt \\ &= \left[t^3 - \frac{11}{2}t^2 + 8t \right]_0^1 + \left[-t^3 + \frac{11}{2}t^2 - 8t \right]_1^2 \\ &= \left(1 - \frac{11}{2} + 8 \right) + \left\{ (-8 + 22 - 16) - \left(-1 + \frac{11}{2} - 8 \right) \right\} = 5 \end{aligned}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

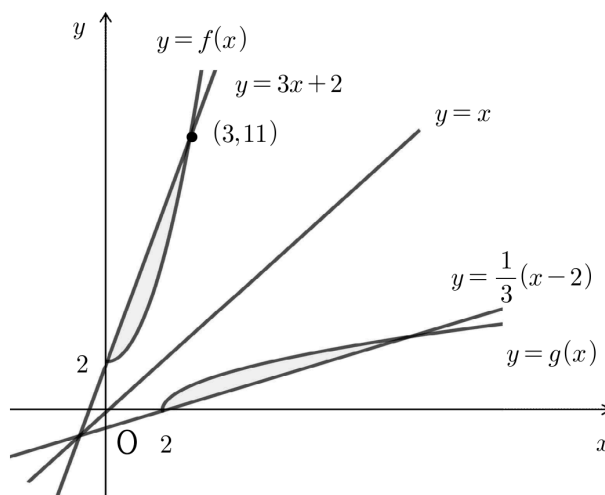
문항 3-1

[문제 3] [3-1] [10점]

함수 $f(x) = x^2 + 2$ ($x \geq 0$)의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}(x-2)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

함수 $y = \frac{1}{3}(x-2)$ 의 역함수는 $y = 3x + 2$ 이다. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}(x-2)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 (그림)과 같이 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 3x + 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



(그림)

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 3x + 2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 + 2 = 3x + 2, \quad x(x-3) = 0$$

에서 $x = 0$ 또는 $x = 3$. 따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^3 \{(3x+2) - (x^2+2)\} dx &= \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 3-2

[3-2] [15점]

다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x t f'(t) dt = 2F(x) + kx$$

이다. (단, k 는 상수이다.)

(나) 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -3 이다.

$f(1) \geq 0$ 일 때, $\int_0^1 f(x) dx$ 의 최솟값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

■ 예시 답안

조건 (가)에서 $\int_0^x t f'(t) dt = 2F(x) + kx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$x f'(x) = 2f(x) + k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

다항함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n (단, n 은 자연수, a 는 0 이 아닌 상수)라 하면

$\textcircled{1}$ 의 양변의 최고차항이 서로 같아야 하므로 $anx^n = 2ax^n$ 에서 $n = 2$

즉, $f(x)$ 는 이차함수이다. $f(x) = ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라 하면 $\textcircled{1}$ 에서

$$2ax^2 + bx = 2ax^2 + 2bx + 2c + k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 $b = 2b, 2c + k = 0$ 이다.

이때 $b = 0, c = -\frac{k}{2}$ 이므로 $f(x) = ax^2 - \frac{k}{2}$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -3 이므로 $a > 0$ 이고 $-\frac{k}{2} = -3$ 에서 $k = 6$

따라서 $f(x) = ax^2 - 3$

$f(1) \geq 0$ 이므로 $a - 3 \geq 0, a \geq 3$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (ax^2 - 3) dx = \left[\frac{a}{3}x^3 - 3x \right]_0^1 = \frac{a}{3} - 3 \text{이므로}$$

$\int_0^1 f(x) dx$ 의 최솟값은 $a = 3$ 일 때 -2 이다.

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 3-3

[3-3] [15점]

$a > 1$ 인 상수 a 에 대하여 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(a)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = -a$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{x} = -1$$

$$(다) \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_1^a |f(x)| dx$$

■ 예시 답안

조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = -a$ 이므로 $f(x)$ 의 최고차항은 x^3 이고 이차항의 계수는 $-a$ 이다. 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c \quad (\text{단, } a, b, c \text{는 상수})$$

라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$ ㉠

조건 (나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - a\} = 0$ 에서 $f(0) = a$ 이므로 $c = a$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -1$$

이므로 ㉠에서 $b = -1$. 이때 $f'(x) = 3x^2 - 2ax - 1$ ㉡

이고, $f(x) = x^3 - ax^2 - x + a = (x^2 - 1)(x - a) = (x + 1)(x - 1)(x - a)$ 이다.

$1 \leq x \leq a$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로 $\int_1^a |f(x)| dx = -\int_1^a f(x) dx$

조건 (다)에서 $\int_{-1}^1 f(x) dx = -\int_1^a f(x) dx$ 이므로 $\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^a f(x) dx = 0$

따라서 $\int_{-1}^a f(x) dx = 0$. 즉, $\int_{-1}^a (x^3 - ax^2 - x + a) dx = 0$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^a (x^3 - ax^2 - x + a) dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax \right]_{-1}^a \\ &= \left(\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^2 + a^2 \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}a - \frac{1}{2} - a \right) \\ &= -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{4} = 0, \quad a^4 - 6a^2 - 8a - 3 = 0, \quad (a-3)(a+1)^3 = 0$$

에서 $a = 3$ ($a > 1$). 따라서 ㉡으로부터 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$ 이므로 $f'(3) = 8$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

2026학년도 모의논술

문항 1

[문제1] 두 직선 $y = (\log_3 2)x$, $y = (\log_4 a)x$ 가 서로 수직이 되도록 하는 양수 a 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. [10점]

■ 예시 답안

두 직선 $y = (\log_3 2)x$, $y = (\log_4 a)x$ 가 서로 수직이므로 $\log_3 2 \times \log_4 a = -1$
 $\log_3 2 \times \log_{2^2} a = -1$, $\log_3 2 \times \left(\frac{1}{2} \log_2 a\right) = -1$
 $\log_3 2 \times \log_2 a = -2$, $\log_3 a = -2$
 따라서 $a = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 2

[문제2] $0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때, 부등식

$$\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta - 3 \cos \theta - 1 \geq 0$$

을 만족시키는 모든 θ 의 값의 범위가 $\alpha \leq \theta \leq \beta$ 이다. $\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{6}\right)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. [10점]

예시 답안

$$\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta - 3 \cos \theta - 1 \geq 0, \quad \cos^2 \theta + 3(1 - \cos^2 \theta) - 3 \cos \theta - 1 \geq 0$$

$$-2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 2 \geq 0, \quad 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2 \leq 0, \quad (\cos \theta + 2)(2 \cos \theta - 1) \leq 0$$

이때 $\cos \theta + 2 \geq 0$ 이므로 $2 \cos \theta - 1 \leq 0$, $\cos \theta \leq \frac{1}{2}$ 에서 $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$, $\alpha + \beta = 2\pi$

$$\text{따라서 } \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 3

[문제3] 함수 $f(x) = -3x^2 + 3$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$ 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(t)$ 라 하자. $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, $0 < t < 1$ 이고 O는 원점이다.) [10점]

■ 예시 답안

$$f(x) = -3x^2 + 3 \text{에서 } f'(x) = -6x$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 접선의 방정식은 $y - f(t) = f'(t)(x - t)$ 이므로

$$y - (-3t^2 + 3) = -6t(x - t)$$

접선이 y 축과 만나는 점 Q의 좌표는 $(0, 3t^2 + 3)$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이 $g(t)$ 는

$$g(t) = \frac{1}{2}t(3t^2 + 3) = \frac{3}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

$$\text{이고 } g'(t) = \frac{9}{2}t^2 + \frac{3}{2} \text{이므로 } g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{8}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 4

[문제4] 시각 $t = 0$ 에서 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t) = kt^2 + t$ 이다. 시각 $t = 3$ 에서 점 P의 위치가 9일 때, 시각 $t = 4$ 에서 점 P의 가속도를 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, k 는 상수이다.) [10점]

■ 예시 답안

점 P의 시각 $t = 3$ 에서의 위치는 9이므로

$$0 + \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 (kt^2 + t) dt = \left[\frac{k}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^3 = 9k + \frac{9}{2}$$

$$9k + \frac{9}{2} = 9 \text{에서 } k = \frac{1}{2} \text{이고 } v(t) = \frac{1}{2}t^2 + t$$

$$\text{시각 } t \text{에서 점 P의 가속도 } a(t) \text{는 } a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = t + 1 \text{이므로 } a(4) = 5$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 5

[문제5] 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하고 그 과정을 서술하시오. [10점]

■ 예시 답안

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$

이차방정식 $3x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 16 - 24 = -8 < 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이고 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 가 만나는 점의 좌표는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 점의 좌표와 같다.

$$x^3 - 2x^2 + 2x = x, \quad x(x-1)^2 = 0 \quad \text{에서} \quad x = 0 \quad \text{또는} \quad x = 1$$

함수 $g(x)$ 가 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다. 따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 |f(x) - x| dx &= 2 \int_0^1 |(x^3 - 2x^2 + 2x) - x| dx \\ &= 2 \int_0^1 |x^3 - 2x^2 + x| dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx \\ &= 2 \times \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

■ 채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

문항 6

[문제6] 다항함수 $f(x) = x^3 + 2ax + b$ 가 다음 조건을 만족시킨다. [15점]

$$(가) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{5}{2}$$

$$(나) \int_0^2 f(x) dx = 3$$

함수 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ 의 극댓값과 극솟값을 모두 구하고 그 과정을 서술하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

예시 답안

조건 (가) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{5}{2}$ 에서 $f'(1) = \frac{5}{2}$
 $f'(x) = 3x^2 + 2a$ 에서 $f'(1) = 3 + 2a = \frac{5}{2}$, $a = -\frac{1}{4}$ 이므로 $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x + b$
 조건 (나) $\int_0^2 f(x) dx = 3$ 에서 $\int_0^2 \left(x^3 - \frac{1}{2}x + b\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + bx\right]_0^2 = 3$
 $4 - 1 + 2b = 3$, $b = 0$ 이므로 $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x$.

$g(x) = \int_0^x f(t) dt$ 에서 $g'(x) = f(x)$. $g'(x) = 0$ 즉, $f(x) = 0$ 에서

$$x\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0, \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{또는} \quad x = 0 \quad \text{또는} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(t^3 - \frac{1}{2}t\right) dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{4}t^2\right]_0^x = \frac{1}{4}(x^4 - x^2)$$

따라서 함수 $g(x)$ 는

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{에서 극솟값 } g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{16}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{에서 극솟값 } g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{16}$$

을 갖고, $x = 0$ 에서 극댓값 $g(0) = 0$ 을 갖는다.

채점 기준

※ 대학에서 이 문항의 채점기준을 공개하지 않았습니다.

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다