

홍익대(세종) 약술형논술

수학

목차

2026학년도 자연계열	3
문항 1	3
문항 2	4
문항 3	5
문항 4	6
문항 5	7
문항 6	8
문항 7	9
 2025학년도 자연계열	 12
문항 1	12
문항 2	13
문항 3	14
문항 4	15
문항 5	16
문항 6	17
문항 7	19
 2024학년도 자연계열	 20
문항 1	20
문항 2	21
문항 3	22
문항 4	23
문항 5	24
문항 6	25
문항 7	26
 2027학년도 모의논술 (자연계열)	 28
문항 1	28
문항 2	29
문항 3	30
문항 4	31

2026학년도 자연계열

문항 1

[문제 1] 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 3$ 이고, 등비수열 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n = a_n + \alpha$ 일 때, a_7 의 값을 구하시오. (단, α 는 상수이다.) (10점)

예시 답안

등비중항 식으로부터 α 를 먼저 구한다.

$$b_2 = 4 + \alpha$$

가 $b_1 = 6 + \alpha$ 과 $b_3 = 3 + \alpha$ 의 등비중항이므로

$$b_2^2 = (4 + \alpha)^2 = b_1 b_3 = (6 + \alpha)(3 + \alpha)$$

$$\alpha^2 + 8\alpha + 16 = \alpha^2 + 9\alpha + 18$$

$$\alpha = -2$$

이다. 다음으로 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비 r 를 구한다.

$$b_1 = 6 - 2 = 4$$

$$b_2 = 4 + (-2) = 2$$

$$r = \frac{b_2}{b_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

이다. 이제 $\{b_n\}$ 은 공비 $\frac{1}{2}$, 초항 4인 등비수열이므로

$$b_n = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$b_7 = 4 \cdot 2^{-6} = \frac{1}{16}$$

이다. 마지막으로

$$b_7 = a_7 - 2,$$

$$a_7 = b_7 + 2 = \frac{33}{16}$$

이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	등비수열 $\{b_n\}$ 의 등비중항 식으로부터 α 의 값을 먼저 구한다.	3점
(2)	등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비 r 의 값을 구한다.	3점
(3)	$\{b_n\}$ 의 일반항의 식을 구한다.	3점
(4)	b_7 과 a_7 의 값을 구한다.	1점

문항 2

[문제 2] 다항함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. (10점)

$$(가) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = -1$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = f(1)$$

예시 답안

(가)로부터 $f(x)$ 의 차수가 2이며 이차항의 계수가 -1 임을 안다.

$$f(x) = -x^2 + ax + b$$

(나)로부터 $x+1$ 이 $f(x)$ 의 인수가 됨을 안다.

$$f(x) = (x+1)(-x+b)$$

이다. 이제

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (-x+b) = b+1 = f(1) = (1+1)(-1+b) = 2b-2$$

또는

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1) = b+1 = f(1) = 2b-2$$

이므로

$$b = 3, \quad f(x) = (x+1)(-x+3) = -x^2 + 2x + 3$$

이다. 마지막으로

$$f(2) = -4 + 4 + 3 = 3$$

이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	(가)로부터 $f(x)$ 의 차수가 2이며 이차항의 계수가 -1 임을 안다.	3점
(2)	(나)로부터 $x+1$ 이 $f(x)$ 의 인수임을 알고 $f(x)$ 를 인수분해 형태로 표현한다.	3점
(3)	극한값 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$ 과 $f(1)$ 을 각각 계산하고 비교하여 $f(x)$ 를 구한다.	3점
(4)	함숫값 $f(2)$ 를 계산한다.	1점

문항 3

[문제 3] $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 방정식 $3 \tan^2 x - 8 \tan x - 3 = 0$ 을 만족시키는 모든 실근 x 에 대하여 $\cos x$ 의 값을 구하시오. (10점)

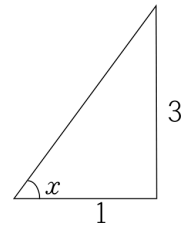
예시 답안

$\tan x = t$ 라고 치환하면 주어진 방정식은 $3t^2 - 8t - 3 = (3t + 1)(t - 3) = 0$ 이므로 $t = 3$ 또는 $t = -\frac{1}{3}$ 이다.
 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = 3$ 인 경우, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 이고 양변을 제곱하고 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 를 이용하여 풀면 $10 \cos^2 x = 1$ 이므로 $\cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 이다.
 $\tan x = -\frac{1}{3}$ 인 경우, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 이고 양변을 제곱하여 풀면 $10 \cos^2 x = 9$ 이고, 4사분면에서 $\cos$ 은 양수이므로 $\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 이다.

(삼각함수의 절댓값 계산의 다른 풀이, 삼각형 이용)

삼각함수의 절댓값은 삼각형을 이용하여 구할 수도 있다.

$\tan x = 3$ 인 경우, 직각삼각형의 밑변과 높이의 길이 비는 1 : 3이고, 피타고라스 정리를 이용하여 빗변의 길이 = $\sqrt{10}$ 임을 구하고, $\cos x$ 를 구한다.



채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$t = \tan x$ 로 치환한 뒤 t 에 관한 이차방정식의 해를 구한다.	4
(2)	$t = \tan x$ 임과 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $\cos$ 은 양수임을 이용하여 $\cos x$ 를 구한다.	6

문항 4

[문제 4] 함수 $f(x) = \begin{cases} -x + |a| & (x < 0) \\ x^2 + 3x + a & (x \geq 0) \end{cases}$ 는 $x = 0$ 에서만 불연속이다. x 에 대한 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근의 값이 5보다 작을 때, 정수 a 의 최댓값과 최솟값을 구하시오. (10점)

예시 답안

$f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 불연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = |a| \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$$

이며 즉 $a < 0$ 이다. 또한, $a < 0$ 일 때 $x > 0$ 에서 $f(x) = x^2 + 3x + a = 0$ 의 실근

$$-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - a}$$

이 5보다 작아야 하므로

$$\sqrt{\frac{9}{4} - a} < 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\frac{9}{4} - a < \frac{169}{4}$$

$$a > -\frac{160}{4} = -40$$

이다. 따라서 정수 a 의 최댓값은 -1 , 최솟값은 -39 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$a < 0$ 을 보인다.	5점
(2)	$a > -40$ 을 보인다.	5점

문항 5

[문제 5] 함수 $f(x) = 2^{x-a} - 6a^2$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 두 점 A, B에서 만난다고 하자. $\overline{AB} = \sqrt{2}$ 일 때, 실수 a 의 값을 모두 구하시오. (10점)

예시 답안

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 라 하면, 두 점은 $y = x$ 위에 있으므로 두 점의 좌표는 $A(x_1, x_1), B(x_2, x_2)$ 이다.

$\overline{AB} = \sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2}$ 이고, $x_2 - x_1 = 1$ 이다.

$x_2 = x_1 + 1$ 이고, $f(x_1) = x_1, f(x_1 + 1) = x_1 + 1$

$$2^{x_1-a} - 6a^2 = x_1 \dots \textcircled{1}$$

$$2^{x_1+1-a} - 6a^2 = x_1 + 1 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면

$$2^{x_1+1-a} - 2^{x_1-a} = 1$$

$$2^{x_1-a}(2 - 1) = 1$$

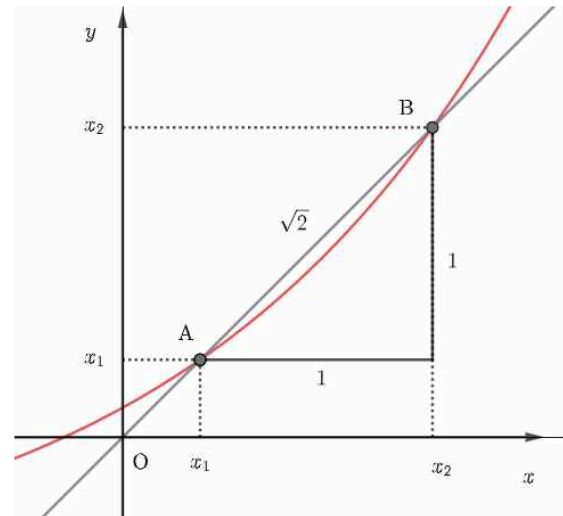
$$x_1 - a = 0, x_1 = a$$

$x_1 = a$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

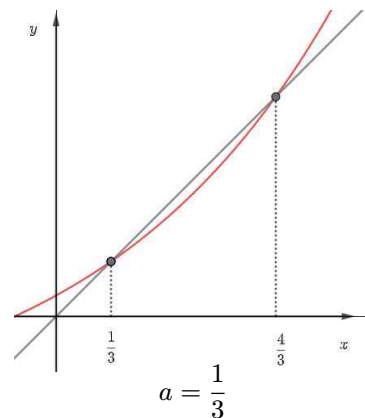
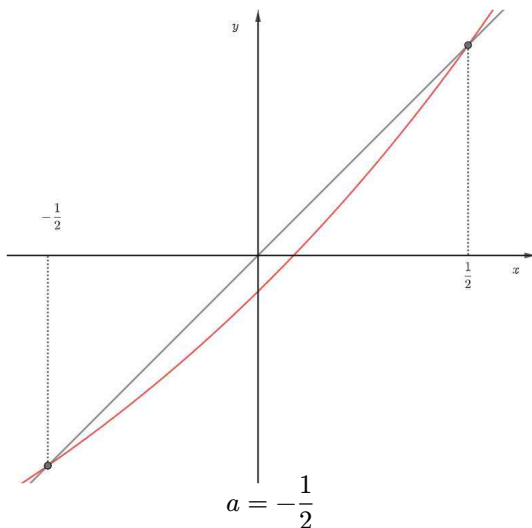
$$1 - 6a^2 = a$$

$$6a^2 + a - 1 = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a = \frac{1}{3}$$



(참고)



채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$\overline{AB} = \sqrt{2}$ 로부터 $x_2 - x_1 = 1$ 을 얻는다.	3
(2)	식 $x_1 = a$ 를 옳게 얻는다.	4
(3)	$6a^2 + a - 1 = 0$ 으로부터 $a = -\frac{1}{2}$ 또는 $a = \frac{1}{3}$ 을 얻는다.	3

문항 6

[문제 6] 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 일차함수 $g(x) = 3x + 1$ 이 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. (15점)

- (가) x 에 대한 방정식 $f(x) = g(x)$ 는 서로 다른 세 실근 $-\alpha, 0, \alpha (\alpha > 0)$ 를 갖는다.
 (나) 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 8이다.

■ 예시 답안

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 한다.

(가)에 따라 방정식 $f(x) - g(x) = x^3 + ax^2 + (b-3)x + (c-1) = 0$ 은 $x = 0, \pm\alpha$ 를 근으로 가지므로

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 + ax^2 + (b-3)x + (c-1) \\ &= x(x-\alpha)(x+\alpha) \\ &= x^3 - \alpha^2 x \end{aligned}$$

이다. 그러므로 $a = 0, c = 1, \alpha = \sqrt{3-b}$ 이고 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 $3-b > 0$ 이어야 한다.

$y = f(x) - g(x)$ 는 기함수이므로

$$2 \int_0^{\sqrt{3-b}} ((3-b)x - x^3) dx = \frac{1}{2}(3-b)^2 = 8$$

이다. $b = 7, -1$ 이다. 이 중 $b < 3$ 이어야 하므로 $b = -1$ 이다.

그러므로 $f(x) = x^3 - x + 1$ 이고, $f(3) = 25$ 이다.

(다른 풀이)

(가)에 따라 $f(x) - g(x) = x(x-\alpha)(x+\alpha)$ 이고, 이는 기함수이므로 f 와 g 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$2 \int_0^{\alpha} -x^3 + \alpha^2 x dx = \frac{1}{2}\alpha^4 = 8$$

이다. 그러므로 $\alpha^2 = 4$. $f(x) = x^3 - \alpha^2 x + g(x) = x^3 - x + 1$ 이고 $f(3) = 25$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	최고차항의 계수가 1인 삼차함수를 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라고 두고, (가) 조건을 이용하여 a 와 c 를 구한다.	6
(2)	정적분을 이용하여 $f(x)$ 와 $g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 계산하고 (나) 조건을 이용하여 b 를 구하고, $f(x)$ 를 구한다.	6
(3)	$f(3)$ 를 구한다.	3

문항 7

[문제 7] 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 에 대하여 함수 $|f(x)|$ 가 오직 2개의 극값을 갖도록 하는 실수 a 의 값을 모두 구하시오. (15점)

예시 답안

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 에서

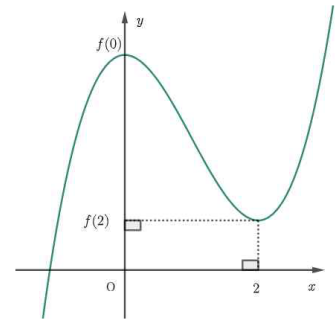
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x - 2) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 극값은 $f(0) = a$, $f(2) = 8 - 12 + a = a - 4$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗



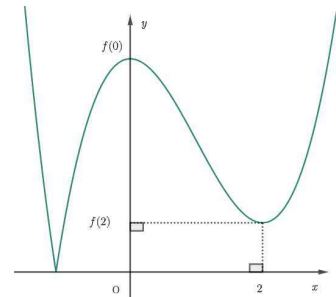
함수 $|f(x)| = |x^3 - 3x^2 + a|$ 의 그래프의 개형은 극값 $|f(0)|$, $|f(2)|$, 0의 대소 관계에 따라서 다음과 같다.

(i) $a > 4$ 일 때, $f(0) > f(2) > 0$ 이고,

방정식 $|f(x)| = 0$ 의 실근을 α 라 하면, 함수 $|f(x)|$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	α	...	0	...	2	...
$ f(x) '$	-		+	0	-	0	+
$ f(x) $	↘	0	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗

함수 $|f(x)| = |x^3 - 3x^2 + a|$ 는 3개의 극값을 가진다.

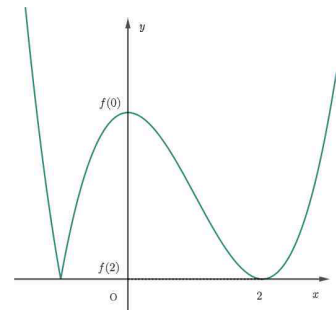


(ii) $a = 4$ 일 때, $f(2) = 0$ 이고

방정식 $|f(x)| = 0$ 의 서로 다른 실근을 α , 2라 하면, 함수 $|f(x)|$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	α	...	0	...	2	...
$ f(x) '$	-		+	0	-	0	+
$ f(x) $	↘	0	↗	$f(0)$	↘	0	↗

함수 $|f(x)| = |x^3 - 3x^2 + a|$ 는 2개의 극값을 가진다.

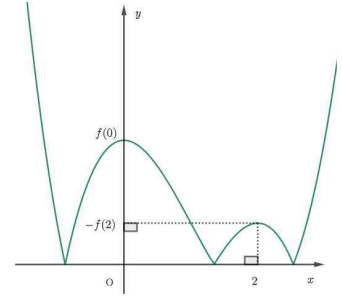


(iii) $2 < a < 4$ 일 때, $-f(2) < f(0)$ 이고

방정식 $|f(x)| = 0$ 의 서로 다른 실근을 α, β, γ 라 하면, 함수 $|f(x)|$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	α	...	0	...	β	...	2	...	γ	...
$ f(x) '$	-		+	0	-		+	0	-		+
$ f(x) $	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-f(2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $|f(x)| = |x^3 - 3x^2 + a|$ 는 3개의 극값을 가진다.

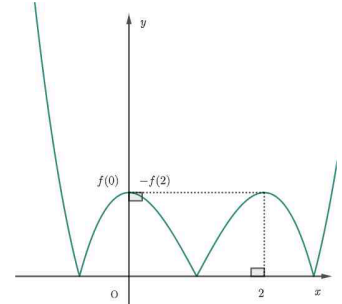


(iv) $a = 2$ 일 때, $f(0) = -f(2)$ 이고

방정식 $|f(x)| = 0$ 의 서로 다른 실근을 α, β, γ 라 하면, 함수 $|f(x)|$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	α	...	0	...	β	...	2	...	γ	...
$ f(x) '$	-		+	0	-		+	0	-		+
$ f(x) $	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-f(2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $|f(x)| = |x^3 - 3x^2 + a|$ 는 2개의 극값을 가진다.

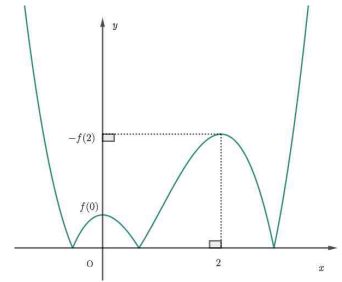


(v) $0 < a < 2$ 일 때, $0 < f(0) < -f(2)$ 이고

방정식 $|f(x)| = 0$ 의 서로 다른 실근을 α, β, γ 라 하면, 함수 $|f(x)|$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	α	...	0	...	β	...	2	...	γ	...
$ f(x) '$	-		+	0	-		+	0	-		+
$ f(x) $	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-f(2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $|f(x)| = |x^3 - 3x^2 + a|$ 는 3개의 극값을 가진다.

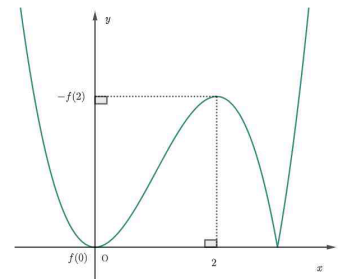


(vi) $a = 0$ 일 때, $f(0) = 0$ 이고

방정식 $|f(x)| = 0$ 의 서로 다른 실근을 $0, \alpha$ 라 하면, 함수 $|f(x)|$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...	α	...
$ f(x) '$	-	0	+	0	-		+
$ f(x) $	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-f(2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $|f(x)| = |x^3 - 3x^2 + a|$ 는 2개의 극값을 가진다.

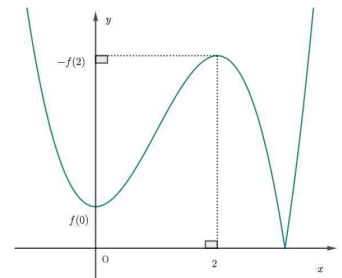


(vii) $a < 0$ 일 때, $f(2) < f(0) < 0, 0 < -f(0) < -f(2)$ 이고

방정식 $|f(x)| = 0$ 의 실근을 α 라 하면, 함수 $|f(x)|$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...	α	...
$ f(x) '$	-	0	+	0	-		+
$ f(x) $	$\searrow$	$-f(0)$	$\nearrow$	$-f(2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $|f(x)| = |x^3 - 3x^2 + a|$ 는 3개의 극값을 가진다.



(i)(ii)(iii)(iv)(v)(vi)(vii)에 의하여 $a = 0, a = 2, a = 4$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$f'(x) = 0$ 를 만족하는 $x = 0$ 또는 $x = 2$ 을 구할 수 있다.	2
(2)	$a < 0, 0 < a < 2, 2 < a < 4, a > 4$ 에서 함수 $ f(x) = x^3 - 3x^2 + a $ 의 증감표 혹은 그래프를 통해 함수 $ f(x) $ 가 3개의 극값을 가지고 있음을 서술한다.	4
(3)	$a = 4$ 일 때, 함수 $ f(x) = x^3 - 3x^2 + a $ 의 증감표 혹은 그래프를 통해 함수 $ f(x) $ 가 2개의 극값을 가지고 있음을 서술한다.	3
(4)	$a = 2$ 일 때, 함수 $ f(x) = x^3 - 3x^2 + a $ 의 증감표 혹은 그래프를 통해 함수 $ f(x) $ 가 2개의 극값을 가지고 있음을 서술한다.	3
(5)	$a = 0$ 일 때, 함수 $ f(x) = x^3 - 3x^2 + a $ 의 증감표 혹은 그래프를 통해 함수 $ f(x) $ 가 2개의 극값을 가지고 있음을 서술한다.	3

2025학년도 자연계열

문항 1

[문제 1] 삼차함수 $f(x) = ax^3 + 7x^2 + bx + a$ 가

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - 1}{h} = -4$$

를 만족시킬 때, $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) (10점)

예시 답안

주어진 극한이 수렴하므로

$$f(1) = 2a + b + 7 = 1$$

이다. 미분계수의 정의에 의해 극한값은 $-f'(1)$ 이므로 $f'(1) = 4$ 이다.

$$f'(x) = 3ax^2 + 14x + b$$

에 조건 $f'(1) = 4$ 을 대입하면

$$3a + b = -10$$

이다. a, b 에 대한 두 식을 연립하여 풀면 $a = -4, b = 2$ 이다. 그러므로 $a + b = -2$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	미분계수의 정의로부터 $f(1) = 1, f'(1) = 4$ 이다.	4
(2)	주어진 함수를 미분하면 $f'(x) = 3ax^2 + 14x + b$ 이다.	2
(3)	(1)(2) 번을 이용하여 연립방정식을 풀고 답을 구한다.	4

문항 2

[문제 2] 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

를 만족시킨다.

$$a_1 = 1, a_2 = 6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 의 값을 구하시오. (10점)

예시 답안

주어진 귀납적 정의로부터 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열임을 알 수 있고, $a_1 = 1, a_2 = 6$ 이므로 일반항 $a_n = 5n - 4$ 이다. $\frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 의 합을 구하기 위해 유리식을 두 개의 항으로 분리하면

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right)$$

이다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{5} \left[\left(1 - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{96} - \frac{1}{101} \right) \right] = \frac{20}{101}$$

이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	귀납적 정의로부터 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열임을 알고 일반항을 구한다.	5
(2)	분모가 서로 다른 두 일차식의 곱으로 나타내어진 유리식을 두 개의 항으로 분리한다.	3
(3)	Σ 기호의 의미를 알고 합을 구한다.	2

문항 3

[문제 3] (10점)

두 식 $\log_a b + \log_b(a^4) = 4$, $b = -a + 6$ 을 만족시키는 1보다 큰 양수 a, b 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

$$t = \log_a b \text{로 치환하면 } \log_b(a^4) = 4 \log_b a = \frac{4}{\log_a b} = \frac{4}{t} \text{이므로 첫번째 식 } \log_a b + \log_b(a^4) = 4 \text{는}$$

$$t + \frac{4}{t} = 4$$

가 된다. 양변에 t 를 곱하여 정리하면

$$t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2 = 0$$

을 얻어 $t = 2$ 를 구하고 이로부터 $b = a^2$ 이 된다. 두 번째 식에 $b = a^2$ 을 대입하여 정리하면

$$a^2 + a - 6 = (a + 3)(a - 2) = 0$$

을 얻으며 a 가 1보다 커야 하므로 답은 $a = 2$, $b = a^2 = 4$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$t = \log_a b$ 로 치환한 뒤 $\log_b(a^4) = \frac{4}{\log_a b} = \frac{4}{t}$ 를 대입하여 첫번째 식을 t 에 관한 이차 방정식으로 바꾼다.	4
(2)	t 에 관한 이차 방정식을 풀어 t 의 값과 a 와 b 사이의 관계식을 구하여 두 번째 식에 대입하여 a 에 관한 이차 방정식으로 바꾼다.	3
(3)	a 에 관한 이차 방정식을 풀어 a 의 값을 구하고 a 와 b 사이의 관계식에 대입하여 b 의 값도 구한다.	3

문항 4

[문제 4] (10점)

함수

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & (x < 1) \\ ax + 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

에 대하여, 함수 $\{f(x) + 1\}^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a 값의 합을 구하시오.

예시 답안

함수 $\{f(x) + 1\}^2$ 가 $x = 1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + 1\}^2 = \{f(1) + 1\}^2$$

이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + 1\}^2 = \left\{ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + 1 \right\}^2 = (1 + 1)^2 = 4$$

이고

$$\{f(1) + 1\}^2 = (a + 2)^2$$

이므로 $(a + 2)^2 = 4$ 에서 $a = -4, 0$ 이다. 따라서 문제의 조건을 만족하는 모든 실수 a 의 값의 합은 $-4 + 0 = -4$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$x = 1$ 에서 연속조건으로 $\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + 1\}^2 = \{f(1) + 1\}^2$ 을 명시한다	5
(2)	식 $\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + 1\}^2 = 4$, $\{f(1) + 1\}^2 = (a + 2)^2$ 를 옳게 얻는다.	3
(3)	$(a + 2)^2 = 4$ 로부터 $a = -4, 0$ 을 얻어 답, $-4 + 0 = -4$ 을 얻는다.	2

문항 5

[문제 5] (10점)

두 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3$, $g(x) = x^2 + 4x + k$ 의 그래프가 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k 의 개수를 구하시오.

예시 답안

$$h(x) = x^3 + 3x^2 + 3 - (x^2 + 4x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 3$$

이라 하자. $f(x) = g(x)$ 의 근은 $h(x) = k$ 의 근과 같으므로 $h(x)$ 의 그래프를 이용하여 k 의 범위를 구한다.

$$h'(x) = 3x^2 + 4x - 4 = (x + 2)(3x - 2)$$

이므로 함수의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	$\frac{2}{3}$	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	증가	11(극댓값)	감소	$\frac{41}{27}$ (극솟값)	증가

곡선 $y = h(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 실근을 가지려면 교점의 개수가 세 개가 되어야 한다. 그러므로, 상수 k 의 값의 범위는 $\frac{41}{27} < k < 11$ 이다. 이 범위 내의 정수는

$$k = 2, 3, \dots, 10$$

이므로 정수인 k 의 개수는 9개이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$f(x) - g(x)$ 에서 미지수 k 를 제외한 함수를 $h(x)$ 라고 정의하고 도함수를 구한다.	2
(2)	함수의 증가 감소표를 이용하여 $h(x)$ 의 증가 감소를 구하고 이를 이용하여 그래프 개형을 확인한다.	4
(3)	서로 다른 세 실근을 갖는 k 의 범위를 구하고 정수 k 의 개수를 구한다.	4

문항 6

[문제 6] (15점)

삼각형 ABC가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $\sin A = \sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right)$

(나) $\cos(A + C) = -\sin B$

삼각형 ABC에 외접하는 원의 넓이가 8π 일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

예시 답안

(가)

$$\sin A = \sin\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A$$

$$\tan A = 1$$

$$A = \frac{\pi}{4}$$

이다. 또한 $A + B + C = \pi$ 이므로 (나)로부터는

$$\cos(A + C) = \cos(\pi - B) = -\cos B = -\sin B$$

$$\tan B = 1$$

$$B = \frac{\pi}{4}$$

$$C = \pi - A - B = \frac{\pi}{2}$$

를 확인할 수 있다. 또한 삼각형의 외접원의 반지름 R 은 $\pi R^2 = 8\pi$ 로부터 $R = 2\sqrt{2}$ 로 나온다. 이제 사인법칙으로부터

$$\overline{AC} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \sin B = 4$$

$$\overline{BC} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \sin A = 4$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \overline{AC} \overline{BC} \sin C = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 8$$

이다.

다른 풀이

각도 B를 구할 때

$$\cos^2 B + \sin^2 B = 2 \sin^2 B = 1$$

$$\cos B = \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0 < B < \pi \text{ 이므로 } \sin B > 0)$$

$$B = \frac{\pi}{4}$$

로 구할 수도 있다.

다른 풀이

삼각형 ABC의 넓이를 구할 때, 직각삼각형은 빗변이 원의 중심을 지나므로 빗변의 길이가 $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다. 직각삼각형 ABC의 삼각비를 이용하면

$$\overline{AC} = \overline{BC} = 4$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \overline{AC} \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$$

이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$\sin A$ 와 $\cos A$ 의 값을 구하고 이로부터 각도 A 의 값도 구한다.	5
(2)	$\tan B$ 또는 $\sin B$ 와 $\cos B$ 의 값을 구하고 이로부터 각도 B 와 C 의 값도 구한다.	5
(3)	사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변들의 길이를 구하고 삼각형의 넓이를 계산한다.	5

문항 7

[문제 7] (15점)

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$(x-2)f(x) = x^3 - ax + b + \int_2^x f(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f'(1) + a + b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

예시 답안

문제의 식의 양변에 $x = 2$ 을 대입하면 $8 - 2a + b = 0$ 이다. 양변을 x 에 관하여 미분하면

$$f(x) + f'(x)(x-2) = 3x^2 - a + f(x)$$

이고,

$$f'(x)(x-2) = 3x^2 - a$$

이다. 양변에 $x = 2$ 를 대입하면 $a = 12$ 이고 $b = 16$ 이다. 그러므로 $x \neq 2$ 일 때,

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = 3(x + 2)$$

이다. 따라서 $f'(1) + a + b = 37$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	문제의 식의 양변에 $x = 2$ 을 대입하여 식 $8 - 2a + b = 0$ 을 얻는다.	5
(2)	양변을 x 에 관하여 미분하여 $f'(x)(x-2) = 3x^2 - a$ 을 얻고 이에 $x = 2$ 를 대입하여 $a = 12$ 을 얻는다.	7
(3)	$b = 16$ 을 얻고 $f'(x) = 3(x+2)$ 를 얻어 문제의 답 $f'(1) + a + b = 37$ 을 얻는다.	3

2024학년도 자연계열

문항 1

[문제 1] (10점)
모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이 $a_3 = 45, a_8 = 9a_6$ 을 만족시킬 때, $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 을 구하시오.

예시 답안

등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 $a_n = ar^{n-1}$ 이라고 하자.
 $a_3 = ar^2 = 45, a_8 = 9a_6$ 은 $ar^7 = 9ar^5$ 이다.
모든 항이 양수이므로 $a > 0, r > 0$ 이다.
 $ar^7 = 9ar^5$ 에 의하여 $r^2 = 9$ 이고, $r > 0$ 이므로 $r = 3$ 이다.
 $ar^2 = 9a = 45, a = 5$ 이므로, 일반항 a_n 은 $a_n = 5 \times 3^{n-1}$ 이다.
등비수열의 합 공식에 의해 수열의 합 S_n 은 $S_n = a \frac{r^n - 1}{r - 1} = 5 \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{5}{2}(3^n - 1)$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 $a_n = ar^{n-1}$ 으로 표시한다.	1
(2)	공비 r 을 구한다. ($r > 0$ 또는 모든 항이 양수임을 언급하지 않으면 1점 감점)	3
(3)	등비수열의 일반항 a_n 을 구한다.	2
(4)	등비수열의 합 S_n 을 구한다.	4

문항 2

[문제 2] (10점)

$\tan \theta < 0$, $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ 일 때, $\sin \theta + \frac{1}{\tan \theta}$ 의 값을 구하시오.

예시 답안

(삼각함수는 주기함수이므로 $0 \leq \theta < 2\pi$ 에서만 고려하면 충분하다.)

$0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때 $\tan \theta < 0$ 인 θ 의 범위는 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (제2사분면) 또는 $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ (제4사분면)이다.

한편, $\cos \theta < 0$ 인 θ 의 범위는 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ (제2사분면, 제3사분면)이므로, 공통범위는 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (제2사분면)이다.

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ 이고, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로, $\sin \theta = \frac{4}{5}$ 이다.

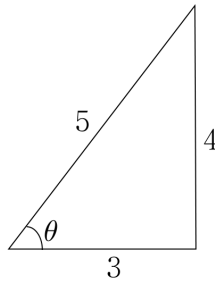
이때, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{4}{3}$ 이다. 그러므로 $\sin \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$ 이다.

다른 풀이, $\sin \theta$ 의 부호

$\tan \theta < 0$ 이고 $\cos \theta < 0$ 이므로 $\sin \theta = \cos \theta \tan \theta > 0$ 이다.

삼각함수의 절댓값 계산의 다른 풀이, 삼각형 이용

부호는 위 방식으로 구하고, 삼각함수의 절댓값은 삼각형을 이용하여 구할 수도 있다.



채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$\sin \theta$ 의 부호, 혹은 θ 의 범위(사분면)을 구한다.	5
(2)	$\sin \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 값을 구한다.	각 2
(3)	두 값을 이용하여 $\sin \theta + \frac{1}{\tan \theta}$ 의 값을 구한다.	1

문항 3

[문제 3] (10점)

세 함수 $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$, $h(x) = 9^x + b$ 의 그래프가 모두 한 점에서 만날 때, 상수 b 의 값을 구하시오.

■ 예시 답안

두 함수 $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$ 의 그래프의 교점을 구하기 위해 두 식을 연립하면 $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 2$, 즉 $3^x = 3 \times \frac{1}{3^x} + 2$ 이다.

양변에 3^x 를 곱하고 정리하면 $(3^x)^2 - 2(3^x) - 3 = 0$ 이다.

인수분해하면 $(3^x + 1)(3^x - 3) = 0$ 이므로 $3^x = 3$ 또는 $3^x = -1$ 이다.

$3^x > 0$ 이므로 $3^x = -1$ 은 성립하지 않는다.

그러므로 $3^x = 3$ 이고 $x = 1$ 이다.

$x = 1$ 을 $f(x)$ 또는 $g(x)$ 에 대입하면 $f(1) = 3$, $g(1) = 3$ 이다.

그러므로 두 그래프의 교점은 $(1, 3)$ 이다.

함수 $h(x) = 9^x + b$ 의 그래프가 교점 $(1, 3)$ 을 지나므로 이를 대입하면 $3 = 9 + b$ 이다.

그러므로 $b = -6$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	지수의 성질을 이용하여 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ 을 $\frac{3}{3^x}$ 또는 3^{1-x} 으로 변형한다.	2
(2)	$f(x)$, $g(x)$ 를 연립하여 지수가 포함된 방정식을 만든다.	2
(3)	지수가 포함된 방정식의 해를 구한다.	2
(4)	해를 이용하여 교점을 구한다.	2
(5)	교점을 $h(x) = 9^x + b$ 에 대입하여 b 를 구한다.	2

문항 4

[문제 4] (10점)

함수 $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & (x < 1) \\ 7x-C & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 C 의 두 값 중 작은 값을 C_1 , 큰 값을 C_2 라고 하자. 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 함수 $g(x) = x^3 - C_2x + C_1$ 의 최솟값을 구하시오.

예시 답안

함수 $|f(x)|$ 가 $x = 1$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 1+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 1-} |f(x)|$ 이어야 한다.

$\lim_{x \rightarrow 1+} |7x - C| = |7 - C|$ 이며 $\lim_{x \rightarrow 1-} |2x + 3| = 5$ 이므로

$|7 - C| = 5$, 즉 $C = 2$ 또는 $C = 12$ 이다. 그러므로 $C_1 = 2$ 이고 $C_2 = 12$ 이다.

주어진 삼차방정식은 $g(x) = x^3 - 12x + 2$ 가 되고,

이 방정식의 극값을 구하기 위하여 양변을 x 로 미분하면 $g'(x) = 3x^2 - 12$ 가 된다.

도함수가 0이 되는 x 는 ± 2 이며, 함수 $g(x)$ 의 극값, 그리고 주어진 구간의 양 끝점을 대입한 값들은 각각 $g(-3) = -27 + 36 + 2 = 11$, $g(-2) = -8 + 24 + 2 = 18$, $g(2) = 8 - 24 + 2 = -14$, $g(3) = 27 - 36 + 2 = -7$ 이므로 이 중 가장 작은 $g(2) = -14$ 가 최솟값이다.

다른 풀이

삼차방정식 $g(x)$ 의 그래프 개형을 $g'(x)$ 의 개형 또는 $g'(x)$ 의 부호 변화를 이용하여 파악하면 $g(-2)$ 는 극대 값이고 $g(x)$ 는 $x > 2$ 에서 증가함수이므로 $g(2) < g(3)$ 이다. $g(-2)$ 와 $g(3)$ 는 최솟값이 될 수 없으므로 $g(-3)$ 과 $g(2)$ 의 두 값만 비교하여 최솟값을 찾을 수 있다.

$g(-3) = -27 + 36 + 2 = 11$, $g(2) = 8 - 24 + 2 = -14$ 이므로 이 중 가장 작은 $g(2) = -14$ 가 최솟값이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$ f(x) $ 가 연속이 되는 C 의 두 값을 구한다.	각 2
(2)	함수 $g(x)$ 를 미분하여 도함수의 값이 0이 되는 x 를 구한다.	3
(3)	양 끝값과 극값을 비교하여 최솟값을 구한다.	3

문항 5

[문제 5] (10점)

제시문

곡선 $y = 10 - x^2$ 위의 점 $(t, 10 - t^2)$ 에서의 접선의 x 절편을 $f(t)$, y 절편을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $h(t) = tf(t)g(t)$ 에 대하여 $h'(1)$ 을 구하시오. (단, $t > 0$)

■ 예시 답안

곡선 $y = 10 - x^2$ 의 점 $(t, 10 - t^2)$ 에서의 접선의 기울기는 $-2t$ 이므로, 곡선 위의 점 $(t, 10 - t^2)$ 에서의 곡선의 접선의 방정식은 $y = -2t(x - t) + 10 - t^2 = -2tx + 10 + t^2$ 이다.

접선의 x 절편은 $0 = -2tx + 10 + t^2$ 으로부터 $x = \frac{10 + t^2}{2t}$ ($t > 0$)이므로 $f(t) = \frac{10 + t^2}{2t}$ 이다.

y 절편은 $10 + t^2$ 이므로 $g(t) = 10 + t^2$ 이다.

따라서 $h(t) = tf(t)g(t) = \frac{1}{2}(10 + t^2)(10 + t^2) = \frac{1}{2}(t^4 + 20t^2 + 100)$ 이다.

그러므로, $h'(t) = 2t^3 + 20t$ 이고, $h'(1) = 22$ 이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	곡선의 접선의 방정식을 구한다.	2
(2)	접선의 x 절편과 y 절편을 t 에 대한 식으로 구한다.	각 2
(3)	$h(t)$ 의 식을 구한다.	2
(4)	$h'(1)$ 의 값을 구한다.	2

문항 6

[문제 6] (15점)

제시문

x 에 대한 방정식 $x^2 - x \log_3(9k) + \log_3(k^2) = 0$ 의 두 실근 α, β 가 양수이고 $\alpha^2 + \beta^2 = 13$ 을 만족시킬 때, k 의 값을 구하시오.

예시 답안

(풀이 1)

방정식 $x^2 - x \log_3 9k + \log_3 k^2 = 0$ 의 두 실근 α, β 는

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \log_3 9k = \log_3 9 + \log_3 k = 2 + \log_3 k,$$

$$\alpha\beta = \log_3 k^2 = 2 \log_3 k \text{를 만족한다.}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (2 + \log_3 k)^2 - 2(2 \log_3 k) = 13 \text{이므로}$$

$$(\log_3 k)^2 - 9 = (\log_3 k - 3)(\log_3 k + 3) = 0 \text{이다.}$$

한편, 두 실근은 양수이므로 $\alpha + \beta = 2 + \log_3 k > 0$, $\alpha\beta = 2 \log_3 k > 0$ 이어야 한다.

그러므로 $\log_3 k = -3$ 은 가능하지 않고, $\log_3 k = 3$ 이다.

즉 $k = 3^3 = 27$ 이다.

(풀이 2)

$x^2 - x \log_3 9k + \log_3 k^2 = 0$ 은 $x^2 - (2 + \log_3 k)x + 2 \log_3 k = 0$ 으로 표현되고

인수분해 또는 근의 공식에 의해 두 실근 α, β 를 구하면 $2, \log_3 k$ 이다.

두 양의 실근 α, β 는 $\alpha^2 + \beta^2 = 13$ 을 만족하고, 두 근 중 한 근이 2이므로 나머지 한 근은 3이다. 따라서 $\log_3 k = 3$ 이다. 그러므로 $k = 3^3 = 27$ 이다.

(별첨)

인수분해: $(x - 2)(x - \log_3 k) = 0$

$$\text{근의 공식: } x = \frac{2 + \log_3 k \pm \sqrt{(2 + \log_3 k)^2 - 8 \log_3 k}}{2} = \frac{2 + \log_3 k \pm (2 - \log_3 k)}{2} = \begin{cases} 2 \\ \log_3 k \end{cases}$$

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$\log_3 9k = 2 + \log_3 k$, $\log_3 k^2 = 2 \log_3 k$ 로 변형한다.	각 3
(2)	$\alpha^2 + \beta^2 = 13$ 을 이용하여 $\log_3 k = 3$ 의 값을 구한다.	6
(3)	$\log_3 k = 3$ 으로부터 k 의 값을 구한다.	3

문항 7

[문제 7] (15점)

제시문

다항함수 $f(x)$ 가

$$f(x) + \int_0^x f(t)dt = x^3 + 2x^2 + x \int_{-1}^1 f(t)dt + 3 \int_{-1}^1 tf(t)dt$$

를 만족시킬 때, $\int_1^2 f(x)dx$ 의 값을 구하시오.

예시 답안

$a = \int_{-1}^1 f(t)dt, b = \int_{-1}^1 tf(t)dt$ 라 하자. 준식은 다음과 같다.

$$f(x) + \int_0^x f(t)dt = x^3 + 2x^2 + ax + 3b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면 $f'(x) + f(x) = 3x^2 + 4x + a$ 이다.

$f'(x)$ 는 $f(x)$ 의 차수보다 1이 작은 차수를 가지는 다항함수이므로,

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

$f(x) = 3x^2 + Bx + C$ 로 두자.

그러면 $f(x) + \int_0^x f(t)dt = x^3 + \left(3 + \frac{B}{2}\right)x^2 + (B+C)x + C$ 이다.

식 ①과 계수를 비교하면, $3 + \frac{B}{2} = 2, B + C = a, C = 3b$ 이다.

$3 + \frac{B}{2} = 2$ 로부터 $B = -2$ 이고,

$B + C = a$ 로부터 $-2 + C = \int_{-1}^1 (3t^2 - 2t + C)dt = [t^3 - t^2 + Ct]_{-1}^1 = 2 + 2C$ 이다.

따라서 $C = -4$ 이다. 그러므로 $f(x) = 3x^2 - 2x - 4$ 이다.

그러므로 $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (3x^2 - 2x - 4)dx = [x^3 - x^2 - 4x]_1^2 = 8 - 4 - 8 - 1 + 1 + 4 = 0$ 이다.

(다른 풀이)

$a = \int_{-1}^1 f(t)dt, b = \int_{-1}^1 tf(t)dt$ 라 하자. 준식은 다음과 같다.

$$f(x) + \int_0^x f(t)dt = x^3 + 2x^2 + ax + 3b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 는 다항함수이므로 $\int_0^x f(t)dt$ 는 $f(x)$ 보다 차수가 1 더 큰 차수의 다항함수이다.

식 ①과 비교하면 $\int_0^x f(t)dt$ 는 삼차함수이고,

따라서 $f(x)$ 는 이차함수이다. $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ 로 두자.

$f(x) + \int_0^x f(t)dt = \frac{Ax^3}{3} + \left(A + \frac{B}{2}\right)x^2 + (B+C)x + C$ 이므로 식 ①과 비교하면 $\frac{A}{3} = 1, A + \frac{B}{2} = 2, B +$

$C = a, C = 3b$ 이고, $A = 3, B = -2, -2 + C = a$ 이다.

$-2 + C = \int_{-1}^1 (3t^2 - 2t + C)dt = [t^3 - t^2 + Ct]_{-1}^1 = 2 + 2C$ 이므로, $C = -4$ 이다.

따라서 $f(x) = 3x^2 - 2x - 4$ 이다.

그러므로 $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (3x^2 - 2x - 4)dx = [x^3 - x^2 - 4x]_1^2 = 8 - 4 - 8 - 1 + 1 + 4 = 0$ 이다.

(상수항 부분 다른 풀이)

$f(x)$ 의 상수항 C 에 대하여 $f(t) = 3t^2 - 2t + C$ 와 $C = 3b$ 로부터

$$C = 3 \int_{-1}^1 (3t^3 - 2t^2 + Ct) dt = 3 \left[\frac{3t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + \frac{Ct^2}{2} \right]_{-1}^1 = -4$$

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$a = \int_{-1}^1 f(t)dt, b = \int_{-1}^1 tf(t)dt$ 가 상수임을 알고, $f(x)$ 가 이차함수임을 명시한다.	3
(2)	$f(x)$ 의 x^2 의 계수, x 의 계수, 상수항을 구한다.	각 3
(3)	적분 $\int_1^2 f(x)dx$ 를 계산한다.	3

2027학년도 모의논술 (자연계열)

문항 1

[문제 1] (10점)

제시문

함수 $y = 2 \sin^2 x - 4 \cos x$ 의 최댓값을 구하시오. (단 x 의 범위는 $0 \leq x \leq 2\pi$ 이다)

예시 답안

문제의 풀이는 (가)~(다)의 절차에 준한다.

(가) 공식 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 을 이용하여 주어진 식을 다음과 같이 바꾼다.

$$y = 2 \sin^2 x - 4 \cos x = 2(1 - \cos^2 x) - 4 \cos x = -2 \cos^2 x - 4 \cos x + 2$$

(나) 이제, $t = \cos x$ 라 치환하면, 위 식은

$$y = -2t^2 - 4t + 2 = -2(t+1)^2 + 4$$

한편, $\cos x$ 는 -1 과 1 사이의 모든 값을 가질 수 있으므로, $-1 \leq t \leq 1$ 이다.

(다) $y = -2(t+1)^2 + 4$ 의 그래프는 위로 볼록한 포물선이며, 꼭짓점은 y 는 $t = -1$ 일 때 최대가 되며, $t = -1$ 은 주어진 범위 $-1 \leq t \leq 1$ 에 포함되므로 y 는 $t = -1$ 일 때, 즉 $x = \pi$ 일 때 최댓값을 갖는다. 따라서 최댓값은 $y = -2(-1+1)^2 + 4 = 4$ 임을 알 수 있다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ 를 이용하여 함수를 $\cos x$ 에 대한 식으로 변환한다.	3
(2)	$t = \cos x$ 로 치환하고, t 의 범위를 $-1 \leq t \leq 1$ 로 설정하여 t 에 대한 이차함수로 나타낸다.	4
(3)	주어진 t 의 범위에서 이차함수의 최댓값을 정확히 구한다.	3

문항 2

[문제 2] (10점)

제시문

로그방정식 $\log_2(x+2) = \log_4 x^2$ 을 만족하는 실수 x 의 값을 구하여라.

예시 답안

[풀이] 문제의 풀이는 (가)~(라)의 절차에 준한다.

로그 $\log_a b$ 에서 a 를 로그의 밑이라 하고, b 를 로그의 진수라 부른다.

(가) 로그의 진수는 양수이어야 하므로 아래의 요건을 갖는다.

$$x+2 > 0, \quad x^2 > 0$$

다시 말하면, $x > -2$ 이고 동시에 $x \neq 0$ 이어야 한다.

(나) 아래의 2가지 중 하나의 방법으로 해결할 수 있다.

(방법1) 로그의 성질을 이용하여

$$\begin{aligned} \log_2(x+2) &= \frac{\log_a(x+2)}{\log_a 2}, \\ \log_4 x^2 &= \frac{\log_a x^2}{\log_a 4} = \frac{\log_a x^2}{2 \log_a 2} = \frac{\log_a \sqrt{x^2}}{\log_a 2} = \frac{\log_a |x|}{\log_a 2} \end{aligned}$$

(여기서 로그의 밑인 a 는 2, 3, 4, ..., 10 또는 e 등, 양수이면서 1이 아니기만 하면 된다.)

따라서

$$\frac{\log_a(x+2)}{\log_a 2} = \frac{\log_a |x|}{\log_a 2} \quad \text{또는} \quad x+2 = |x| \quad (x > -2, x \neq 0) \quad \text{-----} \quad (1)$$

(방법2) 밑 4를 밑이 2인 로그로 바꾸는 방법을 사용하면 아래와 같다.

$$\log_2(x+2) = \log_4 x^2 = \log_{2^2} |x|^2 = \log_2 |x| \quad \text{이므로} \quad x+2 = |x| \quad (x > -2, x \neq 0)$$

(다) ① 먼저, $-2 < x < 0$ 이라 하면, 식 (1)은

$$x+2 = -x$$

가 되어, 이로부터 $x = -1$ 을 얻는다.

② 이제, $x > 0$ 이라 하면, 식 (1)은

$$x+2 = x$$

가 되며, 이것의 해는 존재하지 않는다.

(라) 따라서 정답은 $x = -1$ 이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	로그의 진수 조건을 이용하여 x 의 범위를 정확하게 구한다.	2
(2)	밑 변환 공식을 이용하여 양변의 밑을 통일하고, 진수끼리의 방정식으로 유도한다.	4
(3)	유도된 이차방정식을 풀어 x 의 후보 값을 모두 찾는다.	2
(4)	(1)에서 구한 x 의 범위를 고려하여 조건에 맞지 않는 값을 제외하고 최종 해를 결정한다.	2

문항 3

[문제 3] (10점)

제시문

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_n = n^2 + 3n$ 일 때, 다음 물음에 답하시오.

- (1) 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 을 구하시오.
- (2) $\sum_{k=1}^5 a_{2k}$ 의 값을 구하시오.

예시 답안

[풀이]

(1) 일반항 a_n 구하기

수열의 합 $S_n = n^2 + 3n$ 에서,

첫째항 $a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 = 4$ 이다.

$n \geq 2$ 일 때, 일반항 a_n 은 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$a_n = (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\}$$

$$a_n = (n^2 + 3n) - (n^2 - 2n + 1 + 3n - 3)$$

$$a_n = (n^2 + 3n) - (n^2 + n - 2)$$

$$a_n = 2n + 2 \text{이다.}$$

이 식에 $n = 1$ 을 대입하면 $2 \times 1 + 2 = 4$ 이므로, 위에서 구한 첫째항 a_1 의 값과 일치한다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = 2n + 2$ 이다.

(2) $\sum_{k=1}^5 a_{2k}$ 의 값 구하기.

(1)에서 구한 일반항 $a_n = 2n + 2$ 에서 n 자리에 $2k$ 를 대입하면, $a_{2k} = 2 \times 2k + 2 = 4k + 2$ 이다.

따라서 구하고자 하는 합은 시그마 기호의 성질에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$\sum_{k=1}^5 a_{2k} = \sum_{k=1}^5 (4k + 2) = 4 \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 2 = 4 \times \left(\frac{5 \times 6}{2} \right) + 2 \times 5 = 70.$$

즉, 구하고자 하는 값은 70이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$a_1 = S_1$ 임을 이용하여 첫째항을 정확히 구한다.	2
(2)	$n \geq 2$ 일 때 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 을 이용하여 구한 식이 $n = 1$ 일 때도 성립함을 확인하고 일반항 a_n 을 정확히 제시한다.	3
(3)	일반항을 이용하여 a_{2k} 의 식을 올바르게 구한다.	2
(4)	시그마($\sum$)의 성질이나 등차수열의 합 공식을 이용하여 $\sum_{k=1}^5 a_{2k}$ 의 최종값을 정확히 계산한다.	3

문항 4

[문제 4] (15점)

제시문

상수 a, b, c 에 대하여, 시각 t 에서의 점 P 의 위치를 나타내는 함수 $f(t)$ 가 다음과 같이 주어진다.

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct \quad (\text{단, } a \neq 0)$$

함수 $f(t)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{bt^3}{f(t)} = 2, \quad \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t-1)}{t-2} = 4$$

- (1) 주어진 조건을 만족하는 함수 $f(t)$ 를 구하시오.
- (2) (1)에서 구한 함수 $f(t)$ 를 이용하여, 시간 $t = 3$ 에서 점 P 의 가속도를 구하시오.

예시 답안

[풀이]

문제의 풀이는 (1)~(2)의 절차에 준한다.

(1)

위치함수 $f(t)$ 의 도함수가 속도 $v(t)$ 라고 표현할 수 있다. 주어진 조건으로부터

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{bt^3}{f(t)}$$

$t \rightarrow \infty$ 일 때 다항함수의 극한은 최고차항에 의해 결정되므로 분자와 분모의 최고차항만 비교하면, 아래와 같다.

$$\frac{bt^3}{at^3} = \frac{b}{a} = 2$$

따라서, 다음과 같은 첫 번째 관계식을 얻는다.

$$b = 2a$$

제시된 다른 조건은 아래와 같다.

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t-1)}{t-2} = 4$$

여기서 $x = t - 1$ 로 치환하면 $t \rightarrow 2$ 일 때 $x \rightarrow 1$ 이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$$

이 식이 유한한 값을 가지기 위해서는 $f(1) = 0$ 을 만족해야 한다.

따라서 위 극한은 미분의 정의에 의해서 다음의 식을 만족한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = v(1) = 4$$

위에서 도출된 조건으로부터

$$f(1) = a + b + c = 0$$

$$v(t) = 3at^2 + 2bt + c \Rightarrow v(1) = 3a + 2b + c = 4$$

a, b, c 상수들은 관계식들로부터 아래와 같이 구할 수 있다.

$$a + b + c = a + 2a + c = 0 \Rightarrow c = -3a$$

$$3a + 2b + c = 3a + 2 \times 2a - 3a = 4a = 4$$

$$\Rightarrow \therefore a = 1, b = 2, c = -3$$

최종적으로 $f(t)$ 는 다음과 같다.

$$f(t) = t^3 + 2t^2 - 3t$$

(2)

위치함수 $f(t)$ 의 도함수가 속도 $v(t)$ 이고, 속도 $v(t)$ 의 도함수가 가속도 $a(t)$ 라고 표현할 수 있다. 따라서 속도 $v(t)$ 와 가속도 $a(t)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 3$$

$$a(t) = 6t + 4$$

$t = 3$ 에서의 가속도는 다음과 같다.

$$a(3) = 6 \times 3 + 4 = 22$$

따라서, 구하고자 하는 답은 22이다.

■ 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	무한대 극한을 이용한 계수 a 와 b 의 관계식을 결정함.	2
	주어진 극한을 적절히 해석(미분계수 관점 포함).	4
	조건을 이용한 식 설정 및 계수 관계 도출함.	2
	a, b, c 값 및 함수 완성의 정확성.	2
(2)	위치함수 $f(t)$ 의 도함수가 속도 $v(t)$ 이고, 속도 $v(t)$ 의 도함수가 가속도 $a(t)$ 임을 이해함.	1
	미분 계산을 통해 위치함수 $f(t)$ 의 도함수 $v(t)$ 를 구하고, 또한 $v(t)$ 의 도함수 $a(t)$ 를 구함.	2
	$t = 3$ 대입 과정의 적절성 및 정확성.	2

써봄

기출로 연습했다면, 이제 써보고 바로 첨삭받자.

Google Gemini 기반 한국어 논술 자동 첨삭 서비스

01

4개 영역 점수

논리구조 · 근거타당성 · 주장명확성 · 언어표현 영역별로 점수를 매겨 줍니다.

02

상세 피드백

강점, 개선점, 구체적인 제안사항까지 한 번에 확인합니다.

03

일괄 첨삭

교사·강사는 학생 답안을 최대 10편까지 한꺼번에 올려 처리할 수 있습니다.

04

간편한 업로드

PDF · DOCX · TXT 파일을 그대로 올리면 됩니다.

이용 안내

무료 체험	회원가입 시 3회 무료 분석
개인 플랜	월 9,900원
교사 플랜	월 29,900원

논술 수험생 · 논술 교사와 강사 · 학원과 교육기관



writegrow.net

QR 코드를 스캔하면 바로 시작할 수 있습니다