

한국기술교육대 약술형논술

수리논술

목차

2026학년도 수리논술 (공학계열)	4
문항 1	4
문항 2	5
문항 3	6
문항 4	8
문항 5	9
문항 6	10
문항 7	12
문항 8	14
문항 9	16
문항 10	18
2025학년도 수리논술 (공학계열)	21
문항 1	21
문항 2	22
문항 3	23
문항 4	24
문항 5	25
문항 6	26
문항 7	27
문항 8	28
문항 9	29
문항 10	30
2024학년도 수리논술 오전	32
문항 1	32
문항 2	33
문항 3	34
문항 4	35
문항 5	36
문항 6	38
문항 7	40
문항 8	41
문항 9	42
문항 10	44
2024학년도 수리논술 오후	46
문항 1	46
문항 2	47
문항 3	48

문항 4	49
문항 5	50
문항 6	51
문항 7	52
문항 8	53
문항 9	54
문항 10	56

2027학년도 모의논술 58

문항 1	58
문항 2	59
문항 3	60
문항 4	61
문항 5	62
문항 6	63
문항 7	64
문항 8	66
문항 9	67
문항 10	69

2026학년도 모의논술 (오후) 71

문항 1	71
문항 2	72
문항 3	73
문항 4	74
문항 5	75
문항 6	76
문항 7	77
문항 8	78
문항 9	80
문항 10	81

2025학년도 모의논술 83

문항 1	83
문항 2	84
문항 3	85
문항 4	86
문항 5	87
문항 6	88
문항 7	89
문항 8	90
문항 9	91
문항 10	92

2026학년도 수리논술 (공학계열)

문항 1

[문항 1] 정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ 인 함수

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$$

의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 하자. 정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 인 함수

$$g(x) = -a^x + b$$

의 최댓값과 최솟값이 각각 $-m, -M$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 상수이고, $a > 1$) [4점]

예시 답안

함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ 은 정의역 $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ 에서 감소하므로 $x = 0$ 에서 최댓값, $x = 2$ 에서 최솟값을 갖는다. 따라서

$$M = f(0) = 2, \quad m = f(2) = \frac{5}{4} \quad \dots\dots\textcircled{㉠}$$

이다. 한편 $a > 1$ 이므로 함수 $g(x)$ 도 정의역 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 에서 감소하고, 따라서 $x = 0$ 에서 최댓값, $x = 1$ 에서 최솟값을 갖는다. 즉

$$-m = g(0) = -1 + b, \quad -M = g(1) = -a + b \quad \dots\dots\textcircled{㉡}$$

이다. ㉠, ㉡으로부터 $a = \frac{7}{4}, b = -\frac{1}{4}$ 이므로

$$a + b = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$M = 2, m = \frac{5}{4}$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$a + b = \frac{3}{2}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 2

[문항 2] 정의역이 $\{x \mid x > 0\}$ 인 함수

$$f(x) = \log_5(10x^2 + 35)$$

에 대하여 $(f^{-1} \circ f^{-1})(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

예시 답안

$f^{-1}(3) = a$ 로 놓으면 역함수의 성질에 따라 $f(a) = 3$ 이므로

$$f(a) = \log_5(10a^2 + 35) = 3$$

이다. 로그의 정의에 의해 $10a^2 + 35 = 5^3 = 125$ 이고, 따라서

$$a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because x > 0)$$

$f^{-1}(3) = 3$ 이므로

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(3) = f^{-1}(f^{-1}(3)) = f^{-1}(3) = 3$$

이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2	$f^{-1}(3) = 3$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$(f^{-1} \circ f^{-1})(3) = 3$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 3

[문항 3] 함수 $f(x)$ 가 모든 양의 실수 x 에 대하여 부등식

$$f\left(\frac{x-3}{5}\right) \leq \frac{1}{5}x^2 \leq f\left(\frac{x-1}{5}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{7x^2 + 4}$ 의 값을 구하시오. [8점]

■ 예시 답안

부등식

$$f\left(\frac{x-3}{5}\right) \leq \frac{1}{5}x^2$$

에서 $\frac{x-3}{5} = t$ 로 놓으면 $x = 5t + 3$ 이고 $x > 0$ 일 때 $t > -\frac{3}{5}$ 이므로

$$f(t) \leq \frac{1}{5}(5t+3)^2 \quad \left(t > -\frac{3}{5}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이다. 한편 부등식

$$\frac{1}{5}x^2 \leq f\left(\frac{x-1}{5}\right)$$

에서 $\frac{x-1}{5} = s$ 로 놓으면 $x = 5s + 1$ 이고 $x > 0$ 일 때 $s > -\frac{1}{5}$ 이므로

$$\frac{1}{5}(5s+1)^2 \leq f(s) \quad \left(s > -\frac{1}{5}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

이다. ㉠, ㉡으로부터 $x > -\frac{1}{5}$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$\frac{1}{5}(5x+1)^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{5}(5x+3)^2$$

이고 각 변을 $7x^2 + 4$ 로 나누면

$$\frac{(5x+1)^2}{5(7x^2+4)} \leq \frac{f(x)}{7x^2+4} \leq \frac{(5x+3)^2}{5(7x^2+4)}$$

이다.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x+1)^2}{5(7x^2+4)} = \frac{5}{7}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x+3)^2}{5(7x^2+4)} = \frac{5}{7}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의해

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{7x^2+4} = \frac{5}{7}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3	$x > -\frac{3}{5}$ 일 때 $f(x) \leq \frac{1}{5}(5x+3)^2$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$x > -\frac{1}{5}$ 일 때 $\frac{1}{5}(5x+1)^2 \leq f(x)$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x+1)^2}{5(7x^2+4)} = \frac{5}{7}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x+3)^2}{5(7x^2+4)} = \frac{5}{7}$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{7x^2+4} = \frac{5}{7}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 4

[문항 4] 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선을 l , 함수

$$g(x) = \frac{1}{8}x^3 f(x)$$

에 대하여 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$ 를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선을 m 이라 하자. 직선 l 의 방정식이 $y = -3x + 9$ 일 때, 두 직선 l, m 과 x 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오. [8점]

■ 예시 답안

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 방정식이 $y = -3x + 9$ 이므로

$$f(2) = 3, \quad f'(2) = -3$$

이다. 한편 $g(x) = \frac{1}{8}x^3 f(x)$ 에서

$$g'(x) = \frac{3}{8}x^2 f(x) + \frac{1}{8}x^3 f'(x)$$

이므로

$$g(2) = \frac{1}{8} \times 8 \times f(2) = 3,$$

$$g'(2) = \frac{3}{8} \times 4 \times f(2) + \frac{1}{8} \times 8 \times f'(2) = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

이다. 따라서 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$ 를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선 m 의 방정식은

$$y = -\frac{2}{3}(x - 2) + 3 = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$$

이다. 직선 l 의 방정식 $y = -3x + 9$ 와 직선 m 의 방정식 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$ 으로부터 직선 l 의 x 절편은 3, 직선 m 의 x 절편은 $\frac{13}{2}$, 두 직선 l, m 의 교점의 좌표는 $(2, 3)$ 이므로 두 직선 l, m 과 x 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{13}{2} - 3 \right) \times 3 = \frac{21}{4}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4	$f(2) = 3, f'(2) = -3$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$g'(x) = \frac{3}{8}x^2 f(x) + \frac{1}{8}x^3 f'(x)$ 임을 구할 수 있다.	2점
	직선 m 의 방정식이 $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$ 임을 구할 수 있다.	2점
	삼각형의 넓이가 $\frac{21}{4}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 5

[문항 5] 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$ 인 함수

$$f(x) = x^2 - 2(\sin \theta)x + \cos^2 \theta - \sin \theta + 1$$

의 최솟값이 1일 때, 이를 만족시키는 모든 실수 θ 의 값의 합을 구하시오. (단, $0 \leq \theta < 2\pi$) [8점]

■ 예시 답안

 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta - \sin \theta + 1 - \sin^2 \theta \\ &= (x - \sin \theta)^2 - 2\sin^2 \theta - \sin \theta + 2 \end{aligned}$$

이다.

① 만약 $\sin \theta \geq 0$ 이라면, $x \geq 0$ 일 때 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(\sin \theta) = -2\sin^2 \theta - \sin \theta + 2$$

이므로

$$-2\sin^2 \theta - \sin \theta + 2 = 1$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2} \quad (\because \sin \theta \geq 0)$$

그러므로 실수 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$)는

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

이다.

② 만약 $\sin \theta < 0$ 이라면, $x \geq 0$ 일 때 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(0) = -\sin^2 \theta - \sin \theta + 2$$

이므로

$$-\sin^2 \theta - \sin \theta + 2 = 1$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

그러나 $-1 \leq \sin \theta < 0$ 이어야 하므로 조건을 만족시키는 실수 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$)는 존재하지 않는다.
따라서 ①, ②로부터 모든 실수 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
5	$\sin \theta \geq 0$ 일 때 조건을 만족시키기 위해서는 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$\sin \theta < 0$ 일 때 조건을 만족시키는 θ 가 존재하지 않음을 구할 수 있다.	3점
	모든 실수 θ 의 값의 합이 π 임을 구할 수 있다.	2점

문항 6

[문항 6] 양수 a 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} 2f(|x|) & (|x| \leq a) \\ -f(2a - |x|) & (|x| > a) \end{cases}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 양수 a 의 값을 구하시오. [12점]

(가) $f(a) = -\frac{81}{8}$

(나) 두 함수 $f(x-a)g(x)$ 와 $f(x)g(x-a)$ 가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이다.

■ 예시 답안

$f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 조건 (가)에서 $f(a) \neq 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x = \pm a$ 에서만 연속이 아니다. 따라서 조건 (나)로부터 함수 $f(x-a)g(x)$ 는 $x = a, x = -a$ 에서 연속이고 함수 $f(x)g(x-a)$ 는 $x = 2a, x = 0$ 에서 연속이어야 한다. 그러므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x-a)g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x-a)g(x) = f(0)g(a) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\lim_{x \rightarrow -a+} f(x-a)g(x) = \lim_{x \rightarrow -a-} f(x-a)g(x) = f(-2a)g(-a) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2a+} f(x)g(x-a) = \lim_{x \rightarrow 2a-} f(x)g(x-a) = f(2a)g(a) \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x-a) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x-a) = f(0)g(-a) \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

이다. ㉠에서

$$f(0)(-f(a)) = f(0)(2f(a))$$

㉠:

$$3f(0)f(a) = 0$$

$$\therefore f(0) = 0 \quad (\because f(a) \neq 0)$$

마찬가지로,

$$f(-2a)(2f(a)) = f(-2a)(-f(a))$$

㉡:

$$3f(-2a)f(a) = 0$$

$$\therefore f(-2a) = 0 \quad (\because f(a) \neq 0)$$

$$f(2a)(-f(a)) = f(2a)(2f(a))$$

㉢:

$$3f(2a)f(a) = 0$$

$$\therefore f(2a) = 0 \quad (\because f(a) \neq 0)$$

$$f(0)(2f(a)) = f(0)(-f(a))$$

㉣:

$$3f(0)f(a) = 0$$

$$\therefore f(0) = 0 \quad (\because f(a) \neq 0)$$

이다. $f(0) = 0, f(2a) = 0, f(-2a) = 0$ 을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = x(x-2a)(x+2a)$$

이다. 따라서 조건 (가)에 의해

$$f(a) = a(-a)(3a) = -3a^3 = -\frac{81}{8}$$

$$a^3 = \frac{27}{8}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
6	$f(0) = 0$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$f(-2a) = 0$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$f(2a) = 0$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$f(x) = x(x - 2a)(x + 2a)$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$a = \frac{3}{2}$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 7

[문항 7] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1) = 0$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(x-3)f(x) \geq 0$ 이 성립한다.

실수 k 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) - (x-1)f'(k) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합을 구하시오. [12점]

예시 답안

조건 (가)에서 $f(1) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-1)(x^2 + ax + b) \quad (\text{단, } a, b \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. 조건 (나)와 $\textcircled{1}$ 으로부터 모든 실수 x 에 대하여

$$(x-3)(x-1)(x^2 + ax + b) \geq 0$$

이어야 하므로

$$x^2 + ax + b = (x-3)(x-1)$$

이다. 따라서 $f(x) = (x-1)^2(x-3) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ 이고, 이를 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$$

이다. 주어진 방정식 $f(x) - (x-1)f'(k) = 0$ 은

$$(x-1)(x^2 - 4x + 3 - f'(k)) = 0$$

이므로 서로 다른 실근의 개수가 2가 되는 경우는 다음 두 가지뿐이다.

① 방정식 $x^2 - 4x + 3 - f'(k) = 0$ 이 1이 아닌 중근을 갖는 경우:

이차방정식 $x^2 - 4x + 3 - f'(k) = 0$ 이 중근을 갖기 위해서는 $f'(k) = -1$ 이어야 하므로

$$f'(k) + 1 = (3k - 4)(k - 2) = 0$$

$$\therefore k = \frac{4}{3}, 2$$

이때 방정식 $x^2 - 4x + 3 - f'(k) = 0$ 의 중근은 $x = 2$ 이므로 1이 아닌 중근을 갖는다.

② 방정식 $x^2 - 4x + 3 - f'(k) = 0$ 의 한 근이 1인 경우:

이차방정식 $x^2 - 4x + 3 - f'(k) = 0$ 의 한 근이 1이기 위해서는 $f'(k) = 0$ 이어야 하므로

$$f'(k) = (3k - 7)(k - 1) = 0$$

$$\therefore k = \frac{7}{3}, 1$$

이때 방정식 $x^2 - 4x + 3 - f'(k) = 0$ 의 근은 $x = 1, 3$ 이다.

따라서 ①, ②로부터 모든 실수 k 의 값의 합은

$$\frac{4}{3} + 2 + \frac{7}{3} + 1 = \frac{20}{3}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
7	$f(x) = (x-1)^2(x-3) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ 임을 구할 수 있다.	3점
	방정식 $x^2 - 4x + 3 - f'(k) = 0$ 이 1이 아닌 중근을 갖기 위한 조건이 $f'(k) = -1$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$f'(k) = -1$ 일 때 $k = \frac{4}{3}$, 2임을 구할 수 있다.	2점
	방정식 $x^2 - 4x + 3 - f'(k) = 0$ 의 한 근이 1이기 위한 조건이 $f'(k) = 0$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$f'(k) = 0$ 일 때 $k = \frac{7}{3}$, 1임을 구할 수 있다.	2점
	모든 실수 k 의 값의 합이 $\frac{20}{3}$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 8

[문항 8] 두 점 P와 Q는 시각 $t = 0$ 일 때 각각 점 A(3)과 점 B(20)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도는 각각

$$v_1(t) = 3t^2 + 4t - 20, \quad v_2(t) = 2t + 9$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 12가 될 때까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [12점]

예시 답안

점 P는 점 A(3)에서 출발하고 수직선 위를 움직이는 속도가 $v_1(t) = 3t^2 + 4t - 20$ 이므로 시각 t 에서의 위치를 $s_1(t)$ 라 하면

$$s_1(t) = 3 + \int_0^t (3s^2 + 4s - 20)ds = t^3 + 2t^2 - 20t + 3 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

이다. 또한 점 Q는 B(20)에서 출발하고 수직선 위를 움직이는 속도가 $v_2(t) = 2t + 9$ 이므로 시각 t 에서의 위치를 $s_2(t)$ 라 하면

$$s_2(t) = 20 + \int_0^t (2s + 9)ds = t^2 + 9t + 20 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

이다. 이때 두 점 P, Q 사이의 거리가 12가 되는 시각은 $|s_1(t) - s_2(t)| = 12$ 를 만족시켜야 한다. ㉠, ㉡에서

$$|t^3 + t^2 - 29t - 17| = 12$$

$$\therefore t^3 + t^2 - 29t - 17 = 12 \quad \text{또는} \quad t^3 + t^2 - 29t - 17 = -12$$

① $t^3 + t^2 - 29t - 17 = 12$ 일 때

$$t^3 + t^2 - 29t - 29 = 0$$

$$(t+1)(t+\sqrt{29})(t-\sqrt{29}) = 0$$

$$\therefore t = \sqrt{29} \quad (\because t \geq 0)$$

② $t^3 + t^2 - 29t - 17 = -12$ 일 때

$$t^3 + t^2 - 29t - 5 = 0$$

$$(t-5)(t^2 + 6t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 5 \quad (\because t \geq 0)$$

따라서 ①, ②로부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 12가 되는 시각은 $t = 5$ 이다. 한편

$$v_1(t) = 3t^2 + 4t - 20 = (3t+10)(t-2)$$

이므로 $0 \leq t < 2$ 일 때 $v_1(t) < 0$ 이고, $t \geq 2$ 일 때 $v_1(t) \geq 0$ 이다. 그러므로 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 12가 될 때까지 점 P가 움직인 거리, 즉 점 P가 시각 $t = 0$ 에서 $t = 5$ 까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^5 |v_1(t)| dt &= -\int_0^2 v_1(t)dt + \int_2^5 v_1(t)dt \\ &= -\int_0^2 (3t^2 + 4t - 20)dt + \int_2^5 (3t^2 + 4t - 20)dt \\ &= -[t^3 + 2t^2 - 20t]_0^2 + [t^3 + 2t^2 - 20t]_2^5 \\ &= 123 \end{aligned}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
8	$s_1(t) = t^3 + 2t^2 - 20t + 3$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$s_2(t) = t^2 + 9t + 20$ 임을 구할 수 있다.	2점
	두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 12가 되는 시각이 $t = 5$ 임을 구할 수 있다.	4점
	$\int_0^5 v_1(t) dt = 123$ 임을 구할 수 있다.	4점

문항 9

[문항 9] 실수 a, b 에 대하여 정의역이 $\left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}\right\}$ 인 함수

$$f(x) = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + a \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + b$$

의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [16점]

- (1) $a = \frac{1}{2}, b = 1$ 일 때, M 과 m 의 값을 각각 구하시오. (8점)
 (2) $M = 5, m = -3$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 를 모두 구하시오. (8점)

■ 예시 답안

(1)

[풀이] $x - \frac{\pi}{6} = \theta \left(-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right)$ 로 놓으면

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta, \quad \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sin^2 \theta$$

이므로

$$f(x) = -\sin^2 \theta - a \sin \theta + b + 1$$

이다. 이때 $\sin \theta = t \left(-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}\right)$ 로 놓으면

$$f(x) = -t^2 - at + b + 1 = -\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b + 1 \quad \cdots \textcircled{7}$$

이므로, $a = \frac{1}{2}, b = 1$ 일 때

$$f(x) = -t^2 - \frac{1}{2}t + 2 = -\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{33}{16}$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $t = -\frac{1}{4}$ 일 때 $M = \frac{33}{16}$ 이고, 최솟값은 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 $m = \frac{3}{2}$ 이다.

(2)

[풀이] ⑦으로부터 함수 $g(t)$ 를

$$g(t) = -\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b + 1$$

라 하자. 함수 $g(t)$ 의 대칭축 $t = -\frac{a}{2}$ 를 기준으로 다음과 같이 경우를 네 가지로 나누어 생각해 보자.

① $-\frac{a}{2} \leq -\frac{1}{2}$ (즉, $a \geq 1$)일 때,

함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $M = g\left(-\frac{1}{2}\right)$ 이고, 최솟값은 $m = g\left(\frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{a^2}{4} + b + \frac{3}{4} = 5, \quad -\frac{a}{2} + b + \frac{3}{4} = -3$$

이다. 이를 연립하면 $a = 8, b = \frac{1}{4}$ 이다.

② $-\frac{1}{2} < -\frac{a}{2} \leq 0$ (즉, $0 \leq a < 1$)일 때,

함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $M = g\left(-\frac{a}{2}\right)$ 이고, 최솟값은 $m = g\left(\frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{a^2}{4} + b + 1 = 5, \quad -\frac{a}{2} + b + \frac{3}{4} = -3 \quad \cdots \textcircled{8}$$

이다. ⑧에서 b 를 소거하면

$$a^2 + 2a - 31 = 0$$

$$\therefore a = -1 \pm 4\sqrt{2}$$

그러나 이는 조건 $0 \leq a < 1$ 을 만족시키지 못한다.

③ $0 < -\frac{a}{2} < \frac{1}{2}$ (즉, $-1 < a < 0$)일 때,

함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $M = g\left(-\frac{a}{2}\right)$ 이고, 최솟값은 $m = g\left(-\frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{a^2}{4} + b + 1 = 5, \quad \frac{a}{2} + b + \frac{3}{4} = -3 \quad \cdots \textcircled{C}$$

이다. ㉔에서 b 를 소거하면

$$a^2 - 2a - 31 = 0$$

$$\therefore a = 1 \pm 4\sqrt{2}$$

그러나 이는 조건 $-1 < a < 0$ 을 만족시키지 못한다.

④ $-\frac{a}{2} \geq \frac{1}{2}$ (즉, $a \leq -1$)일 때,

함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $M = g\left(\frac{1}{2}\right)$ 이고, 최솟값은 $m = g\left(-\frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$-\frac{a}{2} + b + \frac{3}{4} = 5, \quad \frac{a}{2} + b + \frac{3}{4} = -3$$

이다. 이를 연립하면 $a = -8, b = \frac{1}{4}$ 이다.

따라서 ①, ②, ③, ④에 의해 순서쌍 (a, b) 는

$$\left(8, \frac{1}{4}\right), \quad \left(-8, \frac{1}{4}\right)$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
9-(1)	$t = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \left(-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}\right)$ 일 때 $f(x) = -t^2 - \frac{1}{2}t + 2$ 임을 구할 수 있다.	4점
	$M = \frac{33}{16}$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$m = \frac{3}{2}$ 임을 구할 수 있다.	2점
9-(2)	$-\frac{a}{2} \leq -\frac{1}{2}$ 일 때, 순서쌍 $(a, b) = \left(8, \frac{1}{4}\right)$ 을 구할 수 있다.	4점
	$-\frac{a}{2} \geq \frac{1}{2}$ 일 때, 순서쌍 $(a, b) = \left(-8, \frac{1}{4}\right)$ 을 구할 수 있다.	4점

문항 10

[문항 10] 자연수 n 과 $0 < t < n$ 인 실수 t 에 대하여 함수

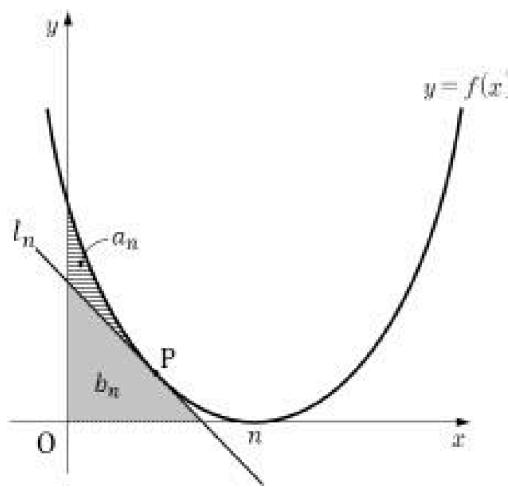
$$f(x) = x^2 - 2nx + n^2$$

의 그래프 위의 점 $P(t, f(t))$ 에서의 접선을 l_n 이라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 와 접선 l_n 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 a_n , 접선 l_n 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 b_n 이라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [배점 : 16점]

- (1) $a_3 + b_3$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 t 의 개수를 구하시오. (8점)
- (2) $a_n + b_n$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 t 의 개수를 c_n 이라 할 때, $c_5 + c_6 + c_7$ 의 값을 구하시오. (8점)

■ 예시 답안

(1)



$n = 3$ 인 경우에 대하여 $f'(x) = 2x - 6$ 이므로 접선 l_3 의 방정식은

$$y = (2t - 6)(x - t) + f(t)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} a_3 &= \int_0^t [f(x) - \{(2t - 6)(x - t) + f(t)\}] dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x - (2t - 6)\left(\frac{1}{2}x^2 - tx\right) - (t^2 - 6t + 9)x \right]_0^t \\ &= \frac{1}{3}t^3 \end{aligned}$$

이다. 한편, 접선 l_3 의 x 절편과 y 절편은

$$x\text{절편: } (2t - 6)(x - t) + f(t) = 0$$

$$\therefore x = \frac{t + 3}{2}$$

$$y\text{절편: } y = (2t - 6)(-t) + f(t)$$

$$\therefore y = 9 - t^2$$

이므로

$$b_3 = \frac{1}{2} \times (9 - t^2) \times \left(\frac{t + 3}{2}\right)$$

이다. $g(t) = a_3 + b_3$ 로 놓으면

$$g(t) = \frac{1}{12}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t + \frac{27}{4}$$

이므로

$$g'(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}(t-3)^2$$

이다. 따라서 $0 < t < 3$ 인 실수 t 에 대하여 $g'(t) > 0$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 증가한다. $g(0) = \frac{27}{4}$ 이고 $g(3) = \frac{27}{3} = 9$ 이므로 $0 < t < 3$ 에서 자연수가 되는 $g(t)$ 의 값은 7, 8이다. 따라서 $a_3 + b_3$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 t 의 개수는 2이다.

(2)

문항 (1)번과 동일한 과정을 거치면 자연수 n 에 대하여 a_n 과 b_n 을 다음과 같이 구할 수 있다. $f'(x) = 2x - 2n$ 이므로 접선 l_n 의 방정식은

$$y = (2t - 2n)(x - t) + f(t)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^t [f(x) - \{(2t - 2n)(x - t) + f(t)\}] dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - nx^2 + n^2x - (2t - 2n)\left(\frac{1}{2}x^2 - tx\right) - (t^2 - 2nt + n^2)x \right]_0^t \\ &= \frac{1}{3}t^3 \end{aligned}$$

이다. 한편, 접선 l_n 의 x 절편과 y 절편은

$$x\text{절편: } (2t - 2n)(x - t) + f(t) = 0$$

$$\therefore x = \frac{t+n}{2}$$

$$y\text{절편: } y = (2t - 2n)(-t) + f(t)$$

$$\therefore y = n^2 - t^2$$

이므로

$$b_n = \frac{1}{2} \times (n^2 - t^2) \times \left(\frac{t+n}{2}\right)$$

이다. $g_n(t) = a_n + b_n$ 으로 놓으면

$$g_n(t) = \frac{1}{12}t^3 - \frac{n}{4}t^2 + \frac{n^2}{4}t + \frac{n^3}{4}$$

이므로

$$g'_n(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{n}{2}t + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{4}(t-n)^2$$

이다. 따라서 $0 < t < n$ 인 실수 t 에 대하여 $g'_n(t) > 0$ 이므로 함수 $g_n(t)$ 는 증가한다.

① $n = 5$ 일 때, $g_5(0) = \frac{125}{4}$ 이고 $g_5(5) = \frac{125}{3}$ 이므로 $0 < t < 5$ 에서 자연수가 되는 $g_5(t)$ 의 값은 32, 33, 34, ..., 41이다. 그러므로 $c_5 = 10$ 이다.

② $n = 6$ 일 때, $g_6(0) = \frac{216}{4} = 54$ 이고 $g_6(6) = \frac{216}{3} = 72$ 이므로 $0 < t < 6$ 에서 자연수가 되는 $g_6(t)$ 의 값은 55, 56, 57, ..., 71이다. 그러므로 $c_6 = 17$ 이다.

③ $n = 7$ 일 때, $g_7(0) = \frac{343}{4}$ 이고 $g_7(7) = \frac{343}{3}$ 이므로 $0 < t < 7$ 에서 자연수가 되는 $g_7(t)$ 의 값은 86, 87, 88, ..., 114이다. 그러므로 $c_7 = 29$ 이다.

따라서 ①, ②, ③으로부터

$$c_5 + c_6 + c_7 = 10 + 17 + 29 = 56$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
10-(1)	$a_3 = \frac{1}{3}t^3$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$b_3 = \frac{1}{4}(9 - t^2)(t + 3)$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$a_3 + b_3$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 t 의 개수가 2임을 구할 수 있다.	2점
10-(2)	$a_n + b_n = \frac{1}{12}t^3 - \frac{n}{4}t^2 + \frac{n^2}{4}t + \frac{n^3}{4}$ 임을 구할 수 있다.	4점
	$c_5 = 10$ 임을 구할 수 있다.	1점
	$c_6 = 17$ 임을 구할 수 있다.	1점
	$c_7 = 29$ 임을 구할 수 있다.	1점
	$c_5 + c_6 + c_7 = 56$ 임을 구할 수 있다.	1점

2025학년도 수리논술 (공학계열)

문항 1

[문항 1] 함수 $y = 3^{x-2} + 3$ 의 그래프 위의 점 (a, b) 와 함수 $y = 3^{x-2} + 3$ 의 그래프의 점근선 사이의 거리가 3일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [배점 : 4점]

예시 답안

함수 $y = 3^{x-2} + 3$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은 $y = 3$ 이다.

점 (a, b) 와 직선 $y = 3$ 사이의 거리가 3이고, $b > 3$ 이므로 $b - 3 = 3$ 에서 $b = 6$ 이다.

이때, 점 $(a, 6)$ 은 함수 $y = 3^{x-2} + 3$ 의 그래프 위에 있으므로 $6 = 3^{a-2} + 3$ 이다.

따라서 $a = 3$ 이고, $a + b = 3 + 6 = 9$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$b = 6$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$a + b = 9$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 2

[문항 2] 두 양수 a, b 에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(0, \log_2 a), (1, \log_2 b)$ 를 지나는 직선이 점 $(3, 2)$ 를 지날 때, $\frac{b^3}{a^2}$ 의 값을 구하시오. [배점 : 4점]

■ 예시 답안

두 점 $(0, \log_2 a), (1, \log_2 b)$ 를 지나는 직선은

$$y = \frac{\log_2 b - \log_2 a}{1 - 0}(x - 0) + \log_2 a$$

이다. 정리하면 $y = (\log_2 b - \log_2 a)x + \log_2 a$ 이다.

이 직선이 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$2 = 3(\log_2 b - \log_2 a) + \log_2 a$$

$$2 = 3 \log_2 b - 2 \log_2 a$$

$$2 = \log_2 \frac{b^3}{a^2}$$

$$\frac{b^3}{a^2} = 4$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2	직선 $y = (\log_2 b - \log_2 a)x + \log_2 a$ 를 구할 수 있다.	2점
	$\frac{b^3}{a^2} = 4$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 3

[문항 3] 함수 $f(x) = |x^3 - 12x|$ 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x) = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 실수 k 의 값을 구하시오. [배점 : 8점]

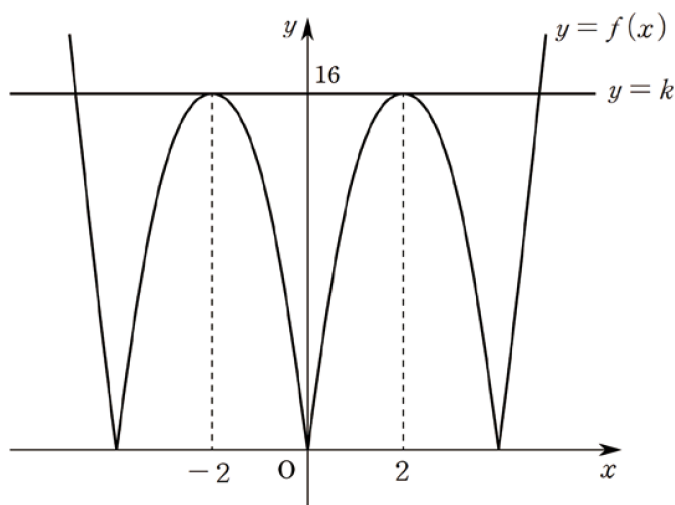
예시 답안

$g(x) = x^3 - 12x$ 라 하면,

$$g'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

이므로 $g'(x) = 0$ 의 해는 $x = -2$ 또는 $x = 2$ 이다.

따라서 함수 $g(x)$ 의 극댓값은 $g(-2) = 16$, 극솟값은 $g(2) = -16$ 이므로 함수 $f(x) = |g(x)| = |x^3 - 12x|$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 방정식 $f(x) = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 그림과 같이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 $k = f(2) = |g(2)| = 16$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3	$g(x) = x^3 - 12x$ 라 할 때, $g'(x) = 0$ 의 해 $x = -2$ 또는 $x = 2$ 를 구할 수 있다.	2점
	$g(-2) = 16$, $g(2) = -16$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$y = f(x) = g(x) $ 의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	2점
	$k = 16$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 4

[문항 4] 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이고, $0 \leq x < 4$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & (0 \leq x < 2) \\ \frac{ax+b}{x+2} & (2 \leq x < 4) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(15)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [배점 : 8점]

■ 예시 답안

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 0$ 에서도 연속이다.

즉, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 이 성립한다.

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x+4) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x)$$

이다. 따라서 $f(0) = 4$,

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{ax+b}{x+2} = \frac{4a+b}{6}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (2x+4) = 4$$

이므로 $\frac{4a+b}{6} = 4$ 가 성립하고 이 식으로부터

$$4a+b=24 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이다. 또한 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서도 연속이므로 $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$ 가 성립한다.

따라서 $f(2) = \frac{2a+b}{4}$,

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (2x+4) = 8, \quad \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{ax+b}{x+2} = \frac{2a+b}{4}$$

이므로

$$2a+b=32 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

이다.

㉠, ㉡으로부터 $a = -4, b = 40$ 이다. 따라서

$$f(15) = f(11) = f(7) = f(3) = \frac{-12+40}{3+2} = \frac{28}{5}$$

이다.

■ 채점 기준

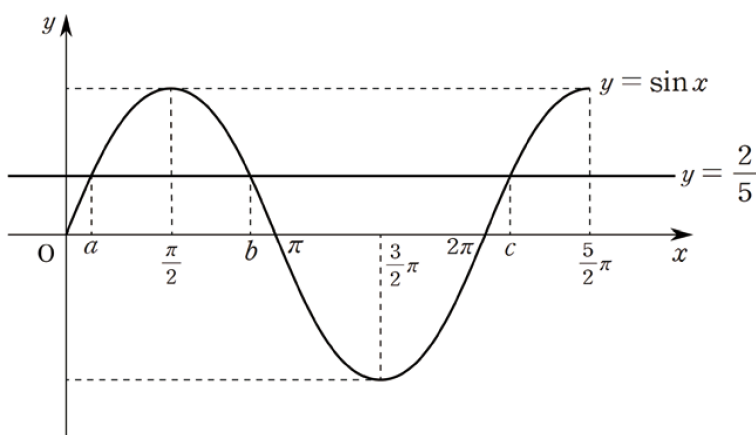
하위 문항	채점 기준	배점
4	$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x)$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$4a+b=24$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$2a+b=32$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$f(15) = \frac{28}{5}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 5

[문항 5] $0 \leq x < \frac{5}{2}\pi$ 일 때, 방정식 $5 \sin x = 2$ 를 만족하는 x 의 값을 작은 것부터 차례로 a, b, c 라 하자. 이때 $\cos\left(\frac{a+b}{2} + c\right)$ 의 값을 구하시오. [배점 : 8점]

■ 예시 답안

$5 \sin x = 2$ 에서 $\sin x = \frac{2}{5}$ 임을 알 수 있고, 이 방정식의 해는 $0 \leq x < \frac{5}{2}\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{2}{5}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



이때 두 점 $\left(a, \frac{2}{5}\right), \left(b, \frac{2}{5}\right)$ 는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이므로 $\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2}$ 이다.
따라서

$$\cos\left(\frac{a+b}{2} + c\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = -\sin c = -\frac{2}{5}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
5	$\sin a = \sin b = \sin c = \frac{2}{5}$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2}$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = -\frac{2}{5}$ 임을 구할 수 있다.	3점

문항 6

[문항 6] 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. [배점 : 12점]

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{2x^2 + 1} = -1$

(나) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^k} = m$ 인 자연수 k 와 상수 m 이 존재한다. (단, $k \geq 2$)

 $f(m)$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

조건 (가)로부터

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이다. 조건 (나)로부터 $f(x)$ 는 $(x-1)^k$ 를 인수로 갖는다.따라서 $k = 2$ 또는 $k = 3$ 이다.(i) $k = 2$ 일 때,

$$f(x) = 2(x-1)^2(x+c) \quad (c \text{는 상수})$$

이다. 따라서

$$f(x) = 2x^3 + (2c-4)x^2 + (2-4c)x + 2c$$

이고, $\textcircled{1}$ 과 비교하면 $c = 1$ 이다.(ii) $k = 3$ 일 때,

$$f(x) = 2(x-1)^3 = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 2$$

이다. $\textcircled{1}$ 과 비교하면, 이것은 모순이다.(i), (ii)에서 $k = 2$ 이고 $f(x) = 2(x-1)^2(x+1)$ 이다.

조건 (나)로부터

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^k} = \lim_{x \rightarrow 1} 2(x+1) = 4$$

이다. 그러므로 $m = 4$ 이다.

$$f(m) = f(4) = 2 \times 9 \times 5 = 90 \text{이다.}$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
6	$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)임을 구할 수 있다.	3점
	$k = 2$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$f(x) = 2(x-1)^2(x+1)$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$m = 4$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$f(m) = 90$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 7

[문항 7] 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(x-1) & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능할 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [배점 : 12점]

■ 예시 답안

$f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하자.

$f(x) - f(x-1) = 2x + a - 1$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} 2x + a - 1 & (x < 0) \\ x^2 + ax + b & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = g(0)$ 로부터

$$a - 1 = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 미분가능이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(2h + a - 1) - b}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(h^2 + ah + b) - b}{h} \end{aligned}$$

에서 $a = 2$ 이고, $\textcircled{1}$ 으로부터 $b = 1$ 이다.

따라서 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 이고, $f(3) = 16$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
7	$g(x) = \begin{cases} 2x + a - 1 & (x < 0) \\ x^2 + ax + b & (x \geq 0) \end{cases}$ (a, b 는 상수)임을 구할 수 있다.	4점
	$a = 2$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$b = 1$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$f(3) = 16$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 8

[문항 8] 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$4x^2 - 2f(x) = x + 1 + f(-x)$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 f(x) dx$ 의 값을 구하시오. [배점 : 12점]

■ 예시 답안

문제에서 주어진 식을 변형하면

$$2f(x) + f(-x) = 4x^2 - x - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이다.

위의 식으로부터 $f(x)$ 는 이차식이다. $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하자. $\textcircled{7}$ 으로부터 모든 실수 x 에 대하여

$$2(ax^2 + bx + c) + (ax^2 - bx + c) = 4x^2 - x - 1$$

$$3ax^2 + bx + 3c = 4x^2 - x - 1$$

이다. 그러므로

$$3a = 4, \quad b = -1, \quad 3c = -1$$

$$a = \frac{4}{3}, \quad b = -1, \quad c = -\frac{1}{3}$$

이고,

$$f(x) = \frac{4}{3}x^2 - x - \frac{1}{3}$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^2 - x - \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{9} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{18} \end{aligned}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
8	$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)임을 구할 수 있다.	4점
	$f(x) = \frac{4}{3}x^2 - x - \frac{1}{3}$ 임을 구할 수 있다.	4점
	$\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{18}$ 임을 구할 수 있다.	4점

문항 9

[문항 9] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \int_0^x t(t-2)(t-4) dt$$

에 대하여 다음 물음에 답하시오. (16점)

- (1) 함수 $f(x)$ 의 극댓값을 구하시오. (6점)
 (2) 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x+2) - f(x)$ 라 할 때, 함수 $g(x)$ 의 극솟값을 구하시오. (10점)

■ 예시 답안

(1)

 $f'(x) = x(x-2)(x-4)$ 이므로 $x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 4$ 에서 $f'(x) = 0$ 이다.
따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극대이고 극댓값은

$$f(2) = \int_0^2 t(t-2)(t-4) dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + 4t^2 \right]_0^2 = 4 - 16 + 16 = 4$$

이다.

(2)

 $g(x) = f(x+2) - f(x)$ 이므로

$$g(x) = \int_0^{x+2} t(t-2)(t-4) dt - \int_0^x t(t-2)(t-4) dt = 2x^3 - 6x^2 + 4$$

이다. 함수 $g(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = 6x(x-2)$$

이므로 $x = 0$ 또는 $x = 2$ 에서 $g'(x) = 0$ 이다.따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극소이고

$$f(4) = \int_0^4 t(t-2)(t-4) dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + 4t^2 \right]_0^4 = 64 - 128 + 64 = 0$$

이므로 극솟값은

$$g(2) = f(4) - f(2) = 0 - 4 = -4$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
9-(1)	함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극대임을 구할 수 있다.	4점
	극댓값이 4임을 구할 수 있다.	2점
9-(2)	함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극소임을 구할 수 있다.	6점
	극솟값이 -4임을 구할 수 있다.	4점

문항 10

[문항 10] 모든 항이 0이 아닌 정수이고 공차 d 가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 수열 $\{S_n\}$ 의 각 항을 작은 수부터 다시 차례로 나열한 수열을 $\{M_n\}$ 이라 하면, 수열 $\{M_n\}$ 이

$$M_2 - M_1 = M_3 - M_2 = 2$$

를 만족시킨다. $S_n > 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값이 13일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 수열 $\{S_n\}$ 의 모든 항은 서로 다르다.) (16점)

- (1) 공차 d 의 값을 구하시오. (8점)
- (2) 첫째항 a_1 의 값을 구하시오. (8점)

■ 예시 답안

$a_1 > 0$ 이면 $S_1 > 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, $a_1 < 0$ 이다.

또 $a_2 > 0$ 이면 $S_3 = 3a_2 > 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 < a_2 < 0$ 이므로 2 이상의 자연수 k 에 대하여

$S_k = M_1$ 이라 하면 $n \leq k$ 일 때 $a_n < 0$ 이고, $n \geq k+1$ 일 때 $a_n > 0$ 이다.

(i) $S_k = M_1, S_{k-1} = M_2, S_{k+1} = M_3$ 인 경우

$M_2 - M_1 = S_{k-1} - S_k = -a_k = 2$ 이므로 $a_k = -2$ 가 되고

$M_3 - M_2 = S_{k+1} - S_{k-1} = a_k + a_{k+1} = 2$ 이므로 $a_{k+1} = 4$ 가 된다.

따라서

$$d = 6$$

이다. 한편, $a_1 = a_k - 6(k-1) = 4 - 6k$ 이고,

$$S_n = \frac{n\{2a_1 + d(n-1)\}}{2} = \frac{n\{2(4-6k) + 6(n-1)\}}{2} = n(3n-6k+1)$$

이다. $S_n > 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값이 13이므로

$n = 12$ 일 때 $3n - 6k + 1 \leq 0$, 즉, $6k \geq 37$ 을 만족하고,

$n = 13$ 일 때 $3n - 6k + 1 > 0$, 즉, $6k < 40$ 을 만족한다.

그러나 $37 \leq 6k < 40$ 을 만족하는 자연수 k 는 존재하지 않는다.

(ii) $S_k = M_1, S_{k+1} = M_2, S_{k-1} = M_3$ 인 경우

$M_2 - M_1 = S_{k+1} - S_k = a_{k+1} = 2$ 이고

$M_3 - M_2 = S_{k-1} - S_{k+1} = -a_k - a_{k+1} = 2$ 이므로 $a_k = -4$ 가 된다.

따라서

$$d = 6$$

이다.

한편 $a_1 = a_k - 6(k-1) = 2 - 6k$ 이고,

$$S_n = \frac{n\{2a_1 + d(n-1)\}}{2} = \frac{n\{2(2-6k) + 6(n-1)\}}{2} = n(3n-6k-1)$$

이다. $S_n > 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값이 13이므로

$n = 12$ 일 때 $3n - 6k - 1 \leq 0$, 즉, $6k \geq 35$ 을 만족하고,

$n = 13$ 일 때 $3n - 6k - 1 > 0$, 즉, $6k < 38$ 을 만족한다.

그러면 $35 \leq 6k < 38$ 을 만족하는 자연수 k 는 6뿐이다.

따라서

$$a_1 = 2 - 6k = -34$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
10-(1)	$a_k = -2, a_{k+1} = 4$ 또는 $a_k = -4, a_{k+1} = 2$ 임을 구할 수 있다.	5점
	공차 $d = 6$ 임을 구할 수 있다.	3점
10-(2)	$M_1 = S_6$ 임을 구할 수 있다.	4점
	첫째항 $a_1 = -34$ 임을 구할 수 있다.	4점

2024학년도 수리논술 오전

문항 1

[문항 1] 1이 아닌 두 양수 a, b 에 대하여 이차방정식 $x^2 - 8x + 4 = 0$ 의 두 근이 $\log_2 a, \log_2 b$ 일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값을 구하시오. (4점)

예시 답안

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 8, \quad (\log_2 a)(\log_2 b) = 4$$

이다. 따라서, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$\begin{aligned} \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 a)^2 + (\log_2 b)^2}{(\log_2 a)(\log_2 b)} \\ &= \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2(\log_2 a)(\log_2 b)}{(\log_2 a)(\log_2 b)} \\ &= \frac{8^2 - 2 \times 4}{4} \\ &= 14 \end{aligned}$$

이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$\log_2 a + \log_2 b = 8$ 이고 $(\log_2 a)(\log_2 b) = 4$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$\log_a b + \log_b a = 14$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 2

[문항 2] 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{2x^2 - x} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 10$$

일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오. (4점)

■ 예시 답안

문제에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{2x^2 - x}$ 의 값이 존재하기 위해서는

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (\text{단, } a, b, c \text{ 는 상수})$$

이어야 하고, 이를 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{2x^2 - x} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a = -1$$

이다. 따라서, $f(x) = x^3 - x^2 + bx + c$ 이다.또한, 문제에서 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2}$ 의 값이 존재하기 위해서는 $f(2) = 0$ 이어야 하므로

$$8 - 4 + 2b + c = 0$$

$$\therefore c = -4 - 2b \quad \dots \textcircled{1}$$

이다. 따라서, $f(x) = (x - 2)(x^2 + x + 2 + b)$ 이고, 이를 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 2 + b) = 10$$

$$\therefore b = 2$$

이다. 식 ①으로부터 $c = -8$ 이므로, 정리하면

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 8$$

이다. 그러므로 문제에서 구하고자 하는 값은 $f(1) = -6$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2	$f(x) = x^3 - x^2 + bx + c$ 임을 구할 수 있다. (단, b, c 는 상수)	2점
	$f(1) = -6$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 3

[문항 3] 함수 $f(x) = (2x^2 + x + 3)(3x - 2)$ 이고 다항함수 $g(x)$ 는

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) + 2}{x^2 + 3x + 2} = 3$$

을 만족시킬 때, 함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하자. $h'(-1)$ 의 값을 구하시오. (8점)

■ 예시 답안

$f(x) = (2x^2 + x + 3)(3x - 2)$ 이므로 $f(-1) = -20$ 이고,

$f'(x) = (4x + 1)(3x - 2) + (2x^2 + x + 3) \times 3$ 이므로 $f'(-1) = 27$ 이다.

또한, 문제에서 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) + 2}{x^2 + 3x + 2}$ 의 값이 존재하기 위해서는 $g(-1) = -2$ 이어야 한다. 따라서,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{\{x - (-1)\}(x + 2)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x + 2} \times \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 3$$

$$\therefore g'(-1) = 3$$

이다. 그러므로 문제에서 구하고자 하는 값은

$$\begin{aligned} h'(-1) &= f'(-1)g(-1) + f(-1)g'(-1) \\ &= 27 \times (-2) + (-20) \times 3 \\ &= -114 \end{aligned}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3	$f(-1) = -20$ 과 $f'(-1) = 27$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$g(-1) = -2$ 와 $g'(-1) = 3$ 임을 구할 수 있다.	4점
	$h'(-1) = -114$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 4

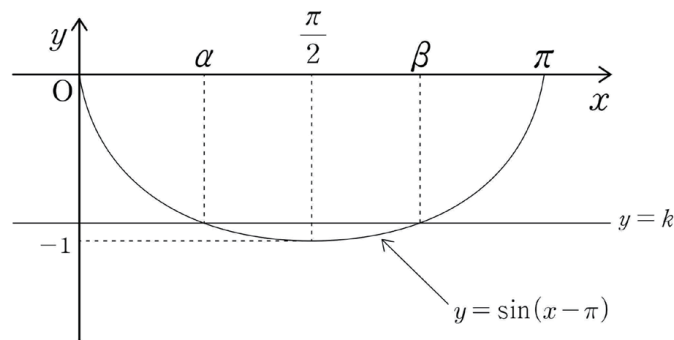
[문항 4] 다음 조건을 만족시키는 실수 α, β 의 값을 구하시오. (단, $\alpha < \beta$) (8점)

제시문

- (가) $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 부등식 $\sin(x - \pi) > k$ 를 만족시키는 모든 x 의 값의 범위가
 $0 \leq x < \alpha$ 또는 $\beta < x \leq \pi$ 이다. (단, $-1 < k < 0$)
 (나) $\tan(\beta - \alpha) = \sqrt{3}$

예시 답안

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $y = \sin(x - \pi)$ 와 $y = k$ (단, $-1 < k < 0$)를 그래프로 나타내면 다음 그림과 같다.



위의 그래프로부터

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \pi \quad \dots \textcircled{㉠}$$

이다. 또한, 조건 (나)로부터

$$\tan(\beta - \alpha) = \sqrt{3}$$

$$\therefore \beta - \alpha = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < \beta - \alpha < \pi) \quad \dots \textcircled{㉡}$$

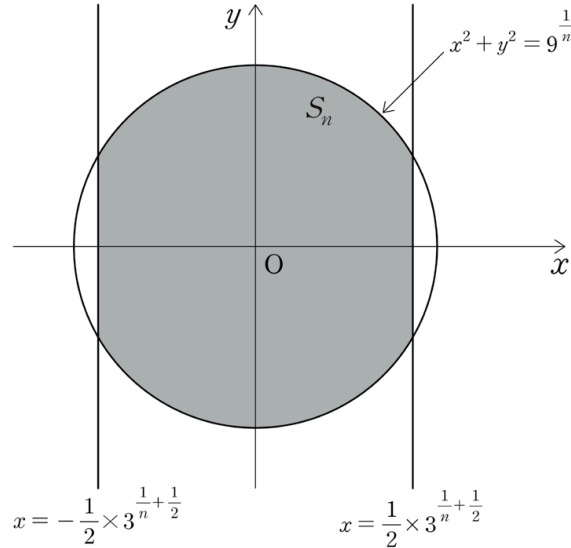
이다. 따라서, 식 ㉠과 ㉡을 연립하면 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{2\pi}{3}$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4	$\alpha + \beta = \pi$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$\beta - \alpha = \frac{\pi}{3}$ 임을 구할 수 있다.	4점
	$\alpha = \frac{\pi}{3}$ 와 $\beta = \frac{2\pi}{3}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 5

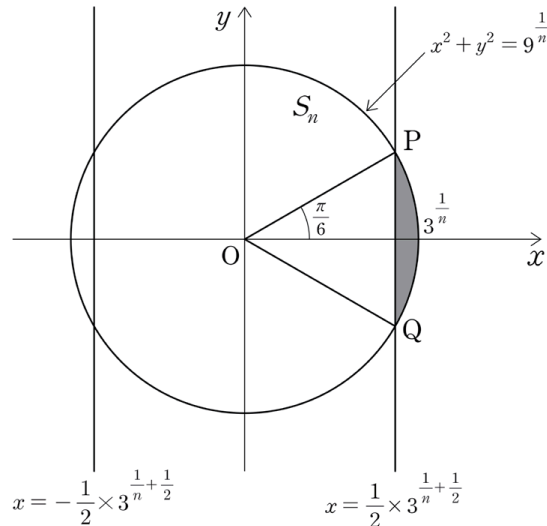
[문항 5] 자연수 n 에 대하여 두 직선 $x = -\frac{1}{2} \times 3^{\frac{1}{n}+\frac{1}{2}}$ 과 $x = \frac{1}{2} \times 3^{\frac{1}{n}+\frac{1}{2}}$ 및 원 $x^2 + y^2 = 9^{\frac{1}{n}}$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\frac{S_2}{S_4}$ 의 값을 구하시오. (8점)



예시 답안

원 $x^2 + y^2 = 9^{\frac{1}{n}}$ 과 직선 $x = \frac{1}{2} \times 3^{\frac{1}{n}+\frac{1}{2}}$ 이 만나는 두 점을 P, Q라 하자.

원의 반지름의 길이가 $3^{\frac{1}{n}}$ 이고, 점 P, Q의 x 좌표가 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 3^{\frac{1}{n}}$ 이므로, 삼각형 OPQ는 한 변의 길이가 $3^{\frac{1}{n}}$ 인 정 삼각형이다.



삼각형 OPQ의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times (3^{\frac{1}{n}})^2$ 이므로, 위 그림에서 원 $x^2 + y^2 = 9^{\frac{1}{n}}$ 과 직선 $x = \frac{1}{2} \times 3^{\frac{1}{n}+\frac{1}{2}}$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{6} \times (3^{\frac{1}{n}})^2 \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \times (3^{\frac{1}{n}})^2$$

이다. 따라서, 넓이 S_n 은

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left(3^{\frac{1}{n}}\right)^2 \pi - 2 \times \left\{ \frac{1}{6} \times \left(3^{\frac{1}{n}}\right)^2 \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(3^{\frac{1}{n}}\right)^2 \right\} \\
 &= \left(\frac{2}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \left(3^{\frac{1}{n}}\right)^2
 \end{aligned}$$

이다. 그러므로 문제에서 구하고자 하는 값은

$$\begin{aligned}
 \frac{S_2}{S_4} &= \frac{\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2}{\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^2} \\
 &= 3^{\frac{2}{2}-\frac{2}{4}} \\
 &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
5	삼각형 OPQ가 정삼각형임을 구할 수 있다. (또는 부채꼴 OPQ의 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 임을 구할 수 있다.)	2점
	$S_n = \left(\frac{2}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \left(3^{\frac{1}{n}}\right)^2$ 임을 구할 수 있다.	4점
	$\frac{S_2}{S_4} = \sqrt{3}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 6

[문항 6] 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

제시문

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 이다.

(나) $x \geq 0$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + a & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{x^3 - bx^2 + cx - 5}{x-1} & (x > 1) \end{cases}$$

이다. (단, a, b, c 는 상수이다.)

$f(3)$ 의 값을 구하시오. (12점)

■ 예시 답안

조건 (가)로부터 $f(0) = 0$ 이어야 한다. 즉, $a = -1$ 이다. 한편, 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 1$ 에서도 연속이다. 따라서,

(i) 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \quad \dots \textcircled{A}$

이어야 한다. 우선, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^3 - bx^2 + cx - 5}{x-1}$ 의 값이 존재하기 위해서는 $x \rightarrow 1+$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 하므로

$$1 - b + c - 5 = 0$$

$$\therefore c = b + 4 \quad \dots \textcircled{B}$$

이다. $f(1) = a$ 이므로, 식 $\textcircled{A}$ 으로부터

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^3 - bx^2 + (b+4)x - 5}{x-1} = -1 \quad (\because a = -1, c = b+4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(x^2 + (1-b)x + 5)}{x-1} = -1$$

$$1 + (1-b) + 5 = -1$$

$$\therefore b = 8$$

이다. 식 $\textcircled{B}$ 으로부터 $c = 12$ 이므로, $x > 1$ 일 때

$$f(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 12x - 5}{x-1}$$

이고, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{27 - 72 + 36 - 5}{2} \\ &= -7 \end{aligned}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
6	$a = -1$ 임을 구할 수 있다.	4점
	$x > 1$ 일 때, $f(x) = \frac{x^3 - 8x^2 + 12x - 5}{x - 1}$ 임을 구할 수 있다. (또는 $b = 8$ 과 $c = 12$ 임을 구할 수 있다.)	6점
	$f(3) = -7$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 7

[문항 7] 양수 a 에 대하여 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - 3$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

제시문

열린구간 $(k, k+3)$ 에서 $k < x_1 < x_2 < k+3$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다. (단, k 는 실수이다.)

$f(1)$ 의 값이 최소가 되도록 하는 a 의 값을 구하시오. (12점)

예시 답안

$f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$ 이고 $a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $\left(-\frac{2a}{3}, 0\right)$ 에서 감소한다.

문제에서의 조건으로부터 실수 k 는

$$-\frac{2a}{3} \leq k \text{ 이고 } k+3 \leq 0 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

을 만족시켜야 한다. 따라서, 식 ㉠으로부터

$$-\frac{2a}{3} \leq -3$$

$$\therefore a \geq \frac{9}{2} \quad \dots \textcircled{㉡}$$

이어야 한다. 식 ㉡으로부터

$$f(1) = a - 2 \geq \frac{5}{2}$$

이므로, $f(1)$ 의 값이 최소가 되도록 하는 a 의 값은 $\frac{9}{2}$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
7	열린구간 $\left(-\frac{2a}{3}, 0\right)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 감소임을 구할 수 있다.	5점
	실수 k 가 $-\frac{2a}{3} \leq k$ 와 $k+3 \leq 0$ 를 동시에 만족함을 구할 수 있다.	5점
	$f(1)$ 의 값이 최소가 되도록 하는 a 의 값이 $\frac{9}{2}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 8

[문항 8] 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_{-2}^1 f(x) dx$$

의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [배점 : 12점]

제시문

(가) $f(2) - f(-2) = 8$

(나) $-2 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 2$

■ 예시 답안

이차함수 $f(x) = x^2 + ax + b$ (단, a, b 는 실수)라 하자.

조건 (가)로부터 $f(2) - f(-2) = 8$ 이므로

$$(4 + 2a + b) - (4 - 2a + b) = 8$$

$$\therefore a = 2$$

이다. 따라서, $f(x) = x^2 + 2x + b$ 이고

$$\int_0^2 f(x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + bx \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 4 + 2b$$

이므로, 조건 (나)로부터

$$-2 \leq \frac{8}{3} + 4 + 2b \leq 2$$

$$\therefore -\frac{13}{3} \leq b \leq -\frac{7}{3} \quad \dots \textcircled{7}$$

이다. 한편,

$$\int_{-2}^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + bx \right]_{-2}^1 = 3b$$

이고, 식 ⑦으로부터 $\int_{-2}^1 f(x) dx$ 의 최댓값은 $3 \times (-\frac{7}{3}) = -7$ 이고 최솟값은 $3 \times (-\frac{13}{3}) = -13$ 이다.

그러므로, 문제에서 구하고자 하는 최댓값과 최솟값의 합은 -20 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
8	$f(x) = x^2 + 2x + b$ 임을 구할 수 있다. (단, b 는 실수)	3점
8	$-\frac{13}{3} \leq b \leq -\frac{7}{3}$ 임을 구할 수 있다.	4점
8	$\int_{-2}^1 f(x) dx = 3b$ 임을 구할 수 있다.	3점
8	$\int_{-2}^1 f(x) dx$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 -20 임을 구할 수 있다.	2점

문항 9

[문항 9] 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 원소로 갖는 집합을 A라 하고, 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열 $\{b_n\}$ 의 각 항을 원소로 갖는 집합을 B라 하자. 다음 물음에 답하시오. [배점 : 16점]

- (1) 집합 $A \cap B$ 에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열한 것을 $c_1, c_2, c_3, \dots$ 라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} c_k$ 의 값을 구하시오. (6점)
- (2) 집합 $A - B$ 에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열한 것을 $d_1, d_2, d_3, \dots$ 라 할 때, $d_{100} + d_{200} + d_{300}$ 의 값을 구하시오. (10점)

■ 예시 답안

(1)

등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n = 3n - 2$ 이므로

$$A = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, \dots\}$$

이다. 또한, 등차수열 $\{b_n\}$ 의 일반항은 $b_n = 4n - 2$ 이므로

$$B = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, \dots\}$$

이다. 따라서, $A \cap B = \{10, 22, 34, \dots\}$ 이다. 즉, $c_k = 12k - 2$ 이다. 그러므로,

$$\sum_{k=1}^{10} c_k = \sum_{k=1}^{10} (12k - 2) = 12 \times \frac{10 \times 11}{2} - 20 = 640$$

이다.

(2)

집합 $A - B$ 의 원소는 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항 중에서 4로 나눈 나머지가 2가 아닌 수이다.

즉, $A - B = \{1, 4, 7, 13, 16, 19, 25, 28, 31, 37, \dots\}$ 이다.

이때, $d_1 = 1, d_4 = 13, d_7 = 25, \dots$ 이므로 $d_{3k-2} = 12k - 11$ 이다. (단, k 는 자연수)

이와 마찬가지로, $d_{3k-1} = 12k - 8, d_{3k} = 12k - 5$ 이고, 따라서,

$$d_{100} = d_{3 \times 34 - 2} = 12 \times 34 - 11 = 397$$

$$d_{200} = d_{3 \times 67 - 1} = 12 \times 67 - 8 = 796$$

$$d_{300} = d_{3 \times 100} = 12 \times 100 - 5 = 1195$$

이다. 그러므로, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$d_{100} + d_{200} + d_{300} = 2388$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
9-(1)	$c_k = 12k - 2$ 임을 구할 수 있다.	3점
9-(1)	$\sum_{k=1}^{10} c_k = 640$ 임을 구할 수 있다.	3점
9-(2)	$d_{100} = 397$ 임을 구할 수 있다.	3점
9-(2)	$d_{200} = 796$ 임을 구할 수 있다.	3점
9-(2)	$d_{300} = 1195$ 임을 구할 수 있다.	3점
9-(2)	$d_{100} + d_{200} + d_{300} = 2388$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 10

[문항 10] $f(0) = 0$ 이고 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 와 제1사분면 위의 점 A에서 접한다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 중 A가 아닌 점을 B라 하면 두 점 A, B는 다음 조건을 만족시킨다. [배점 : 16점]

제시문

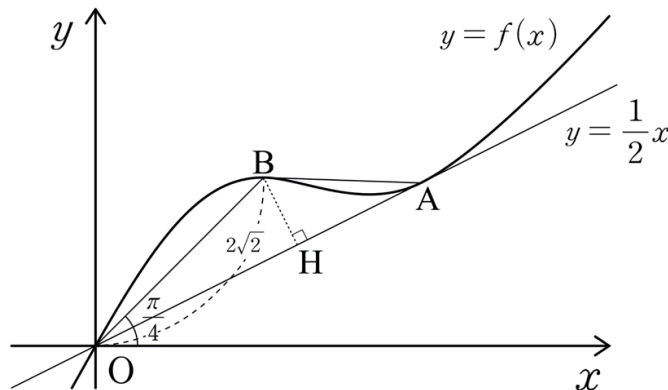
- (가) $\overline{OB} = 2\sqrt{2}$
 (나) 직선 OB가 x 축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$ 이다.
 (다) 삼각형 AOB의 넓이는 2이다.

다음 물음에 답하시오. (단, O는 원점이고, B는 제1사분면 위의 점이다.)

- (1) $f(1)$ 의 값을 구하시오. (10점)
 (2) x 에 대한 방정식 $8f(x) - 4x = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위가 $\alpha < k < \beta$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하시오. (단, α, β 는 상수이다.) (6점)

■ 예시 답안

(1)



점 A의 x 좌표를 t ($t > 0$)라 하면, $f(0) = 0$ 을 만족하는 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 와 제1사분면 위의 점 A에서 접하므로

$$f(x) - \frac{1}{2}x = ax(x-t)^2 \quad (\text{단, } a > 0)$$

이다. 한편, 조건 (가), (나)로부터 B의 좌표는 $(2, 2)$ 이다. 점 B는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$$f(2) = 2a(2-t)^2 + 1 = 2 \quad \dots \text{㉠}$$

이다. 점 B에서 직선 $y = \frac{1}{2}x$ (즉, $x - 2y = 0$)에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BH} = \frac{|2 - 2 \times 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

이고, 조건 (다)로부터

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \sqrt{t^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2} \times \frac{2}{\sqrt{5}} &= 2 \\ \therefore t &= 4 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

이다. 식 ㉠에 $t = 4$ 를 대입하면, $a = \frac{1}{8}$ 이고

$$f(x) = \frac{1}{8}x(x-4)^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x$$

이다. 그러므로, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$f(1) = \frac{1}{8} - 1 + \frac{5}{2} = \frac{13}{8}$$

이다.

(2)

함수 $h(x) = 8f(x) - 4x$ 라 하면,

$$h(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$$

이다. $h'(x) = 3x^2 - 16x + 16 = (3x-4)(x-4)$ 이므로, 함수 $h(x)$ 는 $x = \frac{4}{3}$ 에서 극댓값 $\frac{256}{27}$, $x = 4$ 에서 극솟값 0을 가진다. 함수 $h(x)$ 로부터 방정식 $h(x) = k$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위는

$$0 < k < \frac{256}{27}$$

이다. 따라서, $\alpha = 0$, $\beta = \frac{256}{27}$ 이고, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$\alpha + \beta = \frac{256}{27}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
10-(1)	B의 좌표는 (2, 2)임을 구할 수 있다.	3점
10-(1)	점 A의 x 좌표가 4임을 구할 수 있다.	3점
10-(1)	$f(1) = \frac{13}{8}$ 임을 구할 수 있다.	4점
10-(2)	$\alpha = 0$ (또는 $\beta = \frac{256}{27}$)임을 구할 수 있다.	3점
10-(2)	$\alpha + \beta = \frac{256}{27}$ 임을 구할 수 있다.	3점

2024학년도 수리논술 오후

문항 1

[문항 1] 두 실수 x, y 가 $3^x = 6, y = \log_3 8$ 을 만족시킬 때, $6x - 2y$ 의 값을 구하시오. [배점 : 4점]

■ 예시 답안

$3^x = 6$ 이므로 $x = \log_3 6$ 이다. 따라서, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$6x - 2y = \log_3 6^6 - \log_3 8^2$$

$$= \log_3 \left(\frac{6^6}{8^2} \right)$$

$$= \log_3 \left(\frac{3^6 \times 2^6}{2^6} \right)$$

$$= \log_3 3^6$$

$$= 6$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$x = \log_3 6$ 임을 구할 수 있다.	2점
1	$6x - 2y = 6$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 2

[문항 2] 함수 $f(x) = a^{2x+1} + b$ 가 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 최댓값 5, 최솟값 $\frac{7}{2}$ 을 가질 때, a^3b 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이고, $0 < a < 1$ 이다.) [배점 : 4점]

■ 예시 답안

$f(x) = a(a^2)^x + b$ 이고 $0 < a^2 < 1$ 이므로, 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-2)$ 이고 최솟값은 $f(1)$ 이다.

따라서, 문제로부터 최댓값이 5이므로

$$a^{-3} + b = 5 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

이고, 최솟값이 $\frac{7}{2}$ 이므로

$$a^3 + b = \frac{7}{2} \quad \dots \textcircled{㉡}$$

이다. $A = a^3$ 이라 하면, 식 ㉠과 ㉡은 $\frac{1}{A} + b = 5$, $A + b = \frac{7}{2}$ 이고, 두 식을 빼면

$$\frac{1}{A} - A = \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{㉢}$$

이다. 따라서, 식 ㉢으로부터

$$A = \frac{1}{2} \quad (\because A = a^3 > 0)$$

이고 $b = 3$ 이다. 그러므로, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$a^3b = Ab = \frac{3}{2}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2	함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(-2)$ 이고 최솟값이 $f(1)$ 임을 구할 수 있다.	2점
2	$a^3b = \frac{3}{2}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 3

[문항 3] 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -6, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 24$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x^2 + 3x + 1}$ 의 값을 구하시오. [배점 : 8점]

■ 예시 답안

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 와 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3}$ 의 값이 존재하기 위해서는 $f(0) = 0$ 이고 $f(3) = 0$ 이므로

$$f(x) = x(x-3)(ax+b) \quad (\text{단, } a, b \text{는 상수})$$

이다. 이를 문제에서 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x-3)(ax+b) = -6$$

$$-3b = -6$$

$$\therefore b = 2$$

이고

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 24$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x(ax+b) = 24$$

$$3(3a+b) = 24$$

$$\therefore a = 2$$

이다. $f(x) = 2x(x-3)(x+1)$ 이므로, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x^2 + 3x + 1} = \frac{f(1)}{6} = -\frac{4}{3}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3	$f(x) = x(x-3)(ax+b)$ 임을 구할 수 있다. (단, a, b 는 상수)	3점
3	$f(x) = 2x(x-3)(x+1)$ 임을 구할 수 있다.	3점
3	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2x^2 + 3x + 1} = -\frac{4}{3}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 4

[문항 4] 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)f'(x) - f(x) + xf'(x) = 2x^3 + 13x^2 + 22x + 9$$

를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [배점 : 8점]

■ 예시 답안

$$\begin{aligned} f(x)f'(x) - f(x) + xf'(x) &= f(x)\{f'(x) - 1\} + x\{f'(x) - 1\} + x \\ &= \{f(x) + x\}\{f'(x) - 1\} + x \end{aligned}$$

이므로, 함수 $f(x)$ 는

$$\{f(x) + x\}\{f'(x) - 1\} = 2x^3 + 13x^2 + 21x + 9 \quad \dots \textcircled{1}$$

를 만족시킨다. 식 $\textcircled{1}$ 으로부터 $f(x)$ 는 이차함수이고, $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x) = x^2 + ax + b$ 라 하자. (단, a, b 는 상수)

$f'(x) = 2x + a$ 이므로, 식 $\textcircled{1}$ 을 정리하면

$$\begin{aligned} \{x^2 + (a+1)x + b\}\{2x + (a-1)\} &= 2x^3 + 13x^2 + 21x + 9 \\ 2x^3 + (3a+1)x^2 + (a^2+2b-1)x + b(a-1) &= 2x^3 + 13x^2 + 21x + 9 \end{aligned}$$

이다. 계수비교법에 의해

$$3a + 1 = 13, \quad a^2 + 2b - 1 = 21, \quad b(a - 1) = 9$$

이어야 하므로, $a = 4, b = 3$ 이다. 따라서,

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

이므로, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$f(2) = 15$$

이다.

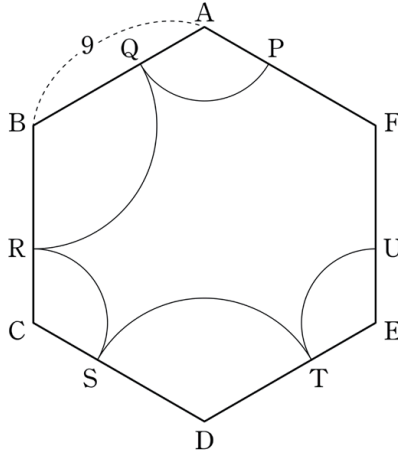
■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4	$f(x)$ 가 이차함수임을 구할 수 있다.	4점
4	$f(x) = x^2 + 4x + 3$ 임을 구할 수 있다.	3점
4	$f(2) = 15$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 5

[문항 5] 한 변의 길이가 9인 정육각형 ABCDEF에 대하여 다섯 꼭짓점 A, B, C, D, E를 각각 중심으로 하는 다섯 부채꼴 APQ, BQR, CRS, DST, ETU가 모두 정육각형 ABCDEF의 내부에 있다. 다섯 호 PQ, QR, RS, ST, TU의 길이의 합이 $\frac{41}{3}\pi$ 일 때, 부채꼴 CRS의 넓이를 구하시오.

(단, 여섯 점 P, Q, R, S, T, U는 각각 선분 FA, AB, BC, CD, DE, EF 위에 있다.) [배점 : 8점]



예시 답안

$\overline{AP} = x$ ($0 < x < 9$)라 하면, 정육각형 ABCDEF의 한 변의 길이가 9이므로 다섯 부채꼴 APQ, BQR, CRS, DST, ETU의 반지름의 길이는 각각 $x, 9 - x, x, 9 - x, x$ 가 된다.

또한, 각 부채꼴의 중심각의 크기는 모두 $\frac{2\pi}{3}$ 이므로, 다섯 호 PQ, QR, RS, ST, TU의 길이는 각각

$$\frac{1}{3} \times 2\pi x, \quad \frac{1}{3} \times 2\pi(9 - x), \quad \frac{1}{3} \times 2\pi x, \quad \frac{1}{3} \times 2\pi(9 - x), \quad \frac{1}{3} \times 2\pi x$$

이다. 따라서, 모든 호의 길이의 합이 $\frac{41}{3}\pi$ 이므로

$$2\pi x + \frac{2}{3} \times 2\pi(9 - x) = \frac{41}{3}\pi$$

$$2\pi\left(\frac{1}{3}x + 6\right) = \frac{41}{3}\pi$$

$$\therefore x = \frac{5}{2}$$

이다. 문제에서 구하고자 하는 부채꼴 CRS의 넓이는

$$\frac{1}{3} \times \pi x^2 = \frac{25}{12}\pi$$

이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
5	각 부채꼴의 중심각의 크기가 모두 $\frac{2\pi}{3}$ 임을 구할 수 있다.	2점
5	부채꼴 CRS의 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$ 임을 구할 수 있다.	4점
5	부채꼴 CRS의 넓이가 $\frac{25}{12}\pi$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 6

[문항 6] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. [배점 : 12점]

제시문

(가) $f(-1) = 0$

(나) 함수 $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & (x \neq 2) \\ 5 & (x = 2) \end{cases}$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이다.

$f(3)$ 의 값을 구하시오.

예시 답안

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이므로

(i) 극한값 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x)$ 가 존재

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = f(2)g(2) \quad \dots \textcircled{1}$

이어야 한다. 우선, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$ 의 값이 존재하기 위해서는 $f(2) = 0$ 이어야 하므로, 이 조건과 $f(-1) = 0$, 그리고 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이라는 조건으로부터

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x+a) \quad (\text{단, } a \text{는 상수})$$

이다. $f(2)g(2) = 0 \times 5 = 0$ 이므로, 식 $\textcircled{1}$ 으로부터

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)(x+a)}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+1)(x+a) = 0$$

$$3(2+a) = 0$$

$$\therefore a = -2$$

이다. $f(x) = (x+1)(x-2)^2$ 이므로 문제에서 구하고자 하는 값은 $f(3) = 4$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
6	$f(2) = 0$ 임을 구할 수 있다.	3점
6	$f(x) = (x+1)(x-2)(x+a)$ 임을 구할 수 있다. (단, a 는 상수)	4점
6	$a = -2$ 임을 구할 수 있다.	4점
6	$f(3) = 4$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 7

[문항 7] 자연수 n 에 대하여 닫힌구간 $[-2, n]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - ax + 1$ 이 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [배점 : 12점]

제시문

- (가) 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $-2 < x_1 < x_2 < n$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다.
 (나) 닫힌구간 $[-2, n]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 48이다.

예시 답안

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, n]$ 에서 연속이고, 조건 (가)로부터 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(-2, n)$ 에서 감소하므로, 닫힌구간 $[-2, n]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 일 때 최댓값을 갖는다. 따라서, 조건 (나)로부터

$$f(-2) = 48$$

$$2a - 3 = 48$$

$$\therefore a = \frac{51}{2}$$

이다. $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{51}{2} = \frac{3}{2}(x - \sqrt{17})(x + \sqrt{17})$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(-\sqrt{17}, \sqrt{17})$ 에서 감소하고, 조건 (가)를 만족시키기 위해서는

$$n \leq \sqrt{17}$$

이어야 한다. 그러므로, 문제에서의 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
7	$a = \frac{51}{2}$ 임을 구할 수 있다.	5점
7	$n \leq \sqrt{17}$ 임을 구할 수 있다.	5점
7	문제에서의 조건을 만족시키는 모든 자연수 n 의 값의 합이 10임을 구할 수 있다.	2점

문항 8

[문항 8] 두 함수 $f(x) = x^3 - 4x^2 + ax$, $g(x) = x^3 + bx^2 + 2x$ 가 다음 조건을 만족시킨다. [배점 : 12점]

제시문

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) + f(-x) + g(x) + g(-x) = 2x^2$ 이다.

(나) $\int_{-1}^1 \{f'(x) + xg'(x)\} dx = \frac{38}{3}$

$\int_{-1}^1 \{xf(x) + g(x)\} dx$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

■ 예시 답안

조건 (가)에서 $f(x) + f(-x) + g(x) + g(-x) = 2x^2$ 이므로, 계수비교법에 의하면

$$-8x^2 + 2bx^2 = 2x^2$$

$$\therefore b = 5$$

이다. 따라서, $g(x) = x^3 + 5x^2 + 2x$ 이므로, 조건 (나)로부터

$$\int_{-1}^1 \{(3x^2 - 8x + a) + x(3x^2 + 10x + 2)\} dx = \frac{38}{3}$$

$$2 \int_0^1 (13x^2 + a) dx = \frac{38}{3}$$

$$2\left(\frac{13}{3} + a\right) = \frac{38}{3}$$

$$\therefore a = 2$$

이다. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x$, $g(x) = x^3 + 5x^2 + 2x$ 이므로, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$\int_{-1}^1 \{xf(x) + g(x)\} dx = \int_{-1}^1 \{x(x^3 - 4x^2 + 2x) + (x^3 + 5x^2 + 2x)\} dx$$

$$= 2 \int_0^1 (x^4 + 7x^2) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{7}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{76}{15}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
8	$b = 5$ 임을 구할 수 있다.	4점
8	$a = 2$ 임을 구할 수 있다.	4점
8	$\int_{-1}^1 \{xf(x) + g(x)\} dx = \frac{76}{15}$ 임을 구할 수 있다.	4점

문항 9

[문항 9] 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 7 & (a_n \text{ 이 홀수인 경우}) \\ \frac{a_n}{2} + 5 & (a_n \text{ 이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_4 = 20$ 일 때, 다음 물음에 답하시오. [배점 : 16점]

- (1) a_{23} 의 값을 구하시오. (5점)
 (2) $\sum_{k=1}^3 a_k$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하시오. (11점)

■ 예시 답안

(1)

$a_4 = 20$ 이므로, a_5 부터 순서대로 구하면

$$a_5 = \frac{20}{2} + 5 = 15,$$

$$a_6 = 15 + 7 = 22,$$

$$a_7 = \frac{22}{2} + 5 = 16,$$

$$a_8 = \frac{16}{2} + 5 = 13,$$

$$a_9 = 13 + 7 = 20 = a_4,$$

$$a_{10} = \frac{20}{2} + 5 = 15 = a_5,$$

$$\vdots$$

이다. 따라서, $a_{23} = a_{18} = a_{13} = a_8 = 13$ 이다.

(2)

(i) 만약 a_3 가 홀수라면, $a_4 = 20$ 이므로

$$a_3 + 7 = 20$$

$$\therefore a_3 = 13$$

이다. 또한, a_2 가 홀수라면 $a_3 = 13$ 이므로 $a_2 + 7 = 13$, 즉, $a_2 = 6$ 이어야 한다. 이는 a_2 가 홀수라는 사실에 모순이므로 a_2 는 짝수이어야 한다. 따라서, $a_3 = 13$ 으로부터

$$\frac{a_2}{2} + 5 = 13$$

$$\therefore a_2 = 16$$

이다. 위와 비슷한 방법으로 a_1 을 구하면

$$a_1 = \begin{cases} 9 & (a_1 \text{ 이 홀수인 경우}) \\ 22 & (a_1 \text{ 이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다. 따라서, (i)에서 만족하는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3) 은 $(9, 16, 13)$, $(22, 16, 13)$ 이다.

(ii) 만약 a_3 가 짝수라면, $a_4 = 20$ 이므로

$$\frac{a_3}{2} + 5 = 20$$

$$\therefore a_3 = 30$$

이다.

(ii-1) 만약 a_2 가 홀수라면, $a_3 = 30$ 이므로

$$a_2 + 7 = 30$$

$$\therefore a_2 = 23$$

이다. 또한, a_1 이 홀수라면 $a_2 = 23$ 이므로 $a_1 + 7 = 23$, 즉, $a_1 = 16$ 이어야 한다. 이는 a_1 이 홀수라는 사실에 모순이므로 a_1 은 짝수이어야 한다. 따라서, $a_2 = 23$ 으로부터

$$\frac{a_1}{2} + 5 = 23$$

$$\therefore a_1 = 36$$

이다.

(ii-2) 만약 a_2 가 짝수라면, $a_3 = 30$ 이므로

$$\frac{a_2}{2} + 5 = 30$$

$$\therefore a_2 = 50$$

이다. 위와 비슷한 방법으로 a_1 을 구하면

$$a_1 = \begin{cases} 43 & (a_1 \text{ 이 홀수인 경우}) \\ 90 & (a_1 \text{ 이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다. 따라서, (ii)에서 만족하는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3) 은 $(36, 23, 30)$, $(43, 50, 30)$, $(90, 50, 30)$ 이다.

(i), (ii)에서 만족하는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3) 으로부터 $\sum_{k=1}^3 a_k$ 의 최댓값과 최솟값을 구하면

$$\text{최댓값 : } M = 90 + 50 + 30 = 170,$$

$$\text{최솟값 : } m = 9 + 16 + 13 = 38$$

이다. 그러므로, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$M + m = 170 + 38 = 208$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
9-(1)	$a_5 = 15, a_6 = 22, a_7 = 16, a_8 = 13, a_9 = 20$ 임을 구할 수 있다.	2점
9-(1)	$a_{23} = 13$ 임을 구할 수 있다.	3점
9-(2)	최댓값 $M = 170$ 임을 구할 수 있다.	5점
9-(2)	최솟값 $m = 38$ 임을 구할 수 있다.	5점
9-(2)	$M + m = 208$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 10

[문항 10] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 그 도함수 $f'(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f'(x+1) - f'(x-3)}{x-3} & (x < 3) \\ xf(x) + 6 & (x \geq 3) \end{cases}$$

가 $x = 3$ 에서 미분가능할 때, 다음 물음에 답하시오. [배점 : 16점]

- (1) $f(1)$ 의 값을 구하시오. (10점)
 (2) 함수 $h(x) = f(x) + 2x$ 의 극댓값을 α , 극솟값을 β 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하시오. (6점)

예시 답안

(1)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (\text{단, } a, b, c \text{는 상수})$$

라 하면, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ 이다.

함수 $g(x)$ 가 $x = 3$ 에서 미분가능하면 $x = 3$ 에서 연속이므로

(i) 극한값 $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ 가 존재

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 3-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} g(x) = g(3) \quad \dots \textcircled{㉠}$$

이어야 한다. 우선, $\lim_{x \rightarrow 3-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{f'(x+1) - f'(x-3)}{x-3}$ 의 값이 존재하기 위해서는 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 하므로

$$f'(4) - f'(0) = 0$$

$$(48 + 8a + b) - b = 0$$

$$\therefore a = -6$$

이다. 따라서, $f'(x) = 3x^2 - 12x + b$ 이므로 $f'(x+1) - f'(x-3) = 24(x-3)$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 3-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{24(x-3)}{x-3} = 24$$

이다. 한편, $f(x) = x^3 - 6x^2 + bx + c$ 이므로 $f(3) = 3b + c - 27$ 이고, 식 ㉠으로부터

$$24 = 3f(3) + 6$$

$$24 = 3(3b + c - 27) + 6$$

$$\therefore 3b + c = 33 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

이다. 함수 $g(x)$ 는 $x = 3$ 에서 미분가능해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{g(x) - g(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{g(x) - g(3)}{x-3} \quad \dots \textcircled{㉢}$$

이어야 한다. 식 ㉢의 좌변과 우변을 각각 구하면, $x < 3$ 일 때 $g(x) = 24$ 이므로

$$(\text{좌변}) = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{g(x) - g(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{24 - 24}{x-3} = 0$$

이고, $x \geq 3$ 일 때 $g(x) = xf(x) + 6$ 이므로

$$\begin{aligned}
 (\text{우변}) &= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{xf(x) + 6 - \{3f(3) + 6\}}{x - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{(x-3)f(x) + 3\{f(x) - f(3)\}}{x - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) + 3 \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\
 &= f(3) + 3f'(3)
 \end{aligned}$$

이다. 한편, 식 ㉠으로부터 $f(3) = 3b + c - 27 = 6$ 이고, $f'(3) = 27 - 36 + b = b - 9$ 이므로

$$f(3) + 3f'(3) = 6 + 3(b - 9) = 3b - 21$$

이다. 따라서, 식 ㉡으로부터

$$0 = 3b - 21$$

$$\therefore b = 7$$

이고, 이를 식 ㉠에 대입하면 $c = 12$ 이다. $a = -6, b = 7, c = 12$ 이므로 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 12$ 이고, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$f(1) = 1 - 6 + 7 + 12 = 14$$

이다.

(2)

함수 $h(x) = f(x) + 2x = x^3 - 6x^2 + 9x + 12$ 이므로

$$h'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

이다. 따라서, 함수 $h(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극댓값 $\alpha = h(1) = 16$, $x = 3$ 에서 극솟값 $\beta = h(3) = 12$ 를 가진다. 그러므로, 문제에서 구하고자 하는 값은

$$\alpha + \beta = 16 + 12 = 28$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
10-(1)	$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에서 $a = -6$ 임을 구할 수 있다. (단, b, c 는 상수)	3점
10-(1)	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 12$ 임을 구할 수 있다.	6점
10-(1)	$f(1) = 14$ 임을 구할 수 있다.	1점
10-(2)	$h'(x) = 3(x-1)(x-3)$ 임을 구할 수 있다.	1점
10-(2)	극댓값 $\alpha = 16$ 임을 구할 수 있다.	2점
10-(2)	극솟값 $\beta = 12$ 임을 구할 수 있다.	2점
10-(2)	$\alpha + \beta = 28$ 임을 구할 수 있다.	1점

2027학년도 모의논술

문항 1

[문항 1] $\frac{(3 \times 3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}-1}}$ 의 값을 구하시오. [배점 : 4점]

■ 예시 답안

문제에서 주어진 식을 정리하면

$$\frac{(3 \times 3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}-1}} = \frac{3^{\sqrt{3}} \times 3^3}{3^{\sqrt{3}-1}} = 3^4 = 81$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	분자를 정리하면 $3^{\sqrt{3}+3}$ 임을 구할 수 있다.	2점
1	$\frac{(3 \times 3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}}{3^{\sqrt{3}-1}} = 81$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 2

[문항 2] 1이 아닌 세 양수 a, b, c 에 대하여 $a^2 = b^3 = c^4$ 일 때, $\log_a b + \log_b c + \log_c a$ 의 값을 구하시오. [배점 : 4점]

■ 예시 답안

$a^2 = b^3 = c^4 = k$ 라 하면 $a = k^{\frac{1}{2}}, b = k^{\frac{1}{3}}, c = k^{\frac{1}{4}}$ 이므로

$$\log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_{k^{\frac{1}{2}}} k^{\frac{1}{3}} + \log_{k^{\frac{1}{3}}} k^{\frac{1}{4}} + \log_{k^{\frac{1}{4}}} k^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{41}{12}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2	$a = k^{\frac{1}{2}}, b = k^{\frac{1}{3}}, c = k^{\frac{1}{4}}$ 임을 구할 수 있다.	2점
2	$\log_a b + \log_b c + \log_c a = \frac{41}{12}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 3

[문항 3] $0 \leq x \leq 3\pi$ 에서 방정식 $\sin^2 x + 2\cos x + 2 + k = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합을 구하시오. [배점 : 8점]

■ 예시 답안

$\cos x = t$ 라 하면 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 로부터 문제에서의 방정식은 다음과 같이 t 에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\sin^2 x + 2\cos x + 2 + k &= 0 \\ (1 - \cos^2 x) + 2\cos x + 2 + k &= 0 \\ \therefore -t^2 + 2t + 3 + k &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 3\pi$ 에서 방정식 $\sin^2 x + 2\cos x + 2 + k = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이기 위해서는 반드시 $-1 < t < 1$ 에서 이차방정식 ①의 근이 한 개만 있어야 한다. $g(t) = t^2 - 2t - 3 - k$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 의 대칭축이 $t = 1$ 이므로

$$g(-1) > 0, \quad g(1) < 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

이면 $-1 < t < 1$ 에서 이차방정식 $g(t) = 0$ 의 근이 한 개만 있게 된다. 부등식 ②을 풀면

$$\begin{aligned}g(-1) = -k > 0, \quad g(1) = -4 - k < 0 \\ \therefore -4 < k < 0\end{aligned}$$

이므로, 문제에서의 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 합은

$$(-3) + (-2) + (-1) = -6$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3	$\cos x = t$ 라 하면 문제에서의 방정식을 $-t^2 + 2t + 3 + k = 0$ 으로 나타낼 수 있다.	2점
3	$-1 < t < 1$ 에서 $-t^2 + 2t + 3 + k = 0$ 의 근이 한 개만 있어야 함을 알 수 있다.	2점
3	$-4 < k < 0$ 임을 구할 수 있다.	3점
3	문제에서의 조건을 만족시키는 모든 정수 k 의 값의 합이 -6 임을 구할 수 있다.	1점

문항 4

[문항 4] 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + x^2}{x + 1} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{x - 3} = a$$

를 만족시킬 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [배점 : 8점]

■ 예시 답안

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + x^2}{x + 1} = 2$ 를 만족시키는 다항함수 $f(x) + x^2$ 은 최고차항의 계수가 2인 일차함수이므로

$$f(x) = -x^2 + 2x + b \quad (\text{단, } b \text{는 상수}) \quad \dots \text{㉠}$$

또한 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{x - 3} = a$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,
 $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - 1\} = f(3) - 1 = 0$ 에서

$$f(3) = 1$$

식 ㉠에서 $f(3) = -9 + 6 + b = -3 + b$ 이므로

$$-3 + b = 1$$

$$\therefore b = 4$$

따라서, 문제에서 구하고자 하는 a 의 값은

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-x^2 + 2x + 4) - 1}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 2x + 3}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x - 3)(x + 1)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \{-(x + 1)\} \\ &= -(3 + 1) \\ &= -4 \end{aligned}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4	$f(x) = -x^2 + 2x + b$ (단, b 는 상수) 임을 구할 수 있다.	3점
4	$b = 4$ 임을 구할 수 있다.	2점
4	$a = -4$ 임을 구할 수 있다.	3점

문항 5

[문항 5] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 0이 아닌 실수이다.) [배점 : 8점]

제시문

(가) $\{x \mid f(x) = 0\} = \{-a, a, 2a\}$

(나) $f(0) > 0, f'(1) = -2$

예시 답안

조건 (가)의 $\{x \mid f(x) = 0\} = \{-a, a, 2a\}$ 에서

$$f(-a) = 0, \quad f(a) = 0, \quad f(2a) = 0$$

이고, 함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x) = (x+a)(x-a)(x-2a) = x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 \quad \dots \text{㉠}$$

식 ㉠에서 $f'(x) = 3x^2 - 4ax - a^2$ 이므로

$$f'(1) = -a^2 - 4a + 3$$

이다. 조건 (나)에서 $f'(1) = -2$ 이므로

$$-a^2 - 4a + 3 = -2$$

$$(a+5)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -5, 1$$

식 ㉠에서 $f(0) = 2a^3$ 이므로

(i) $a = -5$ 이면 $f(0) = -250 < 0$

(ii) $a = 1$ 이면 $f(0) = 2 > 0$

이다. 조건 (나)에서 $f(0) > 0$ 이므로 $a = 1$ 이다. 따라서, 정리하면

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

이므로 $f(4) = 30$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
5	$f(x) = (x+a)(x-a)(x-2a)$ 임을 구할 수 있다.	3점
5	$a = 1$ 임을 구할 수 있다.	3점
5	$f(4) = 30$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 6

[문항 6] 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \leq a) \\ 2x - 6 & (x > a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a 의 값의 합을 구하시오. [배점 : 12점]

■ 예시 답안

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x = a$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a-} |f(x)| = |f(a)|$$

이어야 한다. 즉,

$$|a^2 - 4a + 3| = |2a - 6|$$

$$\therefore a^2 - 4a + 3 = \pm(2a - 6)$$

(i) $a^2 - 4a + 3 = 2a - 6$ 일 때,

$$a^2 - 6a + 9 = 0$$

$$(a - 3)^2 = 0$$

$$\therefore a = 3$$

(ii) $a^2 - 4a + 3 = -2a + 6$ 일 때,

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a + 1)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -1, 3$$

(i), (ii)로부터 함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a 의 값은 $-1, 3$ 이므로 그 합은 $(-1) + 3 = 2$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
6	$x = a$ 에서의 연속 조건 $ a^2 - 4a + 3 = 2a - 6 $ 임을 구할 수 있다.	5점
6	$a = -1, 3$ 임을 구할 수 있다.	5점
6	모든 a 의 값의 합이 2임을 구할 수 있다.	2점

문항 7

[문항 7] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - 2 & (x \leq -1) \\ \frac{(x+1)^2}{f(x)+2} & (x > -1) \end{cases}$$

라 하자. $\lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) + 2$ 를 만족시킬 때, 닫힌구간 $\left[-2, -\frac{3}{4}\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. (단, $f(-1) \neq 0$) [배점 : 12점]

■ 예시 답안

삼차함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = f(-1) - 2$$

이다. 이로부터 문제에서의 조건을 정리하면

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+1)^2}{f(x)+2} = f(-1) \quad \dots \textcircled{㉠}$$

이다. $f(-1) \neq 0$ 이므로 식 ㉠에서 극한값은 0이 아니다. 그런데 $x \rightarrow -1+$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + 2 = 0$$

$$\therefore f(-1) + 2 = 0 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

식 ㉡으로부터 삼차식 $f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 을 인수로 가지므로

$$f(x) + 2 = (x+1)Q(x) \quad (\text{단, } Q(x) \text{는 이차식})$$

로 놓을 수 있고, 이를 식 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x+1}{Q(x)} = f(-1) = -2 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

이다. 식 ㉢에서 극한값이 존재하기 위해서는 $x \rightarrow -1+$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} Q(x) = Q(-1) = 0 \quad \dots \textcircled{㉣}$$

식 ㉣로부터 이차식 $Q(x)$ 는 $x + 1$ 을 인수로 가지고, $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) + 2 = (x+1)^2(x-a) \quad (\text{단, } a \text{는 실수})$$

이다. 이를 식 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{1}{x-a} = -2$$

$$-1-a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}$$

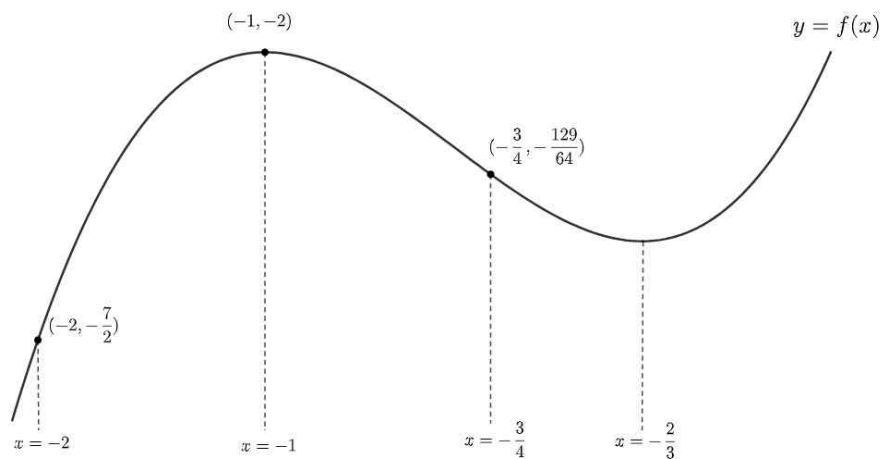
이다. 정리하면 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = (x+1)^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) - 2 = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

이다. 이를 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 + 5x + 2 = (x+1)(3x+2)$$

이고, $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 해는 $x = -1, -\frac{2}{3}$ 이다.



위의 그림과 같이 닫힌구간 $\left[-2, -\frac{3}{4}\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값은

$$f(-2) = -\frac{7}{2} \quad (\text{최솟값})$$

$$f(-1) = -2 \quad (\text{최댓값})$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{129}{64}$$

이다. 따라서, 최댓값과 최솟값의 합은

$$(-2) + \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{11}{2}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
7	$f(x) + 2 = (x + 1)^2(x - a)$ (단, a 는 실수)임을 구할 수 있다.	4점
7	$f(x) = (x + 1)^2\left(x + \frac{1}{2}\right) - 2$ 임을 구할 수 있다.	3점
7	최댓값 $f(-1) = -2$ 임을 구할 수 있다.	2점
7	최솟값 $f(-2) = -\frac{7}{2}$ 임을 구할 수 있다.	2점
7	최댓값과 최솟값의 합이 $-\frac{11}{2}$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 8

[문항 8] 다항함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f'(t) dt = g(x)$$

$$(나) \quad g(x) = -g(-x)$$

$f(1) + g(1)$ 의 값을 구하시오. [배점 : 12점]

예시 답안

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) = -g(-x)$ 를 만족시키므로

$$g(x) = x^3 + ax \quad (\text{단, } a \text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다. $f(x) + \int_0^x (x-t)f'(t) dt = g(x)$ 에서

$$f(x) + x \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x tf'(t) dt = x^3 + ax \quad \dots \textcircled{가}$$

식 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) = 0 \quad \dots \textcircled{나}$$

이고, 한편 식 ㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) + \int_0^x f'(t) dt + xf'(x) - xf'(x) = 3x^2 + a$$

$$f'(x) + f(x) - f(0) = 3x^2 + a$$

$$\therefore f'(x) + f(x) = 3x^2 + a \quad (\because f(0) = 0) \quad \dots \textcircled{다}$$

이고, 식 ㉡으로부터 $f(x)$ 는 이차함수이다. 식 ㉡을 이용하면

$$f(x) = px^2 + qx \quad (\text{단, } p, q \text{는 상수})$$

이고, 식 ㉡으로부터

$$2px + q + px^2 + qx = 3x^2 + a$$

$$px^2 + (2p+q)x + q = 3x^2 + a$$

$$\therefore p = 3, q = -6, a = -6$$

이다. 따라서, 정리하면

$$f(x) = 3x^2 - 6x, \quad g(x) = x^3 - 6x$$

이므로 $f(1) + g(1) = (-3) + (-5) = -8$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
8	$g(x) = x^3 + ax$ (a 는 상수)임을 구할 수 있다.	3점
8	$f(x) = px^2 + qx$ (p, q 는 상수)임을 구할 수 있다.	4점
8	$f(x) = 3x^2 - 6x$ 임을 구할 수 있다.	2점
8	$g(x) = x^3 - 6x$ 임을 구할 수 있다.	2점
8	$f(1) + g(1) = -8$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 9

[문항 9] 1보다 큰 자연수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = |(\log_a x)^2 - 5 \log_a x + 5|$$

라 하자. $2 \leq x \leq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 1$ 이 성립하도록 하는 모든 자연수 a 의 값을 작은 수부터 크기 순으로 나열한 수열을 $\{a_n\}$ 이라 할 때,

$$\sum_{n=1}^5 a_n$$

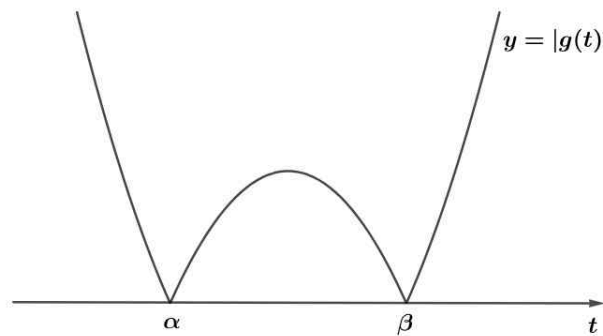
의 값을 구하시오. [배점 : 16점]

예시 답안

$\log_a x = t$ 라 하면

$$f(x) = |(\log_a x)^2 - 5 \log_a x + 5| = |t^2 - 5t + 5|$$

이다. 이때 $g(t) = t^2 - 5t + 5$ 라 하자. 방정식 $g(t) = 0$ 의 근을 α, β 라 하면, 함수 $y = |g(t)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



두 방정식

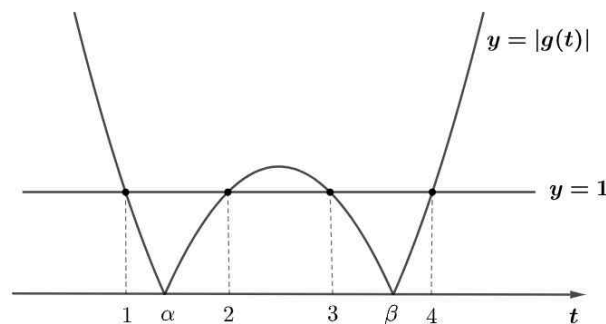
$$g(t) = t^2 - 5t + 5 = 1 \quad \therefore t = 1, 4$$

$$g(t) = t^2 - 5t + 5 = -1 \quad \therefore t = 2, 3$$

의 근으로부터 다음 그림과 같이 나타낼 수 있고, 부등식 $|g(t)| \geq 1$ 을 풀면

$$t \leq 1, \quad 2 \leq t \leq 3, \quad t \geq 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

이다.



한편, $a > 1$ 이므로 $2 \leq x \leq 4$ 일 때

$$\log_a 2 \leq t \leq \log_a 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

이다. 부등식 $\textcircled{2}$ 을 만족시키는 t 가 항상 부등식 $\textcircled{1}$ 을 만족시키기 위해서는 다음 세 가지 중에 한 가지가 성립되어야 한다.

(i) $\log_a 4 \leq 1$, 즉 $a \geq 4$

(ii) $2 \leq \log_a 2$ 이고 $\log_a 4 \leq 3$, 즉 $a \leq \sqrt{2}$ 이고 $a \geq \sqrt[3]{4}$
(이 경우, $\sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$ 이므로 만족시키는 a 가 없다.)

(iii) $4 \leq \log_a 2$, 즉 $a \leq \sqrt[4]{2}$

(이 경우, $\sqrt[4]{2} < 2$ 이므로 만족시키는 1보다 큰 자연수 a 가 없다.)

위의 결과 (i)-(iii)으로부터 문제에서의 수열 $\{a_n\}$ 은

$$a_n = 3 + n$$

이고, 따라서 문제에서 구하고자 하는 값은

$$\sum_{n=1}^5 a_n = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
9	$\log_a x = t$ 일 때, $f(x) = t^2 - 5t + 5 $ 임을 구할 수 있다.	2점
9	$g(t) = t^2 - 5t + 5$ 일 때, 방정식 $ g(t) = 1$ 의 근을 모두 구하면 $t = 1, 2, 3, 4$ 임을 구할 수 있다.	3점
9	부등식 $ g(t) \geq 1$ 을 풀면 $t \leq 1, 2 \leq t \leq 3, t \geq 4$ 임을 구할 수 있다.	4점
9	$2 \leq x \leq 4$ 일 때, $\log_a 2 \leq t \leq \log_a 4$ 임을 구할 수 있다.	2점
9	문제에서의 조건을 만족시키는 a 의 값 중 자연수를 작은 수부터 나열하면 4, 5, 6, 7, 8, ...임을 구할 수 있다.	4점
9	$\sum_{n=1}^5 a_n = 30$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 10

[문항 10] 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_0^x (|f(t)| - |t|) dt$$

라 하자. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. [배점 : 16점]

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x = 2, x = 6$ 에서 극값을 갖는다.

(나) $f(2) < 0, f(6) > 0$

(다) $f(0) = 0, f'(0) = 1$

(1) $f(x) = xQ(x)$ 라 할 때, $Q(2) + Q(6)$ 의 값을 구하시오. (단, $Q(x)$ 는 다항식) (8점)

(2) 함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 와 $x = \beta$ 에서 극값을 가질 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하시오. (단, $\alpha < \beta$) (8점)

■ 예시 답안

(1)

$f(0) = 0$ 이고 $f(x)$ 는 삼차함수이므로

$$f(x) = xQ(x) \quad (\text{단, } Q(x) \text{는 이차식}) \quad \dots \textcircled{㉠}$$

이다. 한편, $g(x) = \int_0^x (|f(t)| - |t|) dt$ 이므로

$$g'(x) = |f(x)| - |x|$$

이고, 식 ㉠으로부터

$$g'(x) = |xQ(x)| - |x| = |x| (|Q(x)| - 1)$$

이다. 조건 (가)로부터 함수 $g(x)$ 는 $x = 2, x = 6$ 에서 극값을 가지므로

$$g'(2) = 0, \quad g'(6) = 0$$

이고, 따라서

$$|Q(2)| = 1, \quad |Q(6)| = 1$$

이다. 조건 (나)에서 $f(2) < 0$ 을 이용하면 $f(2) = 2Q(2) < 0$ 이므로

$$Q(2) < 0$$

이고, $|Q(2)| = 1$ 이므로

$$Q(2) = -1 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

이다. 또한, 조건 (나)에서 $f(6) > 0$ 을 이용하면 $f(6) = 6Q(6) > 0$ 이므로

$$Q(6) > 0$$

이고, $|Q(6)| = 1$ 이므로

$$Q(6) = 1 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

이다. ㉡과 ㉢으로부터

$$Q(2) + Q(6) = (-1) + 1 = 0$$

이다.

(2)

식 ㉠으로부터

$$f'(x) = Q(x) + xQ'(x)$$

이므로 $f'(0) = Q(0)$ 이다. 조건 (다)에서 $f'(0) = 1$ 이므로

$$Q(0) = 1 \quad \dots \textcircled{㉔}$$

이다. 따라서, ㉓, ㉔, ㉕을 만족시키는 이차함수 $Q(x)$ 를 구하면

$$Q(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

이고, 식 ㉑으로부터

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$$

이다. 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 α, β 는

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 1 = 0$$

의 두 근이므로

$$\alpha + \beta = -\frac{-3}{\frac{3}{4}} = 4$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
10-(1)	$g'(x) = f(x) - x $ 임을 구할 수 있다.	3점
10-(1)	$ Q(2) = 1, Q(6) = 1$ 임을 구할 수 있다.	3점
10-(1)	$Q(2) + Q(6) = 0$ 임을 구할 수 있다.	2점
10-(2)	$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$ 임을 구할 수 있다.	4점
10-(2)	함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 두 점 x 의 합이 4임을 구할 수 있다.	4점

2026학년도 모의논술 (오후)

문항 1

[문항 1] 등식 $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = 1$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여, $8^x = 25^y = k$ 가 성립한다. 상수 k 의 값을 구하시오. [배점 : 4점]

예시 답안

$8^x = k$ 에서 $k^{\frac{1}{3x}} = 8$, $25^y = k$ 에서 $k^{\frac{1}{2y}} = 25$ 이므로

$$k^{\frac{1}{3x}} \times k^{\frac{1}{2y}} = \left(k^{\frac{1}{3x}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(k^{\frac{1}{2y}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5 = 10$$

이다. 또한 $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = 1$ 이므로 $k^{\frac{1}{3x}} \times k^{\frac{1}{2y}} = k^{\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y}} = k$ 이다.

따라서 $k = 10$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$k^{\frac{1}{3x}} = 8$, $k^{\frac{1}{2y}} = 25$ 임을 구할 수 있다.	2점
1	$k = 10$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 2

[문항 2] 두 양수 a, b 에 대하여 직선 $y = -2x + 4$ 가 두 점 $A(0, \log_3 ab)$, $B\left(1, \log_3 \frac{b}{a}\right)$ 를 지날 때, $a + b$ 의 값을 구하시오. [배점 : 4점]

■ 예시 답안

점 $A(0, \log_3 ab)$ 가 직선 $y = -2x + 4$ 위에 있으므로
 $\log_3 ab = -2 \times 0 + 4 = 4$ 이다. 그러므로
 $\log_3 a + \log_3 b = 4$ ㉠
 또 점 $B\left(1, \log_3 \frac{b}{a}\right)$ 가 직선 $y = -2x + 4$ 위에 있으므로
 $\log_3 \frac{b}{a} = -2 \times 1 + 4 = 2$ 이다. 그러므로
 $\log_3 b - \log_3 a = 2$ ㉡
 ㉠과 ㉡을 변끼리 더하면
 $2\log_3 b = 6, \log_3 b = 3, b = 3^3 = 27$
 또 $\log_3 b = 3$ 을 ㉠에 대입하면
 $\log_3 a = 1, a = 3$ 이다.
 따라서 $a + b = 3 + 27 = 30$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2	$\log_3 a + \log_3 b = 4$ 와 $\log_3 b - \log_3 a = 2$ 를 구할 수 있다.	2점
2	$a + b = 30$ 을 구할 수 있다.	2점

문항 3

[문항 3] x 에 대한 이차방정식 $6x^2 - 4ax + a^2 - 3 = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [배점 : 8점]

예시 답안

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{4a}{6} = \frac{2a}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{a^2 - 3}{6} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이다. ㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4a^2}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4a^2}{9} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

이고, ㉡을 ㉢에 대입하면

$$1 + \frac{a^2 - 3}{3} = \frac{a^2}{3} = \frac{4a^2}{9}$$

$$a^2 = 0$$

따라서 $a = 0$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3	$\sin \theta + \cos \theta = \frac{2a}{3}$ 임을 구할 수 있다.	2점
3	$\sin \theta \cos \theta = \frac{a^2 - 3}{6}$ 임을 구할 수 있다.	2점
3	$1 + \frac{a^2 - 3}{3} = \frac{4a^2}{9}$ 이 성립함을 구할 수 있다.	3점
3	$a = 0$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 4

[문항 4] 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 2x^3}{x^2 + 1} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 + x} = 4$$

를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오. [배점 : 8점]

■ 예시 답안

 $f(x)$ 는 다항함수이고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + 2x^3}{x^2 + 1} = 2 \text{ 이므로}$$

 $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + ax + b$ 이다. (단, a, b 는 상수)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 + x} = 4 \text{로부터}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^3 + 2x^2 + ax + b}{x^2 + x} = 4 \text{ 이므로}$$

 $b = 0$ 이다. 그러므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^3 + 2x^2 + ax}{x^2 + x} = 4 \text{ 이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-2x^2 + 2x + a)}{x(x + 1)} = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x^2 + 2x + a}{x + 1} = 4 \text{로부터}$$

 $a = 4$ 이다. 따라서 $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 4x$ 이고 $f(1) = 4$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4	$f(x) = -2x^3 + 2x^2 + ax + b$ 임을 구할 수 있다. (단, a, b 는 상수)	2점
4	$b = 0$ 임을 구할 수 있다.	2점
4	$a = 4$ 임을 구할 수 있다.	2점
4	$f(1) = 4$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 5

[문항 5] 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. [8점](가) $f'(1) = 2$ (나) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = 5$ 이다.함수 $g(x) = f(4x)$ 에 대하여 $g'(-1)$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하자. (단, a, b, c 는 상수)이때 $f'(x) = 2ax + b$ 이다. 조건 (가) $f'(1) = 2$ 로부터

$$2a + b = 2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

이다. 조건 (나)로부터 $f'(2) = 0$ 이고 $f(2) = 5$ 이다. 그러므로

$$4a + b = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$4a + 2b + c = 5 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

 $\textcircled{㉠}$ 과 $\textcircled{㉡}$ 으로부터 $a = -1, b = 4$ 이고 $\textcircled{㉢}$ 으로부터 $c = 1$ 이다. 따라서

$$f(x) = -x^2 + 4x + 1$$

이다. $g(x) = f(4x) = -16x^2 + 16x + 1$ 이므로

$$g'(x) = -32x + 16$$

이고

$$g'(-1) = 32 + 16 = 48$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
5	$f'(2) = 0$ 이고 $f(2) = 5$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$f(x) = -x^2 + 4x + 1$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$g'(x) = -32x + 16$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$g'(-1) = 48$ 임을 구할 수 있다.	1점

문항 6

[문항 6] 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & (x < 4) \\ 2x - 2a & (x \geq 4) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하시오. [12점]

예시 답안

함수 $f(x)$ 는 $x = 4$ 에서 연속이므로 다음 3개의 값이 모두 같아야 한다.

$$f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

i) 함숫값 : $f(4) = 8 - 2a$

ii) 좌극한 : $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - ax) = 16 - 4a,$

iii) 우극한 : $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (2x - 2a) = 8 - 2a$

이므로

$$8 - 2a = 16 - 4a$$

이다. 위 식으로부터 $a = 4$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & (x < 4) \\ 2x - 8 & (x \geq 4) \end{cases}$$

이다. 따라서 $M = f(5) = 2, m = f(2) = -4$ 이므로,

$$M + m = 2 + (-4) = -2$$

이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
6	$f(4) = 8 - 2a$ 를 구할 수 있다.	2점
	$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 16 - 4a$ 를 구할 수 있다.	2점
	$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 8 - 2a$ 를 구할 수 있다.	2점
	$f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ 를 이용하여 $a = 4$ 를 구할 수 있다.	2점
	$M = f(5) = 2, m = f(2) = -4$ 를 구하고, $M + m = -2$ 임을 구할 수 있다.	4점

문항 7

[문항 7] 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서 위치를 각각 $f(t), g(t)$ 라 하자. $f(t) - g(t) = t^3 - 9t^2 + at + b$ 이고, 시각 $t = 1$ 에서 두 점 P, Q가 만나고 속도가 같다. 두 점 P, Q의 속도가 다시 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오.

(단, a, b 는 상수이다.) [12점]

■ 예시 답안

$h(t) = f(t) - g(t)$ 라 하면 $h'(t) = f'(t) - g'(t) = 3t^2 - 18t + a$ 이다.

시각 $t = 1$ 에서 두 점 P, Q가 만나므로

$$h(1) = 1 - 9 + a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, $a + b = 8$ 이 됨을 알 수 있다. 또 시각 $t = 1$ 에서 두 점 P, Q의 속도가 같으므로

$$h'(1) = 3 - 18 + a = 0$$

$$\therefore a = 15$$

이다. $a = 15$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = -7$ 이고, 따라서

$$h(t) = t^3 - 9t^2 + 15t - 7$$

$$h'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t^2 - 6t + 5) = 3(t - 1)(t - 5) = 0$$

에서 $t = 1$ 또는 $t = 5$ 를 구할 수 있다.

따라서 두 점 P, Q가 다시 속도가 같아지는 시각은 $t = 5$ 이고 이때

$$h(5) = 125 - 225 + 75 - 7 = -32$$

이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 32이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
7	$h(t) = f(t) - g(t)$ 라 할 때, $h(1) = 0$ 과 $h'(1) = 0$ 을 구할 수 있다.	3점
	$a = 15, b = -7$ 임을 구할 수 있다.	2점
	두 점 P, Q가 다시 속도가 같아지는 시각이 $t = 5$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$h(5) = -32$ 임을 구할 수 있다.	3점
	두 점 P, Q 사이의 거리가 32임을 구할 수 있다.	1점

문항 8

[문항 8] 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. [12점]

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x-1) + 2$ 이다.

(나) $\int_0^2 f(x) dx = \frac{10}{3}$

$\int_2^3 f(x) dx$ 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 \{f(x-1) + 2\} dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x-1) dx + \int_1^2 2 dx\end{aligned}$$

이다.

$$\int_1^2 f(x-1) dx = \int_0^1 f(x) dx \text{ 이므로}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 2 dx = 2 \int_0^1 f(x) dx + 2$$

이다.

$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{10}{3} \text{ 이므로 } \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3}$$

이다.

$$\begin{aligned}\int_2^3 f(x) dx &= \int_2^3 \{f(x-1) + 2\} dx = \int_2^3 f(x-1) dx + \int_2^3 2 dx \\ &= \int_1^2 f(x) dx + 2 = \int_1^2 \{f(x-1) + 2\} dx + 2 \\ &= \int_1^2 f(x-1) dx + \int_1^2 2 dx + 2 = \int_0^1 f(x) dx + 2 + 2 \\ &= \frac{2}{3} + 2 + 2 = \frac{14}{3}\end{aligned}$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
8	$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$\int_1^2 f(x-1) dx = \int_0^1 f(x) dx$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$\int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3}$ 임을 구할 수 있다.	4점
	$\int_2^3 f(x) dx = \frac{14}{3}$ 임을 구할 수 있다.	4점

문항 9

[문항 9] 두 직선 $y = \frac{2}{5}x$, $y = -\frac{5}{2}x$ 가 이루는 각을 이등분하는 직선 중에서 제2사분면을 지나는 직선을 l 이라 하자. 다음 물음에 답하시오. [16점]

- (1) 직선 l 의 기울기를 구하시오. (8점)
- (2) 직선 l 위의 점 P에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\sin(\theta + \pi) + \cos(\theta - \pi)$ 의 값을 구하시오. (단, 점 O는 원점이고, 점 P는 제2사분면 위에 있다.) (8점)

예시 답안

(1)

직선 l 위의 임의의 점을 (x, y) 라 하면 점 (x, y) 에서 두 직선 $y = \frac{2}{5}x$, $y = -\frac{5}{2}x$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x - 5y|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{|5x + 2y|}{\sqrt{5^2 + 2^2}}$$

$$2x - 5y = 5x + 2y \quad \text{또는} \quad 2x - 5y = -5x - 2y$$

$$y = -\frac{3}{7}x \quad \text{또는} \quad y = \frac{7}{3}x$$

이때 원점과 제2사분면을 지나는 직선의 기울기는 음수이므로 직선 l 의 기울기는 $-\frac{3}{7}$ 이다.

(2)

직선 l 의 방정식은 $y = -\frac{3}{7}x$ 이다.

즉, $\tan \theta = -\frac{3}{7}$ 이고 점 P가 제2사분면에 있으므로 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{7}$ 에서 $\sin \theta = -\frac{3}{7} \cos \theta$ 이고, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\frac{9}{49} \cos^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

이다. 즉, $\cos^2 \theta = \frac{49}{58}$

$\cos \theta < 0$ 이므로 $\cos \theta = -\frac{7}{\sqrt{58}}$

$$\sin \theta = -\frac{3}{7} \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

따라서

$$\sin(\theta + \pi) + \cos(\theta - \pi) = -\sin \theta - \cos \theta = \frac{4}{\sqrt{58}} = \frac{2\sqrt{58}}{29}$$

이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
9-(1)	직선 l 위의 임의의 점에서 두 직선 $y = \frac{2}{5}x$, $y = -\frac{5}{2}x$ 에 이르는 거리가 같다는 사실을 구할 수 있다.	5점
	직선 l 의 기울기가 $-\frac{3}{7}$ 임을 구할 수 있다.	3점
9-(2)	$\tan \theta = -\frac{3}{7}$ 임을 구할 수 있다.	4점
	$\sin(\theta + \pi) + \cos(\theta - \pi) = \frac{2\sqrt{58}}{29}$ 임을 구할 수 있다.	4점

문항 10

[문항 10] 시각 $t = 0$ 일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t) = -t^2 + 6t$ 이다. 음이 아닌 실수 a 에 대하여 시각 $t = a$ 에서 $t = a + 3$ 까지 점 P가 움직인 거리를 $f(a)$ 라 할 때, 다음 물음에 답하시오. [16점]

- (1) $f(1) + \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^2}$ 의 값을 구하시오. (8점)
 (2) 함수 $f(a)$ 가 $a = m$ 에서 최솟값을 가질 때, 상수 m 의 값을 구하시오. (8점)

예시 답안

$0 \leq t \leq 6$ 에서 $v(t) = -t^2 + 6t \geq 0$,

$t > 6$ 에서 $v(t) = -t^2 + 6t < 0$ 이므로 함수 $f(a)$ 는 다음과 같이 a 의 값의 범위에 따라 구할 수 있다.

(i) $0 \leq a \leq 3$ 일 때,

$$f(a) = \int_a^{a+3} |-t^2 + 6t| dt = \int_a^{a+3} (-t^2 + 6t) dt = -3a^2 + 9a + 18$$

(ii) $3 < a < 6$ 일 때,

$$f(a) = \int_a^{a+3} |-t^2 + 6t| dt = \int_a^6 (-t^2 + 6t) dt + \int_6^{a+3} (t^2 - 6t) dt = \frac{2}{3}a^3 - 3a^2 - 9a + 54$$

(iii) $a \geq 6$ 일 때,

$$f(a) = \int_a^{a+3} |-t^2 + 6t| dt = \int_a^{a+3} (t^2 - 6t) dt = 3a^2 - 9a - 18$$

(1)

$$f(1) = -3 + 9 + 18 = 24$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3a^2 - 9a - 18}{a^2} = 3$$

따라서, $f(1) + \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^2} = 27$

(2)

$0 \leq a \leq 3$ 일 때,

$$f(a) = -3a^2 + 9a + 18 = -3\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{99}{4}$$

이므로 함수 $f(a)$ 의 최솟값은 $f(0) = f(3) = 18$ 이다.

$3 < a < 6$ 일 때,

$$f(a) = \frac{2}{3}a^3 - 3a^2 - 9a + 54$$

이므로 $f'(a) = 2a^2 - 6a - 9$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } 3 < a < 6 \text{이므로 } a = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}$$

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}$ 에서 극소이고 동시에 최소이므로 함수 $f(a)$ 의 최솟값은 $f\left(\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}\right) =$

$36 - \frac{27\sqrt{3}}{2}$ 이고, $f\left(\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}\right) < f(3)$ 이다.

$a \geq 6$ 일 때,

$$f(a) = 3a^2 - 9a - 18 = 3\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{99}{4}$$

이므로 함수 $f(a)$ 의 최솟값은 $f(6) = 36$ 이다.

이때 $f\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right) < f(3) < f(6)$ 이므로 함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$ 에서 최솟값을 갖는다.

따라서, $m = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
10-(1)	$f(1) = 24$ 임을 구할 수 있다.	3점
	$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^2} = 3$ 임을 구할 수 있다.	4점
	$f(1) + \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{f(a)}{a^2} = 27$ 임을 구할 수 있다.	1점
10-(2)	$0 \leq a \leq 3$ 일 때 함수 $f(a)$ 는 $a = 0, 3$ 에서 최솟값을 가짐을 구할 수 있다.	2점
	$3 < a < 6$ 일 때, 함수 $f(a)$ 의 최솟값이 $a = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$ 에서 최솟값을 가짐을 구할 수 있다.	2점
	$a \geq 6$ 일 때, 함수 $f(a)$ 의 최솟값이 $a = 6$ 에서 최솟값을 가짐을 구할 수 있다.	2점
	$m = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$ 임을 구할 수 있다.	2점

2025학년도 모의논술

문항 1

[문항 1] 함수 $f(x) = a^x$ 에 대하여 $(f \circ f)(0) = \sqrt{5}$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. (단, $a > 1$) [4점]

예시 답안

$f(x) = a^x$ 이므로

$$(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(a^0) = f(1) = a = \sqrt{5}$$

가 성립한다. 즉, $f(x) = (\sqrt{5})^x$ 이므로

$$f(3) = (\sqrt{5})^3 = 5\sqrt{5}$$

이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
1	$a = \sqrt{5}$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$f(3) = 5\sqrt{5}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 2

[문항 2] $\log_x(-x^2 + 5x + 14)$ 가 정의되기 위한 모든 정수 x 의 값의 합을 구하시오. [4점]

■ 예시 답안

$\log_x(-x^2 + 5x + 14)$ 에서 밑 x 는 1이 아닌 양수이므로,

$$x > 0, \quad x \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

을 만족해야 한다.

또한 진수 $-x^2 + 5x + 14$ 는 양수이므로, $-x^2 + 5x + 14 > 0$ 을 만족해야 한다.

$-x^2 + 5x + 14 > 0$ 으로부터 $(x + 2)(x - 7) < 0$ 이므로

$$-2 < x < 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이다.

㉠, ㉡으로부터 만족하는 정수는 2, 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은 20이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
2	밑 x 에 대한 조건 $x > 0, x \neq 1$ 을 구할 수 있다.	1점
	진수 $-x^2 + 5x + 14$ 에 대한 조건 $-2 < x < 7$ 을 구할 수 있다.	1점
	정수 x 의 값의 합 20을 구할 수 있다.	2점

문항 3

[문항 3] 함수 $y = -\cos^2 x + \cos x$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하시오. [8점]

■ 예시 답안

$\cos x = t$ 라 하면, $-1 \leq t \leq 1$ 이다. 따라서 주어진 식은

$$y = -\cos^2 x + \cos x = -t^2 + t = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

로 쓸 수 있다. 위 이차함수는 $-1 \leq t \leq 1$ 일 때

$t = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값 $M = \frac{1}{4}$ 을 갖고, $t = -1$ 에서 최솟값 $m = -2$ 를 갖는다.

따라서 $M + m = -\frac{7}{4}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
3	$\cos x = t$ 로 치환, $-1 \leq t \leq 1$ 임을 구할 수 있다.	2점
	최댓값 $M = \frac{1}{4}$ 임을 구할 수 있다.	2점
	최솟값 $m = -2$ 임을 구할 수 있다.	2점
	$M + m = -\frac{7}{4}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 4

[문항 4] 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^2}{x - 1} = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{f(x)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [배점 : 8점]

■ 예시 답안

문제의 조건 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^2}{x - 1} = 4$ 로부터 $f(x) - 2x^2 = ax + b$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{x - 1} = a$ 이므로 $a = 4$ 이고, $f(x) = 2x^2 + 4x + b$ 이다.

문제의 조건 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{f(x)} = \frac{3}{5}$ 으로부터

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{2x^2 + 4x + b} = \frac{3}{2 + 4 + b} = \frac{3}{5}$$

이다. 그러므로 $b = -1$ 이고, $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ 이다.

따라서 $f(2) = 15$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
4	$f(x) = 2x^2 + ax + b$ (단, a, b 는 상수)임을 구할 수 있다.	2점
4	$a = 4$ 임을 구할 수 있다.	2점
4	$b = -1$ 임을 구할 수 있다.	2점
4	$f(2) = 15$ 를 구할 수 있다.	2점

문항 5

[문항 5] 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ 이 $x = \alpha$, $x = \beta$ 에서 각각 극값을 가질 때, 서로 다른 두 점 $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ 를 지나는 직선의 기울기를 구하시오. (단, $\alpha < \beta$) [배점 : 8점]

■ 예시 답안

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$, $x = \beta$ 에서 극값을 가지면

$f'(\alpha) = 0$ 이고 $f'(\beta) = 0$ 이다.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ 으로부터 $f'(x) = 3x^2 - 6x$ 이다.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$ 으로부터 $3x(x - 2) = 0$ 이고, $x = 0$ 또는 $x = 2$ 이다.

그러므로 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 2$ 이다.

$f(0) = 6$ 이고, $f(2) = 2$ 이므로 두 점 A, B는 각각 $(0, 6)$, $(2, 2)$ 이다.

그러므로 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{2-6}{2-0} = -2$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
5	$\alpha = 0$ 이고 $\beta = 2$ 임을 구할 수 있다.	4점
5	두 점 A, B가 각각 $(0, 6)$, $(2, 2)$ 임을 구할 수 있다.	2점
5	기울기 -2 를 구할 수 있다.	2점

문항 6

[문항 6] 두 실수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} -5x - 6 & (x < 0) \\ a - b & (x = 0) \\ x + 2 & (x > 0) \end{cases}$$

일 때, 함수 $g(x) = \{f(x)\}^2 + bf(x)$ 라 하자. 함수 $g(x)$ 가 $x = 0$ 에서 연속일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, $a > 0$) [배점 : 12점]

예시 답안

함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 연속이므로

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$$

이다.

$$\textcircled{1} \text{ 함숫값 : } g(0) = \{f(0)\}^2 + bf(0) = (a - b)^2 + b(a - b) = a(a - b)$$

$\textcircled{2}$ 좌극한 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} [\{f(x)\}^2 + bf(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} [(-5x - 6)^2 + b(-5x - 6)] \\ &= (-6)^2 + b \times (-6) \\ &= 36 - 6b \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$ 우극한 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} [\{f(x)\}^2 + bf(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} [(x + 2)^2 + b(x + 2)] \\ &= 2^2 + b \times 2 \\ &= 4 + 2b \end{aligned}$$

이므로

$$a(a - b) = 36 - 6b = 4 + 2b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이다.

$36 - 6b = 4 + 2b$ 로부터 $b = 4$ 를 구할 수 있고, $b = 4$ 를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$a^2 - 4a - 12 = (a + 2)(a - 6) = 0$$

이다. 따라서 $a = 6$ ($a > 0$)이고, $a + b = 10$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
6	$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x)$ 를 구할 수 있다.	2점
6	$g(0) = a(a - b)$ 를 구할 수 있다.	2점
6	$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = 36 - 6b$ 를 구할 수 있다.	3점
6	$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 4 + 2b$ 를 구할 수 있다.	3점
6	$a = 6$ 과 $b = 4$ 를 구하고, $a + b = 10$ 을 구할 수 있다.	2점

문항 7

[문항 7] 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = 0$

(나) 곡선 $y = f'(x)$ 는 세 점 $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -3)$ 을 지난다.

방정식 $f(x) = k$ 가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합을 구하시오. [배점 : 12점]

예시 답안

삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (단, a, b, c, d 는 상수)라 하면

$f(0) = 0$ 이므로 $d = 0$ 이다. $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 이고

함수 $f'(x)$ 가 두 점 $(-3, 0)$, $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$f'(x) = 3a(x+3)(x+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

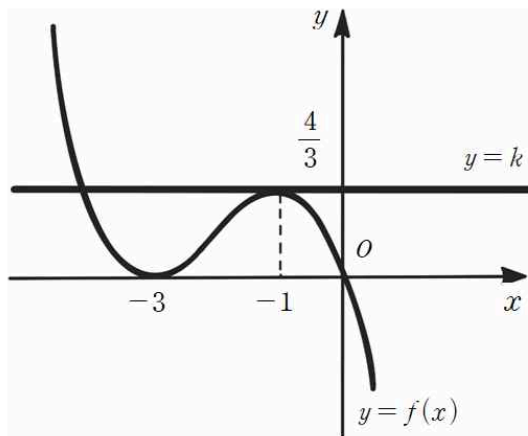
이 됨을 알 수 있다. $f'(x)$ 가 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $f'(0) = -3$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $a = -\frac{1}{3}$ 이다. 따라서

$$f'(x) = -(x+3)(x+1) = -x^2 - 4x - 3$$

이므로 $b = -2$, $c = -3$ 을 구할 수 있다. 그러므로

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$$

이다. 함수 $f'(x)$ 와 $f(x)$ 를 이용하여 함수 $f(x)$ 의 그래프를 그리면,



이므로, 방정식 $f(x) = k$ 가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 k 의 값은

$$k = 0 \text{ 또는 } k = \frac{4}{3}$$

이다. 따라서 문제에서 구하고자 하는 모든 실수 k 의 값의 합은 $\frac{4}{3}$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
7	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 라 할 때, $d = 0$ 을 구할 수 있다.	2점
7	$f'(x) = 3a(x+3)(x+1)$ 임을 구할 수 있다.	2점
7	$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$ 임을 구할 수 있다.	4점
7	모든 k 의 값의 합이 $\frac{4}{3}$ 임을 구할 수 있다.	4점

문항 8

[문항 8] 시각 $t = 0$ 일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도가 각각 $v_1(t) = t^2 + 2t$, $v_2(t) = 3t^2 + t$ 이다. 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오. (단, $t \geq 0$) [배점 : 12점]

■ 예시 답안

$v_1(t) = v_2(t)$ 으로부터 $t^2 + 2t = 3t^2 + t$ 이므로 $t(2t - 1) = 0$ 을 만족한다.
그러므로 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, 두 점 P, Q의 속도가 같아진다.

시각 t 에서의 점 P의 위치를 $x_1(t)$ 라 하면 $x_1(0) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} x_1\left(\frac{1}{2}\right) &= x_1(0) + \int_0^{\frac{1}{2}} v_1(t) dt \\ &= 0 + \int_0^{\frac{1}{2}} (t^2 + 2t) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + t^2\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{7}{24} \end{aligned}$$

이다. 시각 t 에서의 점 Q의 위치를 $x_2(t)$ 라 하면 $x_2(0) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} x_2\left(\frac{1}{2}\right) &= x_2(0) + \int_0^{\frac{1}{2}} v_2(t) dt \\ &= 0 + \int_0^{\frac{1}{2}} (3t^2 + t) dt \\ &= \left[t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

이다. 그러므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 $\left|\frac{7}{24} - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{24}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
8	출발 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $t = \frac{1}{2}$ 임을 구할 수 있다.	4점
8	$t = \frac{1}{2}$ 일 때, 점 P의 위치가 $\frac{7}{24}$ 임을 구할 수 있다.	3점
8	$t = \frac{1}{2}$ 일 때, 점 Q의 위치가 $\frac{1}{4}$ 임을 구할 수 있다.	3점
8	$t = \frac{1}{2}$ 일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리가 $\frac{1}{24}$ 임을 구할 수 있다.	2점

문항 9

[문항 9] 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, 모든 자연수 n 에 대하여

$$(3n-1)a_n + 3S_n = 20$$

이 성립한다. 다음 물음에 답하시오. [배점 : 16점]

- (1) a_1 의 값을 구하시오. (4점)
 (2) $\frac{a_5}{a_{11}}$ 의 값을 구하시오. (12점)

■ 예시 답안

(1)

$n=1$ 일 때 $S_1 = a_1$ 이고, $(3n-1)a_n + 3S_n = 20$ 에 $n=1$ 을 대입하면
 $2a_1 + 3S_1 = 2a_1 + 3a_1 = 5a_1 = 20$ 이므로 $a_1 = 4$ 이다.

(2)

$$(3n-1)a_n + 3S_n = 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠에서 n 대신 $n+1$ 을 대입하면

$$(3n+2)a_{n+1} + 3S_{n+1} = 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡-㉠을 하면

$$(3n+2)a_{n+1} - (3n-1)a_n + 3(S_{n+1} - S_n) = 0$$

$$(3n+5)a_{n+1} = (3n-1)a_n$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3n+5}{3n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉢의 n 에 5, 6, 7, 8, 9, 10을 차례로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\frac{a_5}{a_6} \times \frac{a_6}{a_7} \times \frac{a_7}{a_8} \times \frac{a_8}{a_9} \times \frac{a_9}{a_{10}} \times \frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{20}{14} \times \frac{23}{17} \times \frac{26}{20} \times \frac{29}{23} \times \frac{32}{26} \times \frac{35}{29}$$

따라서, $\frac{a_5}{a_{11}} = \frac{32 \times 35}{14 \times 17} = \frac{80}{17}$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
9-(1)	$S_1 = a_1$ 임을 안다.	2점
9-(1)	$a_1 = 4$ 임을 구할 수 있다.	2점
9-(2)	$(3n+2)a_{n+1} + 3S_{n+1} = 20$ 을 구할 수 있다.	3점
9-(2)	$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3n+5}{3n-1}$ 를 구할 수 있다.	4점
9-(2)	$\frac{a_5}{a_{11}} = \frac{80}{17}$ 을 구할 수 있다.	5점

문항 10

[문항 10] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = 0$

(나) 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $(x-3)f(x) \geq 0$ 이 성립한다.

[배점 : 16점]

- (1) 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. (10점)
 (2) $x \geq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \geq 16$ 이 성립하도록 하는 실수 k 의 최솟값을 구하시오. (6점)

■ 예시 답안

(1)

조건 (가)에서 $f(0) = 0$ 이므로

$f(x) = x(x^2 + ax + b)$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$(x-3)f(x) \geq 0, \text{ 즉 } x(x-3)(x^2 + ax + b) \geq 0$$

이 성립해야 하므로, 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2 + ax + b = x(x-3)$$

만족시켜야 한다. 즉, $a = -3, b = 0$ 이고,

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 이다.

곡선 $y = f(x) = x^3 - 3x^2$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 |f(x)| dx = \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 = \frac{27}{4}$$

이다.

(2)

$f(x)$ 의 도함수 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ 로부터 $f(x)$ 는 $x \geq 2$ 에서 증가함수이다.

$f(4) = 4^3 - 3 \times 4^2 = 16$ 이므로 $x \geq k$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \geq 16$ 이 성립하도록 하는 실수 k 의 최솟값은 4이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
10-(1)	삼차함수 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 을 구할 수 있다.	5점
10-(1)	곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{27}{4}$ 임을 구할 수 있다.	5점
10-(2)	$f(x)$ 는 $x \geq 2$ (또는 $x > 2$)에서 증가함수임을 구할 수 있다.	2점
10-(2)	$f(4) = 16$ 임을 구할 수 있다.	2점
10-(2)	조건을 만족하는 실수 k 의 최솟값이 4임을 구할 수 있다.	2점

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다