

서울대학교 면접·구술고사

자연계열 · 물리학

문제 · 예시답안

시험 구분
전형
문항 수
핵심 개념

면접 및 구술고사 (자연계열, 물리학)
수시모집 일반전형
2문항 (소문항 9개)
렌즈 방정식과 결상, 허름원과 초점 허용 범위,
현미경의 배율, 보어의 원자모형과 각운동량 양자화,
중력 궤도운동과 대응 원리, 케플러 법칙, 도플러 효과

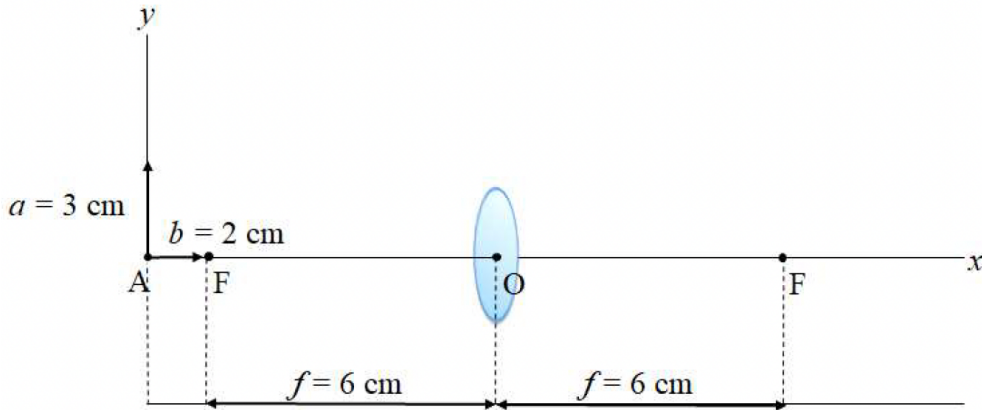
I. 문제

문제 1 볼록 렌즈에 의한 결상

소문항 4개

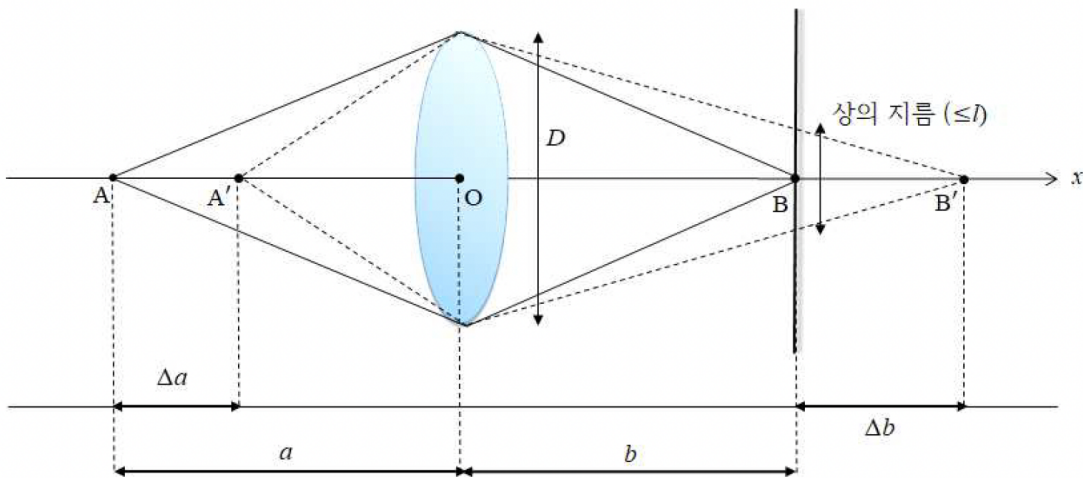
빛의 굴절 효과에 의해 물체를 확대 또는 축소하여 볼 수 있는 광학 기기들 중 대표적인 예로 볼록 렌즈가 있다. 또한, 볼록 렌즈를 이용한 물체의 상은 광선 추적에 의해 알아볼 수 있다. 아래의 모든 문제에서 렌즈 방정식을 적용할 수 있으며, 렌즈 자체의 두께는 무시한다. 문제의 물음에 답하시오.

- (1-1) [그림 1]과 같이 두께를 무시할 수 있고 초점 거리 f 가 6 cm인 볼록 렌즈가 점 O에 놓여 있다. 또한, 점 O로부터 8 cm 떨어진 점 A에는 y 축 방향으로 3 cm, x 축 방향으로 2 cm 길이의 두 물체 a, b 의 시작점이 놓여 있다. 볼록 렌즈에 의해 생기는 물체 a, b 의 상을 광선 추적 및 렌즈 방정식을 이용하여 시작점의 위치, 상의 크기, 상의 방향을 구하시오. 또한, 각 상의 종류는 실상인지 허상인지 판명하시오.



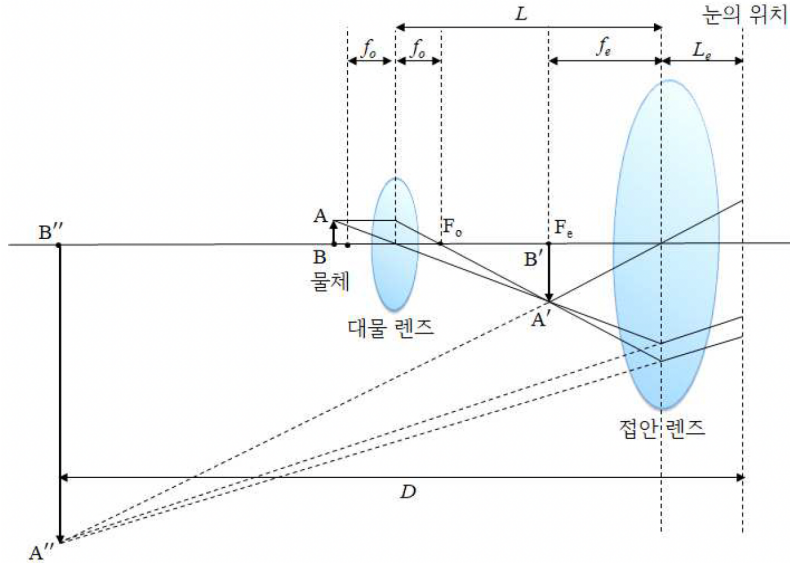
[그림 1] 물체 a, b 와 볼록 렌즈

- (1-2) [그림 2]는 물체의 위치에 따라 볼록 렌즈에 의한 상을 관찰하는 실험을 나타낸다. 물체는 크기가 매우 작은 발광 물체이다. 초점 거리가 f 이고 지름이 D 인 볼록 렌즈에 의해 스크린 위에 완벽하게 또렷한 상이 맺히도록 하는 물체의 위치는 점 A이다. 이때 볼록 렌즈와 스크린 사이의 거리는 b 이다. 물체를 점 A에서 Δa 만큼 떨어진 점 A'으로 옮기면 스크린 위에는 원형 상이 생긴다. 이 상의 지름이 l 이하일 때 우리의 눈은 이를 또렷한 상으로 인식한다. 점 O를 원점이라 하고, x 축 위에서 물체를 점 A로부터 $+x$ 방향으로 이동시킬 때 우리의 눈이 상을 여전히 또렷한 상으로 인식하는, 점 A로부터 가장 멀리 떨어진 물체의 좌표를 구하고자 한다. 이를 b, f, l, D 만을 이용하여 표현하시오 (단, $a > f, D > l$ 이다).



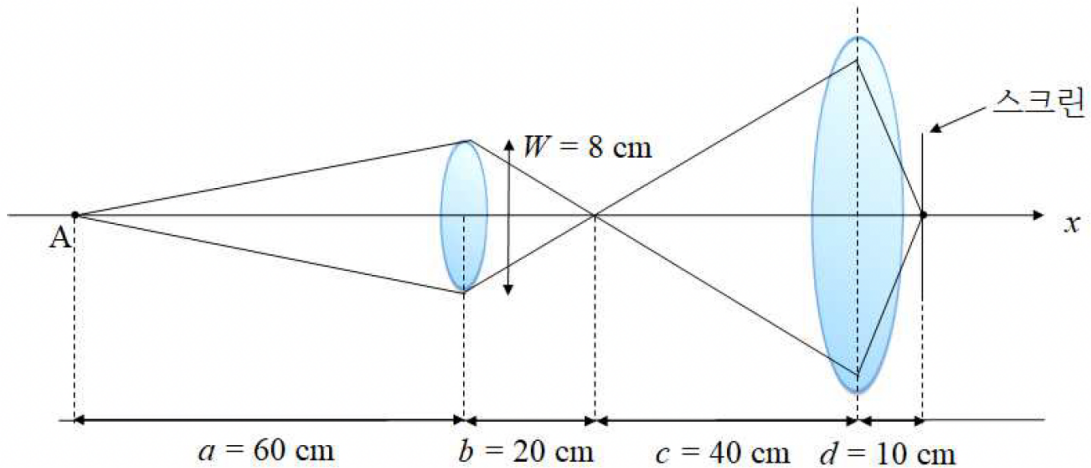
[그림 2] 물체를 점 A에서 $+x$ 방향으로 이동시킬 때 볼록 렌즈에 의한 상

- (1-3) [그림 3]처럼 두 개의 볼록 렌즈를 이용해 물체를 확대하여 보여주는 현미경 광학 장치를 만들었다. 물체 AB가 대물 렌즈의 초점 거리 f_o 바로 밖의 한 점에 있을 때 접안 렌즈의 초점 거리 f_e 바로 안쪽(오른쪽)에 첫 번째 상이 맺히며, 접안 렌즈는 이를 거리 D 만큼 떨어진 곳에 확대된 상을 만든다. 접안 렌즈의 중심과 눈 사이의 거리가 L_e 일 때, 이 광학 장치의 배율을 f_o, f_e, L, L_e, D 를 사용하여 표현하시오. (단, 볼록 렌즈가 여러 개 있을 때 최종 상의 배율은 각 볼록 렌즈의 배율의 곱으로 표현된다)



[그림 3] 현미경 광학 장치

- (1-4) 두 개의 볼록 렌즈를 이용하여 문제 1-2처럼 크기가 매우 작은 물체가 만드는 상을 관찰하는 실험을 수행하고자 한다 ([그림 4] 참고). 인간의 눈은 스크린 위에 맺히는 상의 지름이 l ($= 80\mu\text{m} = 8 \times 10^{-3} \text{ cm}$) 이하일 때 또렷한 상과 흐릿한 상을 구별하지 못한다. 즉, 상의 지름이 l 이하면 우리의 눈은 모두 또렷한 상으로 인식한다. 물체가 점 A에 있을 때 스크린 위에 또렷한 상이 맺힌다고 하자. 물체를 $-x$ 방향으로 무한히 멀리 떨어진 점으로부터 점 A를 향해 이동시킬 때, 상의 지름이 l 이 되는 순간 물체와 점 A 사이의 거리는 몇 cm인지 유효 숫자 첫째 자리까지 구하시오. (단, 첫 번째 볼록 렌즈를 통과한 모든 광선은 두 번째 볼록 렌즈를 통과한다. 또한, $|\alpha| \ll 1$ 일 경우 $1/(1 - \alpha) \approx 1 + \alpha$ 의 근사가 가능하다.)



[그림 4] 두 개의 볼록 렌즈에 의한 상의 관찰

문제 2 원자와 천체의 궤도운동 대응

소문항 5개

수소 원자, 태양 주위를 공전하는 지구, 그리고 먼 우주의 블랙홀 주위를 공전하는 별의 궤도운동을 비교해보자. 수소 원자는 전자와 양성자가 전기력으로 결합하여 있고, 나머지는 중력으로 결합하여 있다. 아래의 문제에서, 수치 계산은 [표 1]을 참고하여 유효 숫자 한 자리까지 구하여라.

[표 1] 물리 상수표

빛의 속력	$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	플랑크 상수	$h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$
중력 상수	$G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$	쿨롱 상수	$k = 9.0 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$
전자의 전하량	$-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$	양성자의 전하량	$+e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
전자의 질량	$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$	양성자의 질량	$m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
태양의 질량	$M_\odot = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$	지구의 질량	$M_\oplus = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$
양성자의 반지름	$r_p = 1.0 \times 10^{-15} \text{ m}$	보어 반지름	$a_0 = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$

- (2-1) 수소 원자를 이루는 전자와 양성자의 전하량이 실제 값의 10,000 배로 커졌을 때의 전자의 궤도 반지름을 보어의 원자모형을 이용하여 계산하고, 이 상황이 물리적으로 가능한지 설명하라. (전자는 크기가 없는 점입자로 생각한다.)
- (2-2) 중력 법칙을 이용하여 기술하는 지구의 공전운동에 보어의 원자모형을 적용해보자. 보어 반지름에 해당하는 값을 구하고, 궤도 반지름이 태양과 지구 사이 거리인 $1 \text{ AU} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ 가 되는 양자수 N 을 구하여라. 또한, $N + 1$ 상태와 N 상태의 궤도 반지름의 차이를 구하여라. (원자모형의 전기력 대신에 중력, 쿨롱 상수 대신에 중력 상수, 전하량 대신에 질량을 이용하라.)
- (2-3) 수소 원자의 전자가 어느 순간 빛을 흡수하거나 방출하여 궤도운동 속력이 $\frac{1}{2}$ 배로 줄었을 때, 보어의 원자모형을 이용하여 전자의 궤도 반지름이 원래의 몇 배가 되는지 계산하라. 이때 전자가 빛을 흡수하는지 방출하는지 판단하고, 이 빛의 진동수를 구하여라. (빛의 진동수는 수치 계산 없이 물리 상수들로 표현하여도 좋다.)
- (2-4) 지구가 태양 주위를 반지름이 $r = 1 \text{ AU}$ 인 궤도로 원운동을 하다 어느 순간 궤도운동 속력이 $\frac{1}{2}$ 배로 줄었다고 하자. 케플러 법칙에 의하면 지구는 태양을 한 초점으로 하는 타원 궤도로 운동하며, 지구가 태양으로부터 떨어진 거리가 r_1 일 때 공전 속력이 v_1 , 떨어진 거리가 r_2 일 때 공전 속력이 v_2 라고 하면 $r_1 v_1 = r_2 v_2$ 가 성립한다. 이를 이용하여 태양으로부터 원일점과 근일점까지의 거리를 각각 구하고, 타원 궤도운동의 주기를 구하여라. (중력 퍼텐셜 에너지는 전기력에 의한 퍼텐셜 에너지에서 쿨롱 상수 k 대신 중력 상수 G , 전하량 대신 질량을 이용하여 구할 수 있다. 지표면 근처에서의 중력 퍼텐셜 에너지 mgh 는 사용하지 않는다.)
- (2-5) 블랙홀을 중심으로 원운동을 하는 별을 관측하여 블랙홀을 발견하고자 한다. 블랙홀의 질량 M 은 별의 질량 m 에 비해 훨씬 크고, 별의 속력과 공전 주기는 각각 v, T 이다. 이들은 지구로부터 너무 멀어서 별의 궤도운동을 직접 관측할 수는 없지만, 지구에서 관측된 별빛의 진동수가 별의 운동에 따라 변할 것이다. 충분히 긴 시간 동안 관측했을 때, 별빛의 진동수가 시간에 따라 어떻게 변하는지 정량적으로 기술하라. 블랙홀의 존재와 질량을 어떻게 알아낼 수 있는가? (우주의 팽창이나 상대론적 효과는 무시하라. 지구와 블랙홀은 정지해 있고, 지구에서 본 별의 시선 방향은 별의 궤도평면 위에 있다고 가정하라. 빛은 속력이 c 인 음파처럼 다룰 수 있고, 필요하다면 다음 근사를 사용하라.)

$$|x| \ll 1 \text{ 이면 } (1+x)^n \approx 1+nx$$

II. 예시답안

문제 1 볼록 렌즈에 의한 결상

렌즈 방정식 · 흐림원 · 현미경 배율

(1-1) a 의 상: 시작점 $x = 24 \text{ cm}$, 길이 9 cm , 도립 실상 / b 의 상: $x = 24 \text{ cm}$ 에서 시작해 $+x$ 무한대까지 뻗는 실상

두께를 무시한 볼록 렌즈에서 물체 거리 p , 상거리 q , 초점 거리 f 는 렌즈 방정식

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad m = -\frac{q}{p}$$

를 만족한다 (m 은 가로배율, $m < 0$ 이면 도립). 점 A는 $x = -8 \text{ cm}$ 이므로 $p = 8 \text{ cm}$ 이고 $f = 6 \text{ cm}$ 이므로

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{4-3}{24} = \frac{1}{24} \rightarrow q = 24 \text{ cm}, \quad m = -\frac{24}{8} = -3.$$

a y 축 방향 물체이므로 가로배율이 그대로 적용된다. 시작점 A($-8, 0$) 의 상은 ($24, 0$), 끝점 ($-8, 3$) 의 상은 ($24, -9$) 이다. 즉 상은 $x = 24 \text{ cm}$ 에서 시작하여 $-y$ 방향으로 길이 9 cm 이고, $m < 0$ 이므로 **도립**, $q > 0$ 이므로 **실상**이다.

b 광축(x 축) 방향 물체이다. 시작점 A($-8, 0$) 에서 $+x$ 로 2 cm 이므로 끝점은 ($-6, 0$), 즉 **렌즈의 초점 F** 위이다. 물체 위의 점 $x = -p$ ($6 \leq p \leq 8$) 의 상은

$$q(p) = \frac{fp}{p-f} = \frac{6p}{p-6} \rightarrow q(8) = 24, \quad q(6) \rightarrow \infty$$

이므로, p 가 8 에서 6 으로 줄어든 때 상은 $x = 24$ 에서 $+x$ 방향으로 무한히 멀어진다. 즉 b 의 상은 $x = 24 \text{ cm}$ 에서 시작해 $+x$ 무한대까지 뻗는 **실상**이며(모든 점에서 $q > 0$), 물체가 놓인 방향과 같은 $+x$ 방향으로 늘어난다. 유한한 “상의 길이”를 말할 수 없다.

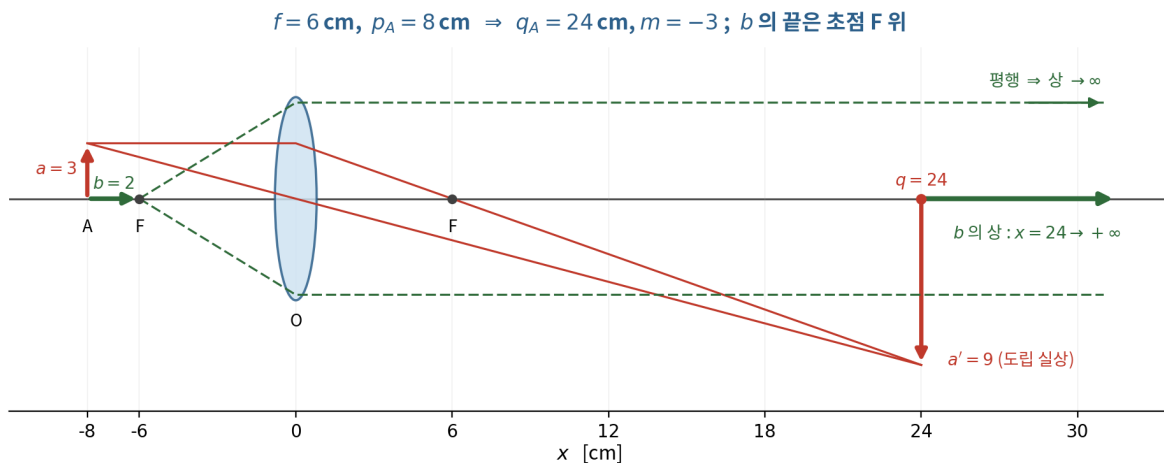
a : ($24, 0$) $\rightarrow$ ($24, -9$) (9 cm , 도립 실상)

b : $x = 24 \text{ cm} \rightarrow +\infty$ (실상, 길이 발산)

세로배율을 그대로 쓰면 안 되는 이유 $-q = fp/(p-f)$ 를 미분하면

$$\frac{dq}{dp} = -\frac{f^2}{(p-f)^2} = -m^2, \quad \text{점 A에서 } -m^2 = -9$$

이므로 세로배율 $-m^2$ 는 물체의 길이가 매우 짧아 $\Delta p \rightarrow 0$ 일 때 한 점 주위에서만 유효한 국소적 배율이다. 이 문제의 b 는 길이가 2 cm 로 짧지 않을 뿐 아니라 한쪽 끝이 정확히 초점에 걸려 상거리가 발산하므로, $|-m^2| \times 2 = 18 \text{ cm}$ 와 같은 유한한 값으로 답할 수 없다.



예시 작도 $-a$ 의 상은 ($24, 0$) 에서 시작하는 길이 9 cm 의 도립 실상, b 의 끝(초점 F)에서 나온 광선은 렌즈를 지난 뒤 평행이 되어 상이 무한대로 간다

(1-2) $x_{\max} = -\frac{fbD}{D(b-f) + fl}$, 즉 점 A에서 $\Delta a_{\max} = \frac{f^2 lb}{(b-f)[D(b-f) + fl]}$ 만큼 $+x$ 로 이동한 곳

① 점 A에서의 물체 거리 — 스크린이 렌즈에서 b 만큼 떨어져 있고 그곳에 또렷한 상이 맺히므로 $1/f = 1/a + 1/b$ 에서

$$a = \frac{fb}{b-f}.$$

② 물체를 $+x$ 로 옮기면 상은 스크린 뒤로 간다 — 물체가 렌즈에 가까워져 물체 거리가 줄면 렌즈 방정식에 의해 상거리는 늘어난다. 새 상거리를 $b' = b + \Delta b$ 라 하자.

③ 흐림원(원형 상)의 지름 — 물체가 점광원이므로 렌즈를 지름 D 로 가득 채운 광다발이 렌즈에서 b' 떨어진 한 점으로 수렴한다. 이 원뿔을 렌즈에서 거리 b 인 스크린이 자르므로, 닳은꼴 삼각형에서 잘린 원의 지름은

$$d_{\text{blur}} = D \cdot \frac{b' - b}{b'} = D \cdot \frac{\Delta b}{b + \Delta b}.$$

또렷하게 보이는 한계는 $d_{\text{blur}} = l$ 이므로

$$D\Delta b = l(b + \Delta b) \rightarrow \Delta b = \frac{lb}{D-l}, \quad b' = b + \Delta b = \frac{bD}{D-l}.$$

($D > l$ 이 필요한 이유가 여기에 있다. 렌즈 지름보다 큰 흐림원은 만들어질 수 없으므로 $l \geq D$ 이면 상은 언제나 또렷하게 보인다.)

④ 상거리를 물체 거리로 되돌리기 — 새 물체 거리 a' 는 렌즈 방정식에서

$$a' = \frac{fb'}{b' - f} = \frac{f \cdot bD/(D-l)}{bD/(D-l) - f} = \frac{fbD}{bD - f(D-l)} = \frac{fbD}{D(b-f) + fl}.$$

물체는 렌즈의 $-x$ 쪽에 있으므로 그 좌표는 $x = -a'$ 이다.

$$x_{\max} = -\frac{fbD}{D(b-f) + fl}, \quad \Delta a_{\max} = a - a' = \frac{f^2 lb}{(b-f)[D(b-f) + fl]}$$

$l \ll D$ 인 실제 상황에서는 $D(b-f) \gg fl$ 이므로 $\Delta a_{\max} \approx \frac{f^2 lb}{D(b-f)^2}$ 로 간단해진다.

경향 해석

- 눈의 분해 한계 l 이 클수록 $\Delta a_{\max}$ 가 커진다. 흐림을 관대하게 판정할수록 또렷하게 보이는 물체 위치의 범위(피사계 심도)가 넓어진다.
- 렌즈 지름 D 가 클수록 $\Delta a_{\max}$ 가 작아진다. 같은 상면 어긋남이라도 광다발이 굵으면 흐림원이 커지기 때문이다.
- $b \rightarrow f$ (물체가 아주 멀리 있는 경우)이면 $\Delta a_{\max} \rightarrow \infty$ 로 발산한다. 먼 물체는 거리가 크게 달라져도 상의 위치가 거의 변하지 않는다.

(1-3) $M = m_o \times m_e = \frac{L - f_e}{f_o} \times \frac{f_e + D - L_e}{f_e} = \frac{(L - f_e)(D - L_e + f_e)}{f_o f_e}$

[그림 3]에서 L 은 대물 렌즈와 접안 렌즈 사이의 거리, L_e 는 접안 렌즈에서 눈까지의 거리, D 는 최종 상 A'' 에서 눈까지의 거리이다.

① 대물 렌즈의 배율 — 물체 AB가 초점 거리 f_o 바로 바깥에 있으므로 물체 거리는 $p_o \approx f_o$ 이다. 첫 번째 상 A'B' 는 접안 렌즈의 초점 F_e 자리, 즉 접안 렌즈에서 f_e 앞에 맺히므로 대물 렌즈로부터의 상거리는

$$q_o = L - f_e, \quad \text{따라서} \quad m_o = \frac{q_o}{p_o} = \frac{L - f_e}{f_o}.$$

② 접안 렌즈의 배율 — 중간 상 A'B' 가 초점 거리 f_e 바로 안쪽에 놓이므로 접안 렌즈는 같은 쪽에 확대된 허상 A'' 를 만든다. 최종 상은 눈에서 D , 눈은 접안 렌즈에서 L_e 떨어져 있으므로 접안 렌즈에서 최종 상까지의 거리는

$$Q = D - L_e$$

이다. 물체 거리를 p_e 라 하면 허상이므로 $1/p_e - 1/Q = 1/f_e$, 즉 $p_e = f_e Q / (f_e + Q)$ 이고

$$m_e = \frac{Q}{p_e} = Q \cdot \frac{f_e + Q}{f_e Q} = 1 + \frac{Q}{f_e} = 1 + \frac{D - L_e}{f_e} = \frac{f_e + D - L_e}{f_e}.$$

③ 전체 배율 — 문제의 단서대로 두 배율의 곱이므로

$$M = \frac{(L - f_e)(D - L_e + f_e)}{f_o f_e}$$

최종 상 A'' 는 대물 렌즈에서 한 번 뒤집히고 접안 렌즈에서는 방향이 유지되므로 **도립 허상**이다.

- $L \gg f_e, D - L_e \gg f_e$ 인 보통의 현미경에서는 $M \approx \frac{L(D - L_e)}{f_o f_e}$ 로 간단해진다. 두 렌즈의 초점 거리가 짧을수록, 경통이 길수록 배율이 커진다.
- 눈의 위치 L_e 는 접안 렌즈가 만드는 허상까지의 거리 $Q = D - L_e$ 를 통해서만 들어온다. 눈을 접안 렌즈에 바짝 붙이면($L_e \rightarrow 0$) $Q \rightarrow D$ 가 되어 배율이 최대가 된다.
- 위 두 극한을 함께 취하면, 즉 $L_e \rightarrow 0$ 이면 교과서에서 흔히 쓰는 근사식 $M \approx \frac{LD}{f_o f_e}$ 로 환원된다.

(1-4) 물체와 점 A 사이의 거리 ≈ 0.7 cm

① **두 렌즈의 초점 거리** — [그림 4]에서 물체가 A에 있을 때 첫 렌즈는 $a = 60$ cm의 물체를 $b = 20$ cm에, 둘째 렌즈는 $c = 40$ cm의 물체를 $d = 10$ cm(스크린)에 맺는다.

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{60} + \frac{1}{20} = \frac{1}{15} \rightarrow f_1 = 15 \text{ cm}, \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{40} + \frac{1}{10} = \frac{1}{8} \rightarrow f_2 = 8 \text{ cm}.$$

두 렌즈 사이의 거리는 $b + c = 60$ cm이다.

② **물체를 s 만큼 더 멀리 놓았을 때의 상면 이동** — 물체가 $-x$ 쪽 무한대에서 A로 다가오므로 물체 거리는 $a_1 = 60 + s$ ($s > 0$) 이다. 렌즈 방정식 $q = fa/(a - f)$ 를 미분하면 $|dq/da| = f^2/(a - f)^2$ 이고, 이는 주어진 근사 $1/(1 - \alpha) \approx 1 + \alpha$ 로 s 에 대해 1차까지 전개한 것과 같다. 첫 렌즈에서

$$\left| \frac{\Delta b_1}{\Delta a_1} \right| = \frac{f_1^2}{(a_1 - f_1)^2} = \frac{15^2}{45^2} = \frac{1}{9} \rightarrow b_1 = 20 - \frac{s}{9}.$$

첫 상이 렌즈에 가까워진 만큼 둘째 렌즈의 물체 거리는 늘어나므로 $a_2 = 60 - b_1 = 40 + s/9$ 이고,

$$\left| \frac{\Delta b_2}{\Delta a_2} \right| = \frac{f_2^2}{(a_2 - f_2)^2} = \frac{8^2}{32^2} = \frac{1}{16} \rightarrow \Delta b_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{s}{9} = \frac{s}{144}.$$

즉 최종 상은 스크린보다 $\Delta b_2 = s/144$ 만큼 앞(둘째 렌즈 쪽)에 맺힌다.

③ **둘째 렌즈에 도달하는 광다발의 지름** — 흐림원의 크기는 상면 어긋남뿐 아니라 광다발의 굵기로 정해진다. 첫 렌즈를 지름 $W = 8$ cm로 가득 채운 광다발은 $b_1 = 20$ cm에서 한 점에 모였다가 다시 퍼져 $c = 40$ cm를 더 진행한 뒤 둘째 렌즈에 닿으므로, 닻은꼴에서

$$W_2 = W \cdot \frac{c}{b_1} = 8 \times \frac{40}{20} = 16 \text{ cm}$$

이다. “첫 번째 렌즈를 통과한 모든 광선이 두 번째 렌즈를 통과한다”는 단서가 이 광다발이 잘리지 않음을 보장한다.

④ **스크린 위 흐림원의 지름** — 둘째 렌즈에서 지름 W_2 로 출발해 $b_2 \approx 10$ cm 앞의 상점으로 수렴한 광다발이 그 뒤 Δb_2 만큼 더 퍼져 스크린에 닿으므로

$$d_{\text{blur}} = W_2 \cdot \frac{\Delta b_2}{b_2} = 16 \times \frac{s/144}{10} = \frac{s}{90}.$$

⑤ **수치 대입** — $d_{\text{blur}} = l = 8 \times 10^{-3}$ cm에서

$$s = 90l = 90 \times 8 \times 10^{-3} = 0.72 \text{ cm} \rightarrow s \approx 0.7 \text{ cm}$$

근사를 쓰지 않고 렌즈 방정식을 그대로 풀어도 $s = 0.73$ cm로, 유효 숫자 첫째 자리는 같다. 광다발이 두 렌즈를 거치며 $1/9 \times 1/16 = 1/144$ 로 크게 축소된 상면 이동이 지름 16 cm의 굵은 광다발을 통해 다시 확대되어, 결국 1 cm에 못 미치는 물체 이동만으로도 눈이 흐림을 알아채게 된다.

문제 2 원자와 천체의 궤도운동 대응

보어 모형 · 대응 원리 · 케플러 법칙 · 도플러 효과

(2-1) $r = 5.3 \times 10^{-19} \text{ m}$ — 물리적으로 불가능하다

보어의 원자모형은 (i) 쿨롱 힘이 구심력, (ii) 각운동량 양자화 $m_e v r = N \hbar$ 두 조건으로 정해진다. 두 전하를 각각 q_1, q_2 라 하면

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{k q_1 q_2}{r^2}, \quad m_e v r = N \hbar \rightarrow r_N = \frac{N^2 \hbar^2}{m_e k q_1 q_2}.$$

즉 궤도 반지름은 **두 전하의 곱에 반비례**한다. 전자와 양성자의 전하량이 각각 10^4 배가 되면 곱은 $(10^4)^2 = 10^8$ 배가 되므로 바닥상태($N = 1$) 반지름은

$$r = \frac{a_0}{10^8} = \frac{5.3 \times 10^{-11}}{10^8} = 5.3 \times 10^{-19} \text{ m}$$

물리적 판정 — 이 값은 다음 두 가지 이유로 성립할 수 없다.

- **양성자 내부** — $r_p/r = (1.0 \times 10^{-15})/(5.3 \times 10^{-19}) \approx 2 \times 10^3$ 이므로 전자 궤도가 양성자 반지름보다 약 2000 배나 작다. 전자가 양성자 내부 깊숙이 들어가게 되어, 양성자를 점전하로 보는 쿨롱 법칙과 보어 모형의 전제 자체가 무너진다.
- **광속 초과** — 궤도 속력은 $v_N = k q_1 q_2 / (N \hbar)$ 로 전하 곱에 비례하므로 실제 값의 10^8 배가 된다. 수소의 바닥상태 속력이 $2.2 \times 10^6 \text{ m/s}$ 이므로 $v \approx 2 \times 10^{14} \text{ m/s} \approx 7 \times 10^5 c$ 로 광속을 크게 넘어선다.

따라서 그러한 원자는 존재할 수 없다.

(2-2) $r_1 \approx 2 \times 10^{-138} \text{ m}$, $N \approx 3 \times 10^{74}$, $\Delta r \approx 1 \times 10^{-63} \text{ m}$

① **중력판 보어 반지름** — 문제의 지시대로 $ke^2 \rightarrow GM_\odot M_\oplus$, 전자 질량 $\rightarrow$ 지구 질량 $M_\oplus$ 으로 바꾸면

$$\frac{M_\oplus v^2}{r} = \frac{GM_\odot M_\oplus}{r^2}, \quad M_\oplus v r = N \hbar \rightarrow r_N = \frac{N^2 \hbar^2}{M_\oplus \cdot GM_\odot M_\oplus} = \frac{N^2 \hbar^2}{GM_\odot M_\oplus^2}.$$

$\hbar = h/(2\pi) = 6.6 \times 10^{-34}/6.28 = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 이므로 $N = 1$ 에서

$$r_1 = \frac{(1.05 \times 10^{-34})^2}{(6.7 \times 10^{-11})(2.0 \times 10^{30})(6.0 \times 10^{24})^2} = \frac{1.1 \times 10^{-68}}{4.8 \times 10^{69}} \approx 2.3 \times 10^{-138} \text{ m}.$$

② **1 AU에 해당하는 양자수** — $r_N = N^2 r_1$ 이므로

$$N = \sqrt{\frac{1.5 \times 10^{11}}{2.3 \times 10^{-138}}} = \sqrt{6.6 \times 10^{148}} \approx 2.6 \times 10^{74}.$$

③ **이웃한 두 궤도의 반지름 차이**

$$\begin{aligned} \Delta r &= r_{N+1} - r_N = r_1 [(N+1)^2 - N^2] = r_1 (2N+1) \approx 2r_1 N = 2 \frac{1 \text{ AU}}{N} \\ &= \frac{2 \times 1.5 \times 10^{11}}{2.6 \times 10^{74}} \approx 1.2 \times 10^{-63} \text{ m}. \end{aligned}$$

$$r_1 \approx 2 \times 10^{-138} \text{ m}, \quad N \approx 3 \times 10^{74}, \quad \Delta r \approx 1 \times 10^{-63} \text{ m}$$

의미 — 상대적인 궤도 간격은

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{2N+1}{N^2} \approx \frac{2}{N} \approx 8 \times 10^{-75}$$

로, 원자핵 크기(10^{-15} m)와도 비교할 수 없이 작다. 양자수가 이렇게 클 때에는 이웃 준위 사이의 차이를 어떤 방법으로도 분해할 수 없으므로 궤도 반지름과 에너지는 사실상 연속적으로 보이고, 결과적으로 양자역학의 예측이 고전역학의 예측과 일치한다. 이것이 보어의 **대응 원리**이다.

(2-3) 궤도 반지름은 원래의 4 배가 되고, 전자는 빛을 흡수하며, 그 진동수는 $\nu = \frac{3m_e k^2 e^4}{16\pi\hbar^3 N^2} = \frac{3\pi^2 m_e k^2 e^4}{2h^3 N^2}$

① 반지름 변화 — 보어 모형의 두 조건에서

$$v_N = \frac{ke^2}{N\hbar} \propto \frac{1}{N}, \quad r_N = \frac{N^2\hbar^2}{m_e ke^2} \propto N^2.$$

속력이 1/2 배가 되려면 $N \rightarrow 2N$ 이어야 하고, 그러면 반지름은

$$r_{2N} = (2N)^2 r_1 = 4r_N \quad (4\text{배로 커진다})$$

준위가 올라갔으므로 전자는 빛을 흡수한다. (원궤도 조건에서 $v^2 = ke^2/(m_e r)$, 즉 $r \propto 1/v^2$ 이므로 속력이 절반이면 반지름이 4 배라는 것과도 일치한다.)

② 흡수하는 빛의 진동수 — 보어 에너지 준위는

$$E_N = \frac{1}{2} m_e v_N^2 - \frac{ke^2}{r_N} = -\frac{m_e k^2 e^4}{2\hbar^2 N^2}$$

이므로 $N \rightarrow 2N$ 전이에서

$$\Delta E = E_{2N} - E_N = \frac{m_e k^2 e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{N^2} - \frac{1}{4N^2} \right) = \frac{3m_e k^2 e^4}{8\hbar^2 N^2} = \frac{3}{4} |E_N|.$$

$\nu = \Delta E/h$ 이고 $h = 2\pi\hbar$ 이므로

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{3m_e k^2 e^4}{16\pi\hbar^3 N^2} = \frac{3\pi^2 m_e k^2 e^4}{2h^3 N^2}$$

바닥상태에서 출발하는 경우($N=1$)에는 $|E_1| \approx 13.6 \text{ eV}$ 이므로 $\Delta E = 10.2 \text{ eV}$, $\nu \approx 2.5 \times 10^{15} \text{ Hz}$ 로 자외선 영역이다.

(2-4) 원일점 = 1 AU, 근일점 = $\frac{1}{7} \text{ AU}$, 주기 $T = \left(\frac{4}{7}\right)^{3/2} \text{ 년} \approx 0.4 \text{ 년} (\approx 1.4 \times 10^7 \text{ s})$

① 처음 원궤도의 속력 — 반지름 $r_1 = 1 \text{ AU}$ 의 원운동에서 중력이 구심력이므로

$$\frac{GM_\odot M_\oplus}{r_1^2} = \frac{M_\oplus v_c^2}{r_1} \rightarrow v_c^2 = \frac{GM_\odot}{r_1}.$$

② 속력이 줄어든 지점은 새 타원의 정점 — 원궤도에서는 속도가 항상 반지름에 수직이다. 속력만 $v_1 = v_c/2$ 로 줄었으므로 그 순간에도 속도는 반지름에 수직이고, 이런 점이 바로 타원 궤도의 정점(원일점 또는 근일점)이다. 다른 쪽 정점의 거리를 r_2 , 속력을 v_2 라 하자.

③ 각운동량 보존과 에너지 보존 — 문제에서 준 관계 $r_1 v_1 = r_2 v_2$ 와 역학적 에너지 보존

$$\frac{1}{2} v_1^2 - \frac{GM_\odot}{r_1} = \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{GM_\odot}{r_2}$$

에 $v_2 = r_1 v_1 / r_2$ 를 대입하면

$$\frac{1}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) = GM_\odot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{GM_\odot (r_2 - r_1)}{r_1 r_2}.$$

좌변을 $\frac{1}{2} v_1^2 \frac{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}{r_2^2}$ 로 인수분해하고 $r_2 \neq r_1$ 이므로 $(r_2 - r_1)$ 을 약분하면

$$\frac{1}{2} v_1^2 r_1 (r_1 + r_2) = GM_\odot r_2.$$

여기에 $v_1 = v_c/2$, $GM_\odot = v_c^2 r_1$ 을 넣으면

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{v_c^2}{4} \cdot r_1 (r_1 + r_2) = v_c^2 r_1 r_2 \rightarrow r_1 + r_2 = 8r_2 \rightarrow r_2 = \frac{r_1}{7}.$$

④ 원일점·근일점의 판정 — $v_1 = v_c/2$ 이고 $v_2 = 7v_1 > v_1$ 이므로, 속력이 줄어드는 지점 r_1 이 태양에서 가장 먼 원일점, r_2 가 가장 가까운 근일점이다.

$$r_{\text{원일점}} = r_1 = 1 \text{ AU}, \quad r_{\text{근일점}} = r_2 = \frac{1}{7} \text{ AU} \approx 0.1 \text{ AU}.$$

⑤ 긴 반지름과 주기 — 타원의 긴 반지름(반장축)은 두 정점 거리의 산술평균이므로

$$a = \frac{r_{\text{원일점}} + r_{\text{근일점}}}{2} = \frac{1 + 1/7}{2} \text{ AU} = \frac{4}{7} \text{ AU} = \frac{4}{7} \times 1.5 \times 10^{11} = 8.6 \times 10^{10} \text{ m}.$$

케플러 제3법칙 $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} a^3$, 즉 $T = 2\pi\sqrt{a^3/(GM_\odot)}$ 에 대입하면

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(8.6 \times 10^{10})^3}{(6.7 \times 10^{-11})(2.0 \times 10^{30})}} = 2\pi\sqrt{4.7 \times 10^{12}} = 1.4 \times 10^7 \text{ s}.$$

같은 결과를 처음의 원 궤도와 비교해서도 얻을 수 있다. 반지름 1 AU의 원 궤도 주기가 $T_0 = 1$ 년이고 케플러 제3법칙은 $T \propto a^{3/2}$ 이므로

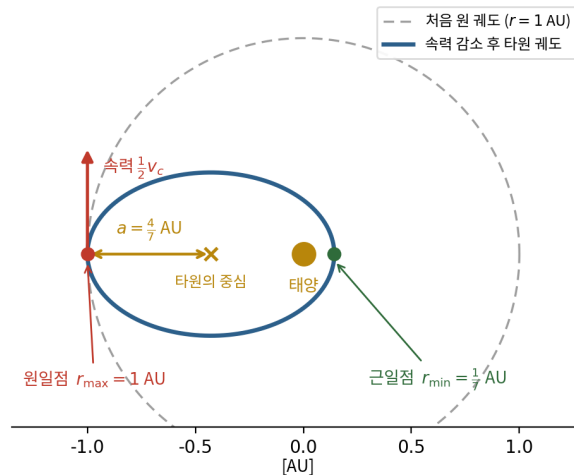
$$T = T_0 \left(\frac{a}{1 \text{ AU}} \right)^{3/2} = \left(\frac{4}{7} \right)^{3/2} \text{ 년} = 0.43 \text{ 년} \approx 158 \text{ 일}.$$

$$r_{\text{원일점}} = 1 \text{ AU}, \quad r_{\text{근일점}} = \frac{1}{7} \text{ AU}, \quad a = \frac{4}{7} \text{ AU}$$

$$T = \left(\frac{4}{7} \right)^{3/2} \text{ 년} \approx 0.4 \text{ 년} \quad (\approx 1.4 \times 10^7 \text{ s})$$

의미 — 속력이 절반으로 줄면 단위 질량당 역학적 에너지가 $E = \frac{1}{2}(v_c/2)^2 - v_c^2 = -\frac{7}{8}v_c^2$ 로 원 궤도의 $-v_c^2/2$ 보다 더 낮아지고, $a = -GM_\odot/(2E) = 4r_1/7$ 로 반장축이 원래보다 작아진다. 반장축이 작아진 만큼 주기도 1 년에서 약 0.43 년으로 짧아진다. (참고로 이심률은 $e = (r_1 - r_2)/(r_1 + r_2) = 3/4$, 짧은 반지름은 $b = a\sqrt{1-e^2} = 1/\sqrt{7}$ AU이다.)

$$a = \frac{r_{\text{max}} + r_{\text{min}}}{2} = \frac{4}{7} \text{ AU} \Rightarrow T = \left(\frac{4}{7} \right)^{3/2} \text{ 년} \approx 0.43 \text{ 년} (1.4 \times 10^7 \text{ s})$$



예시 작도 — 원일점에서 속력이 절반이 되어 만들어지는 타원($a = 4/7$ AU)과 그 공전 주기

(2-5) 별빛의 진동수는 공전 주기 T 로 정현파처럼 진동하며, 그 진폭과 주기로부터 $M = \frac{v^3 T}{2\pi G}$ 를 얻는다

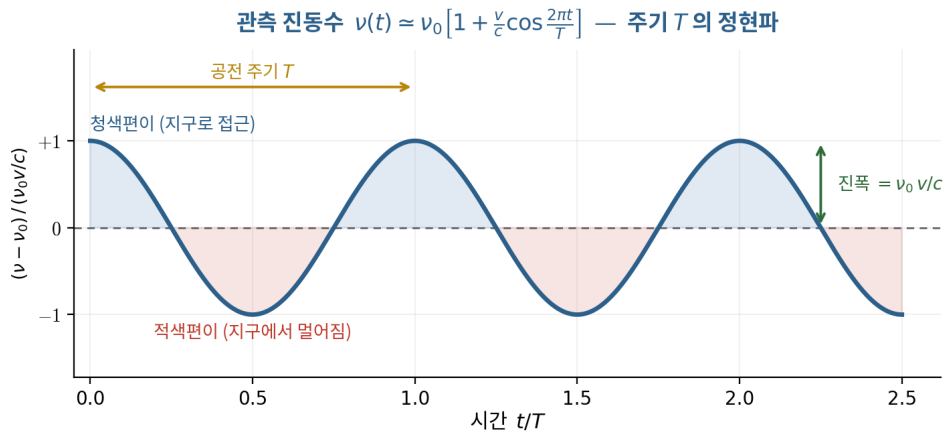
① 진동수의 시간 변화 — 별은 블랙홀을 중심으로 반지름 R , 주기 T 의 등속 원운동을 한다. 시선 방향이 궤도면 안에 있으므로, 지구를 향한 속도 성분(시선 속도)은 한 주기 동안 $+v$ 에서 $-v$ 까지 변한다.

$$v_{\text{시선}}(t) = v \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$

문제의 지시대로 빛을 속력 c 인 음파처럼 다루면, 파원(별)이 움직이고 관측자(지구)가 정지한 경우의 도플러 효과 공식이 그대로 적용되어 관측 진동수는 $\nu = \nu_0 / (1 - v_{\text{시선}}/c)$ 이다. 여기서 ν_0 는 별이 정지해 있을 때의 진동수이다. $v \ll c$ 이므로 주어진 근사 $(1+x)^n \approx 1+nx$ 를 $x = -v_{\text{시선}}/c$, $n = -1$ 로 적용하면

$$\nu_{\text{관측}}(t) \approx \nu_0 \left(1 + \frac{v_{\text{시선}}(t)}{c}\right) = \nu_0 \left[1 + \frac{v}{c} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right].$$

따라서 관측되는 진동수는 원래 진동수 ν_0 를 중심으로 진폭 $\nu_0 v/c$, 주기 T 인 정현파로 진동한다. 별이 지구 쪽으로 다가오는 반주기 동안은 진동수가 높아지고(청색편이), 멀어지는 반주기 동안은 낮아진다(적색편이).



예시 작도 — 관측 진동수는 ν_0 를 중심으로 진폭 $\nu_0 v/c$, 주기 T 로 진동한다

② 중심 천체의 질량 — 별의 속력 v 와 공전 주기 T 는 주어져 있으며, 위 진동수 곡선에서도 이 두 값을 직접 읽어낼 수 있다.

• 진동의 주기 → 별의 공전 주기 T

• 진동의 진폭 $(\Delta\nu)_{\text{max}} = \nu_0 v/c \rightarrow$ 별의 공전 속력 $v = c(\Delta\nu)_{\text{max}}/\nu_0$

별의 원운동에서 중력이 구심력이고, 원둘레와 주기의 관계가 $v = 2\pi R/T$ 이므로

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \rightarrow GM = v^2 R, \quad R = \frac{vT}{2\pi}.$$

두 식에서 관측할 수 없는 R 을 소거하면

$$M = \frac{v^2 R}{G} = \frac{v^3 T}{2\pi G}, \quad R = \frac{vT}{2\pi}$$

③ 블랙홀이라는 판정 — 이렇게 구한 중심 천체의 질량 M 이 태양 질량의 수십 배 이상으로 매우 큰데도 그 자리에서 어떤 빛도 관측되지 않고, 게다가 그 질량이 반지름 $R = vT/(2\pi)$ 보다 작은 좁은 영역 안에 모두 들어 있어야 한다면, 이를 보통의 별이나 별의 집단으로는 설명할 수 없다. 즉 빛을 내지 않으면서 그만큼 질량이 극히 좁은 영역에 밀집한 천체 — 블랙홀의 존재를 결론지을 수 있다.