

원운동 · 단진동 · 진자운동

주요 공식 총정리와 단계별 수식 유도

고등학교 물리 수준 — 미적분 최소 사용

기호 약속

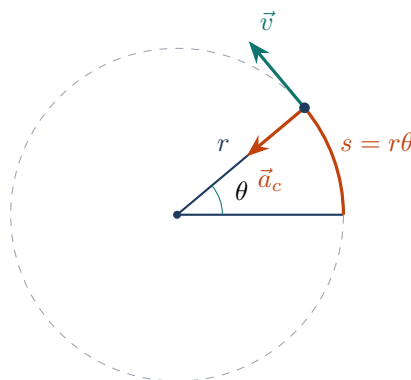
- r : 원운동 반지름, L : 실(막대) 길이
- θ : 회전각(rad), s : 호의 길이
- T : 주기(s), f : 진동수(Hz)
- ω : 각속도 / 각진동수 (rad/s)
- v : 속력, a : 가속도
- A : 진폭, k : 탄성계수(N/m)
- m : 질량, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$
- F_c : 구심력, T : 실의 장력

1. 등속 원운동 (Uniform Circular Motion)

1.1 각도 · 호의 길이 · 라디안

반지름 r 인 원에서 중심각 θ (rad)에 대응하는 호의 길이 s 는 정의상

$$s = r\theta \quad \left(1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ, \quad 360^\circ = 2\pi \text{ rad} \right)$$



속도 $\vec{v}$ 는 항상 원의 접선 방향, 가속도 $\vec{a}_c$ 는 항상 중심 방향 (서로 수직).

1.2 주기 · 진동수 · 각속도

한 바퀴($2\pi \text{ rad}$) 도는 데 걸리는 시간이 주기 T 이므로

주기 · 진동수 · 각속도

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

1.3 선속력 $v = r\omega$ 의 유도

유도 1 — 선속력과 각속도의 관계

[1단계] 시간 Δt 동안 각이 $\Delta\theta$ 만큼 변하면, 지나간 호의 길이는 $\Delta s = r \Delta\theta$.

[2단계] 속력은 (경로 길이)/(시간)이므로

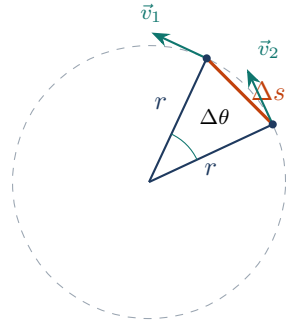
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \Delta\theta}{\Delta t} = r \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

[3단계] $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega$ 이므로

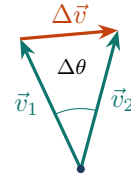
$$v = r\omega = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

1.4 구심가속도 $a_c = v^2/r$ 의 기하학적 유도

등속 원운동은 속력은 일정하지만 속도의 방향이 계속 바뀌므로 가속도가 존재한다.



(가) 위치 삼각형



(나) 속도 삼각형

유도 2 — 구심가속도

[1단계] 두 삼각형 모두 끼인각이 $\Delta\theta$ 로 같고, 두 변의 길이가 각각 같은 이등변삼각형이다. (가)는 두 변이 r , (나)는 두 변이 v . 따라서 두 삼각형은 닮음이다.

[2단계] 닮음비에서 대응변의 비가 같으므로

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{(\text{현의 길이})}{r} \xrightarrow{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{r}$$

($\Delta\theta$ 가 매우 작으면 현의 길이 $\approx$ 호의 길이 Δs)

[3단계] 정리하면 $|\Delta\vec{v}| = \frac{v \Delta s}{r}$. 양변을 Δt 로 나누면

$$a_c = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot v$$

[4단계] 그리고 (나)에서 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 일 때 $\Delta\vec{v}$ 는 $\vec{v}$ 에 수직 $\rightarrow$ **중심 방향**. 그러므로

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v\omega = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad (\text{중심 방향})$$

1.5 구심력

뉴턴 운동 제2법칙 $F = ma$ 를 그대로 적용하면

구심력

$$F_c = ma_c = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

꼭 기억할 개념

구심력은 새로운 종류의 힘이 아니다. 실의 장력, 중력, 마찰력, 수직항력 등 이미 존재하는 힘의 합력이 중심을 향할 때 그것을 구심력이라 부른다. 등속 원운동에서 구심력은 항상 속도와 수직이므로 일을 하지 않고, 따

라서 운동에너지가 변하지 않는다.

1.6 원운동 대표 응용 3가지

(1) 수평면 원뿔진자 — 주기

길이 L 의 실이 수직선과 각 θ 를 이루며 반지름 $r = L \sin \theta$ 의 수평 원을 돈다.

[1단계] 수직 방향은 평형: $T \cos \theta = mg$

[2단계] 수평 방향이 구심력: $T \sin \theta = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$

[3단계] 두 식을 나누어 T 를 소거:

$$\tan \theta = \frac{r\omega^2}{g} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g \tan \theta}{r} = \frac{g \tan \theta}{L \sin \theta} = \frac{g}{L \cos \theta}$$

[4단계] $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 이므로

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$$

($\theta \rightarrow 0$ 이면 $T \rightarrow 2\pi\sqrt{L/g}$ — 단진자 주기와 일치!)

(2) 연직면 원운동 — 최고점 최소 속력

[1단계] 최고점에서 중력과 장력이 모두 아래(중심) 방향: $mg + T = \frac{mv_{\text{top}}^2}{r}$

[2단계] 실이 팽팽함을 겨우 유지하는 한계는 $T = 0$:

$$mg = \frac{mv_{\text{top}}^2}{r} \Rightarrow v_{\text{top, min}} = \sqrt{gr}$$

[3단계] 최고점과 최저점(높이차 $2r$) 사이 역학적 에너지 보존:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{bot}}^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{top}}^2 + mg(2r) \Rightarrow v_{\text{bot}}^2 = gr + 4gr = 5gr$$

$$v_{\text{bot, min}} = \sqrt{5gr}$$

(3) 곡선 도로 — 마찰과 경사각

수평 도로(마찰이 구심력): $\mu mg \geq \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{\mu gr}$

마찰 없는 경사 도로: $N \sin \theta = \frac{mv^2}{r}$, $N \cos \theta = mg$ 를 나누면 $\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$

2. 단진동 (Simple Harmonic Motion)

2.1 정의: 복원력이 변위에 비례

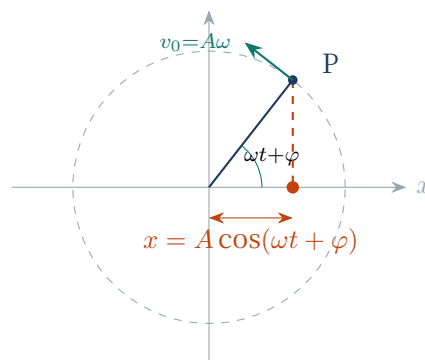
단진동의 정의

평형점으로부터의 변위 x 에 대해 알짜힘이

$$F = -kx \quad (k > 0)$$

인 운동. 부호 $(-)$ 는 힘이 항상 **평형점을 향한다**(복원력)는 뜻이다.

2.2 등속 원운동의 정사영으로 단진동 식 세우기



등속 원운동하는 점 P의 그림자(정사영)가 단진동한다

유도 3 — 단진동의 변위 · 속도 · 가속도

[1단계] 반지름 A , 각속도 ω 로 등속 원운동하는 점 P의 x 좌표:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

[2단계] P의 속력은 $v_0 = A\omega$ (접선 방향). 이 속도의 x 성분을 취하면

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

((-)는 반시계 회전 시 x 성분이 $-\sin$ 에 비례하기 때문)

[3단계] P의 가속도는 $a_0 = A\omega^2$ (중심 방향). 그 x 성분은

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

[4단계] [1단계] 과 [3단계] 을 비교하면 핵심 관계식이 나온다:

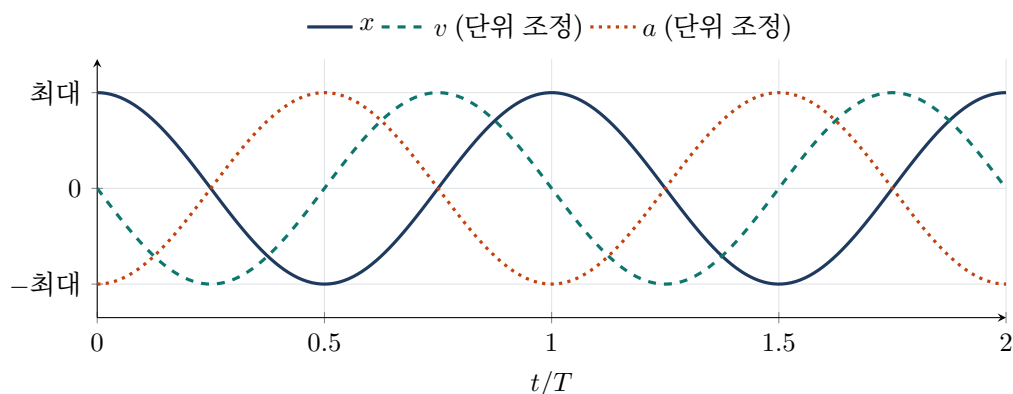
$$a = -\omega^2 x$$

단진동 3대 함수와 최대값

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \quad a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_{\max} = A, \quad v_{\max} = A\omega, \quad a_{\max} = A\omega^2$$

v 는 x 보다 위상이 $\pi/2$ 앞서고, a 는 x 와 위상이 π (정반대)만큼 다르다.



2.3 주기 공식 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ 의 유도

유도 4 — 단진동의 주기

[1단계] 뉴턴 제2법칙: $F = ma$. 단진동 정의에서 $F = -kx$, 유도 3에서 $a = -\omega^2 x$.

[2단계] 대입하면

$$-kx = m(-\omega^2 x) \implies k = m\omega^2$$

(x 가 임의의 값에서 항등적으로 성립해야 하므로 계수를 비교)

[3단계] 따라서

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

주기의 등시성

T 에 진폭 A 가 들어 있지 않다. 즉 **진폭이 커져도 주기는 변하지 않는다**(등시성). 크게 흔들면 더 멀리 가지만 그만큼 더 빠르게 움직여 시간이 정확히 상쇄된다.

2.4 위치에 따른 속력 $v(x)$

유도 5 — v 와 x 의 관계

[1단계] $x = A \cos \phi$, $v = -A\omega \sin \phi$ (단, $\phi = \omega t + \varphi$)

[2단계] $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ 에 대입:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = 1$$

[3단계] v 에 대해 풀면

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

($x = 0$ 에서 $v = A\omega$ 최대, $x = \pm A$ 에서 $v = 0$)

2.5 에너지

유도 6 — 에너지 보존

[1단계] 탄성 위치에너지: $U = \frac{1}{2}kx^2$

[2단계] 운동에너지에 유도 5를 대입:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \quad (\because m\omega^2 = k)$$

[3단계] 합하면 x 가 사라진다:

$$E = K + U = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \text{일정}$$

에너지 요약

위치	$x = 0$ (평형점)	$x = \pm A/\sqrt{2}$	$x = \pm A$ (양 끝)
K	$\frac{1}{2}kA^2$ (최대)	$\frac{1}{4}kA^2$	0
U	0	$\frac{1}{4}kA^2$	$\frac{1}{2}kA^2$ (최대)
속력	최대 $A\omega$	$A\omega/\sqrt{2}$	0
가속도	0	—	최대 $A\omega^2$

2.6 수직 스프링진자 — 왜 주기가 같은가

유도 7 — 수직으로 매달아도 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

[1단계] 스프링을 수직으로 세우고 질량 m 을 달면, 평형점은 자연길이보다 d 만큼 늘어난 곳이다:
 $kd = mg \Rightarrow d = \frac{mg}{k}$

[2단계] 새 평형점을 원점으로 삼고, 거기서 아래로 x 만큼 더 내렸을 때의 알짜힘:

$$F = mg - k(d + x) = mg - kd - kx = \underbrace{(mg - kd)}_{=0} - kx = -kx$$

[3단계] 형태가 완전히 같으므로 결론도 같다:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

중력은 평형점의 위치만 옮기고 주기는 바꾸지 않는다.

스프링 연결 — 등가 탄성계수

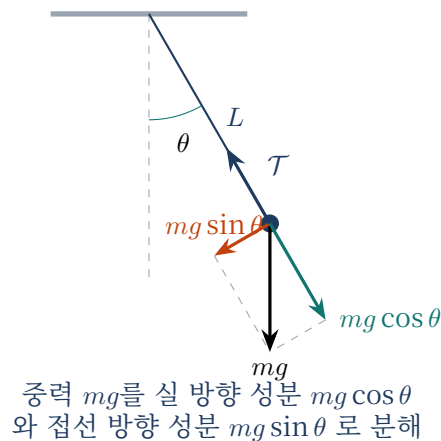
병렬(나란히): $k_{\text{eq}} = k_1 + k_2$ (같은 늘어남, 힘이 나뉜다)

직렬(이어서): $\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ (같은 힘, 늘어남이 더해진다)

스프링을 반으로 자르면 k 는 2배가 되고 주기는 $1/\sqrt{2}$ 배가 된다.

3. 진자운동 (Pendulum)

3.1 단진자 — 복원력과 소각 근사



유도 8 — 단진자의 주기 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$

[1단계] 중력 mg 를 실 방향과 운동 방향(접선)으로 분해한다. 실 방향 성분 $mg \cos \theta$ 는 장력과 함께 원운동을 담당하고, 진자를 되돌리는 것은 **접선 성분**이다:

$$F_{\text{복원}} = -mg \sin \theta$$

[2단계] 각이 작을 때 **소각 근사** $\sin \theta \approx \theta$ (단위: rad)를 쓴다. 또 호의 길이 $s = L\theta$ 이므로 $\theta = s/L$:

$$F \approx -mg\theta = -mg \cdot \frac{s}{L} = -\left(\frac{mg}{L}\right)s$$

[3단계] 이 식은 $F = -k_{\text{eq}}s$ 와 똑같은 꼴이다. 즉 **단진자는 소각에서 단진동**이고

$$k_{\text{eq}} = \frac{mg}{L}$$

[4단계] 단진동 주기 공식 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ 에 대입하면 m 이 약분된다:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}, \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

단진자 주기의 3가지 핵심

1. **질량과 무관**: 무거운 추든 가벼운 추든 주기가 같다 (m 이 약분됨).
2. **진폭과 (거의) 무관**: 소각 근사가 성립하는 범위에서만. 등시성.
3. **L 과 g 만이 결정**: 길이를 4배로 하면 주기는 2배. 달($g \approx g_E/6$)에서는 주기가 $\sqrt{6} \approx 2.45$ 배 길어진다.

소각 근사는 얼마나 정확한가

θ_0	$\sin \theta_0$ vs θ_0 오차	보정식 $1 + \theta_0^2/16$	정확한 $T/T_0 - 1$
5°	0.13 %	1.0005	0.05 %
10°	0.51 %	1.0019	0.19 %
20°	2.02 %	1.0076	0.77 %
45°	9.97 %	1.0386	4.00 %

1차 보정식: $T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$, $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ (θ_0 는 rad)

3.2 임의의 각에서 속력과 장력 (근사 없는 정확한 식)

유도 9 — $v(\theta)$ 와 장력 $\mathcal{T}(\theta)$

최대각 θ_0 에서 놓았을 때, 각 θ 지점에서:

[1단계] 최하점을 기준으로 한 높이는 $h = L(1 - \cos \theta)$. 역학적 에너지 보존 (θ_0 에서 $v = 0$):

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL(1 - \cos \theta_0) - mgL(1 - \cos \theta)$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \quad (\text{최하점: } v_{\max} = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_0)})$$

[2단계] 실 방향(원의 중심 방향)에 뉴턴 제2법칙 — 이 방향의 알짜힘이 구심력:

$$\mathcal{T} - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{L}$$

[3단계] **[1단계]** 의 v^2 을 대입:

$$\mathcal{T} = mg \cos \theta + 2mg(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$\boxed{\mathcal{T} = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)}$$

장력 공식 읽기

$\theta = \theta_0$ (양 끝, 순간정지): $\mathcal{T} = mg \cos \theta_0 < mg$ (속도가 0이라 구심력 불필요)

$\theta = 0$ (최하점, 최대): $\mathcal{T} = mg(3 - 2 \cos \theta_0) > mg$ (작은 진폭이면 $\rightarrow mg$)

$\theta_0 = 90^\circ$ 로 놓으면 최하점 장력은 $3mg$ — 무게의 3배!

3.3 원뿔진자 vs 단진자

	단진자	원뿔진자
운동	연직면 내 왕복(진동)	수평면 내 등속 원운동
반지름/진폭	진폭 $L\theta_0$	$r = L \sin \theta$ (일정)
속력	계속 변함	일정
장력	계속 변함	일정 $\mathcal{T} = mg / \cos \theta$
주기	$2\pi\sqrt{L/g}$ (소각)	$2\pi\sqrt{L \cos \theta / g}$ (정확)

3.4 심화: 물리진자(강체진자)와 감쇠

참고 — 교과 범위 밖

물리진자: 질량 m , 회전축에서 무게중심까지 거리 d , 관성모멘트 I 인 강체는 $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$. 질점 단진자는 $I = mL^2$, $d = L$ 이므로 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ 로 되 돌아온다.

감쇠진동: 저항력 $-bv$ 가 있으면 진폭이 $A(t) = A_0 e^{-bt/2m}$ 로 지수적으로 줄어든다. 주기는 거의 변하지 않는다.

강제진동·공명: 외력의 진동수가 고유진동수 $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$ 와 일치할 때 진폭이 최대(공명).

4. 한 장 요약

공식 총정리

항목	공식	비고
호의 길이	$s = r\theta$	θ 는 rad
각속도	$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$	
선속력	$v = r\omega = \frac{2\pi r}{T}$	접선 방향
구심가속도	$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v\omega$	중심 방향
구심력	$F_c = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$	합력의 이름
단진동 정의	$F = -kx, \quad a = -\omega^2 x$	
변위·속도·가속도	$x = A \cos \omega t, v = -A\omega \sin \omega t, a = -A\omega^2 \cos \omega t$	
최대값	$v_{\max} = A\omega, a_{\max} = A\omega^2$	
속력·위치	$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$	
스프링 주기	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	수평·수직 동일
전체 에너지	$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$	일정
단진자 주기	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$	소각 근사, m 무관
진자 속력	$v = \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}$	정확
진자 장력	$T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$	정확
원뿔진자	$T = 2\pi\sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$	정확
연직원운동	$v_{\text{top}} \geq \sqrt{gr}, v_{\text{bot}} \geq \sqrt{5gr}$	실/궤도

유도 흐름 한눈에

