

서울대학교 면접·구술고사

자연계열 · 물리학

문제 · 예시답안

시험 구분
전형
문항 수
핵심 개념

면접 및 구술고사 (자연계열, 물리학)
수시모집 일반전형
2문항 (소문항 9개)
전자기 유도와 패러데이 법칙, 강자성체와 자기 구역,
p-n 접합의 정류 작용과 트랜지스터의 극성 판별,
증폭기의 동작점·포화·클리핑, 축전기의 용량 리액턴스,
1차원 탄성 충돌의 반복과 등비수열, 공기 저항의 두 극한

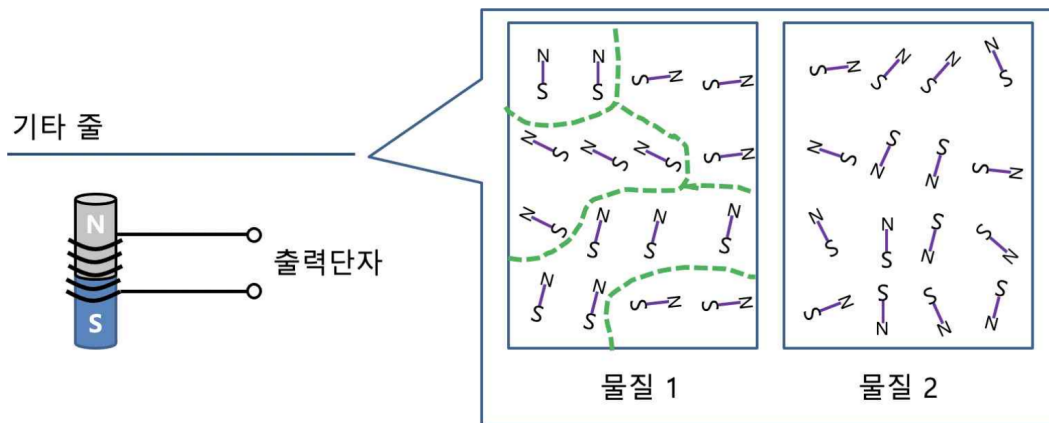
I. 문제

문제 1 전기 기타의 소리 전달 — 픽업·트랜지스터·스피커

소문항 5개

전기 기타 콘서트에서 전기 기타 연주가 청중에게 소리로 전달되는 과정의 전자기적 원리에 대해 생각해 보자. 연주자가 기타 줄을 튕기면, 줄의 진동은 픽업 앰프에서 교류 신호로 바뀐 후 트랜지스터에서 증폭된다. 그리고 스피커가 이 증폭된 교류 신호를 다시 공기의 진동으로 바꾸어 청중에게 전달한다. 이 과정의 각 단계에 관하여 다음 물음에 답하시오.

- (1-1) 아래 그림 (가)처럼, 코일이 감긴 자석들로 구성된 픽업 앰프는 전자기 유도를 통해 기타 줄의 진동을 교류 신호로 변환한다. 신호를 효과적으로 바꾸려면 줄을 아래 그림 (나)에 묘사된 두 물질 중 어느 것으로 만드는 것이 더 적절한지 답하고 그 이유를 설명하시오. 단, (나)는 외부 자기장이 없는 상태에서 관찰한 것이다.

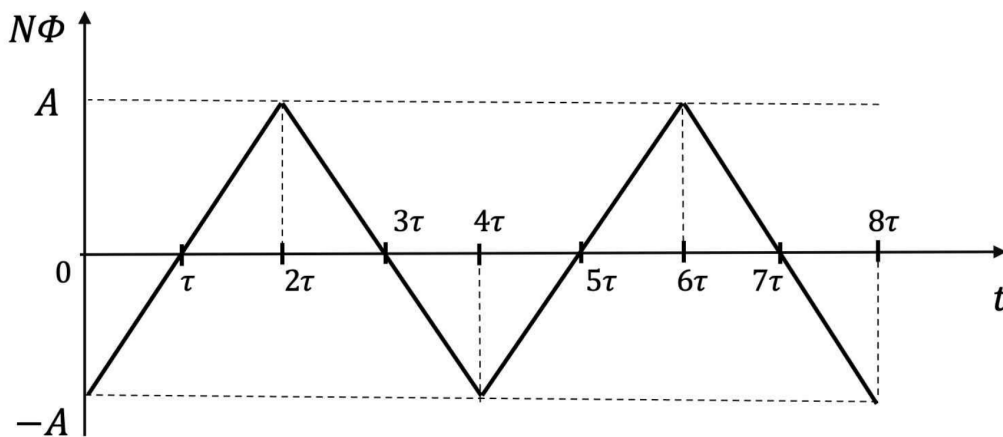


(가) 픽업 앰프의 구조

(나) 기타 줄의 구성 물질

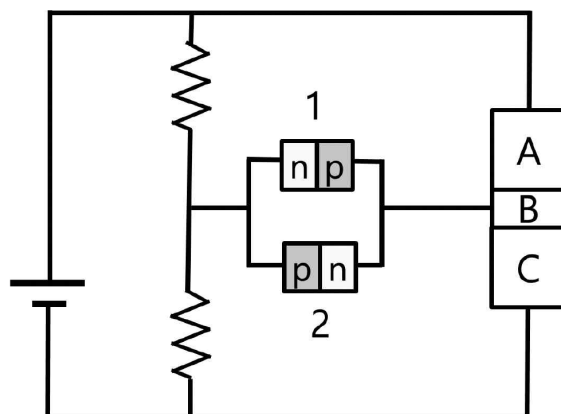
픽업 앰프와 기타 줄의 구성 물질

- (1-2) N 번 감은 코일을 통과하는 자기 선속 Φ 가 시간 t 에 따라 아래 그림처럼 변화하는 경우, 코일에 유도되는 교류 신호의 형태, 진폭 및 진동수가 어떻게 될지 답하시오. 이를 바탕으로 기타 줄의 높이와 세기가 픽업 앰프에서 유도된 교류 신호의 진동수와 진폭에 어떤 영향을 미치는지 유추하시오.



코일을 지나는 자기 선속 $N\Phi$ 의 시간 변화

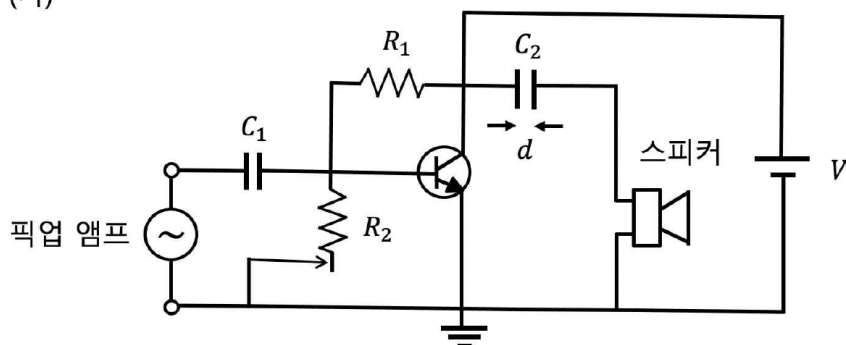
- (1-3) 증폭 회로를 만들기 위해 준비한 트랜지스터는 p-n-p형인지, n-p-n형인지 판별하고자 한다. 이를 위해 아래 그림처럼 발광 다이오드(LED)를 두 개를 사용하여 회로를 만들었다. 만약 2번 LED에만 불이 들어온다면, 이 트랜지스터는 어느 종류인지 답하고 그 이유를 트랜지스터 내부 A, B, C 영역에서의 전하 나르개의 움직임과 다이오드의 정류 작용과 연관 지어 설명하시오. 단, 이미터와 컬렉터를 서로 바꾸더라도 이 트랜지스터는 잘 작동한다고 가정한다.



LED 2개를 이용한 트랜지스터 판별 회로

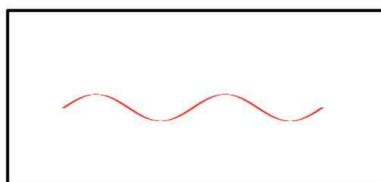
- (1-4) 트랜지스터를 이용해 아래 그림 (가)처럼 회로를 구성하여 픽업 앰프와 스피커를 연결하였다. 여기서 저항 R_1 의 값은 고정되어 있고, 저항 R_2 의 값은 전극의 접속 위치를 조절하여 바꿀 수 있다. 기타 주자가 조용한 곡을 연주할 때는 그림 (나)처럼 증폭 신호가 본래 형태를 잘 유지하였으나, 격렬한 곡을 연주할 때는 그림 (다)처럼 증폭 신호의 형태가 바뀌어 기타의 음색이 변질된다. 이러한 현상이 발생하는 것을 트랜지스터의 스위칭 작용으로 설명하고, 기타의 음색 변질을 방지하기 위해 저항 R_2 를 어떻게 바꾸어야 할지 정성적으로 설명하시오.

(가)

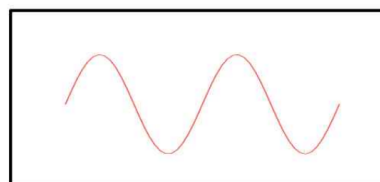


트랜지스터 증폭 회로

(나)

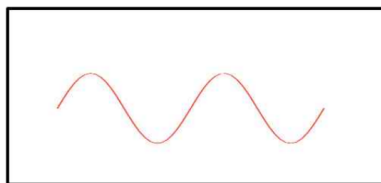


픽업 앰프

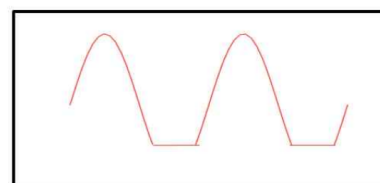


스피커

(다)



픽업 앰프



스피커

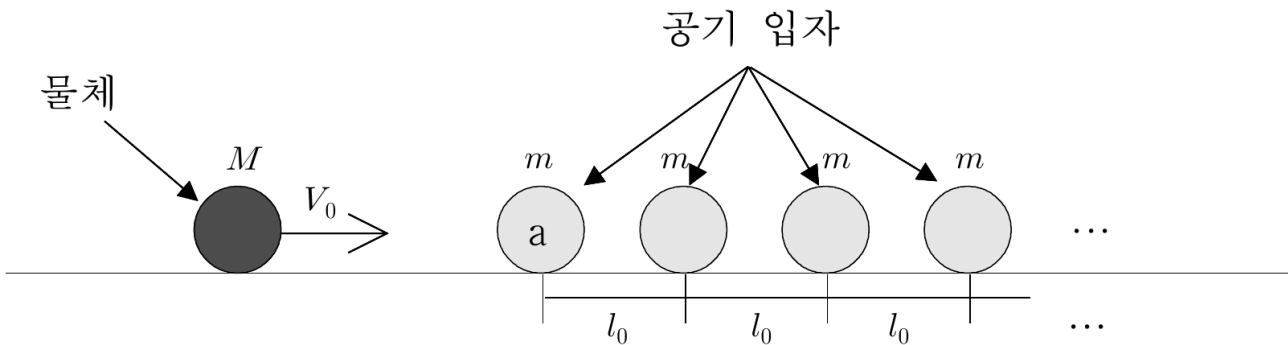
픽업 앰프와 스피커의 신호 파형

- (1-5) 위 회로에 포함된 축전기 C_1 과 C_2 는 각각 픽업 앰프와 스피커에 직류가 흐르는 것을 방지하여 부품의 손상 및 불필요한 전력 소모를 막는다. 이제 이 회로를 사용하여 전기 기타보다 낮은 음역을 연주하는 전기 베이스 기타의 소리를 스피커로 내보내는 경우를 생각해 보자. 이때 베이스 기타의 낮은 음들이 지나치게 작게 들린다면, 축전기 C_2 를 구성하는 금속판 사이의 거리 d 를 조정하여 소리가 잘 들리도록 할 수 있다. 이를 위해 거리 d 를 늘려야 할지, 줄여야 할지 답하고 그 이유를 정성적으로 설명하시오.

문제 2 1차원 충돌 모형으로 본 공기 저항

소문항 4개

공기 중 물체의 움직임에 관한 1차원 충돌 모형을 생각해 보자. 이때, 질량이 m 인 공기 입자가 정지한 상태로 l_0 의 간격을 두고 무한히 놓여 있다. 이는 평균 밀도가 $\rho = m/l_0$ 인 공기를 단순화한 1차원 모형이다(아래 그림 참조). 더 큰 질량 M 을 가진 물체가 처음 속도 V_0 로 이 공기 입자들과 충돌할 때, 물체와 공기 입자가 작용하는 평균적인 힘을 계산함으로써 공기 저항을 구할 수 있다. 모든 충돌 전후로 운동 에너지는 보존되고, 별도의 외력은 없으며, 물체와 공기 입자들의 크기는 무시할 수 있다고 가정한다. 또한 물체와 공기 입자가 오른쪽으로 움직일 때 그 속도를 양수로 표시하기로 하자. 아래 물음에 답하시오.



1차원 충돌 모형 — 질량 M 인 물체와 간격 l_0 로 놓인 질량 m 인 공기 입자들

- (2-1) 첫 번째 충돌 직후에 나타나는 물체 속도 V_1 과 공기 입자 속도 v_1 을 구하시오.
- (2-2) 위 문제에서 물체와 충돌한 공기 입자를 a_1 이라 부르자. 물체가 n 번의 충돌을 거친 직후 움직이는 속도 V_n 과 공기 입자 a_k 가 k 번의 충돌을 거친 직후 움직이는 속도 v_k 를 각각 구하시오.
- (2-3) 이제 M 이 m 보다 훨씬 크다고 가정하자. 물체의 첫 충돌 직전부터 $n+1$ 번째 충돌 직전까지 걸리는 시간을 T 라고 할 때, 이 시간 동안 물체에 가해지는 평균 힘 $\bar{F}$ 를 M, ρ, T, V_0 로 표현하시오. 이때, $B/(A+B)$ 에서 A 가 B 보다 훨씬 크다면 B/A 로 근사할 수 있다.
- (2-4) 시간 T 동안 물체가 처음 속도 V_0 그대로 움직인다면, 물체가 이동하는 구간에 있는 공기 입자의 총 질량은 $\rho V_0 T$ 이다. 이 값이 물체의 질량 M 보다 ① 매우 작은 경우와 ② 매우 큰 경우로 나누어 $\bar{F}$ 를 근사하여 구하시오. 그리고 ③ 실제 공기 중에서 $M = 1$ kg인 물체가 공기 입자로부터 받는 평균 힘을 $T = 0.001$ s 동안 측정한다면, 물체의 속도가 $V_0 = 1$ m/s인 경우에 비해 $V_0 = 2$ m/s일 때 물체가 받는 평균 힘의 크기가 몇 배로 증가할지 근사적으로 구하시오. 이때, $C/(D+E)$ 에서 D 가 E 보다 훨씬 크다면 C/D 로 근사할 수 있으며, $\rho \approx 0.01$ kg/m라고 가정한다.

II. 예시답안

문제 1 전기 기타의 소리 전달 — 픽업·트랜지스터·스피커 전자기 유도 · 강자성체 · 정류 작용 · 클리핑 · 리액턴스

(1-1) 물질 1 — 자기 구역을 이루고 있는 강자성체로 만들어야 한다.

① **픽업이 신호를 만드는 원리** — 픽업 앰프의 영구자석은 바로 위에 놓인 기타 줄을 자화시킨다. 자화된 줄이 진동하면 줄과 코일 사이의 거리가 주기적으로 변하고, 그에 따라 코일을 지나는 자기 선속 Φ 가 변한다. 패러데이 법칙

$$\text{emf} = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

에 의해 이 선속 변화가 그대로 교류 기전력이 된다. 따라서 **신호의 크기는 줄이 얼마나 강하게 자화되는가에** 비례한다.

② **두 물질의 판별** — (나)는 외부 자기장이 없는 상태에서 관찰한 것이다.

- **물질 1** — 외부 자기장이 없는데도 원자 자기 쌍극자(N-S)들이 초록 점선으로 나뉜 영역마다 한 방향으로 가지런히 정렬해 있다. 이 영역이 **자기 구역(자구)**이며, 외부 자기장 없이도 구역 안에서 자발적으로 정렬이 유지되는 것은 **강자성체**의 특징이다. 전체적으로는 구역들의 방향이 서로 달라 알짜 자화가 0으로 보인다.
- **물질 2** — 쌍극자의 방향이 처음부터 제멋대로 흩어져 있고 정렬된 영역이 없다. 이는 이웃 쌍극자끼리 정렬시키는 상호작용이 없어 열운동에 의해 방향이 무작위가 된 **상자성체**(또는 자화되지 않는 물질)의 모습이다.

③ **어느 쪽이 큰 신호를 주는가** — 픽업의 영구자석이 만드는 자기장 속에 놓이면 두 물질의 반응이 크게 갈린다.

- 강자성체(물질 1)에서는 자기장 방향과 나란한 자기 구역이 자구벽을 밀어내며 커지고 나머지 구역의 자화 방향도 회전하여, 물질 전체가 한 방향으로 강하게 자화된다. 비투자율이 $10^3 \sim 10^5$ 에 이르러 줄이 강한 자석처럼 행동한다.
- 상자성체(물질 2)에서는 열운동이 정렬을 계속 흐트러뜨려 자화율이 10^{-5} 정도에 그친다. 줄이 진동해도 코일을 지나는 선속 변화가 거의 없다.

같은 진폭·같은 진동수로 줄을 튕겨도 유도 기전력은 자화의 크기에 비례하므로, 물질 1로 만든 줄이 물질 2로 만든 줄보다 수천 배 이상 큰 신호를 준다.

기타 줄은 **물질 1(강자성체)** 로 만들어야 한다. 자기 구역을 가진 강자성체는 픽업 자석에 의해 강하게 자화되어 진동할 때 $d\Phi/dt$ 가 크고, 패러데이 법칙에 따라 큰 유도 기전력을 만든다.

실제 전기 기타 줄에 니켈 합금이나 강철처럼 강자성을 띠는 금속만 쓰이고, 같은 금속이라도 비자성 스테인리스강으로 만든 줄은 픽업이 잘 잡아내지 못하는 것이 이 때문이다.

(1-2) **형태: 사각파(구형파), 진폭: A/τ , 진동수: $f = 1/(4\tau)$**

① **주어진 선속의 개형** — 그래프의 세로축은 코일 N 번을 모두 지나는 선속의 합 $N\Phi(t)$ 이다. 값이 $t = 0$ 에서 $-A$, $t = 2\tau$ 에서 $+A$, $t = 4\tau$ 에서 다시 $-A$ 가 되므로 **주기 4τ 의 삼각파**이며, 각 구간에서 기울기가 일정하다.

$$\frac{d(N\Phi)}{dt} = \frac{+A - (-A)}{2\tau} = +\frac{A}{\tau} \quad (0 < t < 2\tau), \quad \frac{d(N\Phi)}{dt} = -\frac{A}{\tau} \quad (2\tau < t < 4\tau)$$

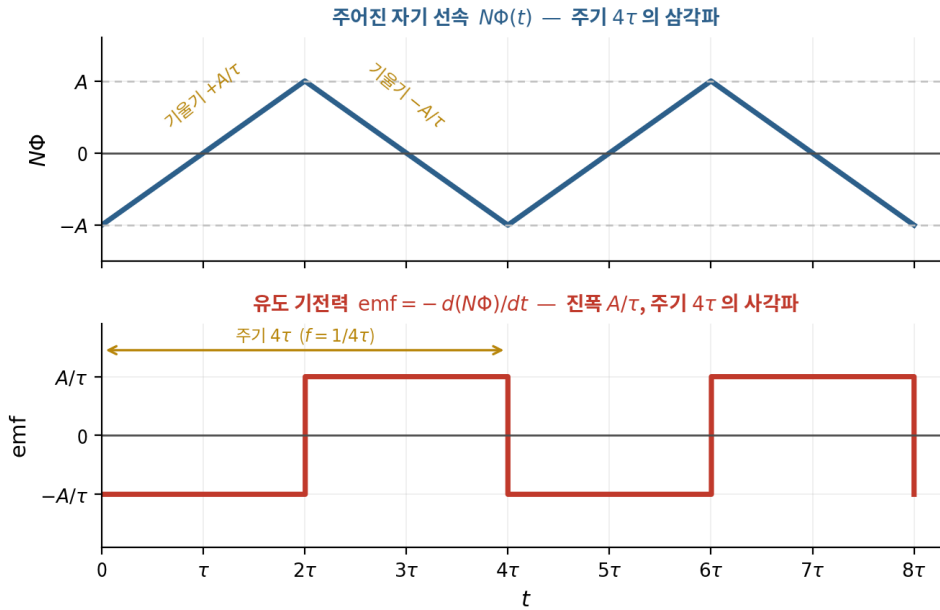
② **유도 기전력** — 패러데이 법칙에서 기전력은 이 기울기에 음의 부호를 붙인 값이므로

$$\text{emf}(t) = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = \begin{cases} -A/\tau & (0 < t < 2\tau) \\ +A/\tau & (2\tau < t < 4\tau) \end{cases}$$

이다. 즉 크기가 A/τ 로 일정하고 부호만 반주기(2τ)마다 뒤집히는 **사각파(구형파)**가 된다. 주기는 원래 선속과 같은 4τ 이다.

$$\text{형태: 사각파, 진폭} = \frac{A}{\tau}, \text{ 주기} = 4\tau, \text{ 진동수} f = \frac{1}{4\tau}$$

세로축이 이미 $N\Phi$ 이므로 진폭에 N 을 다시 곱하지 않는다. 만약 세로축이 한 감이당 선속 Φ 였다면 진폭은 NA/τ 가 된다.



예시 작도 — 삼각파를 미분하면 기울기가 두 값만 가지므로 기전력은 사각파가 된다

③ 기타 줄에 적용 — 줄의 진동이 곧 선속의 진동이므로 두 양은 다음과 같이 대응된다.

- **줄이 내는 소리의 높이(진동수)** — 줄이 더 빠르게 진동하면 선속이 오르내리는 주기 4τ 가 짧아진다. 유도 신호의 진동수는 $f = 1/(4\tau)$ 로 선속 변화의 진동수와 **똑같으므로**, 줄의 진동수가 커지면 신호의 진동수도 그만큼 커진다. 즉 음의 높이는 신호의 진동수로 그대로 옮겨진다.
- **줄을 튕기는 세기(진폭)** — 세게 튕길수록 줄의 진동 진폭이 커져 자석·코일과의 거리 변화가 커지고, 따라서 선속의 진폭 A 가 커진다. 신호의 진폭은 A/τ 이므로 A 에 비례해 커진다. 즉 음의 세기는 신호의 진폭으로 옮겨진다.

한 가지 더 눈여겨볼 점은 신호의 진폭 A/τ 가 A 뿐 아니라 τ 에도 의존한다는 것이다. $f = 1/(4\tau)$ 를 대입하면

$$\text{진폭} = \frac{A}{\tau} = 4Af$$

이므로, 같은 세기로 튕겨도 높은 음일수록 신호가 크게 나온다. 이는 정현파 $\Phi = \Phi_0 \sin(2\pi ft)$ 에 대해 기전력의 진폭이 $2\pi N f \Phi_0$ 가 되는 것과 같은 성질이다. (기타 줄이 픽업에서 얼마나 떨어져 있는가 하는 물리적 높이는 진동수와는 무관하고 선속의 진폭 A 만 바꾸므로, 신호의 진폭에만 영향을 준다.)

(1-3) n-p-n형이다.

① 회로에서 전류가 어느 쪽으로 흐르는지 읽는다 — 전지의 + 단자는 위쪽 도선을 따라 A에, - 단자는 아래쪽 도선을 따라 C에 연결되어 있다. 두 저항은 직렬 분압기를 이루고, 그 중간점이 서로 반대 방향으로 놓인 두 LED를 거쳐 B에 이어진다. 다이오드는 p형에서 n형 쪽으로만 전류를 통과시키므로(정류 작용),

- 1번 LED(왼쪽 n, 오른쪽 p) — B 쪽이 p이므로 **B → 중간점** 방향의 전류만 통과시킨다.
- 2번 LED(왼쪽 p, 오른쪽 n) — 중간점 쪽이 p이므로 **중간점 → B** 방향의 전류만 통과시킨다.

관찰 결과 2번 LED에만 불이 들어왔으므로, 실제 전류는 **분압기 중간점에서 B로 들어가** 트랜지스터를 지나 전지의 - 쪽으로 빠져나간다.

② 그 전류가 흐르려면 내부 접합이 어떤 상태여야 하는가 — 세 영역의 전위는 $A(\text{전지 } +) > B(\text{분압기 중간점}) > C(\text{전지 } -)$ 순이다. 전류가 B로 들어와 C로 나가려면 **B-C 접합이 순방향**, 즉 B가 p형이고 C가 n형이어야 한다. 동시에 A쪽으로 흐르는 전류가 흐르지 않아야 하는데, A가 n형이면 A-B 접합은 n쪽 전위가 더 높아 **역방향**이 되어 공핍층이 넓어지고 전류가 차단된다. 두 조건을 모두 만족시키는 것은 **A(n)-B(p)-C(n)**, 즉 **n-p-n형**이다.

③ 전하 나르개의 움직임 — B-C 접합이 순방향이면 n형인 C의 다수 나르개인 **전자**가 접합의 퍼텐셜 장벽을 넘어 p형 B로 확산해 들어가고, 동시에 B의 다수 나르개인 **양공**이 C로 확산해 나온다. 두 흐름이 모두 관례 전류로는 **B → C** 방향이므로, 회로 전체에서는

전지(+) → 저항 → 분압기 중간점 → **2번 LED** → B(p형) → C(n형) → 전지(-)

의 한 방향 전류만 성립하고, 2번 LED만 불이 들어온다. 관찰과 일치한다.

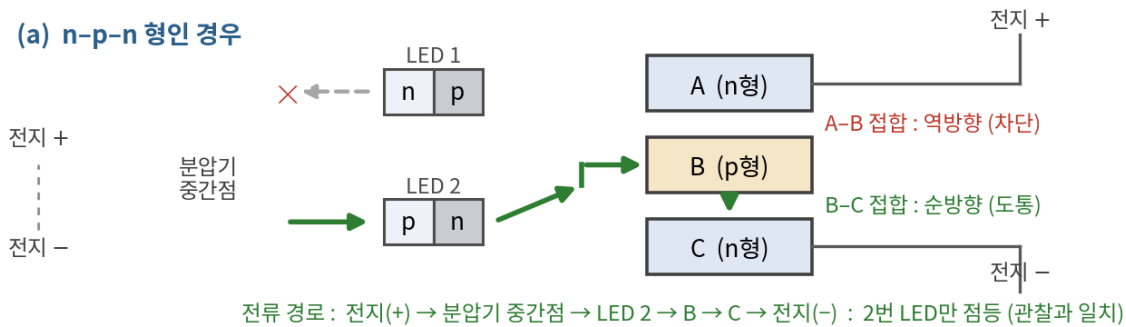
④ **p-n-p형이라면 어떻게 되는가(반대 경우의 배제)** — 이때는 A와 C가 p형, B가 n형이다. A는 전지 + 에 직접 연결되어 B보다 전위가 높으므로 **A-B 접합이 순방향**이 되고, p형 A의 양공이 n형 B로 주입되어 전류가 A → B로 흐른다. B에서 나온 전류는 **1번 LED**만 통과할 수 있으므로 전류 경로는

전지(+) → A → B → **1번 LED** → 중간점 → 저항 → 전지(-)

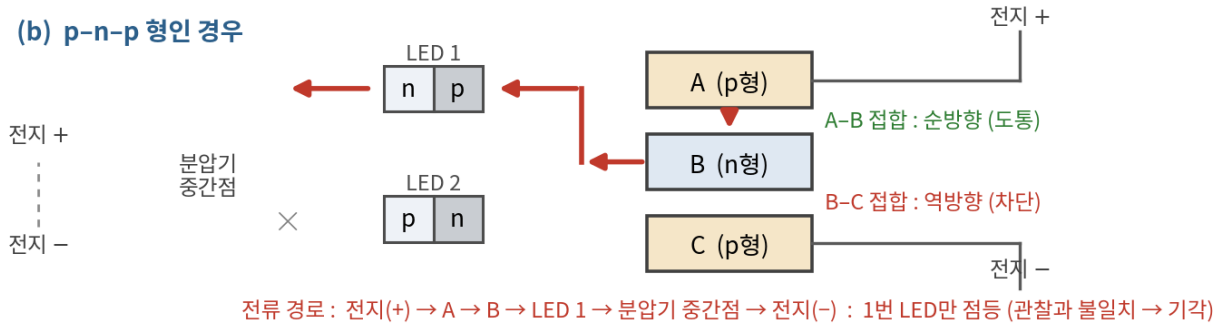
가 되어 1번 LED에 불이 들어와야 한다. 이는 관찰과 정반대이므로 기각된다. 따라서 이 트랜지스터는 n-p-n형이다.

⑤ **“이미터와 컬렉터를 바꿔도 잘 작동한다”는 단서의 역할** — 이 회로만으로는 A와 C 가운데 어느 쪽이 이미터이고 어느 쪽이 컬렉터인지 알 수 없다. 단서는 두 바깥 영역이 대칭적으로 취급될 수 있음을 보장해 주어, 극성 판정이 어느 쪽을 이미터로 잡든 달라지지 않게 해 준다.

(a) n-p-n 형인 경우



(b) p-n-p 형인 경우



예시 도해 — 두 가정을 각각 회로에 넣어 보면 켜지는 LED가 서로 반대가 된다

(1-4) 큰 입력에서 트랜지스터가 포화·차단(스위칭 영역)에 들어가 파형이 잘리는 클리핑 현상이다. 이를 막으려면 R_2 를 작게 해야 한다.

① 증폭기가 선형으로 동작하는 조건 — 회로 (가)에서 R_1 과 R_2 는 전원 V 를 나누어 베이스에 직류 전압

$$V_B = V \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

를 걸어 주는 분압 바이어스이고, 이것이 트랜지스터의 동작점을 정한다. 픽업 앰프의 교류 신호는 C_1 을 거쳐 이 동작점 위에 얹히고, 트랜지스터가 활성 영역에 머무는 동안에는 컬렉터 전류가 베이스 전류에 비례하여 출력이 입력을 닮은꼴로 확대한다. 조용한 곡에서는 신호 진폭이 작아 동작점 둘레의 좁은 구간만 쓰므로 (나)처럼 파형이 그대로 유지된다.

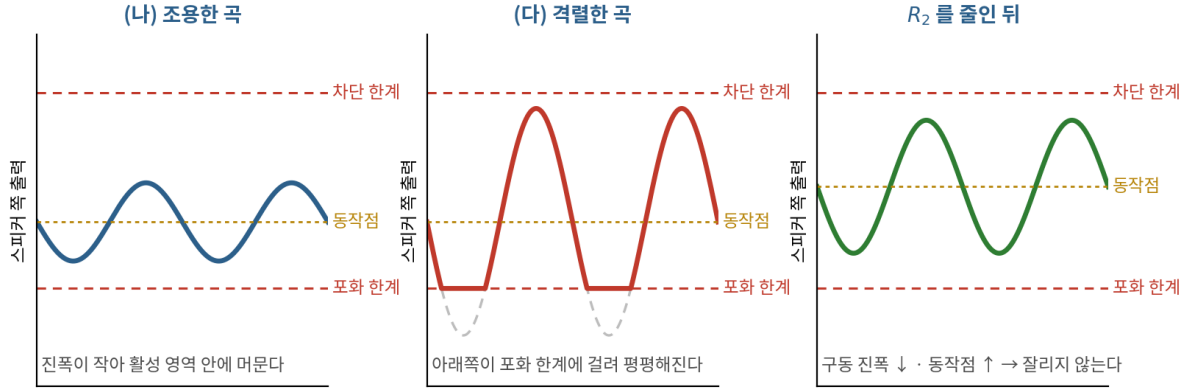
② 큰 입력에서 스위칭 작용이 일어난다 — 입력 진폭이 커지면 출력이 두 한계에 부딪힌다.

• **포화** — 베이스 전류가 지나치게 커지면 컬렉터-이미터 사이 전압이 더 내려갈 수 없는 최솟값($V_{CE} \approx 0$)에 이른다. 트랜지스터가 완전히 켜진 스위치가 되어, 입력이 더 커져도 출력은 그대로다.

- **차단** — 반대로 베이스 전류가 0이 되면 컬렉터 전류도 0이 되어 $V_{CE} \approx V$ 에서 멈춘다. 완전히 꺼진 스위치가 된 것이다.

이렇게 트랜지스터가 증폭기가 아니라 **스위치처럼** 켜짐/꺼짐 두 상태에 갇히면, 그 구간에서 출력은 입력을 따라가지 못하고 일정한 값에 머문다. 그 결과 파형의 꼭대기나 바닥이 잘려 평평해지는 **클리핑**이 일어난다. 잘린 파형은 원래 없던 고조파를 포함하게 되므로 진폭만 커지는 것이 아니라 **음색 자체가 달라진다**.

(다)의 스피커 파형을 보면 **아래쪽만 평평하게 잘려 있다**. 즉 출력이 먼저 부딪힌 것은 포화 한계이고, 이는 동작점이 이미 포화 쪽에 가깝게 잡혀 있음을 뜻한다.



예시 도해 — 동작점과 신호 진폭의 관계. (다)처럼 아래쪽만 잘리는 것은 동작점이 포화 쪽에 치우쳐 있다는 신호다

③ R_2 를 어느 쪽으로 바꿔야 하는가 — R_2 를 작게 하면 다음 두 가지가 동시에 일어나고, 둘 다 클리핑을 없애는 방향으로 작용한다.

- **동작점이 포화에서 멀어진다** — $V_B = V R_2 / (R_1 + R_2)$ 가 낮아져 정지 상태의 베이스 전류와 컬렉터 전류가 줄고, 그만큼 컬렉터 전압이 높아진다. 즉 동작점이 포화 한계에서 멀어져 아래쪽으로 흔들릴 여유가 커진다.
- **베이스에 실리는 구동 진폭이 줄어든다** — 픽업 앰프는 코일이므로 내부 임피던스를 가진 실제 전원이다. R_2 는 베이스와 접지 사이에 놓여 이 신호를 접지로 분류(shunt)하므로, R_2 가 작을수록 베이스에 실리는 교류 진폭이 작아진다.

R_2 를 **작게** 조절한다. 동작점이 포화에서 멀어지고 베이스 구동 진폭도 줄어들어, 격렬한 곡에서도 출력이 포화·차단 한계에 닿지 않고 (나)의 형태를 유지한다.

다만 R_2 를 지나치게 줄이면 동작점이 이번에는 차단 쪽으로 치우쳐 파형의 **위쪽**이 잘리게 된다. 두 한계로부터 거의 같은 거리에 동작점을 두는 값이 가장 큰 신호를 왜곡 없이 처리한다. (R_1/R_2 는 전압 이득이 아니라 바이어스 분압비이므로, 이득을 키우려고 R_2 를 크게 하는 것은 방향이 반대임에 유의한다.)

(1-5) 거리 d 를 줄여야 한다.

① **축전기가 저음을 깎아내는 이유** — C_2 는 트랜지스터의 출력과 스피커 사이에 **직렬로** 들어가 있다. 교류에 대한 축전기의 저항 구실을 하는 양은 용량 리액턴스

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C}$$

이며, 이는 주파수 f 가 낮을수록 커지고 전기용량 C 가 클수록 작아진다. 스피커의 저항을 R 이라 하면 스피커에 실제로 걸리는 전압은

$$V_{\text{스피커}} = V_{\text{출력}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

이므로, $X_C \gg R$ 인 낮은 주파수에서는 신호가 크게 깎인다. 즉 C_2 와 스피커는 함께 차단 주파수

$$f_c = \frac{1}{2\pi R C_2}$$

인 **고역 통과 필터**를 이루며, f_c 보다 낮은 음일수록 작게 들린다. 전기 기타보다 음역이 낮은 베이스 기타에서 저음이 유난히 작게 들리는 것이 바로 이 때문이다.

② 무엇을 바꾸어야 저음이 살아나는가 — 저음을 잘 통과시키려면 차단 주파수 f_c 를 더 낮추어야 하고, 그러려면 C_2 를 키워야 한다. 평행판 축전기의 전기용량은

$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

로 금속판 간격 d 에 반비례하므로, C 를 키우려면 d 를 줄여야 한다.

$$d \downarrow \rightarrow C_2 = \epsilon S/d \uparrow \rightarrow X_C = 1/(2\pi f C_2) \downarrow \rightarrow f_c = 1/(2\pi R C_2) \downarrow$$

거리 d 를 줄여야 한다. 예를 들어 d 를 절반으로 하면 C_2 가 2배가 되어 같은 저음에서 리액턴스와 차단 주파수가 모두 절반이 되고, 그만큼 저음이 크게 들린다.

반대로 d 를 늘리면 C_2 가 작아져 X_C 와 f_c 가 함께 커지므로 저음이 더 약해진다. 한편 d 를 줄이더라도 C_2 는 여전히 직류를 완전히 막으므로($f=0$ 에서 $X_C \rightarrow \infty$), 제시문이 말한 “스피커에 직류가 흐르는 것을 방지”하는 본래의 구실은 그대로 유지된다.

문제 2 1차원 충돌 모형으로 본 공기 저항

탄성 충돌 · 등비수열 · 운동량 변화율 · 두 극한

$$(2-1) V_1 = \frac{M-m}{M+m} V_0, \quad v_1 = \frac{2M}{M+m} V_0$$

질량 M 인 물체가 속도 V_0 로 정지해 있는 질량 m 인 입자와 1차원 탄성 충돌을 한다. 외력이 없으므로 운동량이 보존되고, 제시문에서 운동 에너지도 보존된다고 하였으므로

$$MV_0 = MV_1 + mv_1, \quad \frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2$$

이다. 두 식에서 $M(V_0^2 - V_1^2) = mv_1^2$ 와 $M(V_0 - V_1) = mv_1$ 을 나누면 $V_0 + V_1 = v_1$, 즉 탄성 충돌에서는 접근 속도와 분리 속도의 크기가 같다는 관계

$$v_1 - V_1 = V_0$$

를 얻는다. 이것을 운동량 보존식에 대입해 풀면

$$V_1 = \frac{M-m}{M+m} V_0, \quad v_1 = \frac{2M}{M+m} V_0$$

$M > m$ 이므로 $0 < V_1 < V_0$ 이다. 물체는 계속 오른쪽으로 진행하되 속도가 조금 줄고, 입자는 $2M/(M+m) > 1$ 이므로 V_0 보다도 빠른 속도로 튀어 나간다. 또 $v_1 > V_1$ 이므로 입자는 물체보다 앞서 달아나며, 물체는 다음 입자와 다시 충돌하게 된다.

$$(2-2) V_n = r^n V_0 = \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n V_0, \quad v_k = \frac{2M}{M+m} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^{k-1} V_0$$

① 매 충돌이 첫 충돌과 똑같은 상황이다 — 첫 충돌 뒤 튀어 나간 a_1 은 물체보다 빠르므로 앞의 입자와 먼저 부딪히고, 같은 질량끼리의 탄성 충돌에서는 속도가 그대로 넘어가므로 a_1 은 그 자리에 멈춘다. 이 과정이 되풀이되어, 물체가 도착할 무렵 물체 앞쪽에는 여전히 간격 l_0 마다 정지해 있는 입자가 놓여 있다. 따라서 k 번째 충돌은 “속도 V_{k-1} 인 물체가 정지한 질량 m 과 부딪히는” (2-1)과 완전히 같은 문제이며, 충돌 때마다 물체의 속도에는 같은 비

$$r \equiv \frac{M-m}{M+m} \quad (0 < r < 1)$$

가 곱해진다.

② 물체의 속도 — 첫째항 V_0 , 공비 r 인 등비수열이므로

$$V_n = r^n V_0 = \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^n V_0$$

③ 입자의 속도 — a_k 는 물체의 k 번째 충돌 상대이고, 그 직전 물체의 속도는 $V_{k-1} = r^{k-1} V_0$ 이다. (2-1)의 결과 $v = 2MV/(M+m)$ 에 이를 대입하면

$$v_k = \frac{2M}{M+m} V_{k-1} = \frac{2M}{M+m} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^{k-1} V_0.$$

$0 < r < 1$ 이므로 V_n 과 v_k 는 모두 등비적으로 줄어들지만 어느 유한한 n 에서도 0이 되지는 않는다. 즉 물체는 무한히 많은 충돌을 겪으며 점점 느려질 뿐, 유한 횟수의 충돌로 멈추지 않는다.

$$(2-3) \bar{F} = \frac{2M\rho V_0^2}{M + 2\rho V_0 T}$$

① 한 번의 충돌에서 물체가 잃는 운동량 — (2-2)에서 k 번째 충돌로 물체의 속도는 V_{k-1} 에서 rV_{k-1} 로 바뀌므로

$$\Delta p = MV_{k-1}(1-r) = MV_{k-1} \cdot \frac{2m}{M+m} = 2MV_{k-1} \cdot \frac{m}{M+m}.$$

여기서 문제에서 준 근사 $B/(A+B) \approx B/A$ ($A \gg B$) 를 $A=M, B=m$ 에 적용하면 $m/(M+m) \approx m/M$ 이므로

$$\Delta p \approx 2mV_{k-1}, \quad \text{즉} \quad V_k \approx \left(1 - \frac{2m}{M}\right)V_{k-1} \equiv qV_{k-1}, \quad q \equiv 1 - \frac{2m}{M}.$$

② 충돌 사이에 걸리는 시간 — 입자들이 간격 l_0 로 정지해 있고 매번 새 입자와 부딪히므로, k 번째 충돌 직후부터 $(k+1)$ 번째 충돌 직전까지 물체는 거리 l_0 를 일정한 속도 V_k 로 달린다. 그 시간은 l_0/V_k 이다. 첫 충돌 직전부터 $(n+1)$ 번째 충돌 직전까지를 모으면

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{l_0}{V_k} = \frac{l_0}{V_0} \sum_{k=1}^n q^{-k} = \frac{l_0}{V_0} \cdot \frac{q^{-n} - 1}{1 - q}.$$

③ q^n 을 T 로 바꾼다 — $1 - q = 2m/M$ 이고 $m/l_0 = \rho$ 이므로

$$T = \frac{l_0 M}{2m V_0} (q^{-n} - 1) = \frac{M}{2\rho V_0} (q^{-n} - 1) \Rightarrow q^{-n} = 1 + \frac{2\rho V_0 T}{M},$$

$$q^n = \frac{M}{M + 2\rho V_0 T}.$$

④ 평균 힘 = 운동량 변화율 — 시간 T 동안 물체의 운동량은 MV_0 에서 $MV_n = Mq^n V_0$ 로 줄어들므로

$$\bar{F} = \frac{MV_0 - MV_n}{T} = \frac{MV_0(1 - q^n)}{T} = \frac{MV_0}{T} \cdot \frac{2\rho V_0 T}{M + 2\rho V_0 T}.$$

$$\bar{F} = \frac{2M\rho V_0^2}{M + 2\rho V_0 T}$$

분모의 $2\rho V_0 T$ 는 시간 T 동안 물체가 쓸고 지나간 공기 질량의 두 배이다. 문항 2-4의 형태 $C/(D+E)$ 에서 $C = 2M\rho V_0^2$, $D = M, E = 2\rho V_0 T$ 에 해당한다.

검토 — 식이 옳은지 두 끝에서 확인 $T \rightarrow 0$ 이면 $\bar{F} \rightarrow 2\rho V_0^2$ 로 유한한 값에 수렴하고(막 부딪히기 시작한 순간의 저항력), T 가 아주 커지면 $\bar{F} \rightarrow MV_0/T$ 가 되어 물체가 가진 운동량 전부 MV_0 를 시간 T 에 걸쳐 잃은 것과 같아진다. 물체가 잃을 수 있는 운동량은 아무리 많아도 MV_0 이므로 $\bar{F} \leq MV_0/T$ 여야 하는데, 위 식은 실제로 언제나 이 한계 안에 들어온다.

(2-4) ① $\bar{F} \approx 2\rho V_0^2$, ② $\bar{F} \approx MV_0/T$, ③ 약 4배

시간 T 동안 쓸고 지나가는 공기의 총 질량을 $m_a = \rho V_0 T$ 라 하면 (2-3)의 결과는 $\bar{F} = 2M\rho V_0^2/(M + 2m_a)$ 이다.

① $m_a \ll M$ (쓸고 지나간 공기가 물체보다 훨씬 가벼운 경우) — 분모에서 $2m_a$ 를 무시할 수 있으므로

$$\bar{F} \approx \frac{2M\rho V_0^2}{M} = 2\rho V_0^2.$$

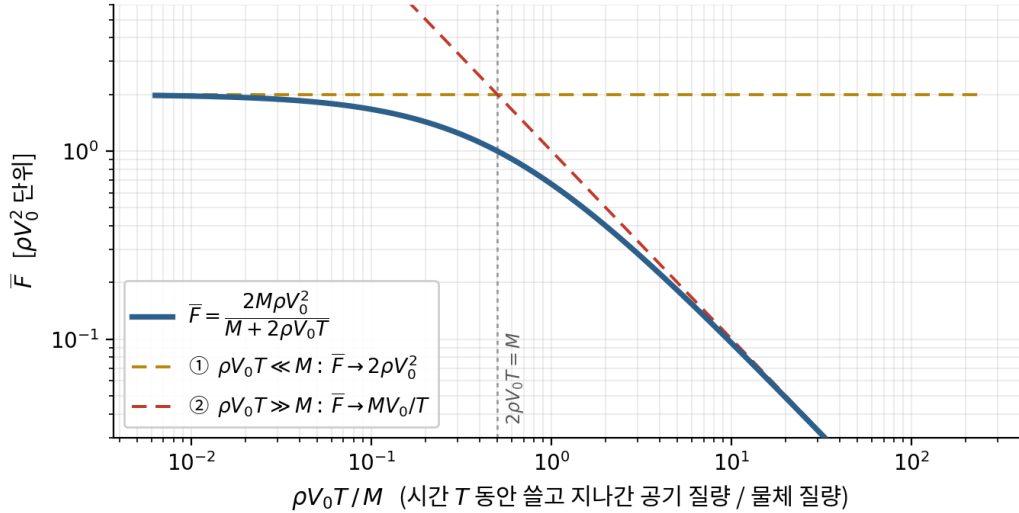
이 값은 다음과 같이 직접 세어도 얻어진다. 물체가 거의 감속하지 않으므로 단위 시간에 만나는 공기 질량은 ρV_0 이고, 각 입자는 (2-1)에서 $M \gg m$ 일 때 속도 $\approx 2V_0$ 로 튕겨 나가 입자당 $\approx 2mV_0$ 의 운동량을 받아 간다. 따라서 $\bar{F} = (\rho V_0)(2V_0) = 2\rho V_0^2$ 이다. 힘이 속도의 제곱에 비례하는 이 결과가 빠르게 움직이는 물체의 공기 저항(관성 저항)이 V^2 에 비례하는 까닭이다.

② $m_a \gg M$ (쓸고 지나간 공기가 물체보다 훨씬 무거운 경우) — 이번에는 분모에서 M 을 무시할 수 있으므로

$$\bar{F} \approx \frac{2M\rho V_0^2}{2\rho V_0 T} = \frac{MV_0}{T}.$$

자기 질량보다 훨씬 무거운 공기를 뚫고 가야 하므로 물체는 시간 T 안에 사실상 멈춰 버린다. 그렇다면 T 동안 잃은 운동량은 처음에 가지고 있던 MV_0 전부이고, 평균 힘은 MV_0/T 가 되는 것이 당연하다. 이 극한에서는 ρ 가 식에서 사라지는데, 공기가 얼마나 뻘뻘한지와 무관하게 “어차피 다 멈춘다”가 결과를 지배하기 때문이다.

평균 힘의 두 극한 — 관성 저항($\propto V_0^2$)에서 완전 정지(MV_0/T)로



예시 작도 — $\rho V_0 T$ 와 M 의 크기 관계에 따라 평균 힘이 두 극한 사이를 잇는다

③ 실제 공기에서의 수치 비교 — $M = 1 \text{ kg}$, $T = 0.001 \text{ s}$, $\rho \approx 0.01 \text{ kg/m}^3$ 이므로 V_0 가 $1 \sim 2 \text{ m/s}$ 일 때

$$2\rho V_0 T = 2 \times 0.01 \times V_0 \times 0.001 = 2 \times 10^{-5} V_0 \text{ kg} \approx 2 \times 10^{-5} \sim 4 \times 10^{-5} \text{ kg}$$

이고, 이는 $M = 1 \text{ kg}$ 에 비해 10^{-5} 배 수준으로 무시할 만하다. 즉 $D = M \gg E = 2\rho V_0 T$ 이므로 $C/(D + E) \approx C/D$ 근사가 성립하여 ①의 경우에 해당한다.

$$\bar{F} \approx 2\rho V_0^2 \rightarrow \bar{F} \propto V_0^2$$

이므로

$$\frac{\bar{F}(V_0 = 2)}{\bar{F}(V_0 = 1)} \approx \frac{2^2}{1^2} = 4 \rightarrow \text{평균 힘은 약 4 배로 커진다.}$$

($V_0 = 1 \text{ m/s}$ 에서 $\bar{F} \approx 2 \times 0.01 \times 1 = 0.02 \text{ N}$, $V_0 = 2 \text{ m/s}$ 에서 $\bar{F} \approx 2 \times 0.01 \times 4 = 0.08 \text{ N}$ 이다.)

의미 — 속도를 두 배로 하면 단위 시간에 만나는 공기의 양이 두 배가 되고, 그 하나하나에 넘겨주는 운동량도 두 배가 되므로 힘은 $2 \times 2 = 4$ 배가 된다. 저항력이 속도의 제곱에 비례한다는, 익숙한 공기 저항의 성질이 이 단순한 1차원 충돌 모형에서 그대로 얻어진다.